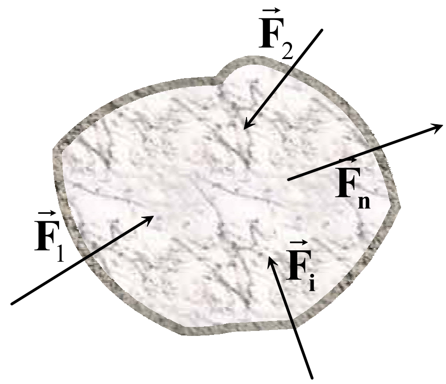
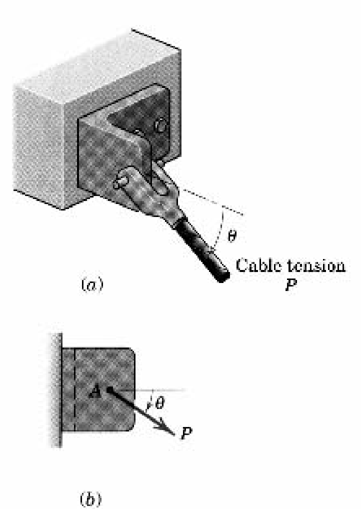
KUVVET SİSTEMLERİ

KUVVET

Vektörel büyüklük

- Kuvvetin büyüklüğü
- Kuvvetin doğrultusu
- Kuvvetin uygulama noktası
- Kuvvetin yönü





$$\vec{S} = (\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$$

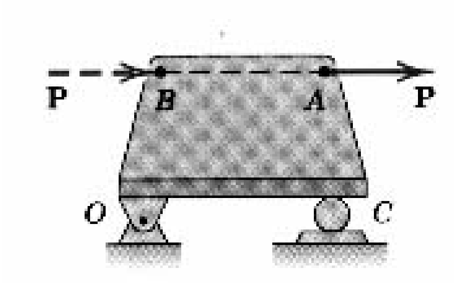
$$\vec{R} = F_1 + F_2 + ... + F_n$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$ Serbest vektör.

P Bağlı vektör.

Kayan Vektör

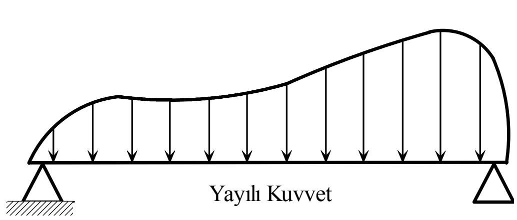
- Kuvvetin büyüklüğü
- Kuvvetin doğrultusu
- Kuvvetin yönü



Tekil kuvvet,
Kayan vektör.

Temas kuvvetleri
Hacimsel Kuvvetler

Tekil Kuvvetler
Yayılı kuvvetler

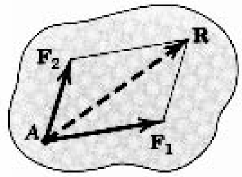


Bir kuvvetin bileşenleri

- Paralelkenar kuralı
- Üçgen kuralı

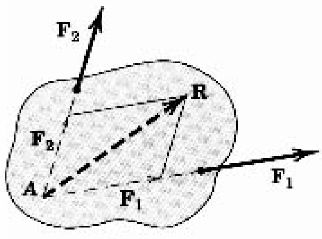
$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$$

Paralel Kenar:



(a)

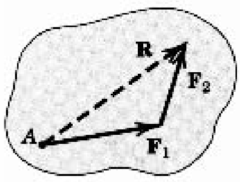
Kesişen Kuvvetler



(b)

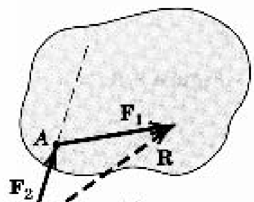
Farklı tatbik noktası olan

Üçgen:



(c)

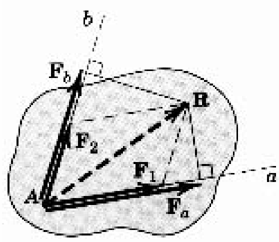
Kuvvetlerden birinin tesir çizgisini diğerinin bitim noktasına öteleme ile **R** elde edilir. Etki değişmez.



(d)

Bu durumda **R** nin tatbik noktası A değildir. Kaçınılmalı.

Genelinde
$|\mathbf{F_1}| \neq |\mathbf{F_2}|$
ve
$\mathbf{F_1} \,//\, \mathbf{F_a}$; $\mathbf{F_2} \,//\, \mathbf{F_b}$ dir.

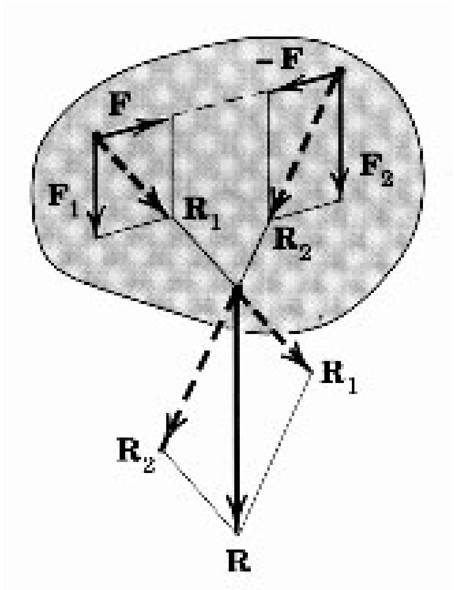


(e)

$\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$; **R** nin bileşenleri ve F_a , F_b ; |**R**| nin a ve b doğrultusundaki dik izdüşümleri

- Bir kuvvetin dik olmayan iki doğrultudaki bileşenleri
- Bir kuvvetin dik olmayan iki doğrultu üzerindeki izdüşümleri

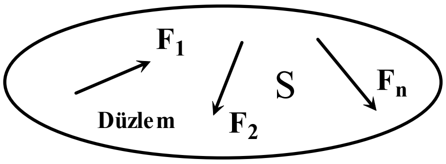
Paralel iki kuvvetin bileşkesi : F_1 // F_2

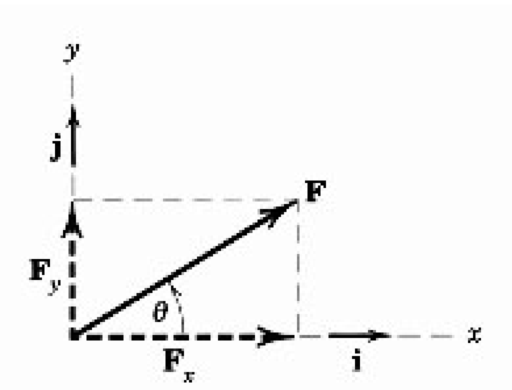


$$\mathbf{R_1} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F}$$
$$\mathbf{R_2} = \mathbf{F_2} + (-\mathbf{F})$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{R_1} + \mathbf{R_2}$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F} + \mathbf{F_2} + (-\mathbf{F})$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$$
$$\mathbf{R} // \mathbf{F_1} // \mathbf{F_2}$$

