AKM 204-BÖLÜM 4-UYGULAMA SORU VE ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda verilen daimi, iki boyutlu hız alanını dikkate alınız:

$$\vec{V} = (u, v) = (0.66 + 2.1x)\vec{i} + (-2.7 - 2.1y)\vec{j}$$

Bu akış alanında bir durma noktası var mıdır? Varsa nerededir?

Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. Akış 2-boyutludur. (x-y düzleminde)

Çözüm:

Durma noktasında u ve v sıfır olmalıdır.

Hız bileşenleri: $u = 0.66 + 2.1x \qquad v = -2.7 - 2.1y$

Durma noktası: $0 = 0.66 + 2.1x \qquad 0 = -2.7 - 2.1y$

$x = -0.314 \qquad y = -1.29$

2. xy- düzleminde daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu bir hız alanı,

$$u = 1.85 + 2.33x + 0.656y$$
$$v = 0.754 - 2.18x - 2.33y$$

biçiminde iki bileşen ile verilmektedir. İvme alanını bulunuz (a_x ve a_y ivme bileşenleri için ifadeler bulunuz) ve (x, y) = (-1,2) noktasındaki ivmeyi hesaplayınız.

Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. Akış 2-boyutludur. (x-y düzleminde)

Çözüm:

İvme alanı bileşenleri, maddesel türev ifadesinden elde edilir:

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = 0 + (1.85 + 2.33x + 0.656y)(2.33) + (0.754 - 2.18x - 2.33y)(0.656) + 0$$

$$a_y = \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = 0 + (1.85 + 2.33x + 0.656y)(-2.18) + (0.754 - 2.18x - 2.33y)(-2.33) + 0$$

$$a_x = 4.8051 + 3.9988x$$
$$a_y = -5.7898 + 3.9988y$$

(x, y)=(-1,2) noktası için ivme bileşenleri:

$$a_x = 4.8051 + 3.9988x \rightarrow x = -1 \rightarrow a_x = 0.80628 \cong 0.806$$
$$a_y = -5.7898 + 3.9988y \rightarrow y = 2 \rightarrow a_y = 2.2078 \cong 2.21$$

3. Bir akışa ait hız alanı $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ u=3x, v=-2y ve w=2z verilmektedir. (1,1,0) noktasından geçecek akım çizgisini bulunuz.

Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. Akış, x-y-z düzleminde 3-boyutludur.

Çözüm: Verilen bir hız alanı için (1,1,0) noktasından geçecek akım çizgisi hesaplanacaktır.

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{2z}$$

İlk 2 denklemden:

$$\frac{dx}{3x} = \frac{dy}{-2y} \quad veya \;\; \frac{1}{3}\ln x = -\frac{1}{2}\ln y + \ln c_1$$

$$x^{\frac{1}{3}} * y^{\frac{-1}{2}} = c_1$$

Verilen x=1, y=1 ve z=0 noktası için

$$1^{1/3} * 1^{-1/2} = c_1 \quad buradan\ c_1 = 1\ olur\ ve\ \sqrt[3]{x} = \sqrt{y} \quad ; \quad y = x^{2/3}$$

Diğer eşitlikten:

$$\frac{dz}{2z} = \frac{dx}{3x} \quad veya \;\; \frac{1}{2}\ln z - \frac{1}{3}\ln x = \ln c$$

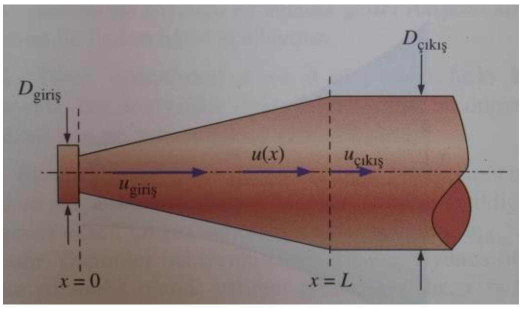
$$\frac{\sqrt{z}}{x^{1/3}} = c \quad veya \;\; \frac{z}{x^{2/3}} = c \quad buradan \;\; z = c * x^{2/3}$$

