

Elektrik Devre Denklemlerinin Euler Lagrange ve Hamilton Formülasyonları

Mustafa Kösem
Özkan Karabacak

İÇERİK

- Çalışma grubumuz
- Neden farklı bir formülasyon?
- Euler-Langrange(EL) ve Hamilton(H) denklemleri
- Elektrik devrelerinin EL-H formülasyonları-kısa tarihçe
- Ötesi...

Neden farklı bir formülasyon?

- Elektromekanik sistemler
- Lineer olmayan sistemler
- Davranışı doğrudan görmek
- Kapılar tanımlayarak enerji temelli kontrol yapmak
- Ve diğer teorileri elektriğe taşımak

EL-H Denklemleri (Neden Newton yetmiyor?)

Tek parçacık için Newton'un ikinci yasası:

$$F = \frac{dp}{dt}$$

Kuvvet korunumlu ise

$$\oint F \cdot dx = 0 \xrightarrow[\text{theorem}]{\text{Stokes}} \nabla \times F = 0 \longrightarrow F = -\nabla V$$

V bir skaler fonksiyon; adı potansiyel (enerji)

EL-H Denklemleri (Neden Newton yetmiyor?)

$$W_{12} = \int_1^2 F \cdot dx = \int_1^2 m \frac{dv}{dt} \cdot dx = m \cdot \int_1^2 v \cdot dv$$

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1, \quad T_i = m \cdot v_i^2 / 2$$

T bir skaler fonksiyon; adı kinetik enerji


$$H = V_1 + T_1 = V_2 + T_2$$

H bir skaler fonksiyon; adı enerji

H korunur.

EL-H Denklemleri (Neden Newton yetmiyor?)

N parçacık için Newton'un ikinci yasası:

$$\sum_j F_{ji} + F_i^{(e)} = \dot{p}_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, N$$

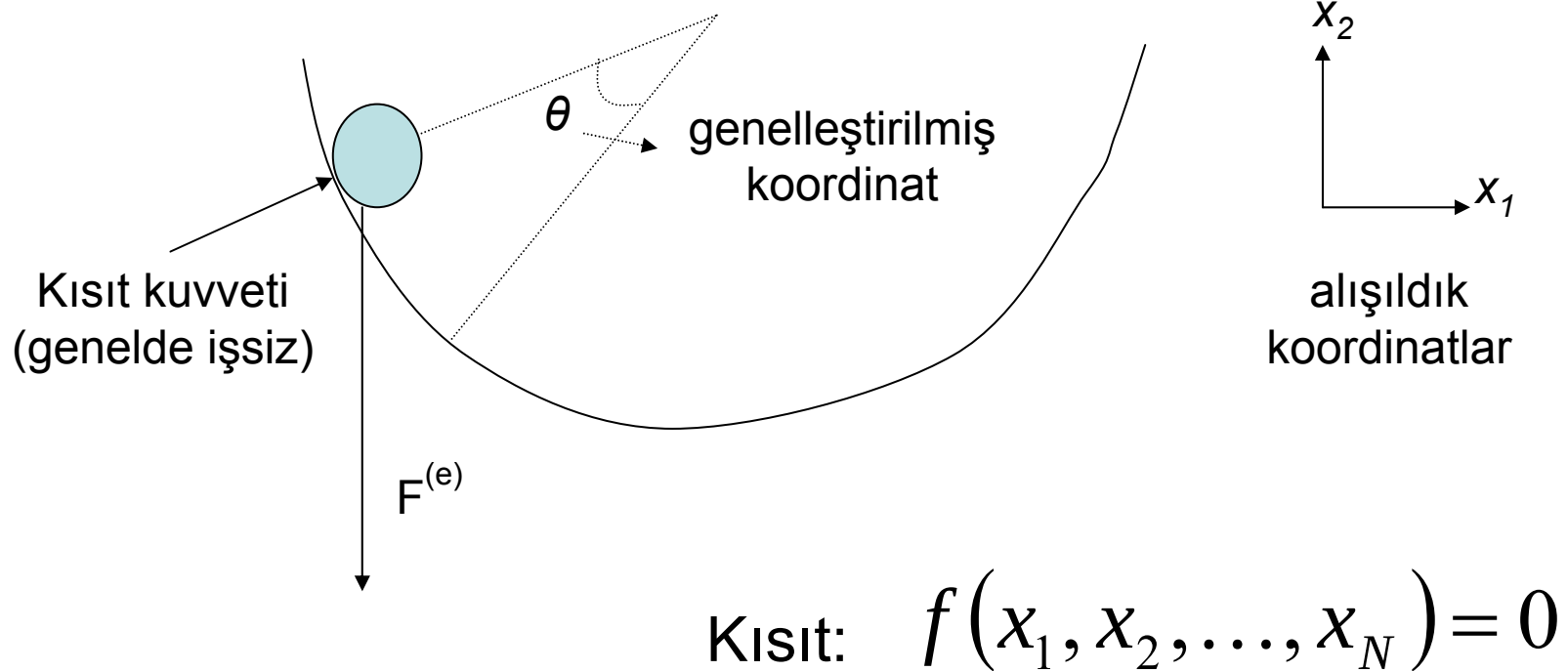
Kuvvetler korunumlu ise,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \cdot v_i^2 \quad , \quad V = \sum_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ij}$$

