

OPTİMUM İZOLATÖR GEOMETRİSİNİN YAPAY SİNİR AĞI İLE BELİRLENMESİ

Suna BOLAT¹

Özcan KALENDERLİ²

İstanbul Teknik Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Fakültesi
Elektrik Mühendisliği Bölümü, 34469, Maslak, İstanbul

¹e-posta: bolats@elk.itu.edu.tr

²e-posta: ozcan@elk.itu.edu.tr

Anahtar sözcükler: Yüksek Gerilim, İzolatör, Biçim Optimizasyonu, Yapay Sinir Ağı

ABSTRACT

In this paper, optimized form of support insulators has been determined by Artificial Neural Networks (ANN) to obtain stress distribution along the insulator surface not only as ideally uniform as possible but also as low as possible. To train ANN, tangential electric field values of the insulator are calculated by Finite Element Method (FEM). A half of calculated values are used for training, the other half of the field values are used for testing in order to determine the performance of ANN. r-coordinates of optimized contour are searched by applying the desired stress distribution to the ANN. The results show that optimized contour has been obtained with an acceptable degree of accuracy by ANN.

1. GİRİŞ

Yüksek gerilim tekniğinde, iletim sistemlerinde, transformatör ve yüksek gerilim bağlama cihazlarında kullanılan izolatörler, iletkenlerin birbirine ve toprağa karşı yalıtımını sağlarlar. İzolatörler elektriksel bakımdan yalıtım sağlamanın yanında, mekanik bakımdan da bağlantıların yapılmasını sağlayan elemanlar oldukları için, elektrik sistemlerinde önemli bir yer tutar.

Yüksek gerilim tekniğinde elektrot ve izolatör yalıtımlarının ekonomik ve etkin olabilmesi için, yüzeydeki alan dağılımının mümkün olduğu kadar düzgün olması gerekmektedir. Yüksek gerilim düzenlerinde kullanılan elektrot ve izolatörlerin şekli alan dağılımını etkileyen en önemli etkidir. Düzgün alan dağılımı elde edebilmek için yüksek gerilim düzenlerinde optimum elektrot ve izolatör biçimi tercih edilmektedir. Yüzeyde düzgün alan dağılımı sağlayacak en iyi elektrot ve izolatör geometrisinin belirleyebilmek için, literatürde çeşitli algoritmalar geliştirilmiştir.

Bugüne kadar yapılan elektrot ve izolatör geometrisi optimizasyonu çalışmalarında, sayısal, analitik ve deneysel yöntemler kullanılmıştır [1-15]. Bu yöntemlerden birinde, istenen alan dağılımını belirleyebilmek için izolatör biçimi, iteratif olarak interpolasyonla değiştirilir [1-4, 7]. İteratif yöntemlerde elektrik alan değerlerinin her adımda hesaplanması gerektiği için hesaplama zamanı çok uzundur. Bu sebeple iteratif yöntemler her problem için uygun

değildir. Buna karşılık Yapay Sinir Ağı (YSA) kullanılarak daha kısa sürede optimum alan dağılımı belirlenebilir [12-15]. YSAyı eğitmek için sadece sınırlı sayıda alan hesabından oluşan bir eğitim kümesi yeterlidir.

Son yıllarda pekçok alanda, YSA'nın kullanımı ve geliştirilmesi için çok çeşitli çalışmalar yapılmaktadır. Bunun sonucu olarak da, YSA literatürü oldukça hızlı bir şekilde gelişmiştir. YSA'lar, çok geniş uygulama alanına sahiptir. Elektrik enerji sistemlerinde YSA'lar, yük tahmininde, güvenlik değerlendirilmesinde, kapasite kontrolünde, alarm değerlendirilmesinde etkin olarak kullanılmaktadır. Yüksek gerilim sistemlerinde ise YSA uygulamaları, başta kısmi boşalma örneğinin tanınması olmak üzere, her türlü boşalma olayının modellenmesinde ve yıldırım tahmininde yaygın şekilde kullanılmaktadır. Yüksek gerilim uygulamalarının en önemlilerinden biri elektrot ve izolatör geometrisi optimizasyonudur [12-19].

