BİR POLİGONLA ÇEVRELENMİŞ BİR BÖLGENİN ALAN, AĞIRLIK MERKEZİ VE ATALET MOMENTLERİ İÇİN ANALİTİK ÇÖZÜM

Mehmet Cem Ece (*)
B. Tulû Tanju (**)

ÖZET:
Bir poligonla çevrelenmiş bir düzlemsel bölgenin alanını, ağırlık merkezinin koordinatlarını ve atalet momentlerini veren analitik ifadeler elde edildi. Bu büyüklükleri hesaplayan, bölgeyi ve eksen takımlarını ekranda görüntüleyerek sonuçlarını yazan BASIC dilinde interaktif bir program geliştirildi.

1. Giriş

Düzlemsel bir bölgenin alanının ağırlık merkezinin ve atalet momentlerinin bulunması mühendislikte çok karşılaşılan bir problemdir. Örneğin, dalmış bir düzlemsel yüzeye etkiyen hidrostatik kuvvetin şiddeti

$$F=\gamma HA \tag{1.1}$$

ve bu yüzey üzerine etkiyen hidrostatik basıncın, yüzey düzlemi ile serbest sıvı yüzeyinin ara kesitinin oluşturduğu eksene göre döndürme momenti

$$M_s=\gamma I_s \sin\alpha \tag{1.2}$$

olarak ifade edilir [1] . Burada γ sıvının özgül ağırlığı, h dalmış yüzeyin ağırlık merkezinin sıvı seviyesinden olan derinliği, α yüzeyin serbest sıvı yüzeyi ile yaptığı açı, A yüzeyin alanı, I_S de momentin alındığı eksene göre yüzeyin atalet momentidir. Başka bir örnek kirişlerin elastik eğilmesinden verilebilir. Bir eğilme momenti etkisi altındaki bir kirişin bir kesitindeki normal gerilme, merkezi kiriş kesitinin ağırlık merkezinde olan asal eksen takımına göre

$$\sigma=\frac{M_r}{I_r}\,t-\frac{M_t}{I_t}\,r \tag{1.3}$$

ifadesiyle verilir [2]. Burada Mr ve Mt eğilme momentinin bileşenleri, I_r ve I_t de r ve t asal eksenlerine göre atalet momentleridir.

Oxy düzlemindeki sonlu ve sınırlı bir S bölgesinin alanı

$$A=\iint_S dxdy \tag{1.4}$$

ağırlık merkezinin koordinatları

$$x=\frac{1}{A}\iint_S xdxdy\,,\ y=\frac{1}{A}\iint_S ydxdy \tag{1.5}$$

ve atalet momentleri

$$I_x=\iint_S y^2dxdy,\ I_y=\iint_S x^2dxdy,\ I_{xy}=\iint_S xydxdy \tag{1.6}$$

çift katlı integralleri ile tanımlıdır. Basit geometriler için bu integrallerinin hesaplanması nisbeten kolay olmakla beraber, S bölgesini sınırlayan eğrinin analitik oalarak ifade edilemediği hallerde münerik yöntemlere başvurmak gerekir. S bölgesinin standart bir bölge olması *(bölgenin içinde alınan bir noktadan koordinat eksenlerine paralel çizilen doğruların, bölgeyi sınırlayan eğriyi iki noktada kesmesi)* halinde, (1.4)-(1.6) eşitlikleriyle verilen çift katlı integraller sıralı integrallere indirgenebilir [3]. Sıralı integrallerin her biri de uygun bir nümerik yöntem *(trapez yöntemi, Simpson yöntemi)[* kullanarak hesaplanabilir [4]. Bölgenin standart bir bölge olmaması halinde, S bölgesi her biri standart birer bölge olan alt bölgelere parçalanabilir ve işlemler uygulanabilir.Nümerik yöntemlerin hassas ve güvenilir sonuçlar verebilmesi için, S bölgesi içinde mümkün olduğu kadar çok sık nokta ağı oluşturmak zorunludur. Her değişik bölge için, noktalar arası mesafe ve dolayısı ile nokta sayısı uygun olarak seçilmelidir. Çok basit geometriler dışında, nokta ağının, S bölgesini sınırlayan eğri en dış noktalardan geçecek şekilde oluşturulması hemen hemen imkansızdır. Fakat bundan kaynaklanan hata, nokta sayısı yeterince arttırılarak, azaltılabilir. Kısaca, alışıla gelmiş nümerik yöntemler her bir değişik bölge için uygun nokta ağı seçimini gerektirir ve nokta sayısı arttıkça hesaplama süresi de uzar.