H korunur.

EL-H Denklemleri (Neden Newton yetmiyor?)

Çünkü sistemde etkisini bilip de kendisini bilemediğimiz kuvvetler olabilir. Yani *KISIT KUVVETLERİ*



EL-H Denklemleri (Kısıt kuvvetlerinden bağımsız bir denklem: D'Alembert Prensibi)

$$\sum_i F_i \cdot \delta x_i = 0$$

statik

$$F_i = F_i^{(a)} + f_i$$

kısıt kuvvetlerini ayırdık

$$\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta x_i = 0$$

statik

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta x_i = 0$$

dinamik

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta x_i = 0$$

dinamik

D'Alembert Prensibi

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta x_i = 0$$

EL-H Denklemleri (D'Alembert Prensibi genelleştirilmiş koordinatlara taşınması: EL-H denklemleri)

Euler-Lagrange denklemleri

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = 0 \quad , \quad L = T - V$$

L: Lagrange fonksiyonu

Korunumsuz kuvvetler var ise:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = Q \quad , \quad L = T - V$$

EL-H Denklemleri (D'Alembert Prensibi genelleştirilmiş koordinatlara taşınması: EL-H denklemleri)

Hamilton denklemleri:

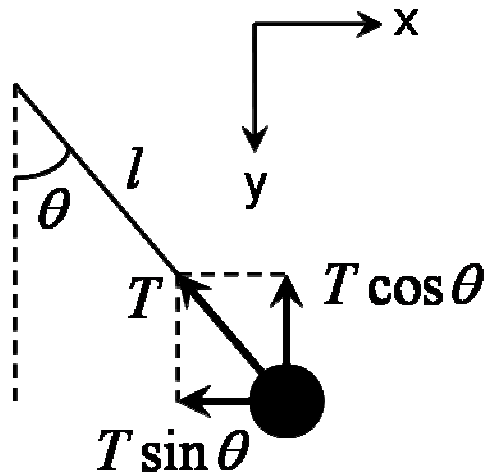
$$\dot{q} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p} , \quad p = M(q) \cdot \dot{q}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q} , \quad H = T + V$$

H: Hamilton fonksiyonu

BASİT SARKAÇ

Newton denklemleri kullanılarak



$$\sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x \Rightarrow mx'' = -T \sin \theta = -T \frac{x}{l}$$

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \Rightarrow my'' = -T \cos \theta + mg = -T \frac{y}{l} + mg$$

Sabit uzunlukta ip kısımlar hareketini sınırlandırmak için

$$x = l \sin \theta \Rightarrow x' = l \cos \theta \theta' \Rightarrow x'' = l(\cos \theta \theta'' - \sin \theta \theta'^2)$$

Kısıt denklemi:

$$y = l \cos \theta \Rightarrow y' = -l \sin \theta \theta' \Rightarrow y'' = -l(\sin \theta \theta'' + \cos \theta \theta'^2)$$