(1,1,0) için;

$0=c*1^{2/3}$, c=0 veya z=0

Akım çizgisi şu şekildedir; $y = x^{2/3}$, z=0

4. Bir rüzgar tünelinin yayıcı kısmından geçen havanın daimi akışını göz önüne alınız. Şekilde çizildiği gibi yayıcının merkez çizgisi boyunca hava hızı $u_{giriş}$'ten $u_{çıkış}$'a azalmaktadır. Ölçümler yayıcının eksen çizgisi boyunca hava hızının parabolik olarak azaldığını göstermektedir. x=0'dan x=L'ye kadar verilen parametreler cinsinden eksen çizgisindeki hız u(x) için bir denklem yazınız.



Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. Akış eksenel simetriktir.

Çözüm:

Genel parabol denklemi: $u = a + b(x - c)^2$

Burada (c, a) noktası tepe noktasını ifade eder. Tepe noktasının y değeri $u_{giriş}$'e eşittir.

(c, a)=(0,$u_{giriş}$)

$u = u_{giriş} + b(x - 0)^2$ Sınır koşullarından yararlanarak b değerini de hesaplayabiliriz.

Sınır Koşulları: x = 0 u = $u_{giriş}$

x = L u = $u_{çıkış}$

x=L ise

$$u_{cikis} = u_{giriş} + bL^2$$

$$b = \frac{u_{cikis} - u_{giriş}}{L^2}$$

Elde ettiğimiz a, b, c değerlerini denklemde yerine yazarsak;

$$u = u_{giriş} + \frac{u_{cikis} - u_{giriş}}{L^2} x^2$$

5. Bir akışın hız alanı $\vec{V} = (4x)\vec{i} + (5y + 3)\vec{j} + (3t^2)\vec{k}$ ile verilmektedir. (1m, 2m, 4m) noktasındaki parçacık için t=1 s'deki yörünge çizgisi nedir?

Çözüm: Verilen bir hız alanı için (1m, 2m, 4m) noktasındaki yörünge çizgisi hesaplanacaktır.

u=4x

v=5y+3 hız bileşenleridir

w=3t^2

Tanımdan:

$$u = \frac{dx}{dt} = 4x \qquad v = \frac{dy}{dt} = 5y + 3 \qquad w = \frac{dz}{dt} = 3t^2$$

t=1 s'de parçacığın konumu (x, y, z)= (1m, 2m, 4m).

$$\frac{dx}{x} = 4dt \rightarrow \ln x\Big|_1^x = 4\,t\Big|_1^t \rightarrow \quad \text{lnx-ln1= 4(t-1)}$$

lnx= 4(t-1)

$$\frac{dy}{5y+3} = dt \rightarrow \frac{1}{5}\ln(5y+3)\Big|_2^y = t\Big|_1^t$$

ln(5y+3) - ln(13)= 5(t-1)

ln(5y+3)= ln(13) + 5(t-1)

$$\int dz = \int 3t^2 dt \rightarrow z\Big|_4^z = t^3\Big|_1^t \rightarrow z\text{-}4= t^3 \text{-}1$$

$$z= t^3 + 3$$

3 tane denklem elde edildi. Yörünge çizgisini x, y, z cinsinden elde edebilmek için;

lnx= 4t - 4 .... (1)

$\ln\left(\frac{5y+3}{13}\right) = 5t - 5$ ....(2)

$z = t^3 + 3$ .... (3)

Denklem (1) ve (2) toplanırsa;

$$\text{lnx} + \ln\left(\frac{5y+3}{13}\right) = 9t\text{-}9,$$

t'yi bulmak için;

$$\ln\left(\frac{5xy+3x}{13}\right) + 9 = 9t$$

$$t = 1 + \frac{1}{9} * \ln\left(\frac{5xy+3x}{13}\right)$$

Denklem 3'te t yerine konursa sonuç aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$z = f(x,y) = \left[1 + \frac{1}{9} * \ln\left(\frac{5xy+3x}{13}\right)\right]^3 + 3$$

6. Daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu bir hız alanı,

$\vec{V} = (u, v) = (1 + 2.5x + y)\vec{i} + (-0.5 - 3x - 2.5y)\vec{j}$

şeklinde verilmekte olup burada x- ve y-koordinatları m, hızın büyüklüğü ise m/s birimindedir.

a) Bu akış alanında durma noktalarının olup olmadığını ve eğer varsa nerede olduklarını belirleyiniz.

b) x=0m'den 4m'ye ve y=0m'den 4m'ye olmak üzere sağ-üst dördülde birkaç konumda hız vektörlerini çiziniz ve akış alanını nitelik bakımından tarif ediniz.