Bu çalışmanın amacı, mühendislikte karşılaşılan problemlerin büyük çoğunluğunda olduğu gibi, bölgeyi sınırlayan eğrinin bir poligon olması halinde bölgenin alanı, ağırlık merkezinin koordinatları ve atalet momentleri için, poligonun köşe noktalarının koordinatla-

(*) Y.Doç.Dr., Makina Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Trakya Üniversitesi.
(**) Öğrenci,Makina Müh. Bölümü,Müh.Mim Fak.,Trakya Üniversitesi

n cinsinden analitik ifadeler elde etmek ve bu büyüklükleri, herhangi bir nümerik hesaplama hatasına yer vermeden hesaplayan BASIC dilinde yazılmış interaktif bir program geliştirmektir.

2. Analitik Çözüm

Bir poligonun sınırladığı düzlemsel bir bölgeyi ele alalım (Şekil-1). Poligonun n köşesi (kenarı) olduğunu kabul edelim ve köşeleri saat yönünde, herhangi birinden başlayarak numaralayalım. (x_i, y_i) sayı çifti, i. köşenin koodinatlarını göstermektedir.

S bölgesinin alanı, ağırlık merkezinin koordinatları ve atalet momentleri, Green teoreminden [5] yararlanarak, C çevre eğrisi üzerinde eğrisel integraller olarak aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Eğrisel integrallerin yönü, Şekil-1'de oklarla

$$\int_c y\,dx \qquad (2.1)$$

$$\bar{x}=\frac{1}{2A}\int_c x^2 dy, \quad \bar{y}=\frac{1}{2A}\int_c y^2 dx \qquad (2.2)$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_c y^3 dx, \quad I_y=-\frac{1}{3}\int_c x^3 dy, \quad I_{xy}=-\frac{1}{2}\int_c yx^2 dy \qquad (2.3)$$

işaretlendiği gibi, saat yönündedir. C eğrisi bir poligon olup, (x_i, y_i) ve (x_{i+i}, y_{i+i}) noktalarını birleştiren parçası üzerinde

$$y=y_i+\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i), \quad dy=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}dx \qquad (2.4)$$

dir. Bu eşitlikler (2.1)-(2.3) ifadelerinde kullanılarak

$$A=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}+y_i) \qquad (2.5)$$

$$\bar{x}=-\frac{1}{6A}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)(x_{i+1}^2+x_{i+1}x_i+x_i^2) \qquad (2.6)$$

$$\bar{y}=\frac{1}{6A}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}^2+y_{i+1}y_i+y_i^2) \qquad (2.7)$$

$$I_x=\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(x_{i+1}-x_i)(y_{i+1}+y_i)(y_{i+1}^2+y_i^2) \qquad (2.8)$$

$$I_y=-\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)(x_{i+1}+x_i)(x_{i+1}^2+x_i^2) \qquad (2.9)$$

$$I_{xy}=-\frac{1}{24}\sum_{i=1}^{n}(y_{i+1}-y_i)\Big[y_{i+1}(3x_{i+1}^2+2x_{i+1}x_i+x_i^2)$$

$$+y_i(x_{i+1}^2+2x_{i+1}x_i+3x_i^2)\Big] \qquad (2.10)$$

elde edilir. Böylece bütün büyüklükler, analitik olarak, sadece poligonun köşe noktalarının koordinatları cinsinden yazılabilir. Po-ligon kapalı bir eğri olduğundan, (2.5)-(2.10) eşitliklerinde $x_{n+1}=x_1$ ve $y_{n+1}=y_1$ alınmalıdır.

Başlangıç noktası S bölgesinin ağırlık merkezi G $(\bar{x},\bar{y})$'de olan Gx'y' eksen takımına (Şekil-1) göre atalet momentleri de

$$I_{x'}=I_x-\bar{y}^2A, \quad I_{y'}=I_y-\bar{x}^2A, \quad I_{x'y'}=I_{xy}-\bar{x}\bar{y}A \qquad (2.11)$$

eşitliklerinden bulunabilir.

