

AKM 204-BÖLÜM 6-UYGULAMA SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1. Fıskiye tipi bir dirsek yatay bir borudan akmakta olan suyu $\Theta=45^\circ$ açıyla yukarı doğru hızlandırarak saptırmak için kullanılmaktadır. Dirsek suyu atmosfere boşaltmaktadır. Dirseğin girişteki kesiti 150 cm^2 iken çıkıştaki kesiti 25 cm^2 'dir. Giriş ve çıkış kesitlerinin merkezleri arasındaki seviye farkı ise 40 cm 'dir. İçerisindeki su ile birlikte dirseğin kütlesi 50 kg 'dır. Bu durumda dirseği yerinde tutabilmek için gerekli kuvveti bulunuz. Giriş ve çıkış için momentum akısı düzeltme faktörü aynı olup 1.03 alınabilir. ($\rho_{\text{su}}=1000 \text{ kg/m}^3$)

Kabuller:

- Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.
- Sürtünme etkileri basınç düşüşü hesabında ihmal edilmiştir (dolayısıyla Bernoulli denklemi kullanılabilir).
- Dirseğin ağırlığı ve içerisindeki su hesaba katılmıştır.
- Su, atmosfere boşalmaktadır, dolayısıyla çıkıştaki etkin basınç sıfırdır.
- Kontrol hacminin girişinde ve çıkışında momentum akısı düzeltme faktörü $\beta=1.03$ alınmıştır.

Çözüm:

Dirsek ve içerisindeki suyun ağırlığı:

$$W = mg = (50 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5 \text{ N} = 0.4905 \text{ kN}$$

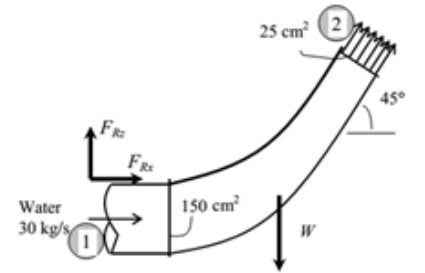
Kontrol hacmi olarak dirsek alınmıştır ve giriş ve çıkış sırasıyla 1 ve 2 noktaları olarak adlandırılmıştır. Yatay eksen x eksen olarak (akış yönü pozitif x yönündedir) ve dikey eksen z eksen olarak seçilmiştir. 1 giriş, 1 çıkışlı bu daimi sistemde süreklilik denklemi:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} = 30 \text{ kg/s}$$

$$\dot{m} = \rho AV$$

$$V_1 = \frac{\dot{m}}{\rho A_1} = \frac{30 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(0.0150 \text{ m}^2)} = 2 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{\dot{m}}{\rho A_2} = \frac{30 \text{ kg/s}}{(1000 \text{ kg/m}^3)(0.0025 \text{ m}^2)} = 12 \text{ m/s}$$



Giriş kesit alanının merkezi referans seviyesi olarak alınmıştır ($z_1=0$). $P_2=P_{\text{atm}}$

Bernoulli denklemi:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 \rightarrow P_1 - P_2 = \rho g \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 - z_1 \right) \rightarrow P_{1,\text{etkin}} = \rho g \left(\frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + z_2 \right)$$

$$P_{1,\text{etkin}} = (1000 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2) \left(\frac{(12 \text{ m/s})^2 - (2 \text{ m/s})^2}{2(9.81 \text{ m/s}^2)} + 0.4 \text{ m} \right) = 73.9 \text{ kPa}$$

Daimi akış için momentum denklemi:

$$\sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}$$

Dirseği yerinde tutmak için gerekli kuvvetin x ve z bileşenleri olan F_{RX} ve F_{RZ} kuvvetlerinin her ikisinin de pozitif yönlü olduğunu kabul edelim. Kontrol yüzeyinin tamamına atmosfer basıncı etkidiği için etkin basınç kullanılabilir. x ve z eksenleri boyunca momentum denklemleri yazılırsa:

$$F_{RX} + P_{1,etkin} A_1 = \beta \dot{m} V_2 \cos \theta - \beta \dot{m} V_1$$

$$F_{RZ} - W = \beta \dot{m} V_2 \sin \theta$$

$$F_{RX} = \beta \dot{m} (V_2 \cos \theta - V_1) - P_{1,etkin} A_1$$

$$= 1.03(30 \text{ kg/s})(12 \cos 45^\circ - 2) \text{ m/s} - (73.9 \text{ kN/m}^2)(0.0150 \text{ m}^2) = -0.908 \text{ kN}$$

$$F_{RZ} = \beta \dot{m} V_2 \sin \theta + W = 1.03(30 \text{ kg/s})(12 \sin 45^\circ \text{ m/s}) + 0.4905 \text{ kN} = 0.753 \text{ kN}$$

$$F_R = \sqrt{F_{RX}^2 + F_{RZ}^2} = \sqrt{(-0.908)^2 + (0.753)^2} = 1.18 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_{RZ}}{F_{RX}} = \tan^{-1} \frac{0.753}{-0.908} = -39.7^\circ$$

(F_{RX} 'in negatif işarete sahip olması kabul edilen yönün tersi olduğunu gösteriyor.)

2. İtfaiye görevlileri hortumun ucundaki fiskiyeği tutarak bir yangını söndürmeye çalışmaktadırlar. Fiskiyeğin çıkış çapı 8 cm ve suyun hacimsel debisi $12 \text{ m}^3/\text{dakika}$ olduğuna göre,

a) Suyun çıkıştaki ortalama hızını,

b) İtfaiyecilerin fiskiyeği tutabilmeleri için uygulamaları gereken yatay kuvveti belirleyiniz.

$$\rho_{su} = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Kabuller:

i. Akış daimi ve sıkıştırılmazdır.

ii. Su jeti atmosfere açıktır, dolayısıyla su jetinin basıncı atmosfer basıncına eşittir ve tüm yüzeylere etkidiği için hesaba katılmasına gerek yoktur.

iii. Yatay direnç kuvveti belirleneceği için yerçekimi etkisi ve dikey kuvvetler gözardı edilmiştir.

iv. Jet akışı üniforma yakındır dolayısıyla momentum akısı düzeltme faktörü $\beta=1$ alınabilir.

