İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

ADİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE ÇÖZÜMÜ

BİTİRME ÖDEVİ

Sema ERNEK . 090070028

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Ahmet Kırış

Mayıs 2012

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI

ADİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN CHEBYSHEV POLİNOMLARI İLE ÇÖZÜMÜ

BİTİRME ÖDEVİ

Sema ERNEK . 090070028

Teslim Tarihi:21 Mayıs 2012

Tez Danışmanı: Yard. Doç. Dr. Ahmet Kırış

Mayıs 2012

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanışı sırasında manevi desteği ve bilgisiyle her zaman yanımda olan arkadaşım Uğur KARAKAYA' ya, yardımını ve bilgisini hiçbir zaman esirgemeyen Sayın Hocam Yard. Doç. Dr. Ahmet KIRIŞ' a, hayatım boyunca bana tecrübeleriyle yol gösteren, sevgi, güven ve her türlü desteği veren anne baba ve kardeşime en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2012

Sema ERNEK

İÇİNDEKİLER

ÖZET v

1. GİRİŞ 1

2. CHEBYSHEV POLİNOMLARI 2

2.1. Tanım 2

2.2. Özellikler 2

2.2.1. $T_n(x)$ ' ler Polinomdurlar 2

2.2.2. Chebyshev Polinomları Ortogonaldirler 3

2.3. Chebyshev Polinomlarının Kökleri ve Ekstremumları 4

2.4. “Monic” Chebyshev Polinomları 6

3. CHEBYSHEV POLİNOMLARININ KULLANIM ALANLARI 8

3.1. Yaklaşım Polinomu Oluşturma 8

3.2. Yaklaşım Polinomunun Derecesini Düşürme 12

3.3. Diferansiyel Denklem Çözümü İçin Kullanımı 14

4. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ 15

4.1. Clenshaw Yöntemi 15

KAYNAKLAR 23

ÖZET

Bu çalışmada Chebyshev polinomlarının özellikleri ve kullanım alanları incelenmiştir. Chebyshev polinomları sayısal analiz konularına kolay adapte edilebilmesi ve bilgisayar programlamaya uygunluğu nedeniyle yaklaşım polinomlarının oluşturulmasında, polinomların istenilen hata seviyesi içinde kalacak şekilde derecelerinin düşürülmesinde ve diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılmaktadır. Bu tez kapsamında bu konulara değinilmesinin yanı sıra özellikle başlangıç değer problemlerinin, Chebyshev polinomları kullanılarak sayısal çözümü incelenmiştir.

1. GİRİŞ

Chebyshev polinomları ilk kez yaklaşık 100 yıl önce Rus matematikçi Chebyshev tarafından kullanılmıştır. Sonrasında Lanczos ve Clenshaw iki farklı yöntemle Chebyshev polinomları yardımıyla yaklaşım polinomları oluşturmuşlardır. Chebyshev polinomları; polinomlar ailesi içinde, ortogonal olmaları, rekürsif ilişkiler elde edilebilmesi ve bilgisayar programlamaya yatkın olmaları sebebiyle yaklaşım polinomu olarak kullanılmaya çok uygundurlar.

Bu tez kapsamında, Chebyshev polinomlarının tanımı, ortogonal olmaları, çeşitli rekürsif ilişkileri ve "monic" Chebyshev polinomları ikinci bölümde anlatılmıştır. Üçüncü bölümde aynı dereceli diğer polinomlara göre maksimum hatayı minimum yapacak şekilde Lagrange interpolasyonunda düğüm noktalarının yerlerinin belirlenerek yaklaşım polinomlarının oluşturulması ve yaklaşım polinomunun derecesinin yapılan toplam hata istenilen hata aralığı içinde kalacak şekilde düşürülmesi anlatılmıştır.

Chebyshev polinomları yaklaşım polinomu oluşturma gibi amaçlarla kullanılabilmesine rağmen, adi ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemlerinin sayısal çözümleri temel kullanım alanlarıdır. Dördüncü bölümde Chebyshev polinomlarının sadece başlangıç değer problemlerine uygulaması, Clenshaw algoritması anlatılmış ve çeşitli örnekler verilmiştir.

2. CHEBYSHEV POLİNOMLARI

2.1. Tanım

$T_n(x)$ *n.* dereceden bir polinom olmak üzere $\forall n \geq 0$ için $x \in (-1,1)$ aralığında

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.2. Özellikler

2.2.1. Tn(x)' ler Polinomdurlar:

(2.1) tanımından

$$T_0(x) = \cos 0 = 1 \tag{2.2}$$

ve

$$T_1(x) = \cos(\cos^{-1} x) = x \tag{2.3}$$

olduğu görülür.

(2.1) de $n \geq 1$ için $x = \cos\theta$ ataması yapılırsa

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n \cos^{-1}(\cos\theta)) = \cos(n\theta) \tag{2.4}$$

ifadesi elde edilir.

(2.4) ifadesinde n yerine $n+1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos\theta) &= \cos[(n+1)\theta] = \cos[n\theta + \theta] \\ &= \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin\theta \end{aligned} \tag{2.5}$$

$n-1$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} T_{n-1}(\cos\theta) &= \cos[(n-1)\theta] = \cos[n\theta - \theta] \\ &= \cos(n\theta)\cos\theta + \sin(n\theta)\sin\theta \end{aligned} \tag{2.6}$$

sonuçlarına ulaşılır.