Bu çalışmada, düzlem – düzlem elektrot sistemi (baralar) arasında bulunan dışbükey ve içbükey izolatörlerin optimum biçimi, izolatör yüzeyindeki alan dağılımı düzgün olacak şekilde YSA ile belirlenmiştir. YSA izolatör yüzeyindeki elektrik alan değerleri ve bu değerlerin hesaplandığı noktaların r koordinatları kullanılarak eğitilmiştir. Eğitim için Genelleştirilmiş Regresyon Ağı kullanılmıştır.

2. YAPAY SİNİR AĞLARI

Yapay sinir ağları, insan beyninin öğrenme şeklinin uygulanmaya çalışıldığı bir yöntemdir. Bir yapay sinir ağı, nöron adı verilen, bilgi işleme elemanlarından oluşmaktadır. Nöronlar, bağlantı hatları üzerinden işaret göndererek birbirlerini etkilerler. Bu bağlantı hatlarının herbirinin kendine özgü bir ağırlığı vardır. Uyarılmalı hesaplanabilen bu ağırlıklar, bilgiyi doğru olarak bildirir. Farklı öğrenme algoritmaları kullanılarak belirlenebilen ağırlıklar ile sonuç bilgisine ulaşılır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ REGRESYON AĞI

Genelleştirilmiş regresyon ağları (Generalized Regression Network - GRN), radyal tabanlı işlev

ağlarının özel bir durumudur. Ağ yapısı bir radyal tabanlı katman ile özel bir doğrusal katmandan oluşmaktadır. Radyal tabanlı YSA'larda temel fikir, bir grup radyal tabanlı işlevi istenen işleve yaklaşacak şekilde ağırlıklandırarak toplamaktır. Genelleştirilmiş regresyon ağlarında ise radyal tabanlı işlev ağlarının merkez ve bant genişliklerinin eğitme verisinin deterministik işlevleri olarak belirlenir ve bu tip ağlarda eğitim için yinelemeli (iteratif) yöntemler kullanılmaz [16-19].

Birinci katman, normal bir radyal tabanlı YSA gibi işler. Her nöronun ağırlıklı girişi, giriş vektörü ile bu girişin ağırlık vektörü arasındaki uzaklıktır. Her nöronun net girişi, o nöronun ağırlıklı girişi ile biasının çarpımıyla belirlenir. Her nöronun çıkışı, o nöronun net girişinin radyal tabanlı katmandan geçirilmesiyle hesaplanır.

Genel regresyon ağlarında bir x_j girişi, ağdaki Gauss çekirdeklerinden birinin merkezi olarak atanır. Herhangi bir giriş vektörü x için i . radyal tabanlı biriminin çıkışı

$$\beta_i = \exp \left[- \frac{(x - x_i)^T (x - x_i)}{2\sigma^2} \right] \quad (1)$$

şeklinde hesaplanır. Burada σ kullanıcı tarafından belirlenen yumuşatma parametresidir. Herhangi bir x girişi için ağırlık çıkışı y

$$y = \sum_{i=1}^K \alpha_i y_i \quad (2)$$

şeklinde dir. Eşitlik (2)'de kullanılan α katsayıları aşağıda görüldüğü gibi hesaplanır:

$$\alpha_i = \frac{\beta_i}{\sum_{i=1}^K \beta_i} \quad (3)$$

Eğer giriş vektörü x , herhangi bir x_i eğitim vektörüne yakın ise x_i 'ye ilişkin α_i en büyük olacak ve istenen çıkış y , x_i 'ye ilişkin y_i çıkışına yaklaşacaktır.

4. SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

Bu çalışma kapsamındaki statik elektrik alan probleminin çözümü Laplace denklemi olarak bilinen

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (4)$$

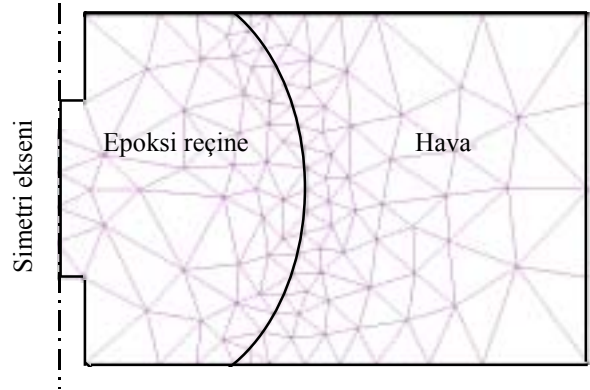
ikinci mertebeden bir homojen diferansiyel denklemin çözümünü gerektirir. Sonlu elemanlar yöntemi bu denklemi

$$W = \epsilon \pi \iint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz \quad (5)$$

elektiriksel enerji denkleminin çözüm bölgesi içinde en küçük değere indirgenmesi (minimizasyon) ilkesi ile çözer. Çünkü bu yolla bulunan çözüm, Laplace denkleminin de aranan çözümüdür. Bu bağıntılarda $V = V(r, z)$ elektiriksel potansiyeldir.

İzolatörler eksenel simetrik geometriye sahiptir. Bu nedenle çözümde izolatörün eksenel kesitinin bir yarısı alınabilir. Çünkü bu yarı kesit, simetri eksenini çevresinde 360° döndürüldüğünde izolatörün kendisi elde edilir. Bu durum problemi r ve z koordinatlarına bağlı olarak iki boyutlu inceleme olanağı verir. Bunun için sözü edilen bölge sonlu elemanlara bölünür. Buna bölgenin ayrıklaştırılması denir. Bölmelemede yani problemi sonlu elemanlara ayırmada genellikle üçgen elemanlar kullanılır. Sonra sınır koşulları, bilinen potansiyeller ve malzeme özellikleri kullanılarak her bir eleman içinde geçerli olduğu kabul edilen birinci dereceden polinomsal yaklaşım işlevleri ile eleman denklemleri ve problemin birleşik (genel) denklemi elde edilir. Elde edilen denklem, matris olarak bol sıfırlı (seyrek), büyük boyutlu bir doğrusal denklem takımıdır. Bu doğrusal denklem takımı yinelemeli bir sayısal çözüm yöntemi ile çözülerek üçgen elemanların köşe (düğüm) noktalarının potansiyelleri bulunur. Potansiyel değerlerine bağlı olarak eleman potansiyel yaklaşım işlevleri, herhangi bir noktadaki potansiyel ve elektrik alan değerleri bulunabilir [20-23].

Bu çalışmada YSAya giriş olarak uygulanan elektrik alan verileri, ilkesi yukarıda özetlenen sonlu elemanlar yöntemine dayanan FEMM 4.0 paket programı kullanılarak hesaplanmıştır [20]. Şekil 1'de dışbükey bir izolatörün çözümünde kullanılan sonlu elemanlar ağı örneği gösterilmiştir.

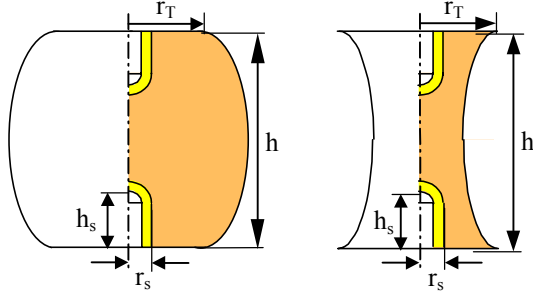


Şekil 1: Dışbükey izolatörün çözümünde kullanılan sonlu elemanlar ağı.

5. GİRİŞ ÇIKIŞ VERİLERİ

Bu çalışmada bara mesnet izolatörleri için optimum izolatör geometrisi aranmıştır. İzolatör yüzeyinde düzgün alan dağılımını sağlayacak optimum izolatör geometrisini belirleyebilmek için, elektrik alan değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Elektrik alan değerleri önceki bölümde açıklandığı gibi sonlu elemanlar yöntemi ile belirlenmiştir.

Şekil 2'de çalışmada göz önüne alınan bina içi türden epoksi reçineden yapılmış dışbükey ve içbükey biçimli mesnet izolatörler görülmektedir.