Çözüm:

a) Hortumun yatay kısmı ve nozul, suyun kontrol hacmine dikey doğrultuda girip yatay olarak çıktığı bir sistem olarak alınıp (bu durumda girişteki basınç kuvveti ve momentum akısı dikey doğrultudadır ve yatay doğrultudaki kuvvet dengesine hiçbir etkisi yoktur), giriş 1, çıkış ise 2 noktası olarak adlandırılmıştır. Ayrıca yatay eksen x eksenidir (suyun akış yönü pozitif yön olarak alınmıştır).

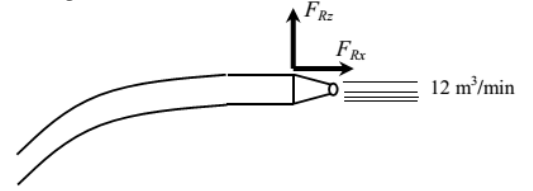
Ortalama çıkış hızı ve kütleli debi:

$$V = \frac{\dot{v}}{A} = \frac{\dot{v}}{\pi D^2 / 4} = \frac{12 \text{ m}^3 / \text{dakika}}{\pi (0.08 \text{ m})^2 / 4} = 2387 \text{ m} / \text{dakika} = \frac{2387 \text{ m} / \text{dakika}}{60 \text{ saniye} / \text{dakika}} = 39.79 \text{ m} / \text{s} \cong 39.8 \text{ m} / \text{s}$$

$$\dot{m} = \rho \dot{v} = (1000 \text{ kg} / \text{m}^3)(12 \text{ m}^3 / \text{dakika}) = 12000 \text{ kg} / \text{dakika} = 200 \text{ kg} / \text{s}$$

b) Daimi akış için momentum denklemi:

$$\sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}$$



İtfaiyecilerin fiskiye için tutabilmeleri için uygulamaları gereken yatay kuvvet F_{RX} olsun ve bu kuvvetin pozitif x yönünde olduğu kabul edilsin.

$$F_{RX} = \dot{m} V_e - 0 = \dot{m} V = (200 \text{ kg} / \text{s})(39.79 \text{ m} / \text{s}) = 7958 \text{ N}$$

Bu durumda itfaiyecinin 7958N'luk bir kuvvete dayanıklı olması gerekmektedir. 7958N'luk bir kuvvet 810 kg'lık bir ağırlığa eşittir ve tek bir kişi bunu tek başına kaldıramaz. Bu da bize yüksek debili akışlarda hortumu neden birkaç itfaiyecinin tuttuğunu açıklıyor.

3. Yüksüz kütlesi 10000 kg olan bir helikopter deniz seviyesinde yüklü olarak havalanmaktadır. Kanatlar yüksüz halde 400 devir/dakika hızla dönmektedir. Helikopterin üzerindeki yatay kanatlar, dönme hızları (devir/dakika) ile orantılı olan bir ortalama hızla 15 m çapındaki bir hava kütesini aşağıya doğru itmektedir. Helikopter 15000 kg'lık bir yük olarak yavaşça havalanmaya başlamaktadır. **(a)** Yüksüz halde havalanırken helikopterin aşağıya doğru oluşturduğu hava akımının hacimsel debisini ve bu halde helikopterin harcadığı gücü ve **(b)** helikopterin 15000 kg'lık yük ile havalanabilmesi için kanatlarının hangi hızda (devir/dakika olarak) dönmesi gerektiğini ve bu halde helikopterin harcadığı gücü hesaplayınız. Atmosfer şartlarındaki havanın yoğunluğu $1.18 \text{ kg} / \text{m}^3$ alınabilir. Havanın kanatlara, yukarıdan geniş bir alandan ve ihmal edilebilecek kadar düşük bir hızla yaklaşarak taban alanı kanatların taradığı alana eşit olan hayali bir silindirden üniform hızla aşağıya doğru itildiğini kabul edebilirsiniz.

Kabuller:

i. Hava akışı daimi ve sıkıştırılmazdır.

ii. Hava, kanatları üniform bir hızla atmosferik basınçta terk etmektedir.

iii. Hava, kanatlara yukarıdan geniş bir alandan atmosferik basınçta ihmal edilebilir bir hızla yaklaşmaktadır.

iv. Sürtünme etkileri ihmal edilebilir ve sonuç olarak giren tüm mekanik enerji havanın kinetik enerjisine dönüştürülür (sürtünme etkileri yoluyla ısı enerjisine dönüşüm yok).

v. Yükseklikten kaynaklanan hava basıncındaki değişim düşük hava yoğunluğundan dolayı ihmal edilebilir.

vi. Helikopterde ivmelenme yoktur bundan dolayı üretilen kaldırma (lift) kuvveti toplam ağırlığa eşittir.

vii. Hava akışı üniforma yakındır bundan dolayı momentum akısı düzeltme faktörü $\beta=1$ olarak alınabilir.

Özellikler: Atmosfer şartlarındaki havanın yoğunluğu 1.18 kg/m^3 alınabilir

Çözüm: Kontrol hacmini yanlardaki akım çizgileriyle sınırlanmış dikey bir hiperbolik silindir olarak alıyoruz. 1 numaralı geniş en kesitli, pervanenin üstündeki alandan doğru hava girişi var. 2 numaralı dar en kesitli alan ise pervane altını temsil etmektedir. Pervane kanatlarından dik yukarı yön pozitif z yönünü temsil etmektedir.

Daimi akış için momentum denklemi: $\sum \vec{F} = \sum_{\text{out}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{in}} \beta \dot{m} \vec{V}$

Momentum denklemini z ekseninde

$$\text{yazalım: } -W = \dot{m}(-V_2) - 0$$

Bu denklemden aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$W = \dot{m}V_2 = (\rho AV_2)V_2 = \rho AV_2^2 \quad \rightarrow \quad V_2 = \sqrt{\frac{W}{\rho A}}$$

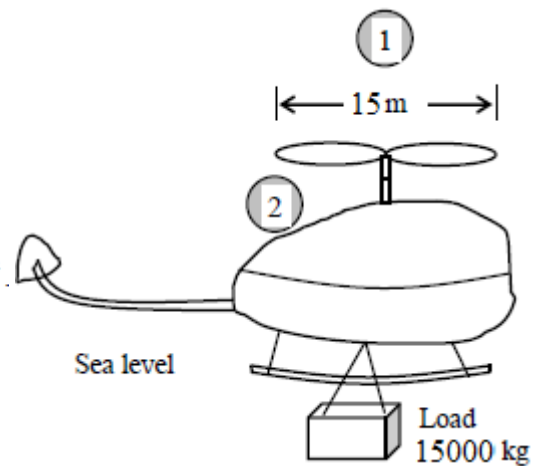
Kanadın açıklık alanı, $A = \pi D^2/4$ denklemi ile $\pi*(15\text{m})^2/4 = 176.7 \text{ m}^2$ olarak bulunur.