(2.5) ve (2.6) toplamından

$$T_{n+1}(\cos\theta)+T_{n-1}(\cos\theta)=2\cos(n\theta)\cos\theta \tag{2.7}$$

eşitliği elde edilir.

(2.7) denkleminde $\theta=\cos^{-1}x$ dönüşümü yapılırsa

$$T_{n+1}(\cos(\cos^{-1}x))+T_{n-1}(\cos(\cos^{-1}x))=2\cos(n\cos^{-1}x)\cos(\cos^{-1}x) \tag{2.8}$$

ve (2.8) denklemi yeniden düzenlenirse

$$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x) \tag{2.9}$$

olduğu görülür ve

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) \tag{2.10}$$

rekürsif bağıntısı elde edilir.

$T_0(x)=1$ ve $T_1(x)=x$ olduğuna göre $T_2(x)$'de en büyük dereceli terimin katsayısı 2, $T_3(x)$'de $2\times 2=2^2$ ve $T_n(x)$'de 2^{n-1} olduğu görülür. Dolayısıyla $T_n(x)$'ler polinomdur.

(2.10) bağıntısı yardımı ile bulunan Chebyshev polinomlarının bazıları;

$T_2(x)=2xT_1(x)-T_0(x)=2x^2-1$

$T_3(x)=2xT_2(x)-T_1(x)=4x^3-3x$

$T_4(x)=2xT_3(x)-T_2(x)=8x^4-8x^2+1$

$\vdots$

şeklinde elde edilir [1].

2.2.2. Chebyshev Polinomları Ortogonaldirler.

Chebyshev polinomları

$$w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.11}$$

ağırlık fonksiyonuna göre $x\in(-1,1)$ aralığında ortogonaldirler.

İspat:

$n \neq m$ iken

$$\int_{-1}^{1} \omega(x) T_n(x) T_m(x) dx \tag{2.12}$$

integrali çözülürse (2.1) tanımından $T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x)$ ve $T_m(x) = \cos(m \cos^{-1} x)$ eşitlikleri yazılarak

$$\int_{-1}^{1} \frac{\cos(n \cos^{-1} x).\cos(m \cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{2.13}$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{gathered} \cos^{-1} x = \theta \\ -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\theta \\ \cos^{-1}(1) = 0, \quad \cos^{-1}(-1) = \pi \end{gathered} \tag{2.14}$$

dönüşümleri yapılırsa

$$\int_{\pi}^{0} -\cos(n\theta)\cos(m\theta) d\theta \tag{2.15}$$

trigonometrik dönüşüm formüllerinden (2.15) ifadesi

$$\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(n+m)\theta + \cos(n-m)\theta] d\theta \tag{2.16}$$

şeklinde yazılabilir. Bu integral çözülürse

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n+m)\theta}{(n+m)} + \frac{\sin(n-m)\theta}{(n-m)} \right] \Bigg|_{0}^{\pi} = 0 \tag{2.17}$$

bulunur ki, bu sonuç $T_n(x)$ polinomlarının $x \in (-1,1)$ aralığında ortogonal olduğunu göstermektedir [2].

2.3. Chebyshev Polinomlarının Kökleri ve Ekstremumları

Teorem: $T_n(x)$ polinomunun $n \geq 1$ iken $x \in (-1,1)$ aralığında

$$\overline{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \quad k = 1,2,.....,n \tag{2.18}$$

noktalarında n tane kökü ve

$$\overline{x}'_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad k = 0,1,2,.....,n \tag{2.19}$$

noktalarında $n+1$ tane ekstremumu vardır.

İspat:

(2.1) tanımında $\overline{x}_k$ noktaları yazılırsa

$$T_n(\overline{x}_k) = \cos[n\cos^{-1}(\cos(\frac{2k-1}{2n}\pi))] \tag{2.20}$$

elde edilir. Buradan

$$T_n(\overline{x}_k) = \cos(\frac{2k-1}{n}\pi) \tag{2.21}$$

olduğu görülür ve

$$T_n(\overline{x}_k) = 0 \tag{2.22}$$

olacağından $\overline{x}_k$ noktaları Chebyshev polinomlarının kökleridir.

Ekstremum noktalar için ise (2.1) tanımının türevini alınırsa

$$T'_n(x) = \frac{n\sin(n\cos^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.23}$$

ifadesi elde edilir.

(2.23) de $\overline{x}'_k$ noktaları yazılırsa

$$T'_n(\overline{x}'_k) = \frac{n\sin(n\cos^{-1}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right))}{\sqrt{1-[\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)]^2}} \tag{2.24}$$

elde edilir ve ifade düzenlenirse

$$T_n'(\overline{x}_k') = \frac{n\sin(k\pi)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \tag{2.25}$$

ve

$$T_n'(\overline{x}_k') = 0 \tag{2.26}$$

olduğu görülür. Yani $\overline{x_k^{'}}$ noktaları ekstremum noktalardır. Bu ekstremum değerler ise

$$\begin{aligned} T_n(\overline{x}_k') &= \cos[n\cos^{-1}(\cos(\frac{k\pi}{n}))] \\ &= \cos k\pi \end{aligned} \tag{2.27}$$

eşitliğinden

$$T_n(\overline{x}_k') = (-1)^k \tag{2.28}$$

bulunur ve $T_n(x)$ polinomunun k tek sayı ise minimum, k çift sayı ise maksimum değer aldığı görülür [1-2].

