

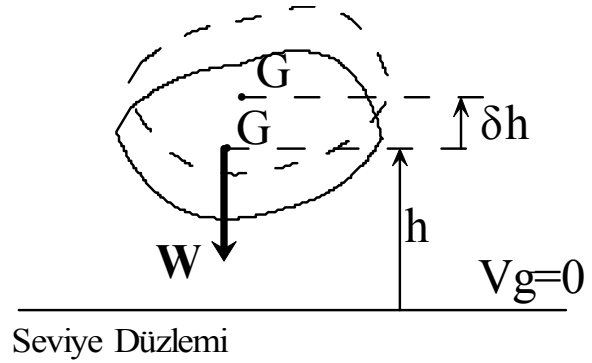
Ağırlığın Potansiyel Enerjisi

$W=mg$, δh kadar yukarıya doğru yer değiştirsin, Virtüel iş,

$$\delta U = -W \delta h = -mg \delta h$$

NOT: Eğer cisim aşağıya doğru δh yer değişimi yapıyorsa ve $+h$ aşağıya doğru ise

$$\delta U = W \delta h = mg \delta h \text{ yazılır.}$$



Tanım: Ağırlığın V_g potansiyel enerjisi W ağırlığının işinin NEGATİF DEĞERİNE eşittir. Şekildeki h yüksekliğinde

$$V_g = -U = \text{Ağırlığın işi} = mgh$$

Ağırlığın Potansiyel Enerjisi

KORUNUMLU (POTANSİYELLİ KUVVETLER): Bir kuvvetin etkisiyle bir cisim bir konumdan başka bir konuma yer değiştirdiğinde kuvvetin işi, takip edilen yola bağlı değil de sadece başlama ve bitiş konumlarına ise cisme etkiyen kuvvet potansiyellidir denir. Ağırlık ve yay kuvveti potansiyellidir.

$$\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{OG} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

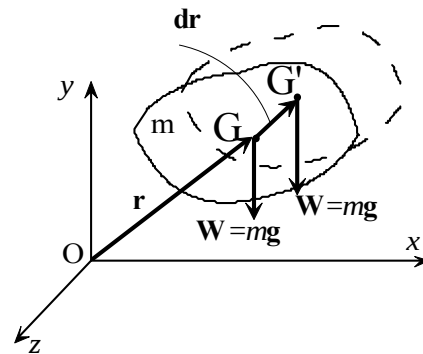
$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \mathbf{GG}'$$

$$dU = \mathbf{F}d\mathbf{r}$$

$$dU = (-W\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) = -Wdy$$

$$\text{Tanım gereği } dV_g = dV = -dU = -(-Wdy)$$

$$dV = Wdy$$



veya

$\frac{dV}{dy} = W$ bulunur. Ağırlığın sonlu yerdeğişiminde sabit olduğunu varsayarak

$V = \int W dy = Wy + C$ bulunur.

C ilk şartlardan ($y=0$ da $V=0$ gibi) bulunur.

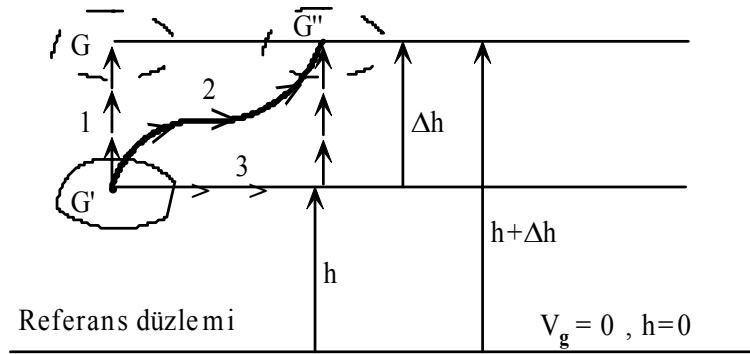
$V = Wy$ bu ağırlığın işinin (-) değeridir.

Cismin G kütle merkezi

1, 2, 3 gibi hangi yolla

Δh kadar yükselirse

$\Delta V_g = mg\Delta h$ olur.



Bu yer deęiřtirimini δh sanal olarak ve $\Delta V_g \rightarrow \delta V_g$ ile temsil ederek

$\delta V_g = mg\delta h$ sanal ağırlık potansiyeli elde edilir.