DÜZLEMSEL KUVVET SİSTEMLERİ

Kartezyen Koordinatlarda Bileşenler





$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$ Vektör bileşenler

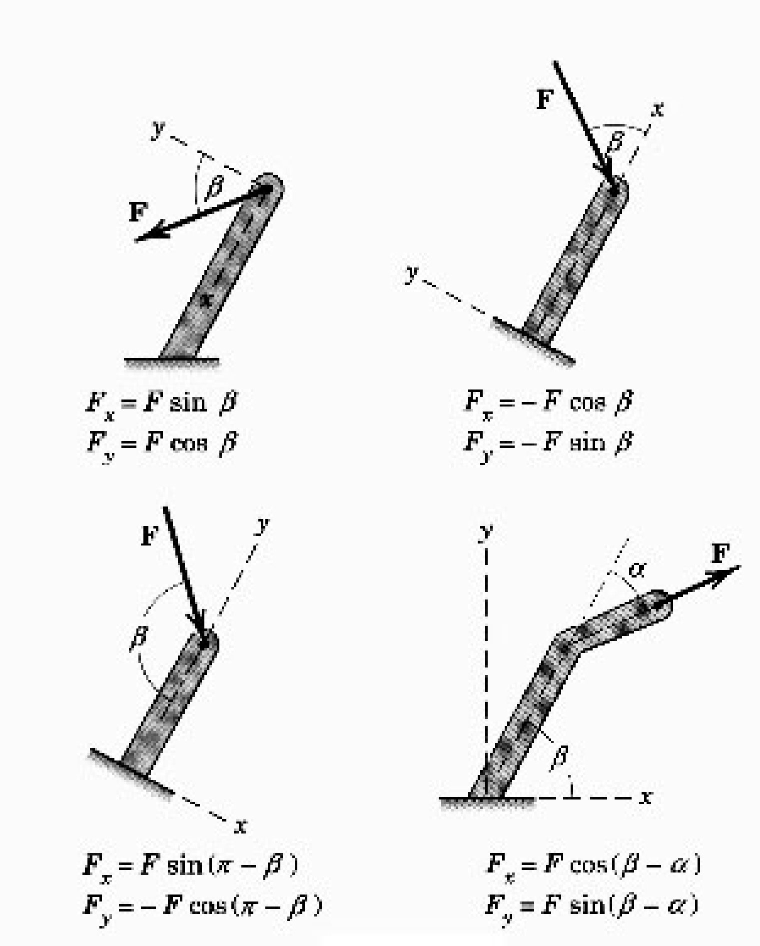
$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$

$F_x = F\cos\theta$ Skaler bileşenler
$F_y = F\sin\theta$ (Koordinatlar)

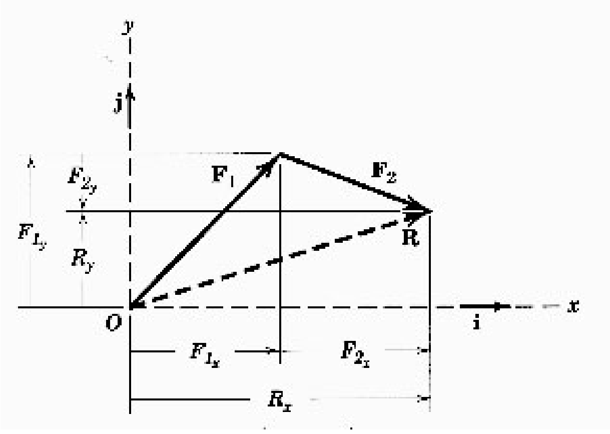
$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ Kuvvetin Büyüklüğü

$\theta = \tan^{-1}\dfrac{F_y}{F_x}$ Kuvvetin x-ekseni ile yaptığı açı

Bir Kuvvetin Değişik Eksen Takımlarına Göre Bileşenleri



İki Düzlemsel Kuvvet Vektörünün Bileşkesi (Resultant)



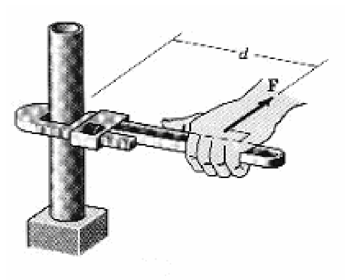
$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (F_{1x}\mathbf{i} + F_{1y}\mathbf{j}) + (F_{2x}\mathbf{i} + F_{2y}\mathbf{j})$$

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} = (F_{1x} + F_{2x})\mathbf{i} + (F_{1y} + F_{2y})\mathbf{j}$$

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = \Sigma F_x$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = \Sigma F_y$$

MOMENT



(a)

NOT : **F** nin bir A noktasına göre yazılan momenti **F** tesir çizgisi üzerinde seçilen NOKTAYA BAĞLI değildir.

İsp:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = \mathbf{AC} \times \mathbf{F}$$

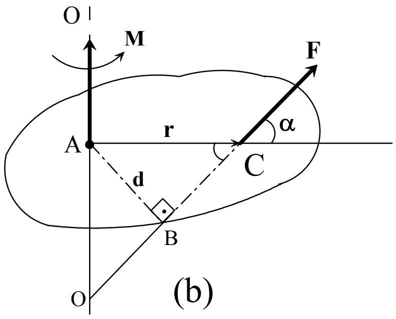
$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = (\mathbf{AB} + \mathbf{BC}) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = \mathbf{AB} \times \mathbf{F} + \mathbf{BC} \times \mathbf{F}$$

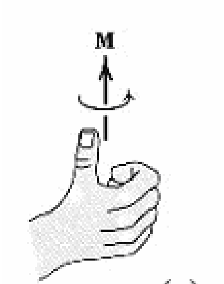
$$\mathbf{BC} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{BC} // \mathbf{F}$$

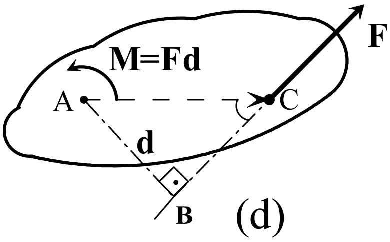
$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}} = \mathbf{AB} \times \mathbf{F} = \mathbf{AC} \times \mathbf{F}$$



(b)



(c)



(d)

$M = F\ d$ Moment vektörünün büyüklüğü

$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ Vektörel çarpım

$M = F\ r \sin\alpha = F\ d$

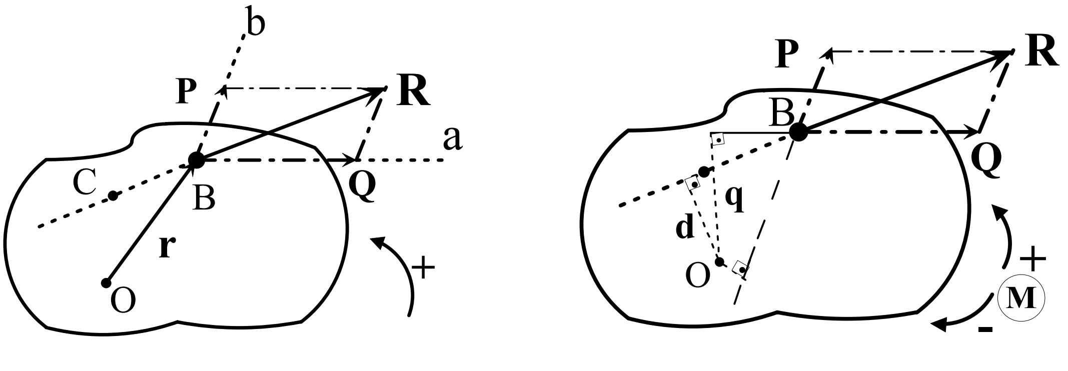
Varignon Teoremi : Bir kuvvetin bir noktaya göre momenti, kuvvetin bileşenlerinin aynı noktaya göre momentlerinin ***cebrik*** toplamına eşittir.

R'nin O'ya göre momenti:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{Q} = \mathbf{r} \times (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$$



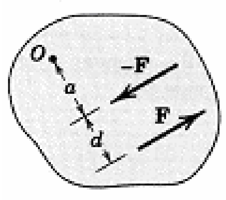
(a) (b)

Momentin büyüklüğü:

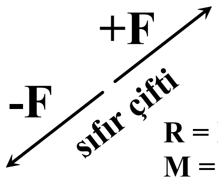
$$M_O = |\mathbf{M}_O| = -R\,d = p\,P - q\,Q$$

Kuvvet Çifti (Couple)

Bileşke : $\mathbf{R} = \mathbf{F} + (\mathbf{-F}) \equiv 0$

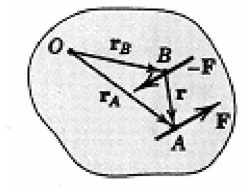


(a)



R = F - F = 0
M = 0

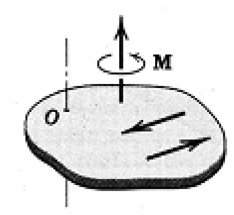
Moment :



(b)