2.4. "Monic" Chebyshev Polinomları

$T_n(x)$ polinomunda en büyük dereceli terimin katsayısını 2^{n-1} olduğu önceki bölümde gösterilmiştir. Tüm polinomun bu katsayıya bölünmesi ile elde edilen, yani en büyük dereceli teriminin katsayısı bir olan yeni polinoma "monic" Chebyshev polinomu denir ve

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_0(x) = 1 \\ &\tilde{T}_n(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}} \qquad n \geq 1 \end{aligned} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır.

(2.29) ifadesinde $T_n(x)$ polinomları $n = 1$ için yazılırsa

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) \tag{2.30}$$

elde edilir. (2.29) yardımı ile (2.30)

$$2^{2-1}\tilde{T}_2(x) = 2x2^{1-1}\tilde{T}_1(x) - \tilde{T}_0(x) \tag{2.31}$$

şekline getirilir ve katsayılar sadeleştirilirse

$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \frac{1}{2}\tilde{T}_0(x) \tag{2.32}$$

olduğu görülür. $n > 1$ için benzer işlemler yapılırsa (2.10) ifadesi

$$2^{n+1-1}\tilde{T}_{n+1}(x) = 2x2^{n-1}\tilde{T}_n(x) - 2^{n-1-1}\tilde{T}_{n-1}(x) \tag{2.33}$$

şekline gelir. Buradan

$$2^n\tilde{T}_{n+1}(x) = 2^n x\tilde{T}_n(x) - 2^{n-2}\tilde{T}_{n-1}(x) \tag{2.34}$$

olur ve katsayılar sadeleştirilirse

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = x\tilde{T}_n(x) - \frac{1}{4}\tilde{T}_{n-1}(x) \qquad n > 1 \tag{2.35}$$

bağıntısı elde edilir.

$\tilde{T}_n(x)$ ile $T_n(x)$ polinomları arasında yalnızca katsayı farkı olduğundan $T_n(x)$ polinomunun (2.18) ifadesi ile verilen kökleri $\tilde{T}_n(x)$ polinomunun da kökleri ve benzer şekilde (2.19) ifadesi ile verilen ekstremumları da $\tilde{T}_n(x)$ polinomunun da ekstremumlarıdır [1].

3. CHEBYSHEV POLİNOMLARININ KULLANIM ALANLARI

3.1. Yaklaşım Polinomu Oluşturma

Chebyshev polinomları Lagrange interpolasyonunda düğüm noktalarını eşit aralıklarla değil de, hatayı minimum yapacak şekilde seçilerek yaklaşım polinomlarının oluşturulmasında kullanılabilir. Böylece yaklaşım polinomunun verilen aralıkta maksimum hatasının aynı dereceden diğer yaklaşım polinomlarının tümünden daha küçük olması sağlanır ki, bu özellik Chebyshev polinomlarını yaklaşım polinomları oluşturma da çok üstün kılmaktadır.

Teorem: $P(x)$ Lagrange interpolasyon polinomu ve $\tilde{\Pi}_n$ n. dereceden tüm monic polinomlar kümesi olmak üzere

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} \left|\tilde{T}_n(x)\right| \leq \max_{x\in[-1,1]} \left|P_n(x)\right|, \qquad \forall P_n(x) \in \tilde{\Pi}_n \tag{3.1}$$

dir. Eşitlik ancak

$$P_n(x) = \tilde{T}_n(x) \tag{3.2}$$

olduğunda sağlanır.

Bu teorem Lagrange interpolasyonunda, interpolasyon noktalarının yerinin belirlenerek hatanın minimizasyonunda kullanılabilir. Yani;

$x_0, x_1, ..., x_n$ $[-1, 1]$ aralığında ayrık noktalar, $f \in C^{n+1}[-1,1]$ ve $\zeta(x)$ $(-1,1)$ aralığında bir sayı olmak üzere hata

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{n+1}(\zeta(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_n) \tag{3.3}$$

ile verilebilir. (3.3) ifadesini minimize etmek için $\zeta(x)$ üzerinde hiçbir kontrol olmadığına göre minimize edilmesi gereken büyüklük

$$\left|(x-x_0)(x-x_1)..........(x-x_n)\right| \tag{3.4}$$

olmalıdır.

$(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_n)$ ifadesi $(n+1)$. dereceden bir polinomdur ve teorem bu polinom ancak ve ancak $\tilde{T}_{n+1}(x)$ olarak seçilirse, (3.4) ifadesinin minimum olacağını söyler. Buna göre Lagrange polinomunun kökleri $\tilde{T}_{n+1}(x)$ polinomunun kökleri yani

$$\begin{aligned} \overline{x}_{k+1} &= \cos\left(\frac{2(k+1)-1}{2(n+1)}\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak seçilmelidir.