Sisteme ait dinamik denklem

$$mx'' = -T \sin \theta \Rightarrow ml(\cos \theta \theta'' - \sin \theta \theta'^2) = -T \sin \theta$$

Kısıt kuvveti: T

$$mx'' + T \frac{x}{l} = 0$$

$$my'' = -T \cos \theta + mg \Rightarrow -ml(\sin \theta \theta'' + \cos \theta \theta'^2) = -T \cos \theta + mg$$

$$ml(\cos^2 \theta \theta'' - \sin \theta \cos \theta \theta'^2) + ml(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \theta'^2) = \frac{y}{l} mg \sin \theta$$

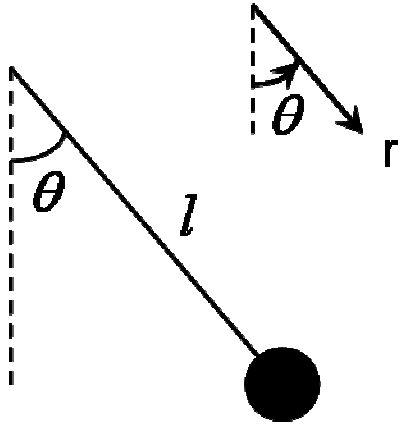
Sisteme ait kısıt denklemi

$$ml(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \theta'' = mg \sin \theta \Rightarrow \theta'' = \frac{g}{l} \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = l^2$$

BASİT SARKAÇ

Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak



Koordinat dönüşümü



Genelleştirilmiş koordinatlara geçiş

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m[(l \cos \theta \theta')^2 + (-l \sin \theta \theta')^2] = \frac{1}{2}ml^2 \theta'^2$$

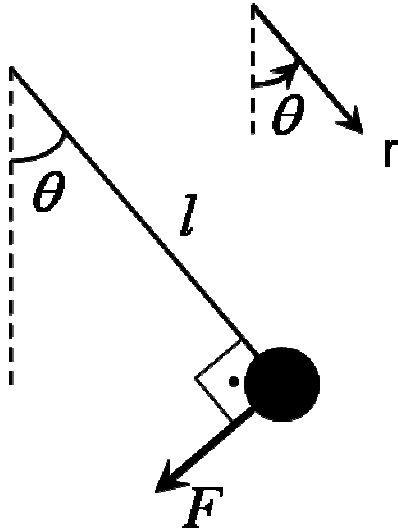
$$V = -mgy = -mgl \cos \theta$$

EULER-LAGRANGE DENKLEMİ $L = K - V$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \theta' , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \Rightarrow \theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

UYARILMIŞ SARKAÇ

Euler-Lagrange denklemleri kullanılarak



$$K = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left[(l \cos \theta \theta')^2 + (-l \sin \theta \theta')^2 \right]$$
$$= \frac{1}{2} m l^2 \theta'^2$$

$$V = -mgy = -mgl \cos \theta$$

EULER-LAGRANGE DENKLEMİ $L = K - V$, $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \theta'^2 + mgl \cos \theta \quad , \quad Q = -F$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \theta' \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \theta'' = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{1}{m l^2} F$$

Elektrik devrelerinin EL-H formülasyonları

- Application of the Lagrangian equations to electrical circuits, D. A. Wells, 1938.
- A theory of nonlinear networks, R. K. Brayton, J. K. Moser, 1964.
- Explicit topological formulation of Lagrangian and Hamiltonian equations for nonlinear networks, L. O. Chua and J. D. McPherson, 1974.
- A method for obtaining a canonical hamiltonian for nonlinear LC circuits, G. M. Bernstein and M. A. Lieberman, 1989.
- Ötesi...

Brayton-Moser Denklemleri

Devre üzerine kısıtlamalar

Kondansatör gerilimleri ve endüktans akımları **tam** değişkenler kümesi oluştursun.

