MATEMATİK 101 YIL SONU SINAVI 11 AĞUSTOS 2010

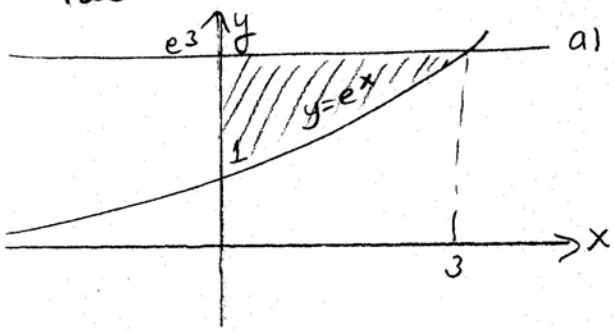
SORU 1:

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Liste No:	Puan
İmza:	e-posta:	Öğrenci No:		

$y = e^x$ eğrisi, $y-$ekseni ve $y = e^3$ doğrusu ile sınırlı alanın

[15p.] **a)** $y-$ ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini veren integral ifadesini yazınız ve hesaplayınız. (Kabuk Yöntemi ile)

[10p.] **b)** $x-$ ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan dönel cismin hacmini veren integral ifadesini sadece yazınız. (~~Disk~~ Pul Yöntemi ile)



a) $V_y = 2\pi \int xy\,dx$

$V_y = 2\pi \int_0^3 (e^3 - e^x)x\,dx$

$V_y = 2\pi \int_0^3 e^3 x\,dx - 2\pi \underbrace{\int_0^3 xe^x dx}_{I_1}$

$V_y = 2\pi e^3 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 - 2\pi \cdot I_1$

$I_1 = \int_0^3 xe^x dx \quad \begin{bmatrix} x=u & dx=du \\ e^x dx = dv, & v=e^x \end{bmatrix}$

$V_y = 9e^3\pi - 2\pi I_1$

$I_1 = xe^x\Big|_0^3 - \int_0^3 e^x dx = 3e^3 - (e^3 - 1) = 2e^3 + 1$

$V_y = 2\pi\left(\frac{9}{2}e^3 - 2e^3 - 1\right) = 2\pi\left(\frac{5}{2}e^3 - 1\right) = (5\pi e^3 - 2\pi)$ br^3

b) $V_x = \pi \int_0^3 [(e^3)^2 - (e^x)^2]dx$

MATEMATİK 101 YIL SONU SINAVI 11 AĞUSTOS 2010

SORU 2:

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Liste No:	Puan
İmza:	e-posta:	Öğrenci No:		

[12p.] **a)** $\int x \sin^{-1} x \, dx$ [13p.] **b)** $\int \frac{x+1}{x^3-2x^2} dx$

integrallerini çözünüz.

a) $I = \int x \sin^{-1} x \, dx$ $\sin^{-1} x = u$ $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = du$

$x\,dx = dv$, $v = \frac{x^2}{2}$

$I = \frac{x^2}{2}.\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2.dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[\begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t\, dt \end{array}\right]$

$1-x^2 = 1-\sin^2 t = \cos^2 t$

$I = \frac{x^2}{2}\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 t.\cancel{\cos t}}{\cancel{\cos t}} dt$ $\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$

$I = \frac{1}{2}\left(x^2.\sin^{-1} x - \int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)dt\right)$

$I = \frac{1}{2}\left(x^2.\sin^{-1} x - \frac{1}{2}.t + \frac{1}{2}.\frac{\overbrace{2\sin t\cos t}}{2}\right) + C$

$I = \frac{1}{2}\left(x^2.\sin^{-1} x - \frac{1}{2}\sin^{-1} x + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.2.x.\sqrt{1-x^2}\right) + C$

b) $I = \int \frac{(x+1)}{x^2(x-2)} dx$ $\frac{x+1}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2}$

$\frac{x(x-2)}{} \quad \frac{(x-2)}{} \quad \frac{x^2}{}$

$x+1 = A(x^2-2x) + B(x-2) + Cx^2$

$x+1 = (A+C)x^2 + x(-2A+B) - 2B$

$A+C=0$ $-2A+B=1$ $-2B=1$

$C=-A$ $2A=-\frac{3}{2}$ $B=-\frac{1}{2}$

$C=\frac{3}{4}$ $A=-\frac{3}{4}$

$I = -\frac{3}{4}\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-2}$

$I = -\frac{3}{4}\ln|x| + \frac{1}{2x} + \frac{3}{4}\ln|x-2| + C$

MATEMATİK 101 YIL SONU SINAVI 11 AĞUSTOS 2010

SORU 3:

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Liste No:	Puan
İmza:	e-posta:	Öğrenci No:		

[12p.] **a)** $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{e^{x+1}} dx$ integralini hesaplayınız,

[13p.] **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\int_x^0 e^{\sin t} dt}{\tan^{-1}(x^2)} = ?$

a) $I = \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x+1}}$ $\quad f(x) = \frac{x^2}{e^{x+1}}$ $\quad x \in [1, \infty]$

$f(x) = e^{-1} \cdot \frac{x^2}{e^x} = x^2 \cdot e^{-x} e^{-1}$

$I = \int_1^{\infty} e^{-1} x^2 e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} e^{-1} \int_1^b x^2 e^{-x} dx$ $\quad \left[\begin{matrix} x^2 = u & 2x\,dx = du \\ e^{-x}dx = dv, & v = -e^{-x} \end{matrix}\right]$

$e^{-1}\left(\lim_{b\to\infty} -x^2 e^{-x}\Big|_1^b + 2\int_1^b x e^{-x} dx\right) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{e} + 2 \lim_{b\to\infty} \left[-x e^{-x}\Big|_1^b + \int_1^b e^{-x} dx\right]\right)$

$\left(\lim_{b\to\infty} \frac{b^2}{e^b} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{2b}{e^b} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \frac{2}{e^b} = 0\right)$

$= \frac{1}{e}\cdot\left(\frac{1}{e} + 2\cdot\frac{1}{e} - 2e^{-x}\right)\Big|_1^b = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^2} = \frac{5}{e^2}$

$\int_1^{\infty} f(x)dx$ genelleştirilmiş integrali yakınsaktır.