Bu teknik sadece $[-1,1]$ aralığında değil

$$\overline{x} = \frac{1}{2}\left[(b-a)x+a+b\right] \tag{3.6}$$

değişken dönüşümü ile keyfi $[a,b]$ aralığına da genişletilebilir [3].

Örnek:

$f(x)=xe^x$ fonksiyonuna $x\in[0,1.5]$ aralığında Lagrange interpolasyonu ve Chebyshev polinomları ile yaklaşım polinomları oluşturarak her iki yöntemde yapılan hatayı karşılaştırınız.

İlk olarak Chebyshev polinomları kullanılmadan sadece Lagrange interpolasyonu yöntemi ile $h=0.5$ eşit aralıklı noktalarla (Tablo 3.1)

i	x_i	$f_i(x_i)=x_i e^{x_i}$
0	0	0
1	0.5	0.824361
2	1	2.71828
3	1.5	6.72253

Tablo 3.1. Noktalar ve fonksiyonun o noktalarda ki değerleri

yaklaşım fonksiyonu oluşturulmak istenirse,

$$L_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \tag{3.7}$$

ifadesi yardımı ile Lagrange polinomları

$$L_0(x) = \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{(0-0.5)(0-1)(0-1.5)} = -1.333x^3 + 4x^2 - 3.6667x + 1$$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-1.5)}{(0.5-0)(0.5-1)(0.5-1.5)} = 4x^3 - 10x^2 + 6x$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1.5)}{(1-0)(1-0.5)(1-1.5)} = -4x^3 + 8x^2 - 3x$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-0.5)(x-1)}{(1.5-0)(1.5-0.5)(1.5-1)} = 1.333x^3 - 2x^2 + 0.6667x$$

şeklinde elde edilir ve $P_n(x)$ yaklaşım polinomu

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f_i(x) \tag{3.8}$$

ifadesinden

$$P_3(x) = 1.38769x^3 + 0.0575811x^2 + 1.27301x \tag{3.9}$$

olarak elde edilir.

İkinci olarak x_i noktaları $\tilde{T}_{n+1}(x) = \tilde{T}_{3+1}(x) = \tilde{T}_4(x)$ polinomunun kökleri olarak seçilirse (3.5) bağıntısı yardımı ile noktalar Tablo 3.2 de

i	x_i'
0	0.92388
1	0.38268
2	-0.38268
3	-0.92388

Tablo 3.2. $\tilde{T}_4(x)$ polinomunun kökleri

görüldüğü şekilde bulunur. Ancak bu noktalar $[-1,1]$ aralığından $[0,1.5]$ aralığına taşınmalıdır. (3.6) dönüşümünden yaralanarak bu aralıktaki noktalar ve fonksiyonun karşı gelen değerleri Tablo 3.3 te verilmiştir.

i	x_i	$f_i(x_i) = x_i e^{x_i}$
0	1.4429	6.10783
1	1.03701	2.92581
2	0.46299	0.735601
3	0.05709	0.060444

Tablo 3.3. Noktalar ve fonksiyonun o noktalarda ki değerleri

(3.7) yardımı ile Lagrange polinomları

$$\overline{L}_o(x) = 1.81419x^3 - 2.82486x^2 + 1.0264x - 0.0497277$$

$$\overline{L}_1(x) = -4.3799x^3 + 8.59768x^2 - 3.40257x - 0.167045$$

$$\overline{L}_2(x) = -4.3799x^3 - 11.1118x^2 + 7.17378x - 0.37415$$

$$\overline{L}_3(x) = -1.81419x^3 - 5.33901x^2 + 4.79762x + 1.25683$$

şeklinde elde edilir ve (3.8) tanımından yaklaşım polinomu

$$\overline{P}_3(x) = 1.38109x^3 + 0.044652x^2 + 1.30309x - 0.0143519 \qquad (3.10)$$

olarak elde edilir. Her iki fonksiyon için hataya bakılırsa (Tablo 4), $\overline{P}_3(x)$ bazı noktalarda $P_3(x)$'e göre kötü sonuç verse de verilen aralıkta maksimum hataya bakıldığında Lagrange polinomları ile elde edilen yaklaşım polinomunda maksimum hata 0.0308983 ve Chebyshev polinomları ile elde edilen yaklaşım polinomunda ise maksimum hatanın 0.0205903 olduğu görülür ki, bu sonuç Chebyshev polinomları ile aynı dereceden daha iyi yaklaşım polinomu elde edildiğini göstermektedir.

x_i	$\lvert f(x) - P_3(x)\rvert$	$\lvert f(x) - \tilde{P}_3(x)\rvert$	x_i	$\lvert xe^x - P_3(x)\rvert$	$\lvert xe^x - \tilde{P}_3(x)\rvert$
0	0	0.0143519	0.8	0.0146759	0.0166142
0.1	0.0187472	0.0072677	0.9	0.00966702	0.012227
0.2	0.02372	0.012926	1	0	0.00379661
0.3	0.01959	0.012926	1.1	0.0124185	0.00673066
0.4	0.01049	0.005689	1.2	0.0243196	0.0160463
0.5	0	0.003367	1.3	0.0308983	0.019306
0.6	0.008995	0.0113774	1.4	0.0256199	0.00993508
0.7	0.0143282	0.0162202	1.5	0	0.0205903

Tablo 3.4. Yaklaşım polinomlarının karşılaştırılması

3.2. Yaklaşım Polinomunun Derecesini Düşürme

Chebyshev polinomları yaklaşım polinomunun derecesini yapılan toplam hata istenilen hata seviyesi içinde kalacak şekilde düşürmek amacıyla da kullanılabilir.