(a) Dışbükey izolatör (b) İçbükey izolatör

Şekil 2: Optimizasyon için kullanılan izolatörler.

İzolatörlerin düzlem – düzlem elektrot sistemi arasında olduğu varsayılmıştır. Elektrotlar arasındaki potansiyel farkı, 1 kV olarak alınmıştır. İzolatörün tepe noktasının r koordinatı $r_T = 20$ mm ve izolatör yüksekliği $h = 40$ mm, izolatörü sabitlemek için kullanılan vidanın yarıçapı $r_s = 3$ mm ve yüksekliği $h_s = 10$ mm'dir. Yay açıları dışbükey izolatör için 5° 'den 170° 'ye, içbükey izolatör için 5° 'den 150° 'ye kadar 1° 'lik adımlarla değiştirilerek eğitim ve test kümelerini elde etmek için gerekli farklı izolatör geometrileri oluşturulmuştur.

Oluşturulan farklı izolatör düzenlerinde teğetsel elektrik alan değerleri, izolatör yüzeyinde z koordinatları eşit uzaklıkta olan 45 noktada hesaplanmıştır. İzolatör yüzeyindeki teğetsel elektrik alan dağılımları, izolatörün orta noktasına göre simetrik olduğu için izolatörün tepe noktasından orta noktasına kadar sadece 22 noktada yapılan hesaplamalar YSAya tanıtılmıştır. 22 noktada hesaplanan teğetsel elektrik alan değerleri YSAya giriş vektörü olarak, bu noktaların r – koordinatları da çıkış vektörü olarak uygulanmıştır.

6. ALGORİTMANIN UYGULANMASI

Giriş ve çıkış vektörlerinin ikisi de 22 bileşene sahip olduğundan YSA 22 giriş ve 22 çıkış nöronundan meydana gelmektedir. Dışbükey ve içbükey izolatörler için belirlenen bütün veriler, eğitim kümesi ve test kümesine ayrılmıştır. Belirlenen eğitim kümeleri ile YSA geliştirilmiş regresyon ağı kullanılarak eğitilmiştir. Eğitimin tamamlanmasından sonra ağıın güvenilirliğini sınamak amacıyla belirlenen test kümesi ağı uygulanarak, gerçek çıkış ile yapay sinir ağıının hesaplamış olduğu çıkış karşılaştırılmış ve hata bulunmuştur.

Bu çalışmada, veri kümeleri için 2 – katlamalı çapraz geçerlilik yöntemi (2 – fold cross – validation method) kullanılmıştır. Dışbükey izolatör için 166 farklı geometri ile hesaplanan teğetsel elektrik alan değerleri ve r – koordinatlarından oluşan bütün veri kümesi, iki

alt kümeye bölünmüştür. Birinci durumda 83 örüntüden oluşan birinci alt küme eğitim kümesi olarak, 82 örüntüden oluşan ikinci alt küme test kümesi olarak kullanılmıştır. İkinci durumda ise eğitim ve test kümelerinin yerleri değiştirilerek YSAya uygulanmıştır. Bu uygulama ile YSA'nın genelleme yeteneği incelenmiştir. Böylece hangi alt kümenin bütün verileri daha iyi temsil ettiği belirlenmiştir. İçbükey izolatör için ise hesaplanan 146 örüntüden oluşan veri kümesi 73 ve 72 örüntüden oluşan iki alt kümeye bölünerek benzer çalışma uygulanmıştır. Eğitim ve test fazlarında belirlenen hatalar, Çizelge 1'de görülmektedir.

Çizelge 1: Eğitim ve test hataları.