(a) Helikopterin yüksüz durumundaki havanın hızı, hacimsel debisi, kütleli debisi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$V_{2,\text{yüksüz}} = \sqrt{\frac{m_{\text{yüksüz}} * g}{\rho * A}} = \sqrt{\frac{10000 \text{ kg} * 9.81 \text{ m/s}^2}{1.18 \text{ kg/m}^3 * 176.7 \text{ m}^2}} = 21.7 \text{ m/s}$$

$$\dot{V}_{\text{yüksüz}} = A * V_{2,\text{yüksüz}} = 176.7 \text{ m}^2 * 21.7 \text{ m/s} = 3834 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\dot{m}_{\text{yüksüz}} = \rho * \dot{V}_{\text{yüksüz}} = 1.18 \text{ kg/m}^3 * 3834 \text{ m}^3/\text{s} = 4524 \text{ kg/s}$$



$P_1=P_2=P_{atm}$ ve $V_1 \cong 0$ olduğu için ve 1 ve 2 numaralı bölgeler arasında yükseklik farkı ve sürtünme etkileri ihmal edilebilir olduğu için enerji denklemi aşağıdaki şekilde sadeleşir:

$$\dot{m} \left(\frac{P_1}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gz_1 \right) + \dot{W}_{pump,u} = \dot{m} \left(\frac{P_2}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gz_2 \right) + \dot{W}_{turbine} + \dot{E}_{mech,loss} \rightarrow \dot{W}_{fan,u} = \dot{m} \frac{V_2^2}{2}$$

Helikopterin yüksüz durumunda helikopterin harcadığı güç aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\dot{W}_{yüksüz} = \dot{m} * \frac{V_{2,yüksüz}^2}{2} = 4524 \text{ kg/s} * \frac{(21.7 \text{ m/s})^2}{2} = 1065 \text{ kW}$$

(b) Helikopterin yüklü durumundaki havanın hızı, havanın kütleli debisi ve helikopterin harcadığı güç aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$V_{2,yüklü} = \sqrt{\frac{m_{yüklü} * g}{\rho * A}} = \sqrt{\frac{25000 \text{ kg} * 9.81 \text{ m/s}^2}{1.18 \text{ kg/m}^3 * 176.7 \text{ m}^2}} = 34.3 \text{ m/s}$$

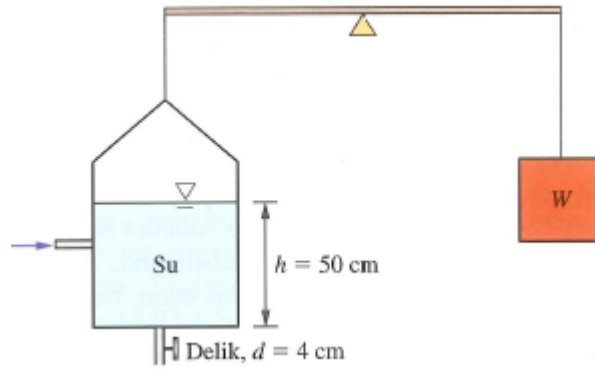
$$\dot{m}_{yüklü} = \rho * \dot{V}_{yüklü} = \rho * A * V_{2,yüklü} = 1.18 \text{ kg/m}^3 * 176.7 \text{ m}^2 * 34.3 \text{ m/s} = 7152 \text{ kg/s}$$

$$\dot{W}_{yüklü} = \dot{m} * \frac{V_{2,yüklü}^2}{2} = 7152 \text{ kg/s} * \frac{(34.3 \text{ m/s})^2}{2} = 4207 \text{ kW}$$

Ortalama akış hızının pervane devri ile doğru orantılı olduğu kabul edilirse, helikopterin yüklü durumundaki devir sayısı devir/dakika (rpm) olarak aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\frac{V_{2,yüklü}}{V_{2,yüksüz}} = \frac{n_{yüklü}}{n_{yüksüz}} \text{ buradan } n_{yüklü} = \frac{V_{2,yüklü}}{V_{2,yüksüz}} * n_{yüksüz} = \frac{34.3 \text{ m/s}}{21.7 \text{ m/s}} * 400 \text{ rpm} = 632 \text{ rpm}$$

4. Şekildeki atmosfere açık bir su tankı karşı bir kütle ile dengelenmektedir. Tankın tabanında debi katsayısı 0.90 olan 4 cm çapında bir delik bulunmakta ve tanktaki su seviyesi tanka yatay yönde giriş yapan su ile 50 cm'de sabit tutulmaktadır. Tabandaki delik açıldığında dengeyi korumak için karşıya ne kadarlık bir kütle eklenmesi veya çıkarılması gerektiğini belirleyiniz.



Özellikler: Su yoğunluğu 1000 kg/m^3 olarak alınmaktadır.

Çözüm:

Vana açıldıktan hemen sonra delikten dışarı çıkan suyun hacimsel debisi ve hızı:

$$Q = C_d A_h \sqrt{2gh} = 0.90 \pi \frac{0.04^2}{4} \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.5} = 3.54 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s}$$

$$V_{hole} = 0.90 \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.5} = 2.82 \text{ m/s}$$

Momentum değişiminden kaynaklanan kuvvet:

$$F = \rho Q V_h = 1000 \times 3.54 \times 10^{-3} \times 2.82 \approx 10 \text{ N}$$

Vana açıldıktan hemen sonra tank hafifleyecektir bu nedenle karşı ağırlıktan $m = \frac{10}{9.81} \cong 1 \text{ kg}$ çıkarılmalıdır.