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{OA} \times \mathbf{F} + \mathbf{OB} \times (-\mathbf{F})$$
$$\mathbf{M_O} = (\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) \times \mathbf{F}$$
$$\mathbf{M_O} = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}$$
$$\mathbf{M_{O'}} = \mathbf{O'A} \times \mathbf{F} + \mathbf{O'B} \times (-\mathbf{F})$$
$$\mathbf{M_{O'}} = (\mathbf{O'O} + \mathbf{OA}) \times \mathbf{F} + (\mathbf{O'O} + \mathbf{OB}) \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{O'O} + \mathbf{OA} - \mathbf{O'O} - \mathbf{OB}) \times \mathbf{F}$$

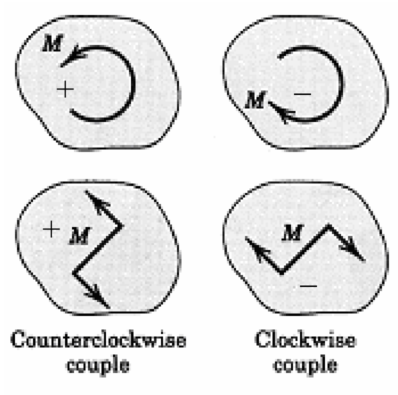
$$\mathbf{M_{O'}} = (\mathbf{OA} - \mathbf{OB}) \times \mathbf{F}$$
$$\mathbf{M_{O'}} = \mathbf{BA} \times \mathbf{F}$$
$$\mathbf{M_O} = \mathbf{M_{O'}} = \ldots\ldots = \mathbf{M}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



(c)

Sonuç :
Çiftin momenti uzayın her noktasında aynıdır.
$\mathbf{M_O} = \mathbf{M_{O'}} = \ldots\ldots = \mathbf{M_i} = \mathbf{M}$
alınır.

<u>Semboller</u>



(d)

Büyüklük Şek. (a) ⇒ $M = F\,(d + a) - F\,a$

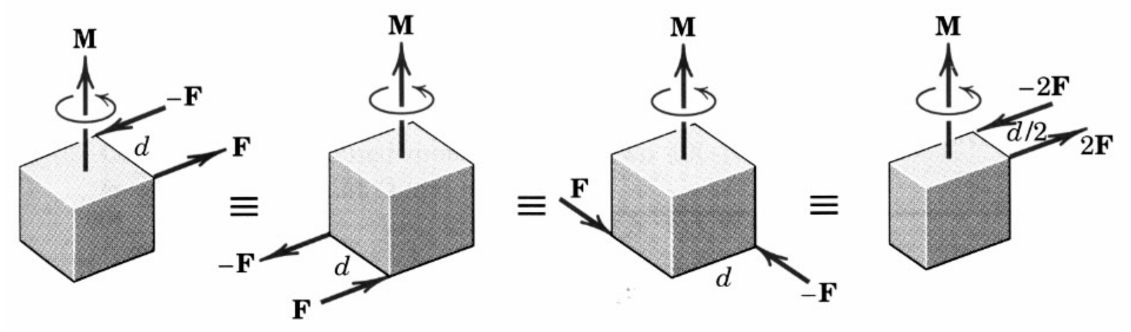
$$M = F\,d$$

Kuvvet çiftinin bütün noktalara göre momenti eşittir. Bileşkesi **R** = **0** dır.

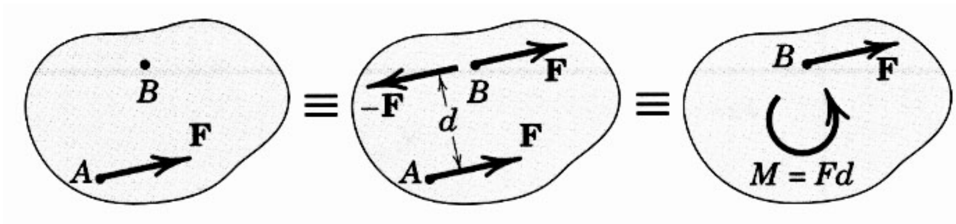
$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Eşdeğer kuvvet çiftleri $M = F.d = (2F)(\frac{d}{2})$

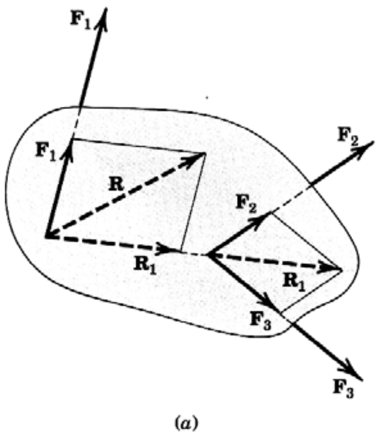


Bir Kuvvet Vektörünün Nakli : F nin B noktasına taşınması



kuvvet + kuvvet çifti sistemi

BİLEŞKE



$R = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots = \Sigma F$

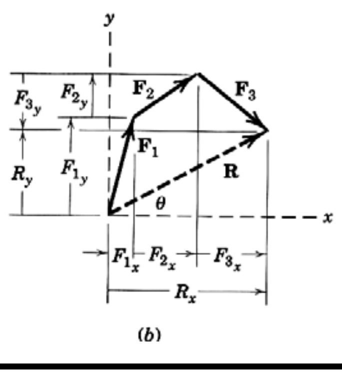
$R_x = \Sigma F_x$

$R_y = \Sigma F_y$

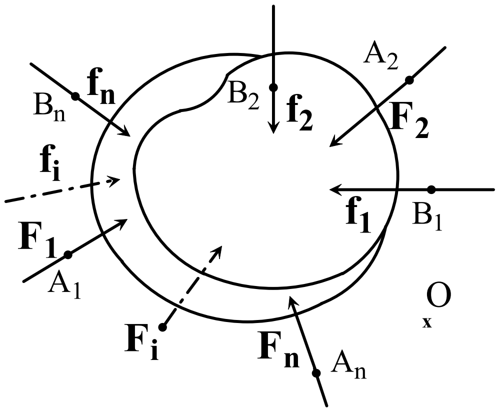
$R_z = \Sigma F_z$

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x}$$



KUVVET (VEKTÖR) SİSTEMLERİNİN DENKLİĞİ



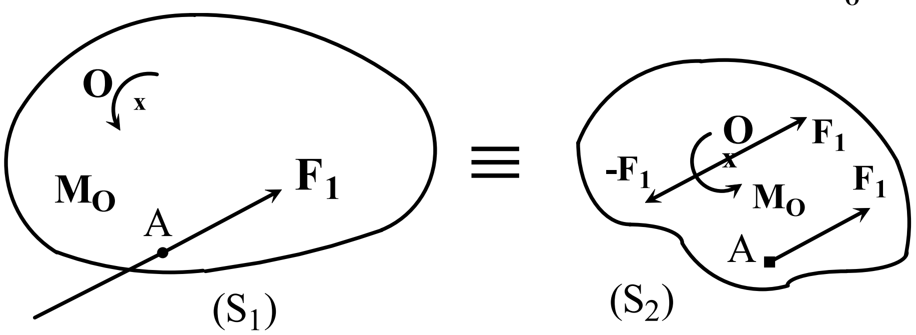
$$(S_1) = (F_1, F_2, ..., F_n) \begin{cases} R_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i \\ M_O^1 = \sum_{i=1}^{n} OA_i \times F_i \end{cases}$$

$$(S_2) = (f_1, f_2, ..., f_n) \begin{cases} R_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \\ M_O^2 = \sum_{i=1}^{n} OB_i \times F_i \end{cases}$$

Tanım : Eğer $\mathbf{R_1 = R_2}$ ve $\mathbf{M_O^1} = \mathbf{M_O^2}$ ise $(S_1) \equiv (S_2)$ dir.

