

## Yük Benzetim Yönteminde Halkasal Yükün Kullanımı

H. YILDIRIM, Ö. KALENDERLİ

İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi  
Elektrik Mühendisliği Bölümü  
80626 - İSTANBUL

### ABSTRACT

*Charge Simulation Method (CSM) is one of the numerical methods used for the computation of electric fields in high-voltage technique. The method is based on the simulation of the actual field by using simple and basic discrete electrical charges, called simulation charges. In CSM, various simulation charges such as point, line and ring charges are used. Potential and field coefficients of ring charge are more complex than the ones of the other charge types. Hence, use of this charge in field computation by CSM is more difficult. In this paper, the potential and field coefficients of a ring charge having constant charge density is evaluated and to demonstrate the use of ring charge, an application is presented.*

### GİRİŞ

Elektrik alanlarının bilgisayar yardımıyla sayısal yöntemler kullanarak çözümü yaygın bir uygulamadır. Kullanılan çeşitli sayısal yöntemler içinde Yük Benzetim Yöntemi (YBY) diğerlerine göre üstünlükleri ve uygulama kolaylığı nedeniyle son yıllarda öne çıkmıştır. YBY'de herhangi bir yük tipinin benzetim yükü olarak kullanabilmesi için onun potansiyel ve elektrik alan bağıntılarının bilinmesi gerekir. Noktasal, sonsuz çizgisel ve sonlu çizgisel yüklerin potansiyel ve elektrik alan bağıntıları basittir. Bu bağıntılar konuyla ilgili çoğu literatürde verilmektedir [1-4]. Ancak daha karmaşık alan problemlerini çözmek, çözüm hızını ve doğruluğunu artırmak için başka yük tiplerini de kullanmak gerekmektedir. Örneğin bu yük tiplerinden biri halkasal yüküdür.

Bu çalışmada, Yük Benzetim Yönteminde halkasal yükün potansiyel ve elektrik alan ifadelerinin elde edilmesi, birinci ve ikinci tür komple eliptik integrallerin hesaplanması açıklanarak bir örnek üzerinde halkasal yükün kullanımı gösterilmiştir.

### YÜK BENZETİM YÖNTEMİ

Yük Benzetim Yöntemi, yüksek gerilim tekniğinde elektrostatik alan hesabında yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerden biridir [4]. Yüksek gerilim aygıtlarının bilgisayar destekli tasarım ve analizinde elektrostatik alan hesabında ve elektriksel boşalma olaylarındaki uzay yüklü elektrik alanların hesabında

etkin uygulamaları görülen YBY'nin ilkesi, bir elektrot sisteminde elektrot yüzeylerine dağılmış olan ve değeri bilinmeyen yüzeysel yükler yerine elektrotların içersine benzetim yükü adı verilen belirli sayıda ve tipte ayrıık elektrik yükünün yerleştirilmesine ve böylece gerçek yüzeysel yüklerin yarattığı potansiyel ve elektrik alan dağılımının bilinen temel elektrik yükü tipleri ile modellenerek incelenmesine dayanır.

YBY'de, iletkenlerin içine yerleştirilen  $n_q$  sayıda ve uygun tipte elektriksel yükün yarattığı alan gözönüne alınmakta ve bu yüklerin sayısı ve yerleri, verilen sınır koşullarının  $n_s$  sayıda sınır noktasında yeterli doğrulukla sağlanması koşuluyla belirlenmektedir. Potansiyel katsayısı kavramından yararlanılarak sınır noktalarının potansiyeli için toplama ilkesiyle

$$[p] \cdot [q] = [V] \quad (1)$$

lineer denklem sistemi yazılabilir. Burada  $[p]$  potansiyel katsayıları matrisi,  $[q]$  benzetim yükleri sütun matrisi,  $[V]$  ise iletken potansiyeline eşit sınır noktaları potansiyelleri sütun matrisidir. Benzetim yüklerinin değerleri, (1) eşitliğinden belirlenir. Yük değerleri belirlendikten sonra herhangi bir noktadaki potansiyel, bütün yüklerin söz konusu noktada oluşturdukları potansiyellerin toplanması ilkesi ile

$$V_i = \sum_{j=1}^{n_q} p_{ij} \cdot q_j \quad (2)$$

bağıntısından hesaplanır. Elektrik alanı ise çeşitli doğrultulardaki bileşenlerinin toplanmasıyla vektörel olarak hesaplanır. Örneğin silindrsel koordinat sisteminde, eksenel simetrisinin göz önüne alındığı alan problemlerinde herhangi bir noktadaki iki boyutlu elektriksel alan