5. Ticari amaçla üretilen büyük rüzgar türbinlerinin kanat genişlikleri 100 m'ye kadar çıkabilmekte ve tasarım koşullarında bunlarla 3MW maksimum güç değerlerine ulaşabilmektedir. Kanat açıklığı 60 m olan böyle bir rüzgar türbininin 30 km/h hızında daimi bir rüzgar aldığını düşününüz. Türbin-jeneratör grubunun verimi %32 olduğuna göre,

a) Türbinin ürettiği gücü,

b) Türbini taşıyan direğe rüzgar tarafından uygulanan yatay kuvveti belirleyiniz. Havanın yoğunluğu 1.25 kg/m^3 alınabilir ve direktteki sürtünme etkileri ihmal edilebilir.

Kabuller:

1. Rüzgar akışı daimi ve sıkıştırılamazdır.
2. Türbin-jeneratör verimi rüzgar hızından bağımsızdır.
3. Sürtünme etkileri ihmal edilmiştir, böylece kinetik enerji termal enerjiye dönüşmemektedir.
4. Rüzgar akışı üniforma yakındır dolayısıyla momentum akısı düzeltme faktörü $\beta=1$ alınabilir.

Çözüm:

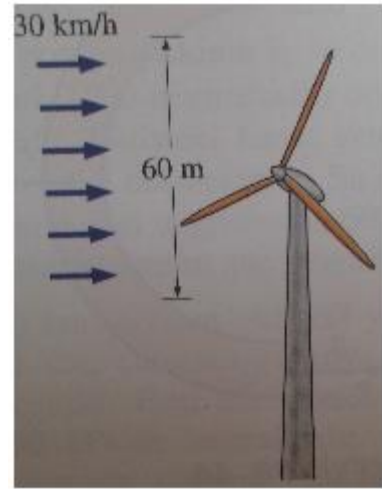
a) Rüzgarın güç potansiyeli, kinetik enerjisidir. Birim kütle için $V^2 / 2$, verilen kütleli debi için $\dot{m}V^2 / 2$ 'dir.

$$V_1 = (30 \text{ km / saat}) \left(\frac{1 \text{ m / s}}{3.6 \text{ km / saat}} \right) = 8.333 \text{ m / s}$$

$$\dot{m} = \rho_1 V_1 A_1 = \rho_1 V_1 \frac{\pi D^2}{4} = (1.25 \text{ kg / m}^3)(8.333 \text{ m / s}) \left(\frac{\pi (60 \text{ m})^2}{4} \right) = 29452 \text{ kg / s}$$

$$\dot{W}_{\max} = \dot{m} k e_1 = \dot{m} \frac{V_1^2}{2} = (29452 \text{ kg / s}) \frac{(8.333 \text{ m / s})^2}{2} = 1023 \text{ kW}$$

$$\dot{W}_{\text{gerçek}} = \eta_{\text{türbin}} \dot{W}_{\max} = (0.32)(1023 \text{ kW}) = 327 \text{ kW}$$



b) Sürtünme etkilerinin ihmal edilebilecek kadar az olduğu kabul edilirse, gelen kinetik enerjinin elektrik gücüne dönüştürülemeyen kısmı, rüzgar türbinini kinetik enerji olarak terk eder:

$$\dot{m} k e_2 = \dot{m} k e_1 (1 - \eta_{\text{türbin}}) \Rightarrow \dot{m} \frac{V_2^2}{2} = \dot{m} \frac{V_1^2}{2} (1 - \eta_{\text{türbin}})$$

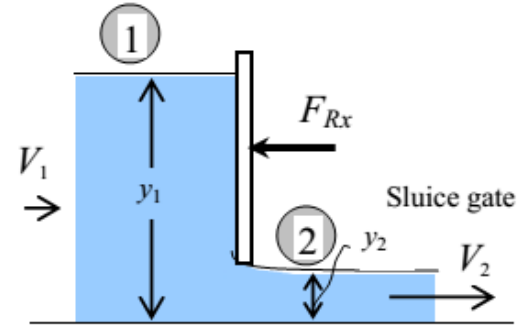
$$V_2 = V_1 \sqrt{1 - \eta_{\text{türbin}}} = (8.333 \text{ m / s}) \sqrt{1 - 0.32} = 6.872 \text{ m / s}$$

Rüzgar türbininin etrafına, rüzgarın kontrol yüzeyine dik olarak girip çıkacağı ve bütün kontrol yüzeyinin atmosferik basınçta kalacağı bir kontrol hacmi çizelim. Bir boyutlu daimi akış için momentum denklemi:

$$\sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}$$

$$F_R = \dot{m}V_2 - \dot{m}V_1 = \dot{m}(V_1 - V_2) = (29452 \text{ kg/s})(6.872 - 8.333 \text{ m/s}) = -43 \text{ kN}$$

6. Düşey bir levhayı yukarı ve aşağı hareket ettirmek suretiyle kanallardaki su akışını kontrol etmeye yarayan kayar kapaklar sulama sistemlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu kapaklara gelen ve giden akışlar arasındaki derinlik y_1 ve y_2 ile hız V_1 ve V_2 farklarından dolayı bir kuvvet etkir. Kapağın sayfa düzlemine dik genişliği w olarak verilmiştir. Kanalın duvarlarındaki kayma gerilmeleri önemsiz ve 1 ile 2 noktalarındaki akış üniform ve daimi kabul edildiğinde, kapağa etkiyen F_R kuvveti için, su derinlikleri y_1 ve y_2 , kütleli debi \dot{m} , yerçekimi kuvveti g , kapak genişliği w ve su yoğunluğu ρ cinsinden bir ifade geliştiriniz.



Kabuller:

1. Akış daimi, sıkıştırılmaz, sürtünmesiz ve üniformdur (dolayısıyla Bernoulli denklemi uygulanabilir).
2. Kanal duvarlarındaki kayma gerilmeleri ihmal edilmiştir.
3. Kanal atmosfere açıktır dolayısıyla serbest su yüzeyindeki basınç atmosfer basıncıdır.
4. Akış yatay doğrultudadır.
5. Akış üniforma yakındır dolayısıyla momentum akısı düzeltme faktörü $\beta=1$ alınabilir.