NOT: Eğer G aşağıya doğru δh kadar yer deęiřtirirse

$\delta V_g = -mg\delta h$ sanal ağırlık potansiyeli

Birimi yine SI sisteminde J (JOULE=JUL) dir.

Enerji Denklemi

İçerisinde YAY (ELASTİK ELEMAN) olan ve düşey yer değiştirme yapan bir mekanik sisteme VİRTÜEL (SANAL) iş denklemi tatbik edersek (Dış kuvvetler ve ağırlık da var).

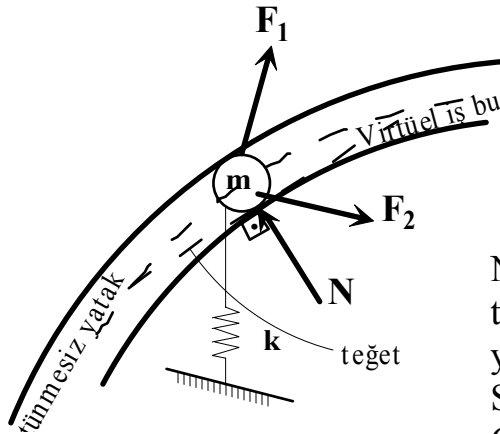
Toplam Virtüel İş = δU işini yay ve ağırlık kuvveti olmayan TÜM DİĞER dış kuvvetlerin Virtüel işlerinin toplamını δU ile temsil ederek DENG

KONUMUNDA

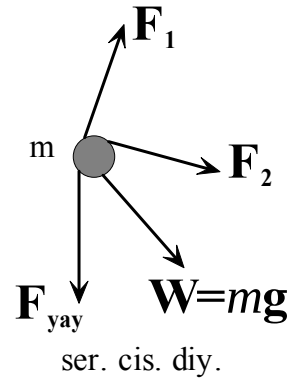
$$\delta U = \delta U' - (\underbrace{\delta V_g + \delta V_e}_{\delta V = \text{Toplam pot. Enerjinin Virtüel değişimi}}) = 0 \quad \text{yazılır.}$$

Veya

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta U' - \delta V = 0 \\ V = V_g + V_e \text{ dir.} \end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \delta U' = \delta V \\ \text{İŞ - EN. DENK} \end{array}}$$



NOT: N normal tepkisi virtüel iş yapmaz.
Ser. Cis. Diy.
Gösterilmez.



$\delta U'$: F_1 ve F_2 nin Virtüel İşleri

δV_e = Yayın Virtüel pot. Enerjisindeki değişimi

δV_g = Ağırlığın Virtüel yükseklikle olan potansiyel enerji değişim

DENGİNİN KARARLILIĞI

İş yapan aktif Dış kuvvet yok.
Hareket ağırlık ve yay kuvveti ile ortaya çıkıyor.

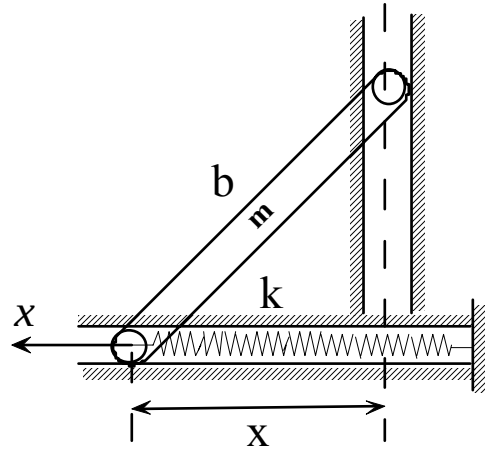
$$\delta U' = 0 \text{ dir.}$$

$$\delta U' = \delta V = \delta V_e + \delta V_g$$

$$\delta V_e + \delta V_g = 0$$

$$\delta(V_e + V_g) = 0 \Rightarrow \boxed{\delta V = 0} \text{ bu}$$

DENGE KONUMUNDA



Bu ifade, matematik olarak tek x gibi serbestlik derecesi olan sistemlerde

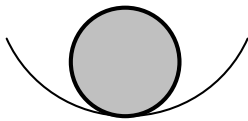
$$\frac{dV}{dx} = 0 \text{ demektir.}$$

SONUÇ: Denge konumunda bir mekanik sistemin toplam potansiyel enerjisinin türevi sıfırdır.