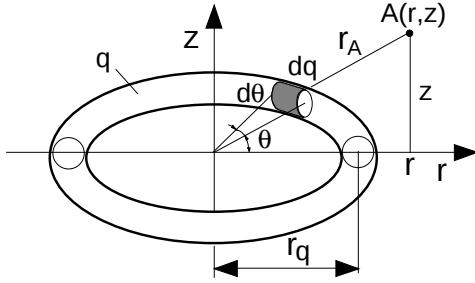
$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_r \cdot \vec{i}_r + E_z \cdot \vec{i}_z \\ &= \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_{ij}}{\partial r} \cdot q_j \right) \cdot \vec{i}_r + \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_{ij}}{\partial z} \cdot q_j \right) \cdot \vec{i}_z \\ &= \left( \sum_{j=1}^n (f_{ij})_r \cdot q_j \right) \cdot \vec{i}_r + \left( \sum_{j=1}^n (f_{ij})_z \cdot q_j \right) \cdot \vec{i}_z \quad (3) \end{aligned}$$

bağıntısıyla hesaplanabilir. Burada  $n=n_q=n_s$  yük sayısı;  $(f_{ij})_r$  ve  $(f_{ij})_z$  alan katsayıları;  $\vec{i}_r$ ,  $\vec{i}_z$  ise  $r$  ve  $z$  doğrultularındaki birim vektörlerdir.

## HALKASAL YÜK

YBY'nin başarılı bir şekilde uygulanabilmesinde problemin geometrik yapısına uygun benzetim yükü kullanımı önemlidir. Bir yük tipini kullanabilmek için bu yükün elektrik alanı ve potansiyel bağıntılarını bilmek gerekir.

Eksenel simetrik üç boyutlu elektrik alanlarının benzetiminde bir çember üzerine eşit aralıklarla yerleştirilmiş birçok noktasal yük yerine sabit yük yoğunluklu bir tek "halkasal yük" yerleştirmek benzetimi kolaylaştırmakta ve çözüm sırasında oluşan lineer denklem sisteminin boyutunu küçültürken bilgisayarda kullanılan bellek miktarını ve hesap süresini azaltmaktadır. Halkasal yüke ilişkin bağıntıları elde etmek için Şekil 1'deki gibi  $z=0$  düzleminde bir halkasal yük göz önüne alalım. Bu yükün birim yük yoğunluğu  $\lambda$  ile gösterilsin. Bu yükün herhangi bir noktada oluşturduğu potansiyeli bulmak için halka üzerinde alınan bir noktasal yükün o noktada oluşturduğu potansiyelin halka üzerinde çizgisel integralinin alınması gerekir [5].



Şekil 1. Halkasal yük.

$q$  toplam yüküne sahip  $r_q$  yarıçaplı sabit yük yoğunluklu bir halkasal yükün yük yoğunluğu

$$\lambda = q / 2\pi r_q \quad (4)$$

şeklinde yazılabilir. Halka üzerinde alınan bir  $dq$  yükü

$$dq = \lambda \cdot r_q \cdot d\theta \quad (5)$$

olur. Problemin eksenel simetrisinden dolayı  $\theta = 0$  düzlemindeki izi alınarak problem iki boyuta indirgenir. Bu durumda  $dq$  yükünün herhangi bir  $A(r, z)$  noktasında oluşturduğu potansiyel

$$dV = \frac{dq}{4\pi\epsilon r_A} = \frac{\lambda \cdot r_q \cdot d\theta}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos \theta}}$$

dir. Bunun 0'dan  $2\pi$ 'ye integrali halkasal yükün  $A$  noktasında oluşturduğu toplam potansiyeli verecektir.

$$V = \int_0^{2\pi} dV = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{z^2 + r^2 + r_q^2 - 2rr_q \cos \theta}} \quad (6)$$

Bu integralin çözümünde  $\theta = \pi - 2\beta$ ,  $\cos \theta = -2\sin^2 \beta - 1$  ve  $d\theta = -2d\beta$  dönüşümleri yapılırsa

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\sqrt{z^2 + (r + r_q)^2}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}} \quad (7)$$

olur. Burada

$$k^2 = (4rr_q) / \alpha^2 \text{ ve } \alpha = \sqrt{z^2 + (r + r_q)^2} \quad (8)$$

dir.  $V$  bağıntısında integral terimi

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \beta)^{-1/2} d\beta, \quad 0 < k < 1 \quad (9)$$