Çözüm:

Yukarı akım (upstream) serbest su yüzeyi 1, aşağı akım (downstream) serbest su yüzeyi 2 noktası olarak adlandırılmıştır ve referans hattı kanalın tabanı kabul edilmiştir. Bu durumda 1 ve 2 noktalarının yükseklikleri sırasıyla y_1 ve y_2 'dir. 1-2 noktaları arasında Bernoulli denklemi uygulanırsa:

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + y_1 = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + y_2 \rightarrow V_2^2 - V_1^2 = 2g(y_1 - y_2)$$

Daimi, sıkıştırılmaz (dolayısıyla sabit yoğunluk), tek akımlı akış için kütle korunumu ifadesi:

$$\dot{v}_1 = \dot{v}_2 = \dot{v} \rightarrow A_1 V_1 = A_2 V_2 = \dot{v} \rightarrow V_1 = \frac{\dot{v}}{A_1} = \frac{\dot{v}}{w y_1} \quad V_2 = \frac{\dot{v}}{A_2} = \frac{\dot{v}}{w y_2}$$

$$V_2^2 - V_1^2 = 2g(y_1 - y_2) \rightarrow \left(\frac{\dot{v}}{w y_2} \right)^2 - \left(\frac{\dot{v}}{w y_1} \right)^2 = 2g(y_1 - y_2) \rightarrow \dot{v} = w y_2 \sqrt{\frac{2g(y_1 - y_2)}{1 - y_2^2 / y_1^2}}$$

$$V_1 = \frac{y_2}{y_1} \sqrt{\frac{2g(y_1 - y_2)}{1 - y_2^2 / y_1^2}}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2g(y_1 - y_2)}{1 - y_2^2 / y_1^2}}$$

Daimi akış için momentum denklemi: $\sum \vec{F} = \sum_{out} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{in} \beta \dot{m} \vec{V}$

Kayar kapağa etkiyen kuvvet, yüzeylerdeki duvar kayma gerilmeleri ihmal edildiğinden dolayı, F_{RX} yatay kuvvetidir ve kayar kapak tarafından suya uygulanan kuvvetin eşiti ve ters yönlüdür. Dikey yüzeye etkiyen basınç kuvveti, yüzey merkezindeki ve yüzey alanındaki basınca eşittir. x-yönündeki momentum denklemi:

$$-F_{RX} + P_1 A_1 - P_2 A_2 = \dot{m} V_2 - \dot{m} V_1 \rightarrow -F_{RX} + \left(\rho g \frac{y_1}{2} \right) (w y_1) - \left(\rho g \frac{y_2}{2} \right) (w y_2) = \dot{m} (V_2 - V_1)$$

Denklem yeniden düzenlenirse kayar kapaktaki kuvvet:

$$F_{RX} = \dot{m} (V_1 - V_2) + \frac{w}{2} \rho g (y_1^2 - y_2^2)$$

$$F_{RX} = \dot{m} \left[\frac{y_2}{y_1} \sqrt{\frac{2g(y_1 - y_2)}{1 - y_2^2 / y_1^2}} - \sqrt{\frac{2g(y_1 - y_2)}{1 - y_2^2 / y_1^2}} \right] + \frac{w}{2} \rho g (y_1^2 - y_2^2)$$

$$F_{RX} = \dot{m} \left(\frac{y_2}{y_1} - 1 \right) \sqrt{\frac{2g(y_1 - y_2)}{1 - y_2^2 / y_1^2}} + \frac{w}{2} \rho g (y_1^2 - y_2^2)$$

7. Bir santrifuj fan çarkının girişteki yarıçapı 18 cm ve kanat genişliği 6.1 cm, çıkıştaki yarıçapı 30 cm ve kanat genişliği ise 3.4 cm'dir. Fan, atmosfer koşullarında aldığı havayı 20°C ve 95 kPa'da basmaktadır. Dönme hızı 900 devir/dakika ve fanın güç tüketimi 120 W olduğuna göre, havanın hacimsel debisini belirleyiniz. Ayrıca, çarkın giriş ve çıkışındaki dik hız bileşenlerini hesaplayınız. Hesaplamalarınızda tüm kayıpları ihmal ederek, giriş ve çıkıştaki havanın teğetsel hız bileşenlerinin, çarkın o noktalarındaki hızlarına eşit olduğunu kabul edebilirsiniz.

Kabuller:

1. Ortalama akış daimidir.
2. Tersinmez kayıplar ihmal edilmiştir.
3. Giriş ve çıkıştaki havanın teğetsel bileşenlerinin pervane hızına eşit olduğu söylenmektedir.

Özellikler:

$$\rho = \frac{P}{RT} = \frac{95 \text{ kPa}}{(0.287 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3 / \text{kg} \cdot \text{K})(293 \text{ K})} = 1.130 \text{ kg} / \text{m}^3$$

Çözüm:

Akışın teğetsel hız bileşeninin kanat açısız hızına hem girişte hem de çıkışta eşit olduğu idealize durumlarda:

$$V_{1,t} = \omega r_1 \quad V_{2,t} = \omega r_2$$

$$T_{\text{safit}} = \dot{m}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t}) = \dot{m} \omega (r_2^2 - r_1^2) = \rho \dot{V} \omega (r_2^2 - r_1^2)$$

Açısız hız:

$$\omega = 2 \times \pi \times \dot{n} = 2 \times \pi \times (900 \text{ dev} / \text{dakika})(1 \text{ dakika} / 60 \text{ s}) = 94.25 \text{ rad} / \text{s}$$