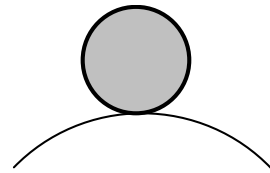
NOT: x, y, z gibi üç serbestlik derecesi olan sistemlerde bu ifade

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ demektir.}$$

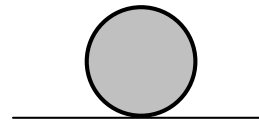
Üç Hale Uygulanır



Minimum Potansiyel Enerji
Denge Kararlı



Maksimum Potansiyel Enerji
(Denge Kararsız)



Sabit Potansiyel Enerji
(Doğal Denge)

Denge konumunda $\frac{dV}{dx} = 0$ olmak şartıyla

Eğer;

a) $\frac{d^2V}{dx^2} > 0$ ise V=Minimum Denge Kararlı

b) $\frac{d^2V}{dx^2} < 0$ ise V = Maksimum Denge Kararsız

NOT: $\frac{d^2V}{dx^2}$ nin de sıfır olduğu konumlarda bir üst mertebeli türeve bakılır. Çift mertebeli türeve (+) ise Denge Kararlı ve (-) ise Denge Kararsız olur.

NOT: $\frac{dV}{dx} = 0$ iken; sıfır olmayan yüksek mertebeli türevlerin mertebesi (tek) ise DENGİ KARARSIZ'dır.

NOT: $\frac{dV}{dx} = 0$ ve $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ ise O konum V potansiyelinin dönüm noktasıdır.

NOT: Çok serbestlik dereceli (bilinmeyenli) sistemlerde Kararlılık daha çok emek ve bilgi ister. Örneğin; iki değişkenli sistemlerde Taylor-seri açılımı kullanılır.

Örnek Problem: 10 kg'lık kütle $k=2 \text{ kN/m}$ olan yaya bağlanmıştır. V toplam potansiyel enerjiyi elde ediniz. Grafiğini çiziniz. Denge konumunda V nin minimum olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Yayın potansiyeli $V_e = \frac{1}{2} kx^2$

ağırlığın potansiyeli $V_g = -U = -mgh$

$$V_g = -mgx$$

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2} kx^2 - mgx$$

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow kx - mg = 0$$

$$x = \frac{mg}{k} \text{ denge konumu}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = k > 0 \text{ o halde denge konumunda } V \text{ minimum.}$$

DENGE KARARLIDIR.

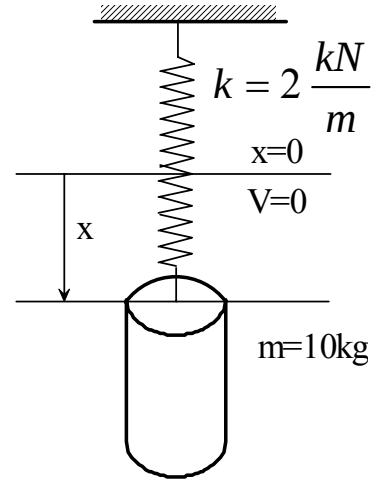
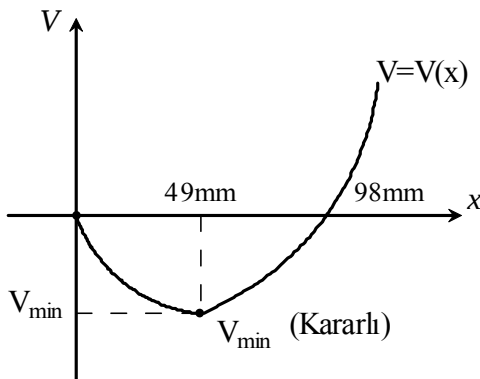
$$V = \frac{1}{2} (2000)x^2 - 10(9,81)x \text{ Joule}$$

x	0	$mg/k=49 \text{ mm}$	$2mg/k$	x
V'		-	+	+
V	0	$\searrow$ min. $\nearrow$	$\nearrow$	

$$x = \frac{mg}{k}$$

$$x = \frac{10(9,81)}{2000}$$

$$x = 0,0490 \text{ m}$$



Örnek Problem: m kütle iki bağlantı elemanı şekildeki gibi bir sistem oluşturmuştur. Ağırlığı ihmal edilen ve A noktasında elemene bağlanan AB çubuğunun üzerinde k sertliğinde bir yay vardır. $\theta=0$ konumunda yay normal uzunluğundadır. **P** kuvveti ile kol çekildiğinde AB yayı sıkışmaktadır. Denge konumunda **P** kuvvetini θ cinsinden elde ediniz.