Kabuller:

1. Akış daimi ve sıkıştırılamazdır.

2. Akış 2-boyutludur, hızın z bileşeni yoktur.

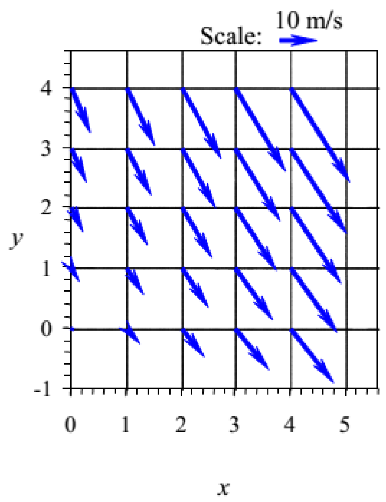
Çözüm:

a) Durma noktası *u* ve *v* hız bileşenlerinin sıfır olduğu noktadır.

$u \to 1 + 2.5x + y = 0$

$v \to -0.5 - 3x - 2.5y = 0$

Buradaki denklem sistemi (örneğin ilk denklem 2.5 ile çarpılıp taraf tarafa toplanarak rahatlıkla çözülebilir) çözülerek durma noktasının koordinatları elde edilir:



x = -0.615 m   y = 0.538 m

b) Örneğin (x, y) = (2,3) noktasındaki hız vektörünü ele alalım.

$\vec{V} = (u, v) = (1 + 2.5x + y)\vec{i} + (-0.5 - 3x - 2.5y)\vec{j}$ Bu ifadede x ve y değerlerini yerine yazılırsa;

$\vec{V} = (u, v) = 9\vec{i} - 14\vec{j}$ hız vektörü elde edilir. Bu vektörün büyüklüğü $V = \sqrt{9^2 + 14^2} = 16 m/s$ 'dir. Diğer vektörler de bu şekilde çizdirilebilir.

7. Her iki hız bileşeni de (x ve y yönlerindeki) lineer olan daimi, iki-boyutlu bir hız alanının genel denklemi aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\vec{V} = (u, v) = (U + a_1x + b_1y)\vec{i} + (V + a_2x + b_2y)\vec{j}$$

Bu ifadedeki U, V ve katsayılar sabit olup boyutlarının uyumlu biçimde tanımlandığı kabul edilmektedir.

- **(a)** Buna göre ivme alanının x ve y bileşenlerini hesaplayınız.
- **(b)** Verilen hız alanı için akışın sıkıştırılamaz olması durumunda katsayılar arasında nasıl bir ilişki olması gerekir?

(c) Verilen hız alanı için x ve y yönlerindeki lineer şekil değiştirme hızlarını hesaplayınız.
(d) Verilen hız alanı için x-y düzlemindeki kayma şekil değiştirme hızını hesaplayınız.
(e) c ve d şıklarında bulunan sonuçları birleştirerek x-y düzlemindeki iki-boyutlu akış için aşağıda verilen şekil değiştirme hızı tensörünü oluşturunuz. Hangi koşullar altında x ve y eksenleri asal eksen olur?

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

(f) Verilen hız alanı için vortisite vektörünü hesaplayınız. Bu vektör hangi yöndedir?

Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. Akış x-y düzleminde 2-boyutludur.