		Eğitim hataları			Test hataları
		sse (%)	mse 10^{-4} (%)	rms (%)	mae (%)
Dışbükey izolatör	1. durum	0,8557	4,6860	0,2165	0,1609
	2. durum	0,7338	4,0675	0,2017	0,1586
İçbükey izolatör	1. durum	1,2779	7,9573	0,2821	0,3183
	2. durum	1,2237	7,7256	0,2780	0,3062

Bu çalışmada eğitim için toplam karesel hata (sum squared error, sse),

$$sse = \sum_{j=1}^N e_j^2(n) \quad (6)$$

ortalama karesel hata (mean squared error, mse) ve

$$mse = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{j \in C} e_j^2(n) \quad (7)$$

hatanın etkin değeri (root mean square, rms)

$$rms = \sqrt{\frac{1}{N n_o} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{n_o} (d_{jk} - y_{jk})^2} \quad (8)$$

test için ise ortalama mutlak hata (mean absolute error, mae)

$$mae = \frac{1}{n_t n_o} \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{k=1}^{n_o} \left[\frac{|d_{jk} - y_{jk}|}{d_{jk}} \right] 100 \quad (9)$$

formülleri ile hesaplanmıştır. Burada N eğitim kümesindeki tüm örüntü sayısını, C çıkış katmanındaki bütün örüntüleri, n_o çıkış katmanındaki nöron sayısını, n_t ise test kümesindeki örüntü sayısını göstermektedir. Sonuçlar dışbükey izolatör için ve içbükey izolatör için 2. durumun tüm veri kümesini daha iyi temsil ettiğini göstermektedir. Sonraki YSA çalışmalarında iki izolatör için de ikinci durumlar kullanılmıştır.

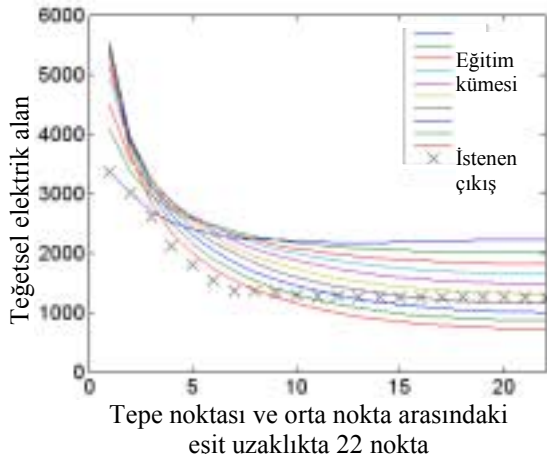
7. YSA UYGULAMASI

Genelleştirilmiş regresyon ağıında kullanılan σ yumuşatma parametresi deneme yanılma yöntemi ile belirlenmiştir (Çizelge 2).

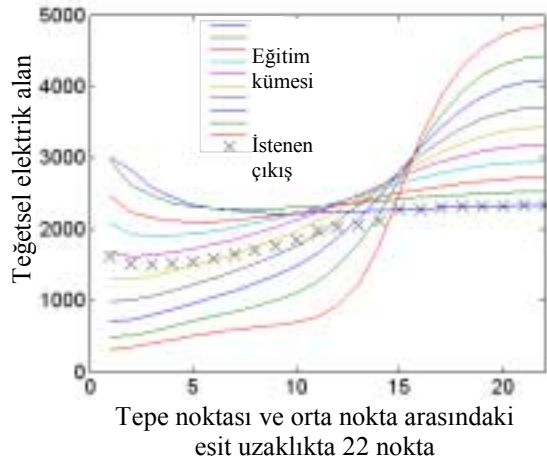
Çizelge 2: YSAda kullanılan yumuşatma parametreleri.

		σ
Dışbükey izolatör	1. durum	0,060
	2. durum	0,055
İçbükey izolatör	1. durum	0,070
	2. durum	0,060

İstenen alan dağılımı, eğitim kümesindeki alan dağılımları ve silindirik izolatör yüzeyindeki alan dağılımları kullanılarak, mümkün olduğu kadar düzgün bir dağılım sağlayacak şekilde belirlenmiştir. İstenen alan dağılımı eğitim kümesindeki elektrik alan dağılımları ile birlikte Şekil 3'te görülmektedir.