Denge noktası problemi çözülebilir olsun.

$$L(i_L) \frac{di_L}{dt} = \frac{\partial P}{\partial i_L}(i_L, v_C)$$
$$C(v_C) \frac{dv_C}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial v_C}(i_L, v_C)$$

P karışık potansiyel fonksiyonu (mixed potential function)



LC DEVRELERİ

Devre topolojisi üzerine kısıtlamalar

Kondansatörler çevre, endüktanslar kesitleme oluşturmuyor.

$$B = \left[\overbrace{1}^{\mathcal{L}} \mid \overbrace{B_{LC}}^{\mathcal{T}} \right]$$

Eleman tanım bağıntıları üzerine kısıtlamalar

Dallar $\mathcal{T}$: $q_C = q_C(v_C)$

Kirişler $\mathcal{L}$: $i_L = i_L(\phi_L)$

ENERJİ FONKSİYONLARI

Enerji : $\mathcal{E} = W_L(\phi_{L\mathcal{L}}) = \sum_{j \in L\mathcal{L}} \int_0^{\phi_j} i_j(\bar{\phi}_j) d\bar{\phi}_j$

Tümleyen Enerji : $\hat{\mathcal{E}} = \hat{W}_C(v_{C\mathcal{T}}) = \sum_{j \in C\mathcal{T}} \int_0^{v_j} q_j(\bar{v}_j) d\bar{v}_j$

LAGRANGE FONKSİYONU

$$Bv = \left[\overbrace{1}^{\mathcal{L}} \mid \overbrace{B_{LC}}^{\mathcal{T}} \right] \begin{bmatrix} v_{LL} \\ v_{CT} \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{LL} = -B_{LC} v_{CT}$$

$$\Rightarrow \phi_{LL} = -B_{LC} \phi_{CT} + B_{LC} \phi_{CT}(0) + \phi_{LL}(0)$$

$$\mathcal{E} = W_L(\phi_{LL}) = \sum_{j \in LL} \int_0^{\phi_j} i_j(\bar{\phi}_j) d\bar{\phi}_j = \sum_{j \in LL} \tilde{i}_j(\phi_j) = \tilde{i}_{LL}(\phi_{LL}) = \tilde{i}_{LL}(\phi_{CT})$$

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{W}_C(v_{CT}) = \sum_{j \in CT} \int_0^{v_j} q_j(\bar{v}_j) d\bar{v}_j = \sum_{j \in CT} \tilde{q}_j(v_j) = \tilde{q}_{CT}(v_{CT})$$

Klasik mekanik : $L = K - V = f_K(v) - f_v(x) = f_K(\dot{x}) - f_v(x)$

LC devresi : $L = \hat{\mathcal{E}} - \mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}}(v_{CT}) - \mathcal{E}(\phi_{CT}) = \hat{\mathcal{E}}(\dot{\phi}_{CT}) - \mathcal{E}(\phi_{CT})$

Genelleştirilmiş konum : ϕ_{CT}

Genelleştirilmiş hız : $\dot{\phi}_{CT}$

Problem : Kondansatör akısı ve endüktans yükü alışlagelmiş büyüklükler değil!

EULER-LAGRANGE DENKLEMLERİ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(\phi_{cT}, \dot{\phi}_{cT})}{\partial \dot{\phi}_{cT}} \right) - \frac{\partial L(\phi_{cT}, \dot{\phi}_{cT})}{\partial \phi_{cT}} = 0 \quad \text{Bu denklem sağlanır.}$$

$$\phi_{LL} = -B_{LC} \phi_{cT} + B_{LC} \phi_{cT}(0) + \phi_{LL}(0)$$

$$\mathcal{E} = W_L(\phi_{LL}) = \tilde{i}_{cT}(\phi_{cT}) \tilde{B}_{LC}^T \tilde{i}_{LL}(\phi_{LL}), \quad \hat{\mathcal{E}} = \hat{W}_c(v_{cT}) = \tilde{q}_{cT}(v_{cT})$$

$$L = \hat{\mathcal{E}} - \mathcal{E} = \hat{\mathcal{E}}(v_{cT}) - \mathcal{E}(\phi_{cT}) = \hat{\mathcal{E}}(\dot{\phi}_{cT}) - \mathcal{E}(\phi_{cT})$$