Çözüm:

a) Hız alanı: $\vec{V} = (u, v) = (U + a_1x + b_1y)\vec{i} + (V + a_2x + b_2y)\vec{j}$

İvme alanı hız alanının maddesel türevi ile elde edilir:

Maddesel ivmenin x bileşeni:

$$a_x = \underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}}}_{\text{Steady}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \underbrace{\cancel{w\frac{\partial u}{\partial z}}}_{\text{Two-D}} = (U + a_1x + b_1y)a_1 + (V + a_2x + b_2y)b_1$$

y bileşeni:

$$a_y = \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}}_{\text{Steady}} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\cancel{w\frac{\partial v}{\partial z}}}_{\text{Two-D}} = (U + a_1x + b_1y)a_2 + (V + a_2x + b_2y)b_2$$

b) Verilen hız alanı için akışın sıkıştırılamaz olması için hacimsel şekil değiştirmenin sıfır olması gerekir.

Hacimsel şekil değiştirme:

$$\frac{1}{V}\frac{DV}{Dt} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial z}}}_{\text{Two-D}} = a_1 + b_2$$

Verilen hız alanı için akışın sıkıştırılamaz olması için: $\boxed{a_1 + b_2 = 0}$

c) Verilen hız alanı için x ve y yönlerindeki lineer şekil değiştirme hızları aşağıdaki gibidir:

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1 \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = b_2}$$

d) Verilen hız alanı için x-y düzlemindeki kayma şekil değiştirme hızı aşağıdaki gibidir:

$$\boxed{\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(b_1 + a_2)}$$

Simetriden dolayı $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}$ olur.

e) 2- boyutlu şekil değiştirme hızı tensörünün genel gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix}$$

c ve d şıklarında bulunan sonuçlar bir araya getirilirse 2- boyutlu şekil değiştirme hızı tensörü aşağıdaki gibi olur.

$$\boxed{\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{1}{2}(b_1 + a_2) \\ \frac{1}{2}(b_1 + a_2) & b_2 \end{pmatrix}}$$

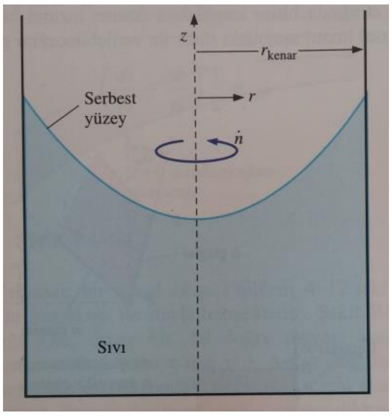
Şekil değiştirme hızı tensöründeki diagonal elemanlar sıfırdan farklı olur ve diagonal olmayan elemanlar sıfır olursa, x ve y eksenleri asal eksen olur. Bu durumda x ve y eksenlerinin asal eksen olması için $\boxed{b_1 + a_2 = 0}$ koşulunun sağlanması gerekir.

f) Verilen hız alanı için vortisite vektörü aşağıdaki gibi bulunur:

$$\boxed{\vec{\zeta} = \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial y}}}_{\text{Two-D}} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}}_{\text{Two-D}}\right)\vec{i} + \left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial u}{\partial z}}}_{\text{Two-D}} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}}_{\text{Two-D}}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k} = (a_2 - b_1)\vec{k}}$$

Bu durumda vortisite vektörü z yönünde olur. Vortisitenin z bileşeninin işareti ise a_2-b_1'in işaretine bağlıdır.

8. Silindirik bir su tankı düşey ekseni etrafında saat yönünün tersinde $\dot{n} = 175$ devir/dakika ile katı cisim hareketi yaparak dönmektedir. Tank içindeki akışkan parçacıklarının vortisitesini hesaplayınız.



Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. z ekseni düşey doğrultudur.