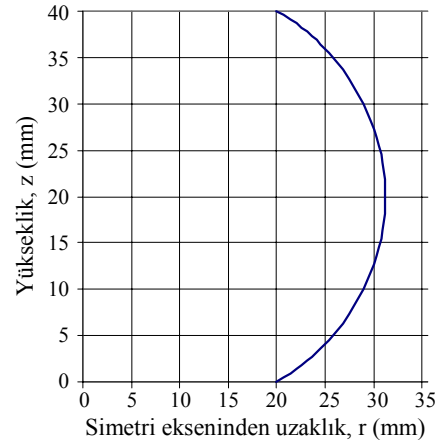
(a) Dışbükey izolatör



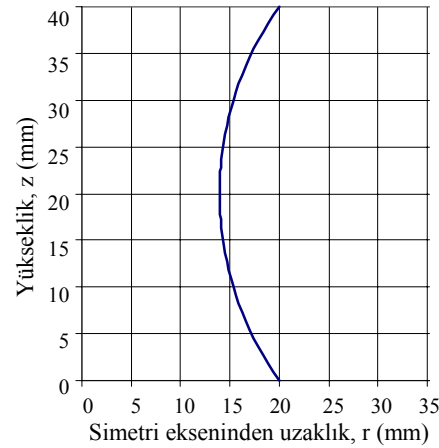
(b) İçbükey izolatör

Şekil 3: İzolatör yüzeylerindeki teğetsel alan dağılımları.

Eğitim ve test fazlarının tamamlanmasından sonra istenen alan dağılımı, optimum izolatör geometrisini vermek üzere YSAYA uygulanmıştır. Çalışmada kullanılan YSA hesaplamaları MATLAB 6.5 Neural Network Toolbox kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Belirlenen optimum geometriler Şekil 6 ve Şekil 7'de görülmektedir.



(a) Dışbükey izolatör



(b) İçbükey izolatör

Şekil 4: YSA ile belirlenen optimum izolatör geometrileri.

8. SONUÇ

Bu çalışmada, dışbükey ve içbükey eksenel simetrik mesnet izolatörlerinin optimum geometrileri, genelleştirilmiş regresyon ağı ile belirlenmiştir. YSAya uygulanan elektrik alan değerleri, sonlu elemanlar yöntemi ile hesaplanmıştır. Hesaplanan değerlerin yarısı YSAyı eğitmek için diğer yarısı ise YSAnın etkinliğini sınamak için kullanılmıştır. Veri kümesinin hangi yarısının sistemi daha iyi modellediği, 2 – katlamalı çapraz geçerlilik yöntemi ile belirlenmiştir. Daha sonra teğetsel elektrik alan değerleri giriş ve r – koordinatları çıkış olmak üzere, veri kümesi YSAya uygulanmıştır. Sonuçlar YSAnın eğitim için % 1'den, test için % 0,3'ten daha küçük hatalarla cevap verdiğini göstermektedir. İstenen teğetsel alan dağılımı YSAya uygulandığında, optimum izolatör geometrisi belirlenebilir.

Kullanılan ağ yapısı ve öğrenme algoritması optimizasyon problemleri için çok uygundur. Tahmin ve sınıflama problemlerine kolaylıkla uygulanabilir ve oldukça kesin sonuçlar elde edilebilir. Genelleştirilmiş regresyon ağının bir üstünlüğü de iteratif süreci olmaması sebebiyle, diğer öğrenme algoritmalarına göre çok daha kısa hesaplama süresine sahip olmasıdır.