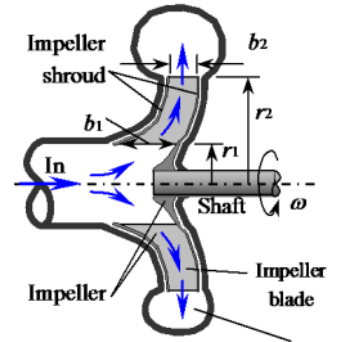
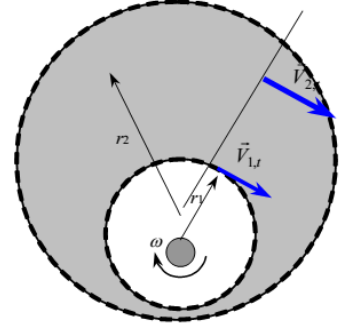
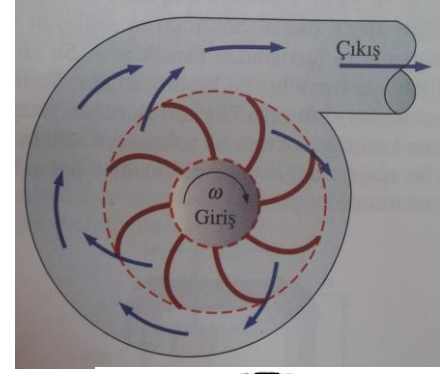
$$\dot{W}_{\text{safit}} = \omega T_{\text{safit}} = \rho \dot{V} \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)$$

$$\dot{V} = \frac{\dot{W}_{\text{safit}}}{\rho \omega^2 (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{120 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{s}}{(1.130 \text{ kg} / \text{m}^3)(94.25 \text{ rad} / \text{s})^2 [(0.30 \text{ m})^2 - (0.18 \text{ m})^2]} = 0.2075 \text{ m}^3 / \text{s}$$

Giriş ve çıkıştaki normal hız bileşenleri:

$$V_{1,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi \times r_1 \times b_1} = \frac{0.2075 \text{ m}^3 / \text{s}}{2\pi(0.18 \text{ m})(0.061 \text{ m})} = 3.01 \text{ m} / \text{s}$$

$$V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi \times r_2 \times b_2} = \frac{0.2075 \text{ m}^3 / \text{s}}{2\pi(0.30 \text{ m})(0.034 \text{ m})} = 3.24 \text{ m} / \text{s}$$



8. Çarkının girişteki yarıçapı 20 cm ve kanat genişliği 8.2 cm, çıkıştaki yarıçapı 45 cm ve kanat genişliği ise 5.6 cm olan santrifüj bir fanı göz önüne alınız. Fan 700 devir/dakika dönme hızında 0.70 m³/s debi ile hava basmaktadır. Havanın çarka radyal doğrultuda girip, çarktan radyal doğrultu ile 50° açı yapacak şekilde çıktığını kabul ederek, fan için gerekli minimum gücü hesaplayınız. Havanın yoğunluğu 1.25 kg/m³ alınabilir.

Kabuller:

1. Akış ortalamada daimidir.
2. Tersinmez kayıplar ihmal edilebilir.

Özellikler: Havanın yoğunluğu 1.25 kg/m³ alınabilir.

Çözüm: Çark bölgesini kontrol hacmi olarak alalım. Hızın girişteki ve çıkıştaki normal hız bileşenleri:

$$V_{1,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_1 b_1} = \frac{0.70 \text{ m}^3/\text{s}}{2\pi(0.20 \text{ m})(0.082 \text{ m})} = 6.793 \text{ m/s}$$

$$V_{2,n} = \frac{\dot{V}}{2\pi r_2 b_2} = \frac{0.70 \text{ m}^3/\text{s}}{2\pi(0.45 \text{ m})(0.056 \text{ m})} = 4.421 \text{ m/s}$$

Hızın girişteki ve çıkıştaki teğetsel hız bileşenleri:

$$V_{1,t} = V_{1,n} \tan \alpha_1 = 0$$

$$V_{2,t} = V_{2,n} \tan \alpha_2 = (4.421 \text{ m/s}) \tan 50^\circ = 5.269 \text{ m/s}$$

Fanın açısal hızı ve havanın kütleli debisi aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\omega = 2\pi n = 2\pi(700 \text{ rev/min}) \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) = 73.30 \text{ rad/s}$$

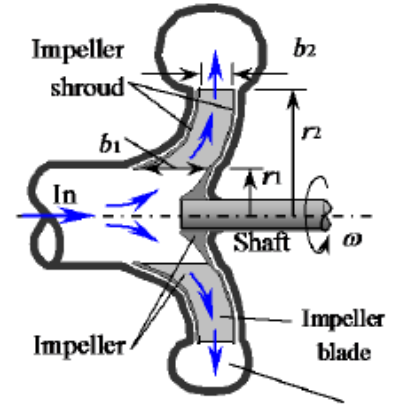
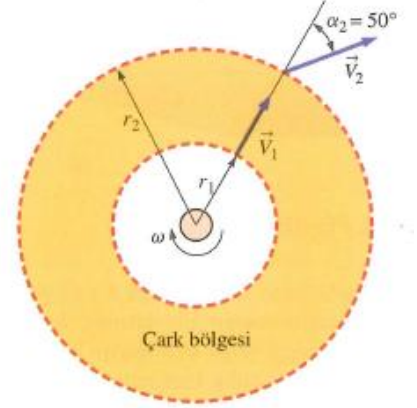
$$\dot{m} = \rho \dot{V} = (1.25 \text{ kg/m}^3)(0.7 \text{ m}^3/\text{s}) = 0.875 \text{ kg/s}$$

Normal hız bileşenleri şaft merkezinden geçer bundan dolayı sadece teğetsel hız bileşenleri torka katkıda bulunur. Açısal momentum denklemi ile tork bulunur.

$$T_{\text{shaft}} = \dot{m}(r_2 V_{2,t} - r_1 V_{1,t}) = (0.875 \text{ kg/s})[(0.45 \text{ m})(5.269 \text{ m/s}) - 0] \left(\frac{1 \text{ N}}{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2} \right) = 2.075 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Şaft gücü:

$$\dot{W} = \omega T_{\text{shaft}} = (73.30 \text{ rad/s})(2.075 \text{ N} \cdot \text{m}) \left(\frac{1 \text{ W}}{1 \text{ N} \cdot \text{m/s}} \right) = 152 \text{ W}$$



9. Pelton türbinleri hidroelektrik santrallerinde elektrik üretmek için yaygın olarak kullanılır. Bu türbinlerde V_j yüksek hızına sahip bir jet kepçelere çarparak çarkı döndürmeye çalışır. Kepçeler jetin yönünü tersine çevirir ve jet geliş doğrultusu ile β açısı yaparak şekilde gösterildiği gibi kepçeleri terk eder. Çark yarıçapı r olan ve ω açısal hızı ile daimi olarak dönmekte olan bir Pelton türbininin üreteceği gücün, ρ yoğunluk ve \dot{v} hacimsel debi olmak üzere; $\dot{W}_{mil} = \rho \omega \dot{v} (V_j - r\omega)(1 - \cos \beta)$ olduğunu gösteriniz. $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $r = 2 \text{ m}$, $\dot{v} = 10 \text{ m}^3/\text{s}$, $\dot{n} = 150 \text{ devir/dakika}$, $\beta = 160^\circ$ ve $V_j = 50 \text{ m/s}$ için üretilen gücü hesaplayınız.