$[-1,1]$ aralığında $n.$ derece keyfi polinom

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{3.11}$$

ile tanımlansın. Amaç

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| P_n(x) - P_{n-1}(x) \right| \tag{3.12}$$

ifadesi minimum olacak şekilde $P_{n-1}(x)$ polinomunu seçmektir.

$\dfrac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{a_n}$ ifadesi $n.$ derece "monic" bir polinomdur. Teoremden

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{a_n} \right| \geq \frac{1}{2^{n-1}} = \tilde{T}_n(x) \tag{3.13}$$

elde edilir. Eşitliğin ancak

$$\frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{a_n} = \tilde{T}_n(x) \tag{3.14}$$

ile sağlandığı önceki bölümde gösterilmiştir. Dolayısıyla buradan;

$$P_{n-1}(x) = P_n(x) - a_n \tilde{T}_n(x) \tag{3.15}$$

şeklinde seçilebilir ve

$$\max_{x\in[-1,1]} \left| P_n(x) - P_{n-1}(x) \right| = \left| a_n \right| \max_{x\in[-1,1]} \left| \frac{P_n(x) - P_{n-1}(x)}{a_n} \right| = \frac{a_n}{2^{n-1}} \tag{3.16}$$

eşitliği sağlanır [1-2].

Örnek:

$f(x) = e^x$ fonksiyonuna $[-1, 1]$ aralığında Maclaurin serisi

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \tag{3.17}$$

ile yaklaşılabilir ve kesme hatası

$$\left|R_4(x)\right| = \frac{\left|f^5(\zeta(x))\right|\left|x^5\right|}{120} \le \frac{e}{120} \approx 0.023 \tag{3.18}$$

olarak bulunur.

0.05 hatanın kabul edilebilir olduğu varsayılırsa, hata istenilen aralıkta kalacak şekilde yaklaşım polinomunun derecesi ne kadar düşürülebilir?

(3.15) ifadesi kullanılarak $P_3(x)$ polinomu

$$P_3(x) = P_4(x) - a_4\tilde{T}_4(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{24}\tilde{T}_4(x) \tag{3.19}$$

şeklinde elde edilebilir. (2.35) ifadesinden $\tilde{T}_4(x)$ polinomu

$$\tilde{T}_4(x) = x^4 - x^2 + \frac{1}{8} \tag{3.20}$$

(3.19) denkleminde kullanılırsa $P_3(x)$ polinomu

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{24}\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{13x^2}{24} + x + \frac{191}{192} \end{aligned} \tag{3.21}$$

olarak bulunur. $P_4(x)$ ile $P_3(x)$ arasındaki hata

$$\left|P_4(x) - P_3(x)\right| = \left|a_4\tilde{T}_4(x)\right| \le \frac{1}{24} \times \frac{1}{2^{4-1}} = \frac{1}{24} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{192} \le 0.0053 \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu hata ile $P_4(x)$ hatası toplanırsa $P_3(x)$ için toplam hata

$$0.023 + 0.0053 = 0.0283$$

bulunur ki, bu da kabul edilebilir hata olan 0.05'ten küçüktür.

Benzer şekilde $P_2(x)$ polinomu oluşturulursa

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_3(x) - a_3\tilde{T}_3(x) \\ &= \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{24}x^2 + x + \frac{191}{192}\right) - \frac{1}{6}\left(x^3 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{13}{24}x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{191}{192} \end{aligned} \tag{3.23}$$

elde edilir. $P_3(x)$ ile $P_2(x)$ arasındaki hata

$$\left|P_3(x)-P_2(x)\right|=\left|a_3\tilde{T}_3(x)\right|\leq\frac{1}{6}\times\frac{1}{2^{3-1}}=\frac{1}{24}\approx 0.042 \tag{3.24}$$

Bu hata $P_3(x)$ polinomunun hatası ile toplanırsa

$$0.0283+0.042=0.0703$$

elde edilir ki bu hata kabul edilebilir hatadan büyük olduğu için yaklaşım polinomu olarak $P_2(x)$ polinomu kullanılamaz ancak yapılan hata istenilen hata aralığı içinde kaldığından $P_3(x)$ polinomu yaklaşım polinomu olarak güvenle kullanılabilir.

3.3. Diferansiyel Denklem Çözümü İçin Kullanımı

Chebyshev polinomları diferansiyel denklemlerin başlangıç ve sınır değer problemlerinin sayısal çözümü için de kullanılabilir. Adi diferansiyel denklemlerin başlangıç değer problemlerinin çözümü 4. bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir.

4. BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

4.1. Clenshaw Yöntemi

$f^{(k)}(x)$ $k.$ dereceden türev ve $p_k(x)$ polinom olmak üzere

$$h(x) = \sum_{k=0}^{m} p_k(x) f^{(k)}(x) \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanan diferansiyel denklemin Clenshaw yöntemi ile çözümü aşağıdaki gibi bulunabilir. $h(x)$ diferansiyel denklemi Chebyshev polinomlarına açılarak $f(x)$ çözümü

$$f(x) = \sum_{r=0} {}' C_r T_r(x) \tag{4.2}$$

şeklinde hesaplanabilir. Clenshaw yöntemi için gerekli adımlar aşağıda açıklanmıştır. $f(x)$ fonksiyonunun $s.$ dereceden türevi

$$f^{(s)}(x) = \frac{1}{2}C_0^{(s)} + C_1^{(s)}T_1(x) + C_2^{(s)}T_2(x) + ... + C_{n-1}^{(s)}T_{n-1}(x) + C_n^{(s)}T_n(x) + C_{n+1}^{(s)}T_{n+1}(x) + ... \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlanır. $s = 0$ için (4.3) tanımı

$$f(x) = \frac{1}{2}C_0 + C_1T_1(x) + C_2T_2(x) + ... + C_{n-1}T_{n-1}(x) + C_nT_n(x) + C_{n+1}T_{n+1}(x) + ... \tag{4.4}$$

ve $s = 1$ için

$$f'(x) = \frac{1}{2}C_0^{(1)} + C_1^{(1)}T_1(x) + C_2^{(1)}T_2(x) + ... + C_{n-1}^{(1)}T_{n-1}(x) + C_n^{(1)}T_n(x) + C_{n+1}^{(1)}T_{n+1}(x) + ... \tag{4.5}$$

olarak elde edilir. Chebyshev polinomlarının türevleri arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} T_0(x) &= T_1'(x) \\ T_1(x) &= \frac{1}{4}T_2'(x) \\ T_n(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}'}{n+1} - \frac{T_{n-1}'}{n-1}\right) \qquad n \geq 2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

ve

$$(1-x^2)T_n'(x) = n[xT_n(x) - T_{n+1}(x)] = n[T_{n-1}(x) - xT_n(x)] \tag{4.7}$$

bağıntıları ile verilir.

(4.5) ifadesi (4.6) yardımı ile integre edilirse

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{2}c_0^{(1)}T_1(x) + \frac{1}{4}c_1^{(1)}T_2(x) + \ldots\ldots \\ &+ \frac{1}{2}c_{n-1}^{(1)}\left(\frac{T_n(x)}{n} - \frac{T_{n-2}(x)}{n-2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}c_n^{(1)}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right) \\ &+ \frac{1}{2}c_{n+1}^{(1)}\left(\frac{T_{n+2}(x)}{n+2} - \frac{T_n(x)}{n}\right) + \ldots\ldots \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta (4.8) denklemindeki $\frac{1}{2}c_0$ ile (4.4) denklemindeki $\frac{1}{2}c_0$ katsayısının farklı sayılar olduğudur.

(4.8) ile (4.4) denklemleri eşitlenirse

$$2rC_r^{(s)} = C_{r-1}^{(s+1)} - C_{r+1}^{(s+1)} \qquad r \geq 1 \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir.

$s = 0$ için (4.9) ifadesinin

$$2rC_r = C_{r-1}' - C_{r+1}' \tag{4.10}$$

olduğu görülür.

$g(x)$ ile verilen bir polinomun Chebyshev açılımında, $T_r(x)$ polinomunun katsayısı

$$\begin{aligned} &C_r\big(g(x)\big), \quad r > 0 \\ &C_r\big(g(x)\big)/2, \quad r = 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak gösterilirse, (4.1) diferansiyel denkleminde ki terimlerin Chebyshev açılımı için genel yapı

$$C_r(x^p f^{(s)}) = \frac{1}{2^p}\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}C_{|r-p+2j|}^{(s)} \tag{4.12}$$

şeklinde verilmiştir. Dolayısıyla (4.1) diferansiyel denklemi (4.12) yardımıyla Chebyshev polinomlarına açılıp, eşitliğin her iki tarafında aynı dereceden Chebyshev polinomlarının katsayıları eşitlenerek (4.2) çözümünü Chebyshev polinomları cinsinden yazmak için gerekli katsayılar elde edilebilir. Bu amaçla aşağıda anlatılan rekürsif yöntem kullanılır [2].

Rekürsif Yöntem:

1. N sayısı çözümün doğruluğu istenilen hata aralığında kalacak şekilde yeterince büyük olmak üzere,

$$\begin{aligned} C_N^{(s)} &= \text{keyfi} \qquad r = N \\ C_r^{(s)} &= 0 \qquad\qquad r > N \end{aligned} \tag{4.13}$$

   şeklinde keyfi N ve $C_N^{(s)}$ değerleri seçilir.

2. $r = N$ sayısından başlanarak $C_{N-1}^{(s)}$ katsayıları, $s = 1, \ldots\ldots, m$ için (4.9) ifadesi ile hesaplanır.
3. Bir önceki adımda ki ifadeler ve (4.1) ile verilen diferansiyel denklemden (4.12) yardımıyla elde edilen rekürsif ilişkilerden ise $C_{N-1}^{0} = C_{N-1}$ hesaplanır.
4. (2) ve (3) işlemleri $r = 0$ oluncaya kadar devam ettirilir [2].