Çözüm:

Vortisite = çevrinti vektörü= $\vec{\zeta} = \vec{\nabla} x \vec{V} = curl(\vec{V})$

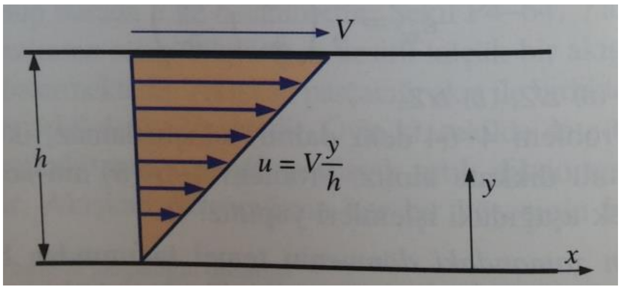
Birim zamandaki dönme vektörü, çevrinti vektörünün yarısına eşittir. $\vec{\zeta} = 2\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = 175 \frac{devir}{dakika}\left(\frac{1dakika}{60s}\right)\left(\frac{2\pi rad}{devir}\right)\vec{k} = 18.326\vec{k} rad/s$$

$$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = 2x18.326\vec{k} = 36.652\vec{k} \cong 36.7\vec{k} rad/s$$

9. Tam gelişmiş **Couette akışı**nı (şekilde gösterildiği gibi aralarında *h* mesafesi bulunan üstteki hareketli alttaki ise sabit iki sonsuz paralel levha arasındaki akış) göz önüne alınız. Akış xy-düzleminde daimi, sıkıştırılamaz ve iki-boyutlu olup hız alanı aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\vec{V} = (u, v) = V\frac{y}{h}\vec{i} + 0\vec{j}$$



Bu akış alanı dönümlü mü yoksa dönümsüz müdür? Eğer dönümlüyse z-yönündeki vortisite bileşenini hesaplayınız. Bu akıştaki akışkan parçacıkları saat yönünde mi yoksa tersi yönde mi dönmektedir?

Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. Akış sıkıştırılamazdır.

3. Akış, x-y düzleminde iki-boyutludur.

Çözüm:

Akışın dönümlü (rotasyonel) olup olmadığını belirlemek için vortisitenin z-bileşenini hesaplamak gerekir. Sıfıra eşit değilse dönümlüdür denilir.

$$\zeta_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 - \frac{V}{h} = -\frac{V}{h}$$

Evet, akış dönümlüdür ve negatif olması akışkan parçacıklarının saat yönünde döndüğünün göstergesidir.

10. Daimi, 2-boyutlu hız alanı

$$\vec{V} = (u, v) = (2.85 + 1.26x - 0.896y)\vec{i} + (3.45x + cx - 1.26y)\vec{j}$$

ile verilmektedir. Bu akış alanının dönümsüz olması için c sabitinin değeri ne olmalıdır?

Çözüm: Verilen bir hız alanı için, akış alanının dönümsüz olmasını sağlayacak c sabiti hesaplanacaktır.

Kartezyen koordinat sisteminde vortisite vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\vec{\zeta} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Hız bileşenleri: $u = 2.85 + 1.26x - 0.896y$, $v = 3.45 + cx - 1.26y$, and $w = 0$

Vortisite vektörü, hız bileşenlerinin türev işlemlerinin ardından aşağıdaki gibi bulunur:

$$\vec{\zeta} = (0)\vec{i} + (0)\vec{j} + (c - (-0.896))\vec{k} = (c + 0.896)\vec{k}$$

Dönümsüz akış için vortisite vektörünün sıfır olması gerekir. Bundan dolayı, **c= -0.896** olarak bulunur.

11. Reynolds transport teoreminin (RTT) genel biçimi şöyledir:

$$\frac{dB_{sis}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho b d\nu + \int_{KY} \rho b \vec{V}_b . \vec{n} dA$$

Burada $\vec{V}_b$ kontrol yüzeyine göre akışkanın bağıl hızıdır. Ayrıca B_{sis}, akışkan parçacıklarından oluşan sistemin kütlesi, yani *m* olsun. Tanım gereği sisteme kütle girişi veya çıkışı olmayacağından bir sistem için *dm/dt=0* olduğunu biliyoruz. Yukarıda verilen eşitliği kullanarak bir kontrol hacmi için kütlenin korunumu denklemini türetiniz.