Kabuller:

- Akış üniform ve periyodik (çevrimsel) olarak daimidir.
- Su atmosfere boşaldığından, nozul çıkışındaki etkin basınç sıfırdır.
- Sürtünme ve dönen parçalar üzerine etkiyen hava direnci etkileri ihmal edilmiştir.
- Moment koluna göre nozul çapı küçüktür bu yüzden çıkışta hız ve yarıçap için ortalama değerler kullanılmaktadır.

Çözüm:

Kepçelerin teğetsel hızı: $V_{kepce} = r\omega$
 $\omega = 2\pi \times \dot{n}$

Jete göre bağıl hızı: $V_r = V_j - V_{kepce} = V_j - r\omega$

Pelton türbinini içeren hayali bir disk kontrol hacmi olarak seçiyoruz.

Kontrol hacmine giriş hızı: V_r , çıkış hızının moment koluna normal bileşeni: $V_r \cos \beta$

Açısal momentum denklemi: $\sum M = \sum_{out} r\dot{m}V - \sum_{in} r\dot{m}V$ (saat yönünün tersi yön, pozitif olarak alınmıştır.)

Dönme ekseninde açısal momentum denklemi şu şekilde yazılabilir:

$$-M_{saft} = r\dot{m}V_r \cos \beta - r\dot{m}V_r$$

$$M_{saft} = r\dot{m}V_r (1 - \cos \beta) = r\dot{m}(V_j - r\omega)(1 - \cos \beta)$$

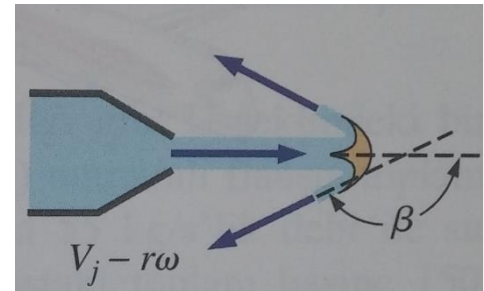
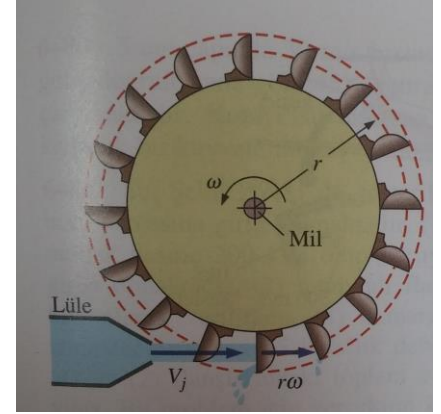
$$\dot{W}_{saft} = 2\pi \times \dot{n} \times M_{saft} = \omega M_{saft}$$

$$\dot{m} = \rho \dot{v}$$

$$\dot{W}_{saft} = \rho \dot{v} r \omega (V_j - r\omega)(1 - \cos \beta)$$

$$\omega = 2\pi \times \dot{n} = 2\pi(150 \text{ dev} / \text{dakika})(1 \text{ dakika} / 60 \text{ s}) = 15.71 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\dot{W}_{saft} = (1000 \text{ kg} / \text{m}^3)(10 \text{ m}^3 / \text{s})(2 \text{ m})(15.71 \text{ rad} / \text{s})(50 - 2 \times 15.71 \text{ m} / \text{s})(1 - \cos 160^\circ) = 11.3 \text{ MW}$$



10. Şekildeki bir hortumdan gelen 5 cm çapındaki su akımını yönlendiren lüleyi tutan üç ayaklı bir sehpa gösterilmiştir. İçindeki suyla beraber lülenin kütlesi 10 kg'dır. Üç ayaklı sehpanın 1800 N'luk bir tutma kuvveti oluşturabildiği bilinmektedir. Üç ayaklı sehpanın yetersiz kaldığı bir anda lüle aniden kurtulmuş ve 60 cm arkasında duran itfaiyeciye çarpmıştır. Üç ayaklı sehpa test edildikten sonra suyun debisi artırılınca sehpanın 1800 N'da devrildiği saptanmıştır. Kazaya yol açan su hızı ve debisi ile lülenin itfaiyeciye çarptığı andaki hızını hesaplayınız. Kolaylık için borunun yukarı akımındaki basınç ve momentum etkilerini ihmal edebilirsiniz.

Kabuller:

1. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.
2. Su jetinin basıncı atmosfere maruz kaldığı için atmosferik basınçtır.
3. Yatay direnç kuvveti hesaplandığı için yerçekimi etkileri ve dikey kuvvetler dikkate alınmamaktadır.
4. Hava akışı üniforma yakındır bundan dolayı momentum akısı düzeltme faktörü $\beta=1$ olarak alınabilir.
5. Yukarı akımdaki basınç ve momentum etkileri ihmal edilmektedir.

Özellikler: Su yoğunluğu 1000 kg/m^3 olarak alınmaktadır.

Çözüm:

Daimi akış için momentum denklemi: $\sum \vec{F} = \sum_{\text{out}} \beta \dot{m} \vec{V} - \sum_{\text{in}} \beta \dot{m} \vec{V}$.