Bir Tek Kuvvetin Taşınması : $\mathbf{F_1}$'in O noktasına taşınması

$$\left. (S_1) = (F_1) \begin{cases} R_1 = F_1 \\ M_O^1 = M_O = OA \times F_1 \end{cases} \right\} \text{I}$$

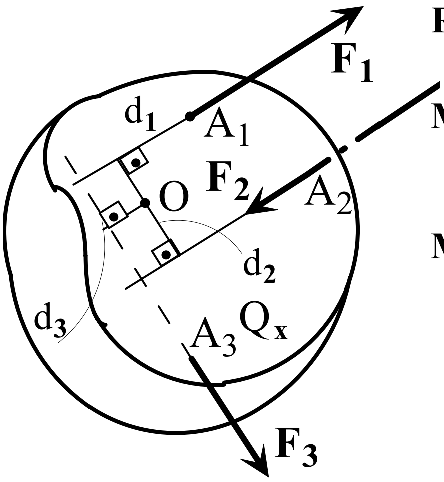


$$\left. \begin{aligned} &(S_2) = (F_1, -F_1, F_1) \\ &R_2 = F_1 - F_1 + F_1 = F_1 \\ &M_O^2 = OA \times F_1 + O = OA \times F_1 \end{aligned} \right\} \text{II}$$

I ve II den $\left. \begin{aligned} &R_1 = R_2 = F_1 \\ &M_O^1 = M_O^2 = OA \times F_1 \end{aligned} \right\}$ elde edilir.

Yani $\mathbf{F_1}$'in cismin O noktasına etkisi ile ($\mathbf{F_1}$, $\mathbf{-F_1}$, $\mathbf{F_1}$)'in aynı O noktasına etkisi aynıdır. Yani $\mathbf{F_1}$ kuvveti cismin O noktasına taşınmıştır.

Bir Kuvvet Sisteminin Bir Noktaya Taşınması



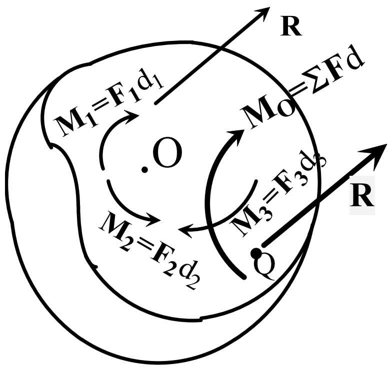
$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{OA}_i \times \mathbf{F}_i = \underbrace{\mathbf{OA}_1 \times \mathbf{F}_1}_{\mathbf{M}_1} + \underbrace{\mathbf{OA}_2 \times \mathbf{F}_2}_{\mathbf{M}_2} + \underbrace{\mathbf{OA}_3 \times \mathbf{F}_3}_{\mathbf{M}_3}$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{OA}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i \quad \text{bileşke moment}$$

Böyle Bir Sistemi Q Noktasına Nasıl Taşırız (indirgeriz) ?

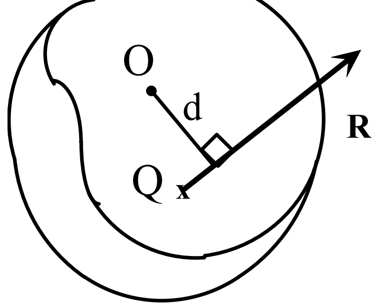
1) **R** bileşkesi Q noktasına tatbik edilir.
2) O noktasına göre YAZILAN BİLEŞKE MOMENTE eşit olan bir moment Q noktasına tatbik edilir.



$$\mathbf{M}_O = -\mathbf{F}_1 d_1 - \mathbf{F}_2 d_2 + \mathbf{F}_3 d_3$$

İşaretler anlaşmaya göre yazılır.

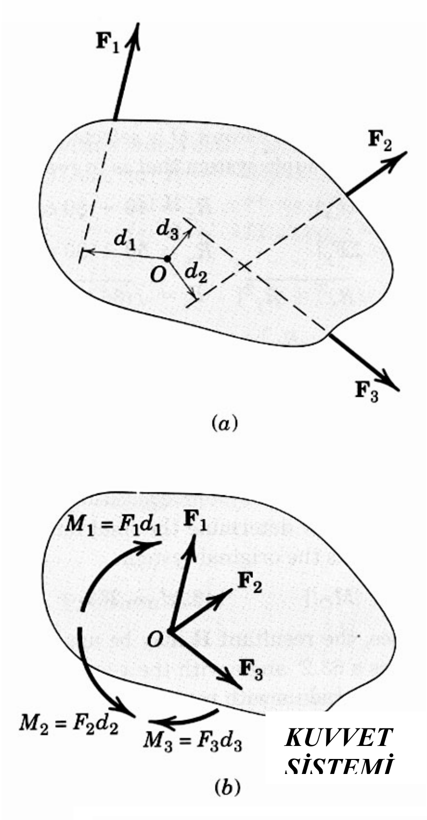
Böylece bileşkesi **R** ve bileşke momenti $\mathbf{M}_O$ olan (**S**) kuvvet sistemini cismin üzerindeki veya uzaydaki herhangi bir noktaya (Q ya) taşımış oluruz. Bu işleme (**S**) kuvvet sisteminin KUVVET-ÇİFT SİSTEMİNE İNDİRGENMESİ denir.



$$\mathbf{M}_O = \mp \mathbf{F}_1 d_1 \mp \mathbf{F}_2 d_2 \mp \mathbf{F}_3 d_3 = \mp \mathbf{M}_1 \mp \mathbf{M}_2 \mp \mathbf{M}_3$$

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{R} d \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\mathbf{M}_O}{\mathbf{R}} = \mathbf{OQ}$$

Bileşke Kuvvet ve Toplam Moment



R = ΣF **Bileşke (Bileşke kuvvet)**

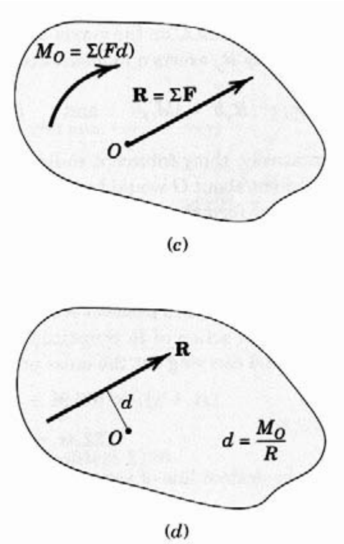
$M_O = \Sigma M = \Sigma(F_i\, d_i)$ (Toplam moment)

d_i : O noktasının kuvvet doğrultularına (tesir çizgilerine) dik uzaklıklarıdır.

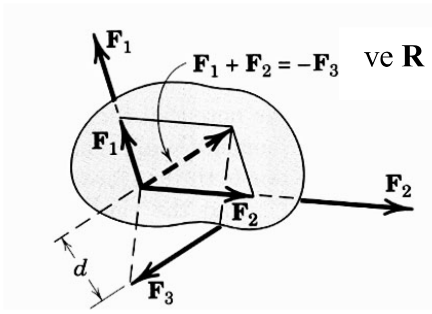
$\mathbf{M_O} = \Sigma\, (\mathbf{d}_i \times \mathbf{F}_i)$

$M_O = \Sigma(F_i\, d_i)$

$\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M} \neq \vec{0}$ ise sistem Kuvvvet-Çift Sistemine Denktir.(İndirgenir)



Kuvvet-Çift Sistemi



$M = dF_3$ Bileşke sıfır olabilir.Momentin sıfır olması gerekmez çift olabilir.

Not: Sistemde $\vec{R}$=0 ve $\vec{M}$=0 ise, sistem bir çifte denktir.

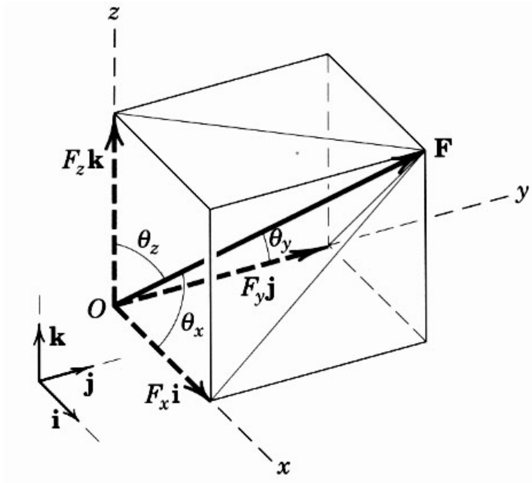
2) $\vec{R} \neq 0$ ve $\vec{M}$=0 ise Kuvvet sistemi bileşkeye denk bir tek kayan vektöre(kuvvete) indirgenir.

3) $\vec{R}$=0, $\vec{M}$=0 ise sistem sıfıra denktir.