Çözüm: $BA = 2b \sin \frac{\theta}{2}$

$BA = x = 2b \sin \frac{\theta}{2}$

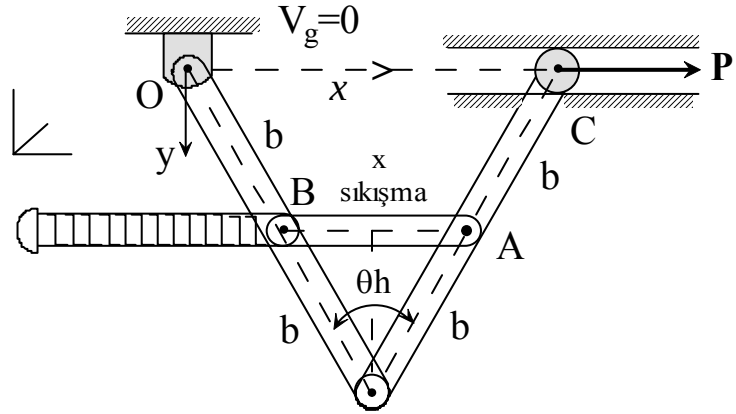
yaydaki sıkışma

$V_e = \frac{1}{2} kx^2$

$V_e = \frac{1}{2} k(2b \sin \frac{\theta}{2})^2 = 2b^2 k \sin^2 \frac{\theta}{2}$

$AB = x$ 'e karşılık $h = b \cos \frac{\theta}{2}$

$V_g = -U = -(2mgh) = -2mgb \cos \frac{\theta}{2}$



$OC = 2b \sin \frac{\theta}{2} + 2b \sin \frac{\theta}{2} = 4b \sin \frac{\theta}{2}$

P'nin Virtüel işi $\delta \mathbf{r}_p = 2b \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta \mathbf{i}$

$\delta U' = P \mathbf{i} \cdot (2b \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta) \mathbf{i} = 2Pb \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta$

$\delta U' = \delta V_e + \delta V_g \Rightarrow 2Pb \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta = \delta(2b^2 k \sin^2 \frac{\theta}{2}) + \delta(-2mgb \cos \frac{\theta}{2})$

$2Pb \cos \frac{\theta}{2} \delta \theta = 2b^2 k \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + mgb \sin \frac{\theta}{2} \delta \theta$

$P = b k \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} mg \tan \frac{\theta}{2}$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -WL \cos \alpha + 2kL^2(1 - \cos \alpha)(+\sin \alpha)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -WL \cos \alpha + 2kL^2 \sin \alpha(1 - \cos \alpha)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = WL \sin \alpha + 2kL^2 \cos \alpha(1 - \cos \alpha) + 2kL^2 \sin^2 \alpha$$

$\alpha = 60^\circ$ için

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} \Big|_{\alpha=60^\circ} = WL \sin 60^\circ + 2kL^2 \cos 60^\circ(1 - \cos 60^\circ) + 2kL^2 \sin^2 60$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = 0,866WL + \frac{2kL^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2kL^2(0,866^2)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = 0,866WL + \frac{1}{2}kL^2 + 2(0,866)^2 kL^2 > 0$$

DENGE KARARLI

Örnek Problem: Şekildeki homojen yarımkürenin verilen konumunun denge konumu olduğunu gösteriniz. Stabilitiyi inceleyiniz.

Çözüm: Kürenin dönmesini belirleyen bir konum seçip incelemeyi yapmalıyız.
 α kadar dönsün.

$$V_g = hW \Rightarrow V_g = -\frac{3}{8}RW \cos \alpha$$

$$\text{Denge Kon. } \frac{dV_g}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{3}{8}RW \sin \alpha = 0$$

$$\text{Verilen halde } \alpha = 0 \text{ da } \frac{dV_g}{d\alpha} = 0 \text{ sağlanır}$$

Denge konumudur.

$$\text{Kararlılık : } \frac{dV_g}{d\alpha} = \frac{3}{8}RW \cos \alpha$$

$$\alpha = 0 \text{ da } \frac{dV_g}{d\alpha} = \frac{3}{8}RW > 0 \text{ denge kararlı.}$$