Tripod tarafından lüleyi tutmak için uygulanan yatay kuvvete F_{Rx} denirse:

$$F_{Rx} = \dot{m}V_e - 0 = \dot{m}V = \rho AVV = \rho \frac{\pi D^2}{4} V^2 \rightarrow (1800 \text{ N}) \left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right) = (1000 \text{ kg/m}^3) \frac{\pi (0.05 \text{ m})^2}{4} V^2$$

Bu denklemden $V = 30.3 \text{ m/s}$ bulunur. Ardından hacimsel debi hesaplanır:

$$\dot{V} = AV = \frac{\pi D^2}{4} V = \frac{\pi (0.05 \text{ m})^2}{4} (30.3 \text{ m/s}) = 0.0595 \text{ m}^3/\text{s}$$

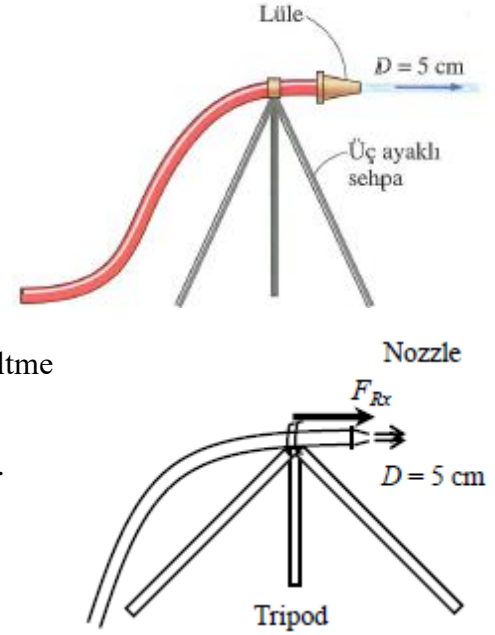
Lüle serbest kaldığında ivmesi:

$$a_{\text{nozzle}} = \frac{F}{m_{\text{nozzle}}} = \frac{1800 \text{ N}}{10 \text{ kg}} \left(\frac{1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2}{1 \text{ N}} \right) = 180 \text{ m/s}^2$$

Lüleye uygulanan reaksiyon kuvvetinin ve dolayısıyla ivmenin sabit kalacağı kabulü yapılırsa, lülenin 60 cm mesafe katetmesi için gereken zaman ve o andaki çarpma hızı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$x = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(0.6 \text{ m})}{180 \text{ m/s}^2}} = 0.0816 \text{ s}$$

$$V = at = (180 \text{ m/s}^2)(0.0816 \text{ s}) = 14.7 \text{ m/s}$$



11. Su şekilde gösterildiği gibi, bir ayırıcıdan $\dot{v}_1=0.08 \text{ m}^3/\text{s}$, $\dot{v}_2=0.05 \text{ m}^3/\text{s}$, $D_1=D_2=12 \text{ cm}$ ve $D_3= 10 \text{ cm}$ şartlarında daimi olarak akmaktadır. Ayırıcının giriş ve çıkış kesitlerindeki basınçlar $P_1= 100 \text{ kPa}$, $P_2= 90 \text{ kPa}$ ve $P_3= 80 \text{ kPa}$ olarak verildiğine göre, parçayı yerinde sabit tutmak için gerekli kuvveti hesaplayınız. Ağlıklar ihmal edilebilir. ($\rho=1000\text{kg/m}^3$)

Kabuller:

1. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.
2. Su, atmosfere boşalmaktadır, dolayısıyla çıkıştaki etkin basınç sıfırdır.

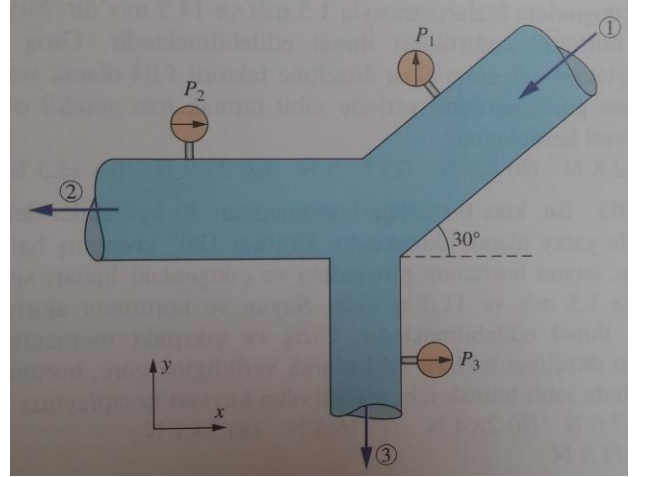
Çözüm:

Kesitlerdeki hızlar:

$$V_1 = \frac{0.08}{\pi \cdot 0.12^2 / 4} = 7.07 \text{ m/s}$$

$$V_2 = \frac{0.05}{\pi \cdot 0.12^2 / 4} = 4.42 \text{ m/s}$$

$$V_3 = \frac{0.03}{\pi \cdot 0.1^2 / 4} = 3.82 \text{ m/s}$$



Kontrol hacmine lineer (doğrusal) momentum

$$\text{denklemini uygulandırsa: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{KH} V \rho dV + \int_{KY} \vec{V} \cdot \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \sum F$$

x-bileşeni:

$$-(V_1 \cos \theta) \rho (-V_1) A_1 + (-V_2) \rho (V_2) A_2 = -P_1 A_1 \cos \theta + P_2 A_2 + R_x$$

$$-\rho \dot{v}_1 \cos \theta V_1 - \rho \dot{v}_2 V_2 + P_1 A_1 \cos \theta - P_2 A_2 = R_x$$

$$R_x = (1000)(0.08)(\cos 30)(7.07) - (1000)(0.05)(4.42) + 100000\pi \frac{0.12^2}{4} \cos 30 - 90000\pi \frac{0.12^2}{4} = 230 \text{ N}$$

y-bileşeni:

$$-(V_1 \sin \theta) \rho (-V_1) A_1 + (-V_3) \rho (V_3) A_3 = -P_1 A_1 \sin \theta + P_3 A_3 + R_y$$

$$-\rho \dot{v}_1 \sin \theta V_1 - \rho \dot{v}_3 V_3 + P_1 A_1 \sin \theta - P_3 A_3 = R_y$$

$$R_y = (1000)(0.08)(\sin 30)(7.07) - (1000)(0.03)(3.82) + 100000\pi \frac{0.12^2}{4} \sin 30 - 80000\pi \frac{0.01^2}{4} = 671 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 709 \text{ N}$$