4) $\vec{R} \neq 0$, $\vec{M} \neq 0$ ise sistem bir kuvvet çiftine denktir.

UZAY KUVVET SİSTEMİ

Kartezyen Bileşenler (Rectangular Components)



$F_x = F\cos\theta_x$ $\quad F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

$F_y = F\cos\theta_y$ $\quad \mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$

$F_z = F\cos\theta_z$ $\quad \mathbf{F} = F(\mathbf{i}\cos\theta_x + \mathbf{j}\cos\theta_y + \mathbf{k}\cos\theta_z)$

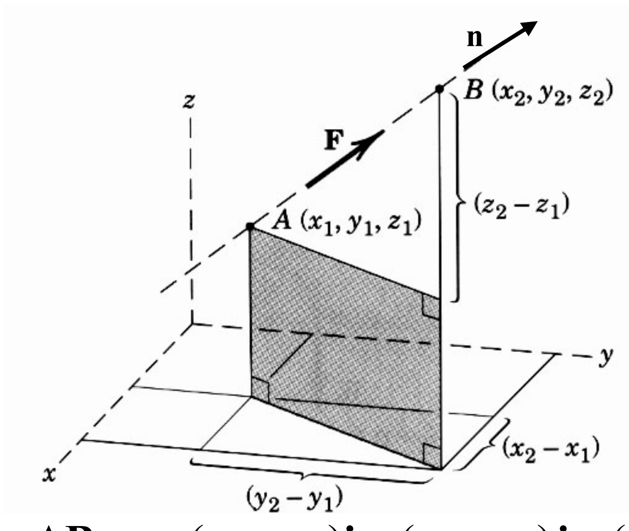
$$\mathbf{F} = F\,(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k})$$

a-) Koordinatları bilinen iki noktadan geçen kuvvet vektörü

$\vec{V}, \mathbf{u}$

$\mathbf{u} = \dfrac{\vec{V}}{|\vec{V}|}$

$\boxed{\vec{F} \mathbin{//} \mathbf{AB}}$



$$\mathbf{F} = F\mathbf{n} = F\frac{\overline{\mathbf{AB}}}{\overline{AB}} = F\frac{(x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

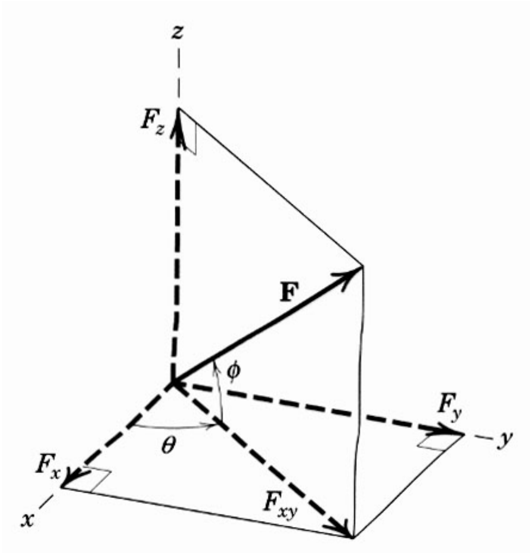
b-) Uzaysal bir kuvvetin koordinatları

$F_{xy} = F \cos\phi$

$F_z = F \sin \phi$

$F_x = F_{xy} \cos\theta = F \cos \phi \cos \theta$

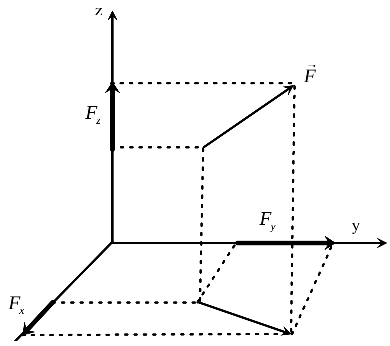
$F_y = F_{xy} \sin\theta = F \cos \phi \sin \theta$



Yukarıdaki koordinatlar ilgili eksenlerin birim vektörleri ile çarpılarak bileşenler bulunur.

$\mathbf{F_x} = F_x\mathbf{i} = F\cos\phi\cos\theta\mathbf{i}$, $\mathbf{F_z} = F_z\mathbf{k} = F\cos\phi\mathbf{k}$

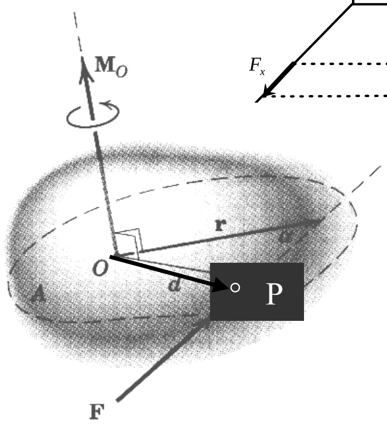
$\mathbf{F_y} = F_y\mathbf{j} = F\sin\phi\cos\theta\mathbf{j}$



MOMENT VE KUVVET ÇİFTİ

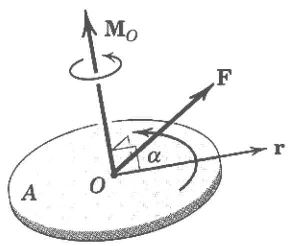
$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{OP} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



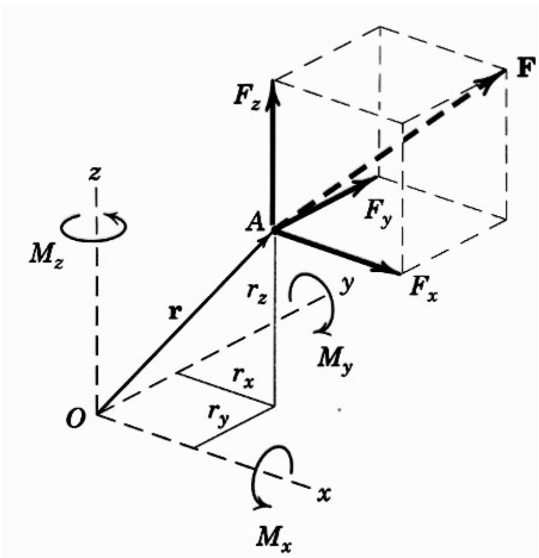
(a)

Not: **F** ve **r** yi O´dan çıkan serbest vektör olarak alıp Vektörel çarparsak O´ya göre moment vektörü elde edilir.



(b)

Uzaysal kuvvetin bir noktaya göre momenti



$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} + (r_z F_x - r_x F_z)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k}$$

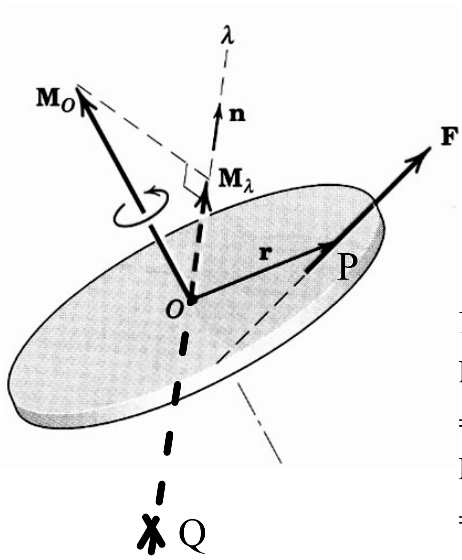
$$M_x = r_y F_z - r_z F_y$$

$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$

$$M_z = r_x F_y - r_y F_x$$

Kuvvetin bir eksene göre momenti

$$\mathbf{M}_\lambda = [(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) .\mathbf{n}]\mathbf{n}$$



$$|\mathbf{M}_\lambda| = M_\lambda = \begin{vmatrix} r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Not: M_λ, λ üzerinde seçilen O noktasına bağlı değildir.