şeklinde birinci tür komple eliptik integraldir. Bu integralin çözümü için aşağıdaki Binom açılımı göz önüne alınarak terim terim integre edilirse

$$\begin{aligned} \left(1 - k^2 \sin^2 \beta\right)^{-1/2} &= 1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \beta + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \sin^4 \beta + L \\ K(k) &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 + L\right) \end{aligned} \quad (10)$$

elde edilir. Bu durumda potansiyel bağıntısı

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{2}{\pi} \frac{K(k)}{\alpha} \quad (11)$$

olur. Sıfır potansiyelli düzlemin benzetimi için Şekil 2'deki gibi merkezi  $+z_q$  noktasında bulunan  $r_q$  yarıçaplı halkasal yükün  $r$  eksenine göre görüntüsü de gözönüne alınırsa  $A(r, z)$  noktasındaki potansiyel

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{2}{\pi} \left( \frac{K(k_1)}{\alpha_1} - \frac{K(k_2)}{\alpha_2} \right) \quad (12)$$

bağıntısıyla verilebilir. Burada

$$\alpha_1 = \sqrt{(r + r_q)^2 + (z - z_q)^2}^{1/2} \quad (13a)$$

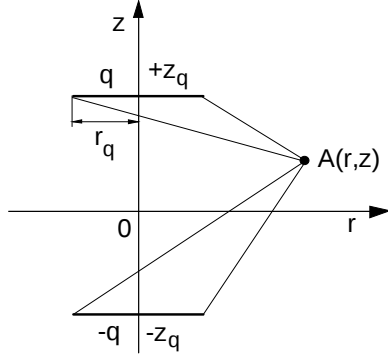
$$\alpha_2 = \sqrt{(r + r_q)^2 + (z + z_q)^2}^{1/2} \quad (13b)$$

dir.  $K(k)$ 'lar ise birinci tür komple eliptik integrallerdir.

(12) eşitliği  $V=p \cdot q$  şeklinde göz önüne alınarak bir halkasal yükün  $p$  potansiyel katsayısı,

$$p = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2}{\pi} \left( \frac{K(k_1)}{\alpha_1} - \frac{K(k_2)}{\alpha_2} \right) \quad (14)$$

şeklinde yazılabilir.  $f_r$  ve  $f_z$  alan katsayıları ise



Şekil 2. Silindrsel koordinatlarda halkasal yük.

$$E_r = -dV / dr = -(dp / dr) \cdot q = f_r \cdot q \quad (15a)$$

$$E_z = -dV / dz = -(dp / dz) \cdot q = f_z \cdot q \quad (15b)$$

eşitlikleri göz önüne alınarak

$$f_r = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\pi r} \left[ \frac{r_q^2 - r^2 + (z_q - z)^2 E(k_1) - \beta_1^2 K(k_1)}{\alpha_1 \beta_1^2} - \frac{r_q^2 - r^2 + (z_q + z)^2 E(k_2) - \beta_2^2 K(k_2)}{\alpha_2 \beta_2^2} \right] \quad (16)$$

$$f_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{2}{\pi} \left[ \frac{(z_q - z) E(k_1)}{\alpha_1 \beta_1^2} + \frac{(z_q + z) E(k_2)}{\alpha_2 \beta_2^2} \right]$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntılarda

$$\beta_1 = \sqrt{(r - r_q)^2 + (z - z_q)^2}^{1/2} \quad (17a)$$

$$\beta_2 = \sqrt{(r - r_q)^2 + (z + z_q)^2}^{1/2} \quad (17b)$$

$$k_1 = \sqrt{2(r \cdot r_q)^{1/2}} / \alpha_1 \quad (18a)$$

$$k_2 = \sqrt{2(r \cdot r_q)^{1/2}} / \alpha_2 \quad (18b)$$

dir. E(k) ise ikinci tür komple eliptik integraldir:

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta, \quad 0 < k < 1 \quad (19)$$

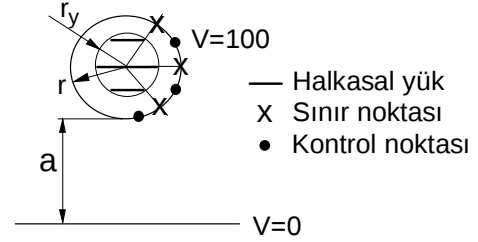
Bu integral, birinci tür komple eliptik integralin hesabındaki yöntem uygulanarak

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2 \cdot 4} k^4 - \frac{1}{3} k^4 - L \right] \quad (20)$$

şeklinde bulunur.

## UYGULAMA

YBY'de halkasal yük kullanımına bir uygulama olarak küre yarıçapı  $r=4$  cm, elektrot açıklığı  $a=6$  cm olan bir küre-düzlem elektrot sisteminin elektrik alan hesabı yapılmıştır (Şekil 2). Küre-düzlem elektrot sisteminde küre içerisine yerleştirilen halkasal yüklerin sayısının ve yarıçapının doğruluk üzerindeki etkisi incelenmiş, yeterli doğruluk elde edilince elektrotlar arası açıklıkta simetri eksenini üzerinde potansiyel ve elektrik alanının uzaklıkla değişimi elde edilmiştir.