Gx"y" asal eksen takımının (Şekil-1) yerleşimi

$$\tan 2\varnothing=-\frac{2I_{x'y'}}{I_{x'}-I_{y'}} \qquad (2.12)$$

eşitliğinden bulunabilir. Burada ø açısı, Gx"y" asal eksenlerinin, Gx'y' eksenlerine izafen, saatin ters yönündeki dönme miktarıdır. Asal eksenlere göre atalet momentleri de

$$I_{x''}=\frac{1}{2}(I_{x'}+I_{y'})+\frac{1}{2}(I_{x'}-I_{y'})\cos 2\theta-I_{x'y'}\sin 2\theta \qquad (2.13)$$

$$I_{y''}=\frac{1}{2}(I_{x'}+I_{y'})-\frac{1}{2}(I_{x'}-I_{y'})\cos 2\theta+I_{x'y'}\sin 2\theta \qquad (2.14)$$

olarak elde edilir.

3. BASIC Programı POLİGON ve Sonuçları

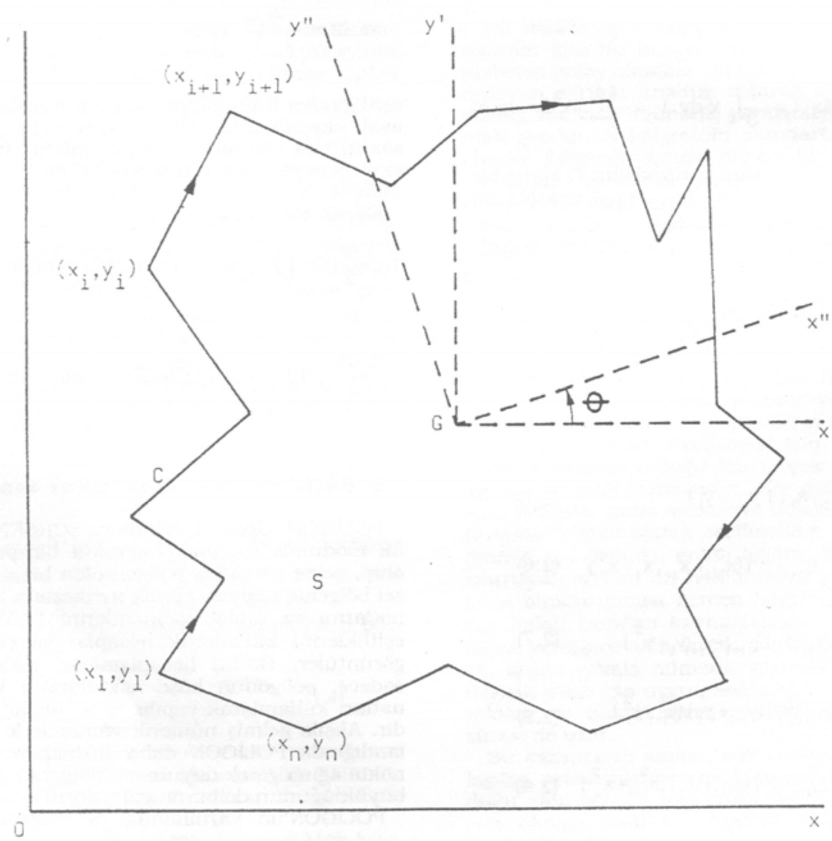
POLİGON, BASICA dilinde ve SCREEN2 grafik modunda yazılmış interaktif bir program olup, çevre eğrisi bir poligon olan bir düzlemsel bölgenin alanını, ağırlık merkezinin koordinatlarını ve atalet momentlerini (2.5)-(2.14) eşitliklerini kullanarak hesaplar ve ekranda görüntüler. Bütün hesaplamalar, sadece ve sadece, poligonun köşe noktalarının koordinatları kullanılarak yapılır ve sonuçlar kesindir. Alışıla gelmiş nümerik yöntemlerle kıyaslandığında POLİGON daha hızlıdır ve hicbir nokta ağına gerek duyulmaz. Bölgenin şekli ve büyüklüğünün de bir önemi yoktur.

POLİGON'un yazılımında, S bölgesinin 1.