$\mathbf{M}_\lambda = [(\mathbf{QP} \times \mathbf{F}).\mathbf{n}]\mathbf{n} = \{[\mathbf{QO} + \mathbf{OP}) \times \mathbf{F}].\mathbf{n}\}\mathbf{n}$

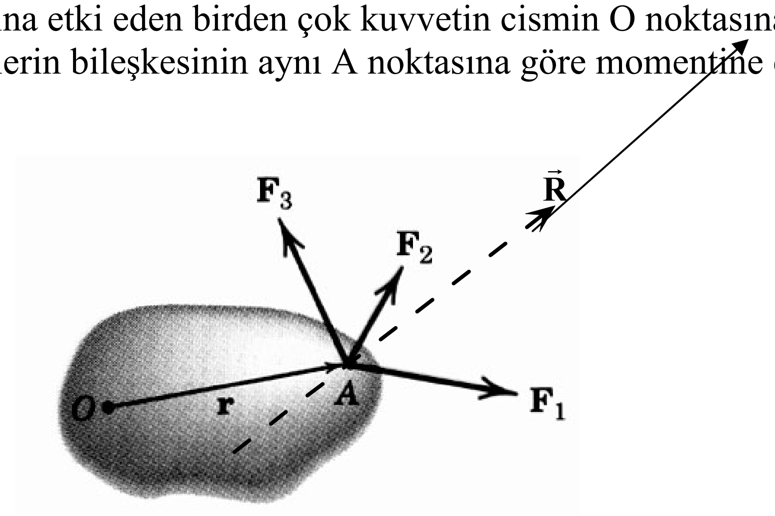
$= [(\mathbf{QO} \times \mathbf{F} + \mathbf{OP} \times \mathbf{F}).\mathbf{n}]\mathbf{n}$

$\mathbf{M}_\lambda = [\mathbf{O} + (\mathbf{OP} \times \mathbf{F}).\mathbf{n}]\mathbf{n}$

$= [(\mathbf{r} \times \mathbf{F}).\mathbf{n})\mathbf{n}$ bulunur.

Varignon Teoremi

Bir cismin A noktasına etki eden birden çok kuvvetin cismin O noktasına göre momenti, bu kuvvetlerin bileşkesinin aynı A noktasına göre momentine eşittir.

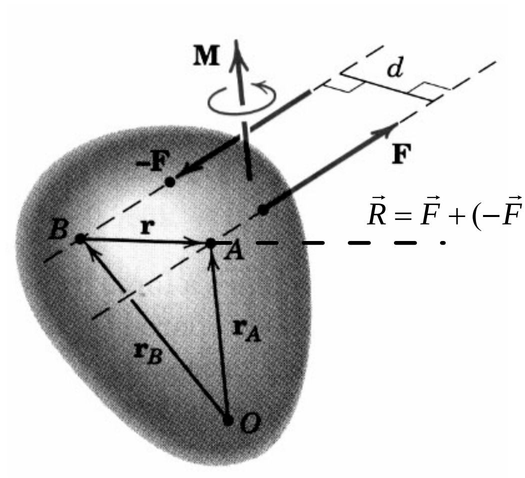


Sistemin seçilen O noktasına göre momenti:

$$\mathbf{M_O} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_3 + \ldots\ldots\ldots = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots\ldots\ldots) = \mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$$

Kuvvet Çifti (Üç Boyutlu)



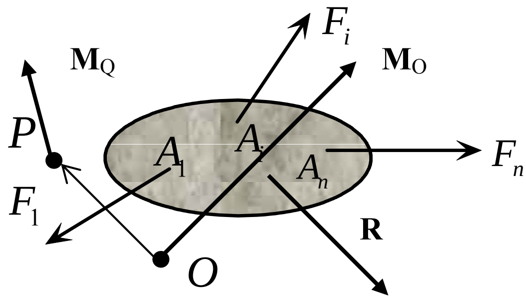
$$\vec{R} = \vec{F} + (-\vec{F}) = 0$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Nakil Teoremi :

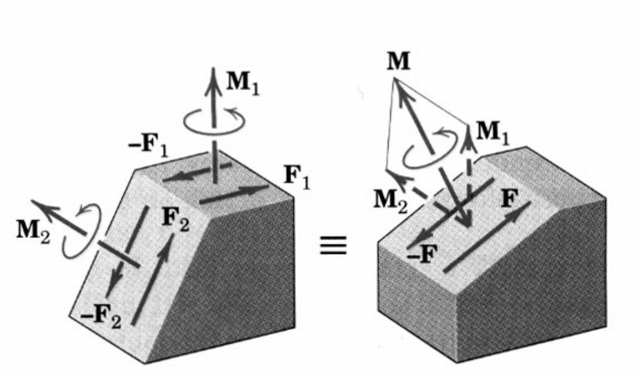
Bir kuvvet sisteminin O noktasına göre momenti biliniyorsa, bir başka P noktasına göre momenti;



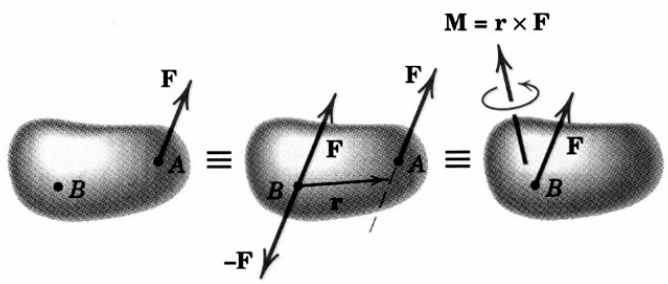
$$M_P = \mathbf{PA}\times\mathbf{F}_1 + ... + \mathbf{PA}_n\times\mathbf{F}_n$$
$$\mathbf{M_P} = (\mathbf{PO}+\mathbf{OA}_1)\times\mathbf{F}_1 + \cdots + (\mathbf{PO}+\mathbf{OA}_n)\times\mathbf{F}_n$$
$$= \mathbf{PO}\times\mathbf{F}_1 + \mathbf{OA}_1\times\mathbf{F}_1 + .. + \mathbf{PO}\times\mathbf{F}_n + \mathbf{OA}_n\times\mathbf{F}_n$$
$$\mathbf{M_P} = \mathbf{M_O} + \mathbf{PO}\times(\mathbf{F}_1 + ... + \mathbf{F}_n) = \mathbf{M_O} + \mathbf{OP}\times\mathbf{R} = \mathbf{M_O} + \mathbf{OP}\times\mathbf{R}$$

Vektörel ifadesi ile bulunur. Buna ***Nakil Teoremi*** denir.

Bir cisme etki eden iki kuvvet çiftinin eşdeğeri olan kuvvet çifti (Bileşke kuvvet çifti)

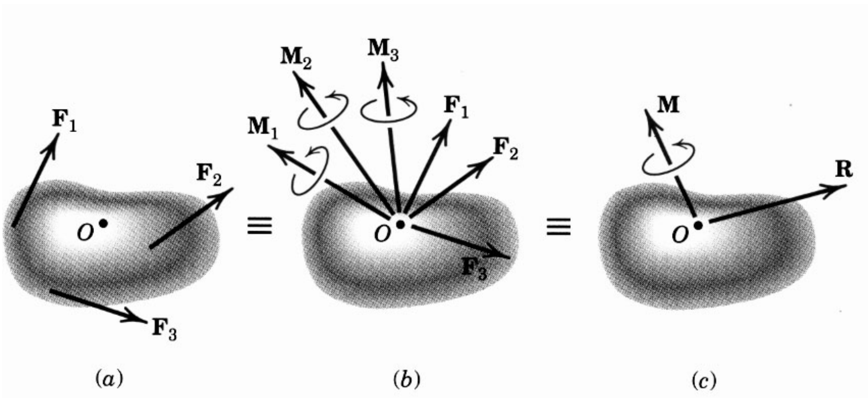


Bileşke Kuvvet Çifti



Üç Boyutlu Halde F nin Bir Noktaya Taşınması

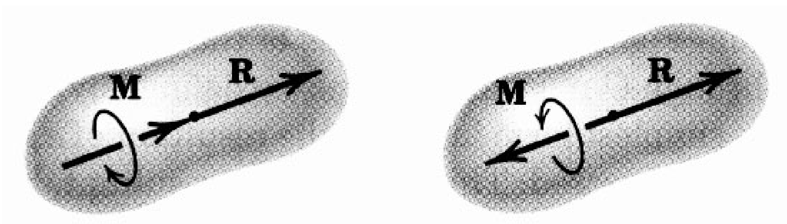
Bir cisme etki eden uzaysal kuvvet sisteminin bir noktaya taşınması