Örnek:

$$xy'' + y' + 16xy = 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1 \quad , \quad y(0) = 1 \quad , \quad y'(0) = 0 \tag{4.14}$$

denkleminin çözümünü ve $y(1)$ değerini Chebyshev polinomları yardımıyla bulunuz.

Çözüm:

Clenshaw yöntemi kullanabilmek için denklem

$$C_r(xy'') + C_r(y') + 16C_r(xy) = 0 \qquad r = 1, 2, 3, \ldots\ldots \tag{4.15}$$

şeklinde yazılır. (4.12) ifadesi kullanılarak

$$\begin{aligned} C_r(xy'') &= \frac{1}{2^1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}C_{|r-1+2j|}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\binom{1}{0}C_{|r-1|}^{(2)} + \binom{1}{1}C_{|r+1|}^{(2)}\right] = \frac{1}{2}\left(C''_{r-1} + C''_{r+1}\right), \\ C_r(y') &= \frac{1}{2^0}\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}C_{|r-0+2j|}^{(1)} = C'_r, \\ C_r(xy) &= \frac{1}{2^1}\sum_{j=0}^{1}\binom{1}{j}C_{|r-1+2j|}^{(0)} = \frac{1}{2}\left[\binom{1}{0}C_{|r-1|}^{(0)} + \binom{1}{1}C_{|r+1|}^{(0)}\right] = \left(C_{r-1} + C_{r+1}\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

katsayıları elde edilir. Bu katsayılar (4.15) denkleminde yazılırsa

$$\frac{1}{2}\left(C''_{r-1}+C''_{r+1}\right)+C'_r+8\left(C_{r-1}+C_{r+1}\right)=0 \qquad r=1,2,3,... \tag{4.17}$$

ifadesi elde edilir.

(4.17) ifadesinde r yerine $r-1$ yazılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(C''_{r-2}+C''_{r}\right)+C'_{r-1}+8\left(C_{r-2}+C_{r}\right)=0 \qquad r=2,3,4,... \tag{4.18}$$

$r+1$ yazılırsa

$$\frac{1}{2}\left(C''_{r}+C''_{r+2}\right)+C'_{r+1}+8\left(C_{r}+C_{r+2}\right)=0 \qquad r=0,1,2,3,... \tag{4.19}$$

ifadeleri elde edilir.

(4.19) ifadesinden (4.18) ifadesi çıkarılırsa

$$\frac{1}{2}\left(C''_{r-2}-C''_{r+2}\right)+\left(C'_{r-1}-C'_{r+1}\right)+8\left(C_{r-2}+C_{r+2}\right)=0 \qquad r=2,3,4,... \tag{4.20}$$

sonucuna ulaşılır.

(4.20) ifadesini basitleştirmek için (4.9) ifadesinde r yerine $r-1$ yazılırsa

$$2(r-1)C_{r-1}^{(s)}=C_{r-2}^{(s+1)}-C_{r}^{(s+1)} \tag{4.21}$$

$r+1$ yazılırsa

$$2(r+1)C_{r+1}^{(s)}=C_{r}^{(s+1)}-C_{r+2}^{(s+1)} \tag{4.22}$$

ifadeleri elde edilir ve (4.21) ile (4.22) ifadeleri toplanırsa

$$2(r-1)C_{r-1}^{(s)}+2(r+1)C_{r+1}^{(s)}=C_{r-2}^{(s+1)}-C_{r+2}^{(s+1)} \tag{4.23}$$

elde edilir. $s=1$ için (4.23) ifadesinin

$$C''_{r-2}-C''_{r+2}=2(r-1)C'_{r-1}+2(r+1)C'_{r+1} \tag{4.24}$$

şekline gelir. (4.20) ifadesinde (4.24) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(r-1)C'_{r-1}+(r+1)C'_{r+1}+(C'_{r-1}-C'_{r+1})+8(C_{r-2}-C_{r+2})=0\\ r(C'_{r-1}+C'_{r+1})+8(C_{r-2}-C_{r+2})=0\end{aligned} \tag{4.25}$$

elde edilir ve düzenlenirse

$$C_{r-2} = -\frac{r(C'_{r-1} + C'_{r+1})}{8} + C_{r+2} \tag{4.26}$$

ifadesine ulaşılır.

(4.13) ifadesinde $N = 20$ ve $\tilde{C}_{20} = 1$ olarak seçilir ve daha büyük dereceli katsayılar sıfır olarak belirlenirse, (4.10) ve (4.26) ifadeleri ile katsayılar

r	$\tilde{C}_r$	$\tilde{C}'_r$	r	$\tilde{C}_r$	$\tilde{C}'_r$
20	1	0	9	0	-15413803680
19	0	40	8	18609052225	0
18	-100	0	7	0	28231031920
17	0	-3560	6	-267715177744	0
16	7921	0	5	0	-2930251101008
15	0	249912	4	2004549104041	0
14	-492804	0	3	0	13106141731320
13	0	-13548600	2	-5355660492900	0
12	23280625	0	1	0	-8316500240280
11	0	545186400	0	807138731281	0
10	-797949504	0			