Kirchhoff'un gerilimler yasası

SONUÇ:

$$\frac{\partial L(\phi_{cT}, \dot{\phi}_{cT})}{\partial \dot{\phi}_{cT}} = \frac{\partial \hat{\mathcal{E}}(\dot{\phi}_{cT})}{\partial \dot{\phi}_{cT}} = \frac{\partial W_c(v_{cT})}{\partial v_{cT}} = \tilde{q}_{cT}(v_{cT}) = B_{LC}^T \tilde{i}_{LL}(\phi_{LL})$$

Enerjinin korunumu (Euler-Lagrange denklemleri)

Kondansatör gerilimlerine dair dinamik denklem

L, C, J, R DEVRELERİ

$$B = \begin{array}{c} \underbrace{\mathcal{L}\mathcal{L}} \quad \underbrace{\mathcal{L}\mathcal{J}} \quad \underbrace{\mathcal{L}\mathcal{R}} \quad \underbrace{\mathcal{TC}} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & . & . & B_{\mathcal{LC}} \\ . & 1 & . & B_{\mathcal{JC}} \\ . & . & 1 & B_{\mathcal{RC}} \end{array} \right] \end{array}$$

Dallar

$$\mathcal{T} : \mathbf{q}_c = \mathbf{q}_c(v_c)$$

Kirişler

$$\mathcal{L} : \begin{cases} i_L = i_L(\phi_L) \\ i_J = \text{sabit} = i_J(\phi_J) \\ i_R = i_R(v_R) \end{cases}$$

Bağımsız DC akım kaynakları akı kontrollü endüktanslar gibi düşünülür.

$$\mathcal{E}(\phi_{c\mathcal{T}}) = W_L(\phi_{\mathcal{L}\mathcal{L}}) + i_{\mathcal{J}\mathcal{L}}^T \phi_{\mathcal{J}\mathcal{L}} = \tilde{i}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\phi_{\mathcal{L}\mathcal{L}}) + i_{\mathcal{J}\mathcal{L}}^T \phi_{\mathcal{J}\mathcal{L}}$$

Dirençler denklemlere genelleştirilmiş kuvvet olarak katılır.

$$\text{L, C, J devresi} : \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{c\mathcal{T}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_{c\mathcal{T}}} = 0 \Rightarrow i_{c\mathcal{T}} = B_{\mathcal{LC}}^T i_{\mathcal{L}\mathcal{L}} + B_{\mathcal{JC}}^T i_{\mathcal{J}\mathcal{L}}$$

$$\text{L, C, J, R devresi} : Q i = 0 \Rightarrow i_{c\mathcal{T}} = B_{\mathcal{LC}}^T i_{\mathcal{L}\mathcal{L}} + B_{\mathcal{JC}}^T i_{\mathcal{J}\mathcal{L}} + B_{\mathcal{RC}}^T i_{\mathcal{R}\mathcal{L}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_{c\mathcal{T}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_{c\mathcal{T}}} = F(\dot{\phi}_{c\mathcal{T}}) = B_{\mathcal{RC}}^T i_{\mathcal{R}\mathcal{L}}(\dot{\phi}_{c\mathcal{T}})$$

GENEL HALDE EULER-LAGRANGE DENKLEMLERİ

$$\mathcal{E} = \underbrace{W_{L_1}(\phi_{L\mathcal{L}_1}) + i_{J\mathcal{L}_1}^T \phi_{J\mathcal{L}_1}}_{\text{Akı kontrollü endüktanslar}} + \underbrace{W_{C_2}(q_{C\mathcal{T}_2}) + q_{E\mathcal{T}_2}^T v_{E\mathcal{T}_2}}_{\text{Yük kontrollü kapasiteler}}$$

Akım kontrollü bağımsız kaynaklar Gerilim kontrollü bağımsız kaynaklar

$$\hat{\mathcal{E}} = \underbrace{\hat{W}_{C_1}(v_{C\mathcal{T}_1})}_{\text{Gerilim kontrollü kondansatörler}} + \underbrace{\hat{W}_{L_2}(i_{L\mathcal{L}_2})}_{\text{Akım kontrollü endüktanslar}}$$

