MATEMATİK 101 ARASINAV 10 NISAN 2010

SORU 1 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[10 puan] a) Aşağıdaki limiti hesaplayınız. (L'Hopital Kuralını kullanmayınız.)

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-cos(x-1)}{(x^3-1)^2} = ?$$

[15 puan] b) $\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \sin^{-1}(\frac{-1}{x^2+1}) & x < 0 \\ \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{x-1} & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz, süreksizlik cinslerini belirleyiniz. Yanıtınızı açıklayınız.

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(x^3-1)^2} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1-\cos(x-1)}{(x^3-1)^2}\cdot\frac{1+\cos(x-1)}{1+\cos(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2}\cdot\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\cdot\frac{1}{1+\cos(x-1)}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$$

veya

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{(x^3-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sin^2(\frac{x-1}{2})}{4(\frac{x-1}{2})^2(x^2+x+1)^2} = \frac{2}{4\cdot 3^2} = \frac{1}{18}$$

b) $\underline{x=0} \Rightarrow f(0) = \cos^{-1}1 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \sin^{-1}\frac{-1}{x^2+1} = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \cos^{-1}1 = 0 = f(0)$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$ olduğundan $f(x)$, $x=0$'da sıçramalı süreksizliğe sahiptir.

$\underline{x=1}$, $f(1) = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\to 1^-} \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} = \infty$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$ olduğundan $x=1$'de $f(x)$ sonsuzluk süreksizliğine sahiptir.

MATEMATİK 101 ARASINAV 10 NISAN 2010

SORU 2 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:		Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:		Öğrenci No:		

Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.

[13 puan] a) $\mathbf{y^2\cos\frac{1}{y} = 2x + 2y}$ eğrisinin $(\frac{-2}{\pi}, \frac{2}{\pi})$ noktasındaki normal doğrusunun denklemini bulunuz.

[12 puan] b) $\mathbf{f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}}$ fonksiyonu [-1,1] aralığında Rolle Teoremi'nin şartlarını sağlar mı? Eğer sağlarsa, c değer veya değerlerini bulunuz.

a) $2yy'\cos\frac{1}{y} - y^2\left(-\frac{y'}{y^2}\right)\sin\frac{1}{y} = 2+2y'$

$\left(-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right) \Rightarrow 2\cdot\frac{2}{\pi}\cdot y' \cancel{\cos\frac{\pi}{2}} + y'\sin\frac{\pi}{2} = 2+2y' \Rightarrow y' = -2$

$y' = m_t = -2$

$\left(-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right)$ noktasındaki eğrinin normal doğrusunun eğimi $m_n = \frac{1}{2}$

Normal doğrusunun denklemi: $y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{\pi}\right) + \frac{2}{\pi}$

$\boxed{y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{\pi}}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}$ $[-1,1]$'de süreklidir. ($x^2+1 \neq 0$ ve $1-x^2 \geq 0$ olduğundan)

$f'(x) = \frac{\frac{-x(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\sqrt{1-x^2}}{(x^2+1)^2} = \frac{x^3-3x}{\sqrt{1+x^2}(1+x^2)^2}$

$f'(x)$, $(-1,1)$'de mevcuttur.

$f(1) = f(-1) = 0$

Bu takdirde, $(-1,1)$'de $f(x)$ fonksiyonuna Rolle teoremi uygulanabilir.

$\exists c \in (-1,1)$ vardır ki $f'(c) = 0$ dır.

$f'(c) = \frac{c(c^2-3)}{\sqrt{1+c^2}(1+c^2)^2} = 0 \Rightarrow$ $c_1 = 0 \in (-1,1)$, $c_2 = \sqrt{3} \notin (-1,1)$, $c_3 = -\sqrt{3} \notin (-1,1)$ $\Rightarrow \underline{\underline{c=0}}$

MATEMATİK 101 ARASINAV 10 NISAN 2010

SORU 3 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	Puan
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

[25 puan] $\mathbf{f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}}$ fonksiyonunun

a) tanım aralığını,

b) kesim noktalarını,

c) varsa düşey, yatay ve eğik asimptotlarını,

d) artan ve azalan olduğu aralıkları ve varsa yerel ekstremum değerlerini,

e) aşağı ve yukarı konkav olduğu aralıkları ve varsa büküm noktalarını bularak grafiğini çiziniz

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ a) $T.A = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) $x = 0 \Rightarrow y = 1$, $y \neq 0$

c) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty \Rightarrow \boxed{x=-1}$ D.A

$\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = \mp\infty$ Y.A. yok. $\Rightarrow$ E.A olabilir

$m = \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\mp\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$