çeyrek düzlemde kaldığı ($x_i \geq 0$, $y_i \geq 0$, $i=1,2,....,n$) kabul edilmiştir. POLİGON, önce köşe noktaları sayısının (n), sonra da bu noktaların koordinatlarının (x_i,y_i) birer birer ve saat yönünde dolaşarak girilmesini gerektirir. Nokta sayısı, aşikar olarak, 3'ten az olamaz ve POLİGON uyarıda bulunur. Ayrıca, noktaların koordinatlarının girilmesi sırasında yapılan hatalarda POLİGON uyarır ve düzeltme imkanı verir. Çevre noktalarının koordinatlarının girilmesinden sonra POLİGON, (2.5)-(2.14) eşitliklerini kullanarak sözkonusu olan bölgenin alanını, ağırlık merkezinin koordinatlarını ve atalet momentlerini hesaplar. S bölgesini tanımlayan noktaların koordinatları ekranın solunda numaralananak alt alta sıralanır. POLİGON, ekranın sağ üst köşesine Oxy eksen takımını ve S bölgesini çizer ve üzerinde ağırlık merkezinin konomunu işaretleyerek Gx'y' eksen takımını ve Gx"y" asal eksen takımını çizer. Bölgenin alanının, ağırlık merkezinin koordinatlarının ve her eksen takımına göre atalet momentlerinin değerleri, ekranda çizilen şeklin hemen altında yazılır. Gx'y' eksen takımının asal eksen takımı olması halinde ($I_{x'y'}= 0$), Gx"y" eksen takımı çizilmez ve bu eksenlere göre atalet momentleri hesaplanmaz, yazdırılmaz.

POLİGON'la elde edilen bazı sonuçlar Şekil-2-7'de gösterilmiştir. Şekil 2 bir üçgen, Şekil 3 18 köşeli bir poligon, Şekil 4 bir I profili (DÇ 1621), Şekil 5 bir L profili (DÇ 1612), Şekil 6 bir C profili ve Şekil 7 bir S profili için sonuçları sergilemektedir. Şekil 5'te gösterilen L profilinin iç köşesindeki eğrilik, 7 nokta alınarak kısa doğru parçalarıyla yaklaşık olarak temsil edilmiştir.

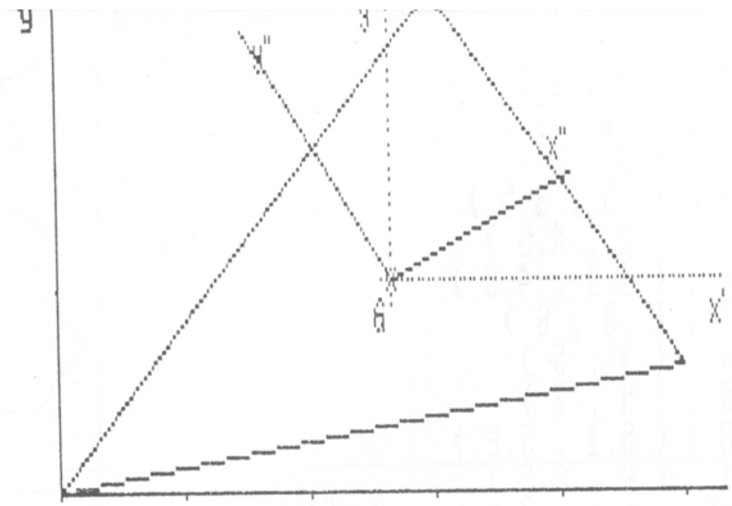
Herhangi bir eğriyle sınırlamış bir bölge için de POLİGON uygulanabilir. Bu durumda bölgenin çevre eğrisi üzerinde çok sayıda nokta seçilerek, bölge bu noktaların birleştirilmesiyle elde edilen poligonla sınırlanmış kabul edilebilir. Bu halde sonuçlar ancak yaklaşık olarak geçerlidir, fakat nokta sayısı arttırılarak hata istenildiği kadar küçültülebilir.