$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots = \Sigma\mathbf{F}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \cdots = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

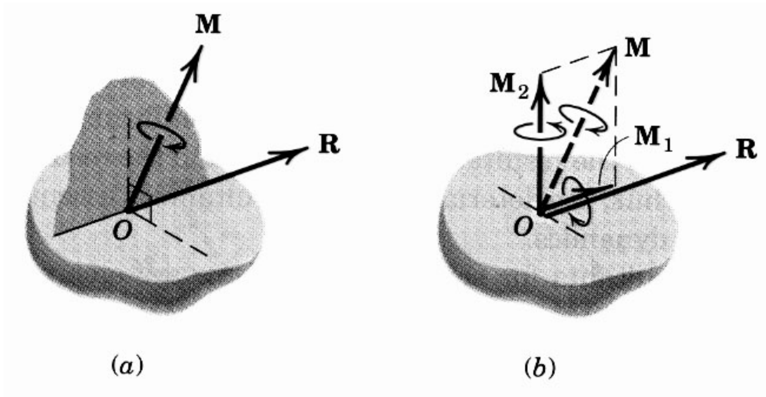
$$R_x = \Sigma F_x \qquad R_y = \Sigma F_y \qquad R_z = \Sigma F_z$$
$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$
$$\mathbf{M}_x = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_x \qquad \mathbf{M}_y = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_y \qquad \mathbf{M}_z = \Sigma(\mathbf{r} \times \mathbf{F})_z$$
$$M = \sqrt{M_x{}^2 + M_y{}^2 + M_z{}^2}$$

Kuvvet Vidası (Wrench Resultant)



Pozitif Kuvvet Vidası *Negatif Kuvvet Vidası*

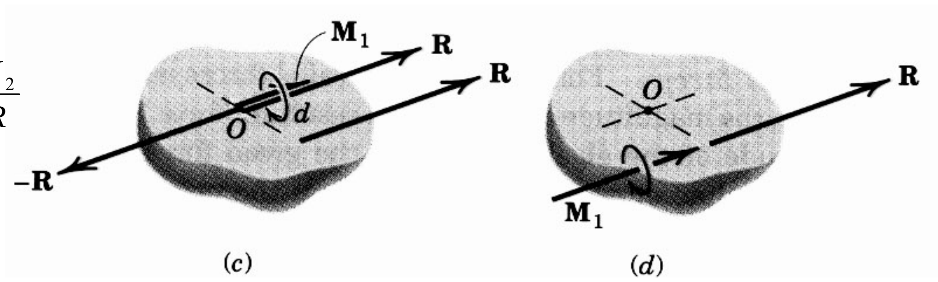
Cisim üzerindeki bir noktada kuvvet vidasının oluşturulması
Her genel kuvvet sistemi belli bir doğrultuda uygulanan kuvvet videası ile temsil edilebilir:



$\vec{M}_2 \perp \vec{R}$

$\vec{M}_1 \, // \, \vec{R}$

$d = \dfrac{M_2}{R}$



Bir Kuvvet Sisteminin Ekseni :

Bir kuvvet sisteminin bileşkesi **R** ve bir noktaya göre momenti **M** ise, öyle E noktaları vardır ki, sistemin bu E noktalarına göre yazılan $\mathbf{M}_E$ momentleri sıfır veya bileşkeye paraleldir. Bu E noktalarının geometrik yerine ***Kuvvet Sisteminin Ekseni*** adı verilir.
Bu tanımlama ile,

$$\mathbf{M}_E = \lambda \, \mathbf{R} \qquad (\lambda \text{ skale sayı})$$

Moment Nakil Teoremi kullanılacak olursa,

$$\mathbf{M}_E = \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{OE} = \lambda \, \mathbf{R} \ \textbf{(Eksen Denklemi)}$$

λ`nin Bulunması:

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_E = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{OE}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{OE}) = \lambda \, \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_E = \lambda \, \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = \lambda \, \mathbf{R}^2$$

$$\lambda = \frac{\mathbf{R}.\mathbf{M}_O}{|\mathbf{R}|^2}$$

Buna göre eksenin vektörel ifadesi;

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{OE} = \frac{\mathbf{R}.\mathbf{M}_O}{\mathbf{R}^2}\mathbf{R}$$

E noktasının x, y ve z koordinatları yukarıdaki ifadede yerleştirilerek 3 adet skaler denklem elde edilir.

Eğer R . M_O = 0 ise, λ sıfır olacağından sistemin ekseni, momentin sıfır olduğu noktaların geometrik yeri olacaktır ve eksen denklemi,

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{OE} = \mathbf{0}$$

olacaktır. Burada $\mathbf{R} \,.\, \mathbf{M}_E$ = İNVARYANT = 0 dır.
NOT: Yukarıdaki denklemde $\mathbf{R} \,.\, \mathbf{M}_E = \mathbf{R} \,.\, \mathbf{M}_O$ elde edildi. Bu değer değişmiyor. Buna VEKTÖR (KUVVET) Sisteminin DEĞİŞMEZİ (İNVARYANTI) denir.

Paralel Kuvvet Sistemleri :

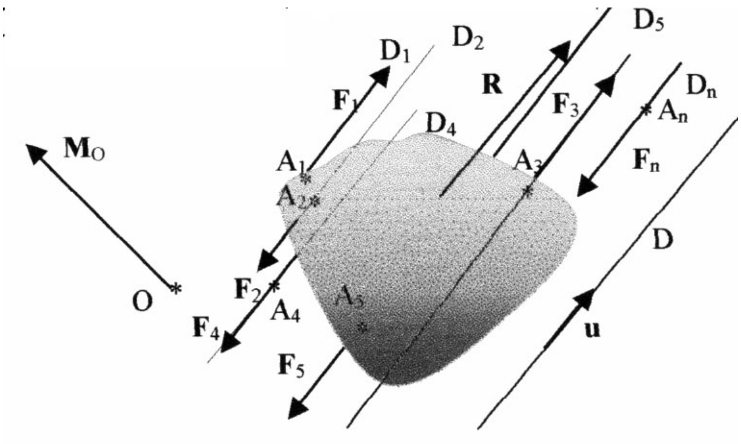
Tesir çizgileri aynı doğruya paralel olan kuvvetlerin oluşturduğu sisteme Paralel Kuvvet Sistemi denir. Böyle bir sistemin bileşkesi sıfır değilse, bileşke yine aynı doğruya paralel olacaktır. Paralel doğrultunun birim vektörü **u** ise,

$$\mathbf{R} = \mathrm{R}\,\mathbf{u} = F_1\vec{M} + ... + F_n\vec{M} = \sum F_i\vec{M} ; \sum F_i = R$$

Dir ve sistemin bir O noktasına göre momenti,

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OA}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{OA}_2 \times \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{OA}_n \times \mathbf{F}_n = \sum \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i$$

Burada A_1, A_2, ... noktaları kuvvetlerin tesir çizgisi üzerinde alınan noktalardır. M_O momenti sıfır değilse, vektörel çarpma özelliğinden dolayı, kuvvetlere ve bileşkeye diktir. Bu durumda, $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O$ invaryantı sıfırdır.



Sistemde $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O = 0$ olduğundan ekseni

$$\mathbf{M}_O + \mathbf{R} \times \mathbf{OE} = \mathbf{0}$$

şeklindedir. Burada bileşkeyi ve momenti

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{u}$$

$$\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{OA}_i x F_i \mathbf{u}$$

şeklinde yazıp, yukarıdaki ifadede yerleştirilirse,

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{OA}_i x F_i \mathbf{u} + \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{u} x \mathbf{OE} = 0$$

veya

$$\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OA}_i x \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OE} x \mathbf{u} = 0$$

veya

$$(\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OA}_i - \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OE}) x \mathbf{u} = 0$$

bulunur. O halde parantez içindeki vektör ile **u** paraleldir. Bu durumda,

$$(\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OA}_i - \sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OE}) = \lambda \mathbf{u}$$

Bu ifadeden OE vektörü çözülürse,

$$\mathbf{OE} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \mathbf{OA}_i - \lambda \mathbf{u}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Burada λ nın skaler olduğunu biliyoruz. λ = 0 değerine karşılık gelen nokta bir C noktası ise,

$$\mathbf{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F_i}\, \mathbf{OA}_\mathrm{i}}{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F_i}}$$

ifadesi bulunur.