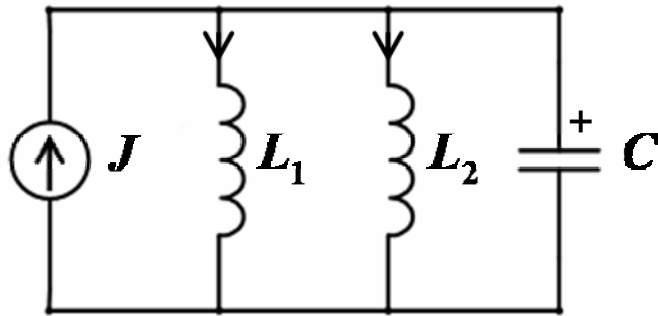
Gerilim kontrollü kondansatörler Akım kontrollü endüktanslar

$$x = \begin{bmatrix} \phi_{C\mathcal{T}_1} \\ q_{L\mathcal{L}_2} \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} v_{C\mathcal{T}_1} \\ i_{L\mathcal{L}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi}_{C\mathcal{T}_1} \\ \dot{q}_{L\mathcal{L}_2} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} B_{R_1 C_1}^T & 0 \\ 0 & -B_{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{R\mathcal{L}_1}(\dot{\phi}_{C\mathcal{T}_1}) \\ v_{R\mathcal{T}_2}(\dot{q}_{L\mathcal{L}_2}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{J_C C_1}^T & 0 \\ 0 & -B_{L_2 E_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{J_C \mathcal{L}_1}(\dot{\phi}_{C\mathcal{T}_1}) \\ v_{E_C \mathcal{T}_2}(\dot{q}_{L\mathcal{L}_2}) \end{bmatrix}$$

ÖRNEK

Durum değişkenleri gösterimi



$$\dot{v}_C = -\frac{1}{C}i_{L_1} - \frac{1}{C}i_{L_2} + \frac{1}{C}J$$

$$\dot{i}_{L_1} = \frac{1}{L_1}v_C$$

$$\dot{i}_{L_2} = \frac{1}{L_2}v_C$$

Euler-Lagrange gösterimi

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= W_L + J \cdot \phi_J = \frac{1}{2L_1}\phi_{L_1}^2 + \frac{1}{2L_2}\phi_{L_2}^2 + J \cdot \phi_J \\ &= \frac{1}{2L_1}[\phi_C - \phi_C(0) + \phi_{L_1}(0)]^2 + \frac{1}{2L_2}[\phi_C - \phi_C(0) + \phi_{L_2}(0)]^2 + J[-\phi_C + \phi_C(0) + \phi_J(0)]\end{aligned}$$

$$\hat{\mathcal{E}} = W_C = \frac{C}{2}v_C^2$$

$$L = \hat{\mathcal{E}} - \mathcal{E} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_C}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi_C} = 0$$

$$\phi_C'' = -\frac{1}{CL_1}[\phi_C - \phi_C(0) + \phi_{L_1}(0)]^2 - \frac{1}{CL_2}[\phi_C - \phi_C(0) + \phi_{L_2}(0)]^2 + \frac{J}{C}$$



HAMILTON DENKLEMLERİ

Eleman tanım bağıntıları üzerine kısıtlamalar :

$$v_{C_k} = \hat{v}_{C_k}(q_{C_k})$$

$$i_{L_k} = \hat{i}_{L_k}(\phi_{L_k})$$

$$Bv = \begin{bmatrix} 1 & | & B_{LC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_L \\ v_C \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_L = -B_{LC} v_C$$

$$\Rightarrow \dot{\phi}_L = -B_{LC} v_C$$

$$Qi = \begin{bmatrix} -B_{LC}^T & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ i_C \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow i_C = B_{LC}^T i_L$$