ŞEKİL 1: Bölge geometrisi ve eksen takımları

NOKTALAR :

1 . (0 , 0)
2 . (3 , 4)
3 . (5 , 1)



Alan = A : 8.5

Agirlik Merkezi

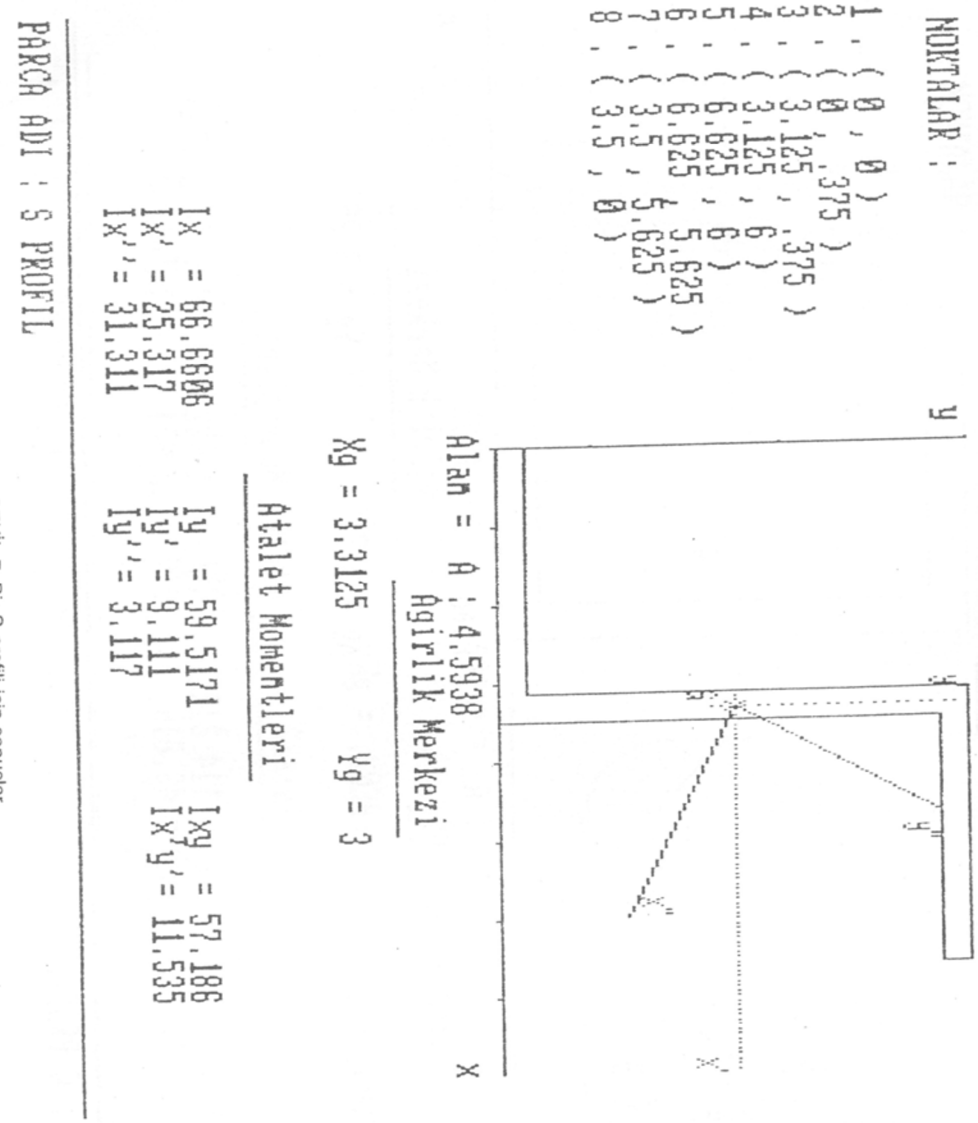
Xg = 2.6667 Yg = 1.6667

Atalet Momentleri

Ix = 29.75	Iy = 69.4167	Ixy = 40.375
Ix' = 6.139	Iy' = 8.972	Ix'y' = 2.597
Ix'' = 4.597	Iy'' = 10.514	

PARCA ADI : UCGEN

ŞEKİL 2: Bir üçgen için sonuçlar



ŞEKİL 7: Bir S profili için sonuçlar

KAYNAKLAR

1. Daily, J.W. and Harleman, D.R.F., "Fluid Dynamics", Addison-Wesley Publishing Co., 1966.
2. Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity", Dover Publications, Inc., 1960.
3. Silverman, R.A., "Modern Calculus and Analytic Geometry", The Mac Millan Co., 1969.
4. Wylie, C.R., "Advanced Engineering Mathematics", McGraw-Hill Book Co., 1975.
5. Hildebrand, F.B., "Advanced Calculus for Applications", Prentice-Hall, Inc., 1976