MATEMATİK 101 YIL SONU SINAVI 11 AĞUSTOS 2010

SORU 3:

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Liste No:	Puan
İmza:	e-posta:	Öğrenci No:		

[12p.] **a)** $\int_1^{\infty} \frac{x^2}{e^{x+1}} dx$ integralini hesaplayınız.

[13p.] **b)** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\int_x^0 e^{\sin t} dt}{\tan^{-1}(x^2)} = ?$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x + 2\int_x^0 e^{\sin t} dt}{tg^{-1}(x^2)} \quad \left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2.e^{\sin x}}{\frac{2x}{1+x^4}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2(\cos 2x - e^{\sin x})}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} (1+x^4)$ $\quad \left(\frac{0}{0}\right)$ $\quad 1$

$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x - \cos x . e^{\sin x}}{1} \cdot 1$

$= \frac{0 - 1.e^0}{1} . 1$

$= -1$

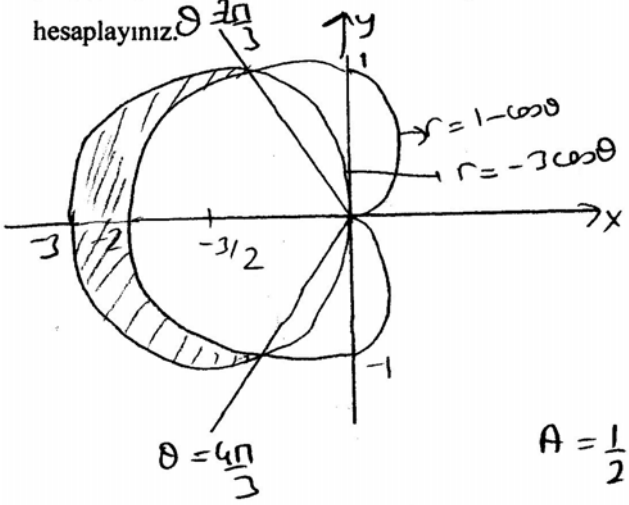
MATEMATİK 101 YIL SONU SINAVI 11 AĞUSTOS 2010

SORU 4:

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Liste No:	Puan
İmza:	e-posta:	Öğrenci No:		

[13p.] **a)** $r = 1-\cos\theta$ kardioidi dışında, $r = -3\cos\theta$ dairesi içinde kalan alanı hesaplayınız.

[12p.] **b)** $r = 1+\cos\theta$ kardioidinin, $r = -\cos\theta$ çemberinin içinde kalan parçasının yay uzunluğunu hesaplayınız.



$1-\cos\theta = -3\cos\theta$

$1 = -3\cos\theta + \cos\theta = -2\cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$A = \frac{1}{2}\cdot 2\int_{\theta=\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\left[(-3\cos\theta)^2 - (1-\cos\theta)^2\right]d\theta$$

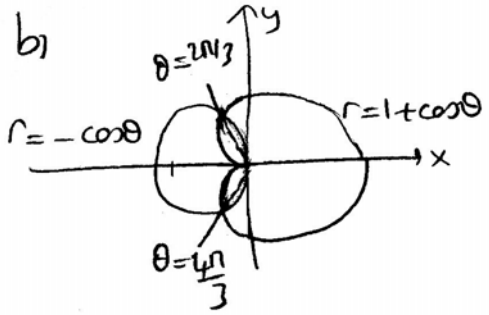
$$A = \int_{\theta=2\pi/3}^{\pi}(9\cos^2\theta - 1 + 2\cos\theta - \cos^2\theta)\,d\theta$$

$$A = \int_{\theta=\frac{2\pi}{3}}^{\pi}(-1+2\cos\theta+8\cos^2\theta)\,d\theta = \left[-\theta + 2\sin\theta + 4\left(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)\right]\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}}^{\pi}$$

($\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$; $-\theta + 2\sin\theta + 2\sin 2\theta$)

$$A = 3\cdot\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) - 2\cdot\sin\frac{2\pi}{3} - 2\sin\frac{4\pi}{3} = \pi - \sqrt{3} + \sqrt{3} = \pi$$

b)



$r = -\cos\theta \qquad r^2 = r\cos\theta$

$x^2 + y^2 + x = 0$

$\left(x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$r = 1+\cos\theta, \quad r = -\cos\theta$

$1+\cos\theta = -\cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\theta_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\theta_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$$S = 2\int_{\theta=2\pi/3}^{\pi}\sqrt{r^2+\dot r^2}\,d\theta$$

$r = 1+\cos\theta$

$\dot r = -\sin\theta$

$r^2 + \dot r^2 = (1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta$

$r^2 + \dot r^2 = 1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta$

$r^2 + \dot r^2 = 2(1+\cos\theta) = 2\cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$$S = 2\int_{\theta=\frac{2\pi}{3}}^{\pi} 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$S = 2.2\int_{\theta=\frac{2\pi}{3}}^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8\sin\frac{\theta}{2}\Big|_{\theta=2\pi/3}^{\pi} = 8\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$