Bu vektörel ifadenin skaler bağıntıları,

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

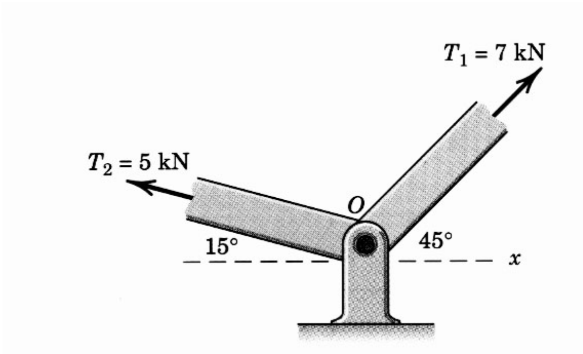
$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

$$z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} F_i}$$

Bu ifadeler daha sonra, kütle merkezinin koordinatlarının bulunmasında kullanılacaktır.

UYGULAMALAR

SORU : (2/6)
İki çubuk şekilde görüldüğü gibi O noktasında sabit bir noktaya mafsallanmışlar ve T_1, T_2 çekme kuvvetlerinin etkisinde bulunmaktadırlar. Bu iki kuvvetin **R** bileşke vektörünü ve bu bileşkenin x-ekseni ile yaptığı açıyı bulunuz.



ÇÖZÜM :

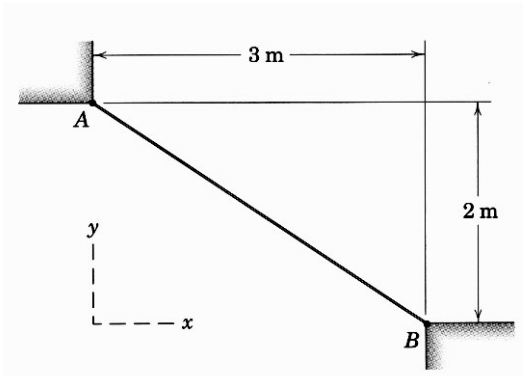
$$R_x = \Sigma F_x = 0.1201 \text{ kN}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 6.24 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_x)^2} = 6.24kN$$

$$\theta = \tan^{-1}(\frac{R_y}{R_x}) = 88.9^0$$

SORU : (2/7)
A ve B sabit noktaları arasında, 900 N gerginliğinde bir kablo bağlanmış-tır. Bu kablo kuvvetini A noktasına etki eden $\mathbf{T}_A$ ve B noktasına etki eden $\mathbf{T}_B$ kuvvet vektörleri olarak yazınız.



ÇÖZÜM :

$$T_A = T_B = 900 \text{ N}$$

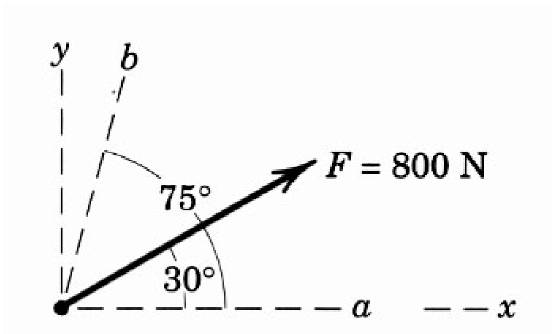
$$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0.555$$

$$\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} = 0.832$$

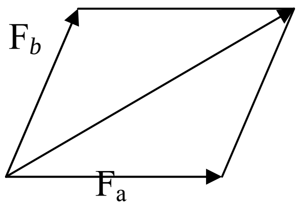
$$T_A = 900(0.832\,\mathbf{i} - 0.555\,\mathbf{j}) = 749\,\mathbf{i} - 499\,\mathbf{j}$$

$$T_B = -\,T_A = 900(0.832\,\mathbf{i} - 0.555\,\mathbf{j}) = -\,749\,\mathbf{i} + 499\,\mathbf{j}$$

SORU : **(2/10)**
800 N luk kuvvetin a ve b doğrultularındaki ve x, y dik eksenleri üzerindeki bileşenlerini bulunuz.
F kuvvet vektörünün a ve b doğrultularındaki izdüşümlerini bulunuz.



ÇÖZÜM :



F = 800 N. A ve b doğrultularındaki bileşenler;

$$\frac{\sin 105}{800} = \frac{\sin 30}{F_b}$$ F_b = 414 N.

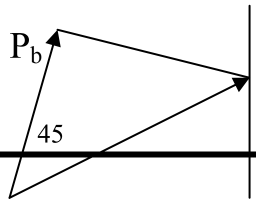
$$\frac{\sin 105}{800} = \frac{\sin 45}{F_a}$$ F_a = 586 N.

x ve y doğrultularındaki bileşenler;

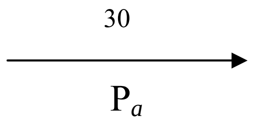
$F_x = 800 \cos 30 = 693$ N.

$F_y = 800 \sin 30 = 400$ N.

a ve b doğrultularındaki izdüşümler ;

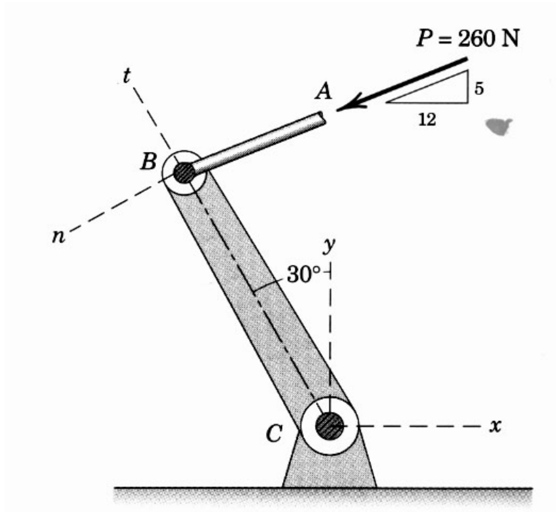


F=800 N $P_a = 800 \cos 30 = 693$ N.



P_b = 800 cos 45 = 566 N.

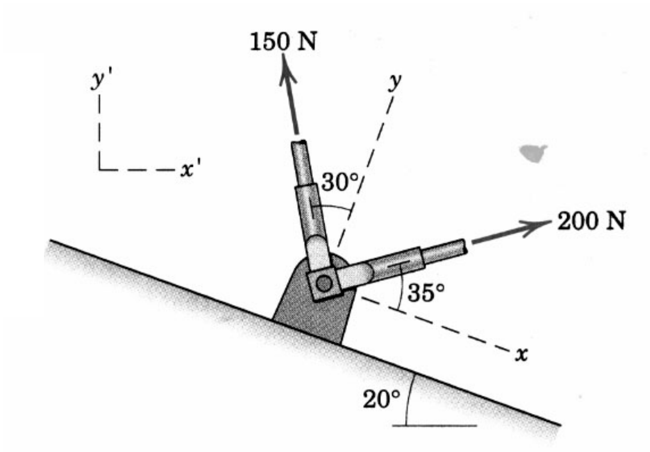
<u>SORU :</u> (2/12)
Bir kontrol sisteminin tasarımında AB kolunun BC krankına 260 N luk bir kuvvet uygulandığı hesaplanmıştır. P kuvvetinin x ve y eksenleri üzerindeki skaler bileşenlerini bulunuz.



P_x = - 260(12/13) = - 240 N.

P_y = - 260(5/13) = - 100 N.

<u>SORU :</u> (2/17)
Şekildeki sisteme uygulanan iki kuvvetin R bileşkesini x ve y eksenlerinin birim vektörleri cinsinden yazınız.



$$R_x = \Sigma F_x = 200 \cos 35 - 150 \sin 30 = 88.8 \text{ N.}$$

$$R_y = \Sigma F_y = 200 \sin 35 + 150 \cos 30 = 245 \text{ N.}$$

$$\mathbf{R} = 88.8\,\mathbf{i} + 245\,\mathbf{j}$$