$\boxed{y = x}$ E.A

d) $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

		-2		0	
x^2+2x	+	0	−	0	+
y'	↗		↘		↗

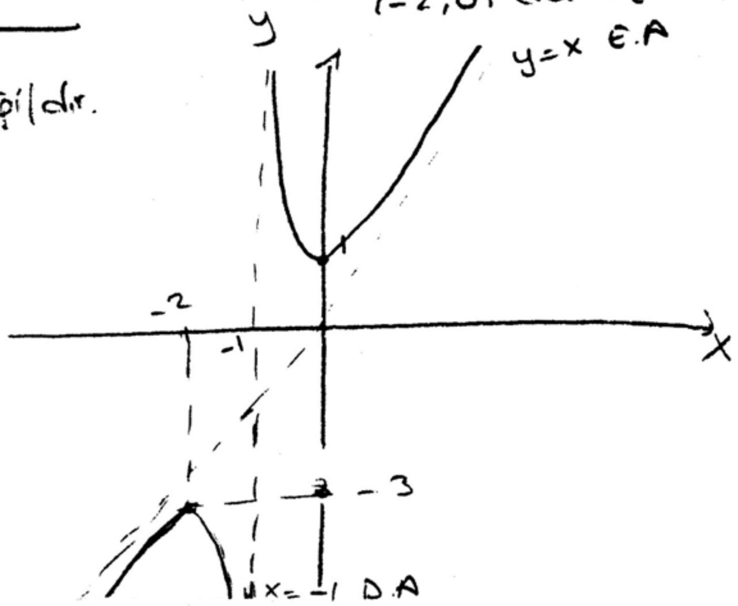
$f(-2) = -3$ lokal mak.
$f(0) = 1$ lokal min
$f(x)$: $(-\infty,-2)$ ve $(0,\infty)$'da artan
$(-2,0)$'da azalan
$y = x$ E.A

e) $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$

		-1	
$(x+1)^3$	−	0	+
y''	∩		∪

$x = -1$ noktası
D.A old.dan büküm noktası değildir.

x	$-\infty$	-2		-1		0	∞
$f'(x)$	+		−		−		+
$f(x)$	$-\infty$ ↗ ∩	-3	↘ ∩ $-\infty$		∞ ↘ ∪	1	↗ ∞ ∪



MATEMATİK 101 ARASINAV 10 NISAN 2010

SORU 4 Aşağıdaki boşluklar öğrenci tarafından doldurulacaktır. (Puan Hariç)

Soyadı:	Adı:	Grup No:	Sıra No:	**Puan**
İmza:	Elektronik Posta(e-mail) adresi:	Öğrenci No:		

`Lütfen bu soruyu bu kağıdın ön yüzünü ve gerekirse arka yüzünü kullanarak cevaplayınız.`

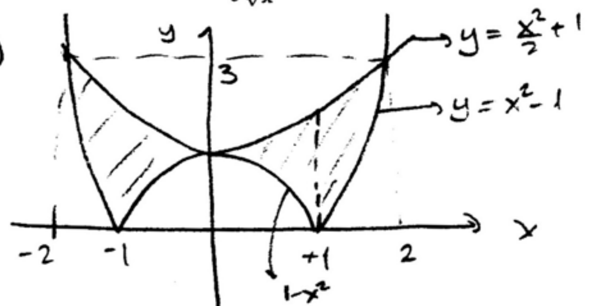
15 puan

[~~13 puan~~] a) $\mathbf{y = \frac{x^2}{2} + 1}$ ve $\mathbf{y = |x^2 - 1|}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

10 puan

[~~6 puan~~] b) $\mathbf{f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 \, dt}$ ise, $\mathbf{f'(x)} =$?

a)



$y = \frac{x^2}{2}+1 \quad y = x^2-1$

$\frac{x^2}{2} = 2$

$x = \mp 2$

$(-2, 3), (2, 3)$

$y = \frac{x^2}{2}+1, \; y = -x^2+1$

$\frac{3x^2}{2} = 0$

$x = 0$

$(0, 1)$

$$A = 2\int_0^1 \left[\left(\frac{x^2}{2}+1\right) - (1-x^2)\right]dx + 2\int_1^2 \left[\left(\frac{x^2}{2}+1\right) - (x^2-1)\right]dx$$

$$A = 2\int_0^1 \frac{3x^2}{2}dx + 2\int_1^2 \left(-\frac{x^2}{2}+2\right)dx = x^3\Big|_0^1 + \left(-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Big|_1^2 = 1 - \frac{8}{3} + 8 + \frac{1}{3} - 4 = \frac{8}{3} \;//$$

b) $$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 \, dt$$

$$f'(x) = (2\sqrt{x})' \sin(2\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x})' \sin(\sqrt{x})^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \sin 4x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x$$