Tablo 4.1: $\tilde{C}_r$ **ve** $\tilde{C}'_r$ değerleri

Tablo 4.1 de görüldüğü gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} T_{2i}(0) &= (-1)^i \\ T_{2i+1}(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

olduğuna göre

$$\bar{y}(0) = \frac{1}{2}\tilde{C}_0 - \tilde{C}_2 + \tilde{C}_4 - ......+ \tilde{C}_{20} = 8050924923505.5 \tag{4.28}$$

olarak bulunur. Problemde verilen $y(0) = 1$ başlangıç koşulunun sağlanması için bu değer kendisine yani $\bar{y}(0)$ değerine bölünmelidir. Bu durumda (4.2) gerçek C_r değerleri

$$C_r = \frac{\tilde{C}_r}{\overline{y}(0)} \tag{4.29}$$

ifadesi kullanılarak hesaplanır.

r	C_r	r	C_r
20	0.0000000000001	9	0
19	0	8	0.00231141
18	0.000000000012	7	0
17	0	6	-0.0332527231
16	0.000000000983	5	0
15	0	4	0.248983703
14	0.000000061210	3	0
13	0	2	-0.665223007
12	0.000002891670	1	0
11	0	0	0.100254161
10	-0.00009911277		

Tablo 4.2 C_r değerleri

Tablo 4.2 den elde edilen C_r değerleri ile $y(1)$

$$y(1) = \frac{C_0}{2} + \sum_{i=1}^{20} C_i T_i(1) = -0.39714980986386982001 \tag{4.30}$$

olarak hesaplanır [2].

Örnek:

$$(5+3x)y' = \frac{3}{2}y \quad , \quad y(-1) = \sqrt{2}$$

denkleminin çözümü için dördüncü dereceden bir yaklaşım polinomu oluşturunuz.

Çözüm:

Bir önceki örneğe benzer şekilde denklem

$$5C_r(y') + 3C_r(xy') = \frac{3}{2}C_r(y) \tag{4.31}$$

şeklinde yazılır. (4.12) ifadesi kullanılarak

$$
\begin{aligned}
C_r(y') &= \frac{1}{2^0}\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}C^{(1)}_{|r-0+2j|} = C'_r, \\
C_r(xy') &= \frac{1}{2^1}\sum_{j=0}^{1}\binom{0}{j}C^{(1)}_{|r-1+2j|} = \frac{1}{2}\left(C'_{r+1}+C'_{r-1}\right), \\
C_r(y) &= \frac{1}{2^0}\sum_{j=0}^{0}\binom{0}{j}C^{(1)}_{|r-0+2j|} = C_r
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

değerleri bulunur. Bu değerler (4.31) ifadesinde yerine yazılırsa

$$5C'_r + \frac{3}{2}\left(C'_{r+1}+C'_{r-1}\right) = \frac{3}{2}C_r \tag{4.33}$$

olur. (4.10) ifadesi yardımı ile (4.33) ifadesi basitleştirilmek istenirse

$$(3-6r)C_r = 10C'_r + 6C'_{r+1} \tag{4.34}$$

ifadesi elde edilir.

(4.13) ifadesinde $N=7$ olarak seçilir $\tilde{C}_7 = 10$ ve daha büyük dereceli katsayılar sıfır olarak belirlenirse (4.10) ve (4.34) ifadelerinden katsayılar

r	$\tilde{C}_r$	$\tilde{C}'_r$
7	-3	10
6	11	-42
5	-43	142
4	184	-472
3	-887	1614
2	5362	-5794
1	-65285	23062
0	-408423	-136364

Tablo 4.3. $\tilde{C}_r$ **ve** $\tilde{C}'_r$ değerleri

olarak belirlenir. Bulunan değerler en yakın tamsayıya yuvarlanmıştır.

$$T_i(-1) = (-1)^i \tag{4.35}$$

olduğuna göre

$$\overline{y}(-1) = \frac{1}{2}\tilde{C}_0 - \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 - ..... - \tilde{C}_7 = -132436 \qquad (4.36)$$

olarak bulunur. Bu değerin verilen gerçek $y(-1)$ değerine yani $\sqrt{2}$ ye eşit olması için tüm $\tilde{C}_r$ katsayıları $-\frac{\sqrt{2}}{132436}$ sayısı ile çarpılmalıdır. Buradan C_r değerleri

r	C_r
7	0.00003
6	-0.00012
5	0.00046
4	-0.00196
3	0.00947
2	- 0.05726
1	0.69714
0	4.36133

Tablo 4.4. C_r değerleri

şeklinde bulunur.

Sonuç olarak çözüm

$$\begin{aligned} y_4(x) &= 2.1807 + 0.6971x - 0.0573(2x^2 - 1) + 0.0095(4x^3 - 3x) \\ &\quad - 0.0020(8x^4 - 8x^2 + 1) \\ &= 2.2360 + 0.6686x - 0.0986x^2 + 0.0380x^3 - 0.0160x^4 \end{aligned} \qquad (4.37)$$

olarak elde edilir [3].

KAYNAKLAR

[1] Fox L., 1968. *Chebyshev Polynomials in Numerical Analysis*, Oxford University Press, London.

[2] Gill A., Segura J., Temme N. M., 2007. *Numerical Methods for Special Functions,* Siam, Philadelphia.

[3] Clenshaw C. W., 1956. *The Numerical Solution of Linear Differantial Equations in Chebyshev Series*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **53**:134-149.