Optimizasyon problemlerin çözümünde kullanılan sayısal yöntemlerden biri olan YSA kısa sürede etkin sonuçlar vermektedir. Esnekliği ve hızı YSA'nın bir izolator sisteminin tasarlanmasında tercih edilen bir yöntem olmasını sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Singer, H., "Computation of Optimized Electrode Geometries", *The 3rd Int. Symp. on High Voltage Engineering*, Milan, Paper 11.06, 1979.
- [2] Liu, J., Sheng, J., "The Optimization of the High Voltage Axisymmetrical Electrode Contour", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 24, No.1, pp. 39-42, 1998.
- [3] Kato, K., Hikita, M., Hayakawa, N., Okubo, H., "High Efficient Method for Determination of Electric Field Optimum Contour of High Voltage Electrode", *9th Int. Symp. on HV Engineering*, Graz, Austria, paper 8358, 1995.
- [4] Kato, K., Okubo, H., "Optimization of High Voltage Electrode Contour with the Highest Gaseous Insulation Performance", *IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 4, No. 6, pp. 816-821, 1997.
- [5] Kato, K., Han, X., Okubo, H., "Optimization Technique of High Voltage Electrode Contour Considering V-t Characteristics based on Volume-time Theory", *IEEE High Voltage Eng. Symp.*, Conf. Publ., No. 2, pp. 2.123-2.126, 1999.
- [6] Kato, K., Han, X., Okubo, H., "Insulation Optimization by Electrode Contour Based on Area/Volume Effect", *IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 8, No. 2, pp. 162-167, 2001.
- [7] Stih, Z., "High Voltage Insulating System Design by Application of Electrode and Insulator Contour Optimization", *IEEE Trans. on Electrical Insulation*, Vol. EI-21, No. 4, pp. 579-584, 1986.
- [8] Garcia, J. A. G., Singer, H., "Contour Optimization of High Voltage Insulator by Means of Smoothing Cubic Splines", *9th Int. Symp. on HV Engineering*, Graz, Austria, paper 8342, 1995.
- [9] Tsuboi, H., Misaki, T., "The Optimum Design of Electrode and Insulator Contours by Nonlinear Programming Using The Surface Charge Simulation Method", *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 24, No. 1, pp. 35-38, 1998.
- [10] Gomollon, J. A., Gonzalez-Filgueira, G., Santome, E., "Optimization of High Voltage Insulators within Three Dimensional Field Distributions", *6th Int. Conf. on Properties and Appl. of Dielectric Materials*, China, pp. 629-632, 2000.
- [11] Ijumba, N. M., Gakuru, M. K., Abungu, N. O., "Application of Electric Field Calculations in Optimization of Insulator Design", *4th Int. Conf. on Properties and Appl. of Dielectric Materials*, Australia, paper 4212, pp. 42-45, 1994.
- [12] Chakravorti, S., Mukherjee, P. K., "Application of Artificial Neural Networks for Optimization of Electrode Contour", *IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 1, No. 2, pp. 254-263, 1994.
- [13] Mukherjee, P. K., Trinities, C., Steinbigler, H., "Optimization of HV Electrode Systems by Neural Network using a New Learning Method", *IEEE Trans. on Dielectrics and Electr. Insul.*, Vol. 3, No. 6, pp. 737-742, 1996.
- [14] Okubo, H., Otsuka, T., Kato, K., Hayakawa, Hikita, M., "Electric Field Optimization of High Voltage Electrode Based on Neural Network", *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 12, No. 4, pp. 1413-1418, 1997.
- [15] Bhattacharya, K., Chakravorti, S., Mukherjee, P. K., "Insulator Contour Optimization by a Neural Network", *IEEE Trans. on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 8, No. 2, pp. 157-161, 2001.
- [16] Spetch, D. F., General Regression Neural Network, *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 2, No. 6, pp. 568-576, 1991.
- [17] Rutkowski, L., Generalized Regression Neural Networks in Time-Varying Environment, *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 15, No. 3, pp. 576-596, 2004.
- [18] Hoya, T., Notions of Intuition and Attention Modeled by a Hierarchically Arranged Generalized Regression Neural Network, *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, Vol. 34, No. 1, pp. 200-209, 2004.
- [19] Hoya, T., Chambers, J. A., Heuristic Pattern Correction Scheme Using Adaptively Trained Generalized Regression Neural Networks, *IEEE Trans. on Neural Networks*, Vol. 12, No. 1, pp. 91-100, 2001.
- [20] Meeker, D., FEMM 4.0 Finite Element Method Magnetics Software, 17 June 2004.
- [21] Jin, J., The Finite Element Method in Electromagnetics, Wiley, New York, 1993.
- [22] Zhou, P. B., Numerical Analysis of Electromagnetic Fields, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [23] Kalenderli, Ö., Elektrik Mühendisliğinde Sonlu Elemanlar Yöntemi Ders Notları, İ.T.Ü., 1997.