$$\Rightarrow \dot{q}_C = B_{LC}^T i_L$$

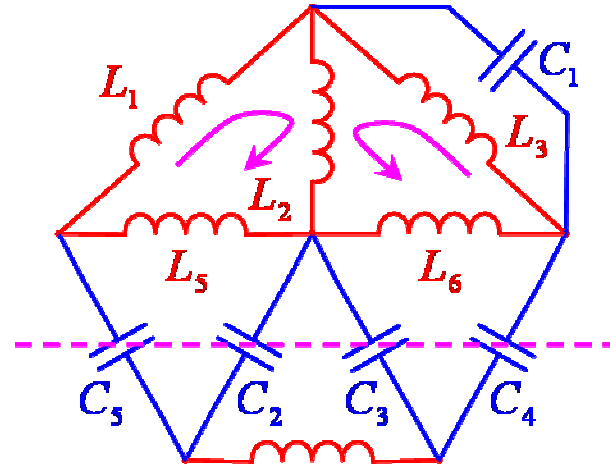
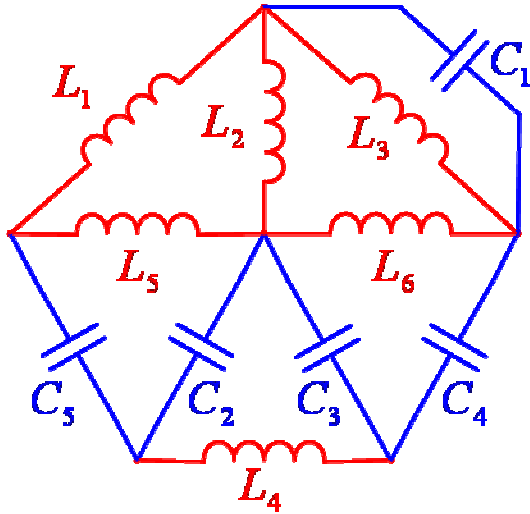
Hamilton fonksiyonu : $E(q_C, \phi_L) = \sum_{k=1}^{n_C} \int_0^{q_{C_k}} \hat{v}_{C_k}(u) du + \sum_{k=1}^{n_L} \int_0^{\phi_{L_k}} \hat{i}_{L_k}(u) du$

$$\dot{q}_C = B_{LC}^T \left[\frac{\partial E(q_C, \phi_L)}{\partial \phi_L} \right]^T, \quad \dot{\phi}_L = -B_{LC} \left[\frac{\partial E(q_C, \phi_L)}{\partial q_C} \right]^T$$

BİR LC DEVRESİNİN KARMAŞIKLIĞI

Devre topolojisi üzerine kısıtlamalar

Kondansatörler çevre, endüktanslar kesitleme oluşturmuyor.



Durum değişkeni sayısı

5 kondansatör gerilimi

6 endüktans akımı

Gerçek karmaşıklık

$5-1=4$ kondansatör gerilimi

$6-2=4$ endüktans akımı

ÖZELLİK : Bağımsız kondansatör gerilimi sayısı,
bağımsız endüktans akımı sayısına eşittir.

KANONİK YAPIDA HAMILTON DENKLEMLERİ

$$N^{-1}B_{LC} (M^T)^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r \times (n_C - r)} \\ 0_{(n_L - r) \times r} & 0_{(n_L - r) \times (n_C - r)} \end{pmatrix}$$

Bu eşitliği sağlayan M ve N matrisleri vardır.

Genelleştirilmiş koordinatlara geçiş : $q_C = Mx$, $\phi_L = Ny$

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_C &= B_{LC}^T \left[\frac{\partial E(q_C, \phi_L)}{\partial \phi_L} \right]^T \\ \dot{\phi}_L &= -B_{LC} \left[\frac{\partial E(q_C, \phi_L)}{\partial q_C} \right]^T \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

Kanonik hamilton gösterimi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= M^{-1} B_{LC}^T (N^T)^{-1} \left[\frac{\partial E(q_C, \phi_L)}{\partial \phi_L} \right]^T \\ \dot{y} &= -N^{-1} B_{LC} (M^T)^{-1} \left[\frac{\partial E(q_C, \phi_L)}{\partial q_C} \right]^T \end{aligned}$$



Ötesi...

- Kontrol
 - enerji şekillendirme (Power shaping)
 - pasiflik temelli kontrol (PBC)
 - bağlantı ve sönüm atama yoluyla pasiflik temelli kontrol (IDA-PBC)
- Diferansiyel geometri
 - manifold üzerinde dinamik sistem
 - simetri