Çözüm:

B_{sis}= m b= m/m = 1 dm/dt= 0

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho d\nu + \int_{KY} \rho \vec{V}_b . \vec{n} dA$$

12. Reynolds transport teoreminin (RTT) bir önceki soruda verilen biçimini göz önüne alınız. Burada B_{sis}, akışkan parçacıklarından oluşan sistemin lineer momentumu, yani $m\vec{V}$ olsun. Bu sistem için Newton'un ikinci yasasının aşağıdaki gibi verildiğini biliyoruz:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})_{sis}$$

Buna göre RTT'yi ve Newton'un ikinci yasasını kullanarak bir kontrol hacmi için lineer momentumun korunumu denklemini türetiniz.

Çözüm:

$$B_{sis} = m\vec{V} \qquad b = m\vec{V}/m = \vec{V}$$

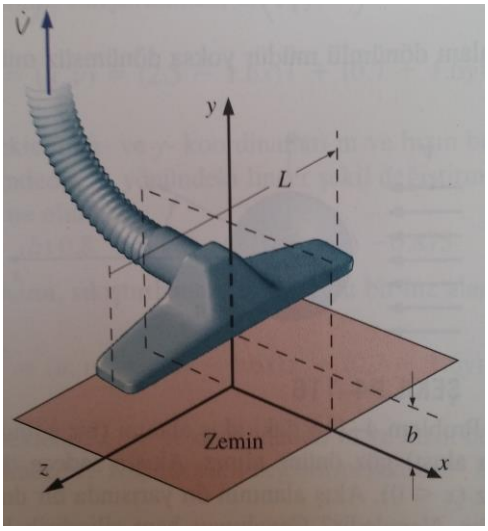
$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}\int_{KH} \rho\vec{V} dv + \int_{KY} \rho\vec{V}(\vec{V}_b.\vec{n})dA$$

13. Bir elektrikli süpürgenin emiş aparatından içeri doğru olan hava akışının xy-düzlemindeki hız bileşenleri yaklaşık olarak aşağıdaki ifadelerde temsil edilebilir:

$$u = \frac{-\dot{\upsilon}x}{\pi L}\frac{x^2+y^2+b^2}{x^4+2x^2y^2+2x^2b^2+y^4-2y^2b^2+b^4}$$

$$v = \frac{-\dot{\upsilon}y}{\pi L}\frac{x^2+y^2-b^2}{x^4+2x^2y^2+2x^2b^2+y^4-2y^2b^2+b^4}$$

Burada b emiş aparatının zeminden olan yüksekliği, L aparatın genişliği, $\dot{\upsilon}$ ise hortum içine doğru emilen havanın hacimsel debisidir. Bu akış alanındaki durma noktasının (veya noktalarının) konumunu belirleyiniz.



Kabuller:

1. Akış daimidir.

2. Akış, xy-düzleminde 2-boyutludur.

Çözüm:

Durma noktasında hızın tüm bileşenleri (u, v) sıfır olmalıdır.

$$u \to \frac{-\dot{\upsilon}x}{\pi L}\frac{x^2+y^2+b^2}{x^4+2x^2y^2+2x^2b^2+y^4-2y^2b^2+b^4} = 0$$

$$x = 0 \to u = 0$$

$$v \to \frac{-\dot{\upsilon}y}{\pi L}\frac{x^2+y^2-b^2}{x^4+2x^2y^2+2x^2b^2+y^4-2y^2b^2+b^4} = 0$$

$$y = 0 \to v = 0$$

or

$$x^2+y^2-b^2 = 0 \to v = 0$$

Bu durum (x, y) = (0,0) noktasında sağlanmaktadır.

Ayrıca, (x, y) = (0, b) noktasında da bir durma noktası var gibi gözükmektedir.

$$v = \frac{-\dot{\upsilon} y}{\pi L} \frac{x^2 + y^2 - b^2}{x^4 + 2x^2 y^2 + 2x^2 b^2 + y^4 - 2y^2 b^2 + b^4}$$

$$x = 0, y = b \rightarrow v = \frac{-\dot{\upsilon} b}{\pi L} \frac{0 + b^2 - b^2}{0 + 0 + 0 + b^4 - 2b^2 b^2 + b^4} = \frac{0}{0}$$

Ancak (0, b) noktası bir durma noktası değil, akışta bir tekillik (singularity point) noktasıdır.