

SORU 1

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[10 p] a) $[0, 5]$ kapalı aralığının eşit uzunluklu 5 alt aralıktan oluşan bir parçalanışındaki alt aralıkların orta noktalarını kullanarak $f(x) = \sin(\pi x)$ fonksiyonu için bir Riemann toplamı yazınız ve bu toplamı hesaplayınız.

[15 p] b) $y = 4x - x^2$ ve $y = x$ eğrilerinin sınırladığı alan parçasının $x = 4$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini hesaplayınız.

ÇÖZÜM

(a) $[0, 5]$ aralığının parçalanışı: $[0, 1], [1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 5]$.

Alt aralıkların uzunlukları: $\Delta x_k = \frac{5-0}{5} = 1, k = 1, 2, 3, 4, 5$.

Orta noktalar: $c_k = k - \frac{1}{2} = \frac{2k-1}{2}, k = 1, 2, 3, 4, 5 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{3}{2}, c_3 = \frac{5}{2}, c_4 = \frac{7}{2}, c_5 = \frac{9}{2}$.

Riemann toplamı: $\sum_{k=1}^5 f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^5 \sin\left[\frac{\pi(2k-1)}{2}\right] \cdot 1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^5 \sin\left[\frac{\pi(2k-1)}{2}\right] \cdot 1 = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{5\pi}{2} + \sin\frac{7\pi}{2} + \sin\frac{9\pi}{2} = 1.$$

(b) Eğrilerin kesim noktaları: $4x - x^2 = x \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ ve $x = 3$.

Kabuk yarıçapı $= 4 - x$, kabuk yüksekliği $= 4x - x^2 - x = 3x - x^2$ olmak üzere

$$V = 2\pi \int_0^3 (4-x)(3x-x^2) dx = 2\pi \int_0^3 (12x - 4x^2 - 3x^2 + x^3) dx$$

$$= 2\pi \left(12 \frac{x^2}{2} - \frac{7}{3} x^3 + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^3 = \frac{45}{2} \pi$$

SORU 2

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[13 p] a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan^{-1} x - \pi 2^{x-3}}{\ln(2-x) + \int_1^x t^3 \sin^{-1} t dt}$ limitini hesaplayınız.

[12 p] b) Verilen integrallerin yakınsaklığını veya ıraksaklığını belirleyiniz:

i) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2} dx$ ii) $\int_0^1 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$.

ÇÖZÜM

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan^{-1} x - \pi 2^{x-3}}{\ln(2-x) + \int_1^x t^3 \sin^{-1} t dt} = \{(0/0)\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \pi 2^{x-3} \ln 2}{-\frac{1}{2-x} + x^3 \sin^{-1} x} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{\pi \ln 2}{4}}{-1 + \sin^{-1}(1)}$

$$= \frac{2 - \pi \ln 2}{4\left(-1 + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2 - \pi \ln 2}{2(\pi - 2)}$$

(b) (i) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2}$, $g(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{5/3}}$ alalım. $\int_1^{\infty} g(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{5/3}}$, $p = 5/3 > 1$

integrali yakınsak olduğundan ve $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{x^{5/3}}{1}$

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 3\sqrt{x} - 2} = 1 \neq 0$ olduğundan Limit karşılaştırma testine göre $\int_1^{\infty} f(x) dx$

integrali yakınsaktır.

(ii) $\int_0^1 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{\csc^2\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} dx$ $\begin{cases} u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ x = a \Rightarrow u = \sqrt{a} \\ x = 1 \Rightarrow u = 1 \end{cases}$

$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{u=\sqrt{a}}^1 \frac{1}{2} \csc^2\left(\frac{\pi}{4} u\right) du = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[-\frac{2}{\pi} \cot\left(\frac{\pi}{4} u\right) \right]_{u=\sqrt{a}}^1$

$= \lim_{a \rightarrow 0^+} \left(-\frac{2}{\pi} \cot\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{\pi} \cot\left(\frac{\pi\sqrt{a}}{4}\right) \right) = -\frac{2}{\pi} + \infty = \infty$ olduğundan integral ıraksaktır.

SORU 3

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[13 p] a) $f(\theta) = \sin^3\left(\frac{\theta}{3}\right)$ kutupsal eğrisinin $\theta = 0$ 'dan $\theta = \pi/2$ 'ye kadar olan uzunluğunu bulunuz.

[12 p] b) $f(\theta) = \cos(3\theta)$ eğrisinin $\theta = \pi/3$ noktasındaki teğetin denklemini yazınız.

ÇÖZÜM

$$(a) \quad r'(\theta) = f'(\theta) = 3 \cdot \frac{1}{3} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \sin^6\left(\frac{\theta}{3}\right) + \sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{3}\right) = \sin^4\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$L = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\theta}{3}\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} [1 - \cos\left(\frac{2\theta}{3}\right)] d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{2\theta}{3}\right) \right] \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$(b) \quad x = \cos \theta \cos(3\theta), \quad y = \sin \theta \cos(3\theta)$$

$$\Rightarrow m = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \Big|_{\pi/3} = \frac{\cos \theta \cos(3\theta) - 3 \sin \theta \sin(3\theta)}{-\sin \theta \cos(3\theta) - 3 \cos \theta \sin(3\theta)} \Big|_{\pi/3} = \frac{-\frac{1}{2} - 0}{-\frac{\sqrt{3}}{2}(-1) - 0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Teğet denklemi} \quad y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \quad \text{veya}$$

$$y = -\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{olarak bulunur.}$$

SORU 4

Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Adı:	Soyadı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[8+5 p] (a) İntegralleri hesaplayınız: i) $\int \frac{dt}{\sqrt{t}(t-2)}$ ii) $\int_0^1 \sinh^2(2x) dx$.

[12 p] (b) Kısmi integrasyon yöntemini kullanarak

$$\int \sin^n x dx = -\left(\frac{1}{n}\right) \sin^{n-1}(x) \cos(x) + \left(\frac{n-1}{n}\right) \int \sin^{n-2}(x) dx$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM

(a) i) $t = x^2$, $dt = 2x dx$ değişken dönüşümü yapılırsa $\int \frac{dt}{\sqrt{t}(t-2)} = \int \frac{2 dx}{(x^2-2)}$ integrali

elde edilir. $\frac{1}{x^2-2} = \frac{1}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} = \frac{A}{x-\sqrt{2}} + \frac{B}{x+\sqrt{2}}$ denkleminde

$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ve $B = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ bulunur. Basit kesirler ayırma yöntemiyle

$$\int \frac{2 dx}{(x^2-2)} = \int \frac{1}{\sqrt{2}(x-\sqrt{2})} - \int \frac{1}{\sqrt{2}(x+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x-\sqrt{2}| - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x+\sqrt{2}| + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| + C \text{ bulunur.}$$

ii) $\sinh^2 A = \frac{1}{2}(\cosh 2A - 1)$ bağıntısı kullanılarak

$$\int_0^1 \sinh^2(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (\cosh(4x) - 1) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sinh 4x}{4} - x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{8} \sinh(4) - \frac{1}{2} \text{ bulunur.}$$

(b) $\int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x dx$, $\begin{cases} u = \sin^{n-1} x \Rightarrow du = (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos x dx \\ v = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cdot (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx \Rightarrow$$

$$[1 + (n-1)] \int \sin^n x dx = -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx \Rightarrow$$

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{(n-1)}{n} \int \sin^{n-2} x dx.$$