Şekil 2 Küre-düzlem elektrot sisteminin halkasal yüklerle benzetimi.

Bu düzenin elektrik alanının YBY ile benzetiminde 3 adet halkasal benzetim yükü kullanılmıştır (Şekil 2). Benzetim yükleri küre elektrot içinde  $r_y$  yarıçaplı ( $r_y < r$ ) bir daire içine birbirine paralel olarak yerleştirilmiştir. Sınır noktaları, halkasal yüklerin uçlarından geçen ışınlar üzerinde alınmıştır. Sınır noktaları arasındaki uzaklıkların ortasında alınan kontrol noktalarında potansiyeller hesaplanarak benzetimdeki potansiyel hatası belirlenmiştir.

Yük sayısı değiştirildiğinde sınır noktalarının yerleşimi bakımından yüklerin yerleştirildiği dairenin yarıçapı ( $r_y$ ) da değiştirilmelidir. Yük yarıçapı benzetimin doğruluğunda etkin parametrelerden biridir. 3 yük yapılan bu uygulamada  $r_y$  yük yarıçapı  $0,025 r < r_y < 0,25 r$  arasında değiştirilerek benzetim yapılmıştır. 3 adet halkasal yük yapılan benzetimde en küçük potansiyel hatası  $r_y=0,21$  cm için % 0,059 olarak elde edilmiştir. Yük sayısı iki katına çıkarıldığında (6 adet halkasal yük ile) en küçük potansiyel hatası  $r_y=2,12$  cm için % 0,059 bulunmuştur.

Hesaplama ve eşpotansiyel ve alan çizgilerinin çizimi için Quick Basic 7.1 programlama dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Programda lineer denklem sisteminin çözümünde Gauss İndirgeme Yöntemi, eşpotansiyel noktaların bulunmasında ise Newton Raphson Yöntemi kullanılmıştır.

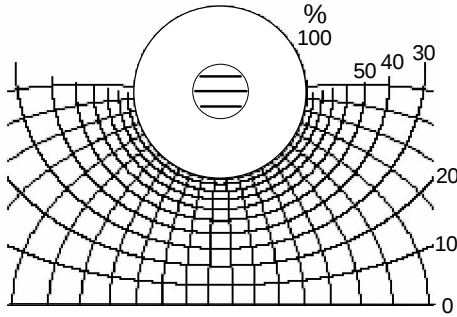
Çizelge 1'de  $r_y$  nin iki farklı değeri için elde edilen hesap sonuçları ile aynı problemin 3 adet noktasal yük kullanılarak yapılan benzetim [1] sonuçları verilmiştir. Çizelgede son satırda verilen maksimum alan şiddeti değeri, yaklaşıklık katsayısı  $k=0,88$  alınarak yaklaşık alan hesabı yöntemi ile bulunmuştur. Çizelge 1'de potansiyel hatasının en küçük olduğu durumda alan hatasının da % 0,59

mertebesinde olduğu göz önüne alınırsa incelenen probleme ilişkin maksimum elektrik alan şiddeti değerinin 36,52 kV/cm olduğu söylenebilir. Bu değere göre diğer sonuçlara bakıldığında  $r_y = 1$  cm olan halkasal yük durumu için alan hesabında % 0,85 hata, noktasal yükün kullanıldığı benzetim için ise % 2,35 hata yapıldığı görülmektedir. Bu sonuç aynı potansiyel hatası için halkasal yüklerle benzetimin doğruluğunun noktasal yüklerle benzetimin doğruluğuna göre daha büyük olduğunu göstermektedir.

Çizelge 1. Hesap sonuçları.

| Yöntem                              | $E_{max}$ (kV/cm) | Potansiyel hatası |
|-------------------------------------|-------------------|-------------------|
| YBY (halkasal yük, $r_y = 1$ cm)    | 36,21             | % 0,126           |
| YBY (halkasal yük, $r_y = 0,21$ cm) | 36,52             | % 0,059           |
| YBY (noktasal yük) [1]              | 37,38             | % 0,128           |
| Yaklaşık hesap ( $k=0,88$ )         | 36,66             | -                 |

Şekil 3'te problemin geliştirilen bilgisayar programı ile elde edilen %10 aralıklarla eşpotansiyel çizgileri ve buna uygun elektrik alan çizgileri verilmiştir. Şekilden de görüleceği gibi alan dağılımı simetri ekseninde yoğunlaşmakta ve küre elektrodun alt ucunda elektrik alanı maksimum olmaktadır.

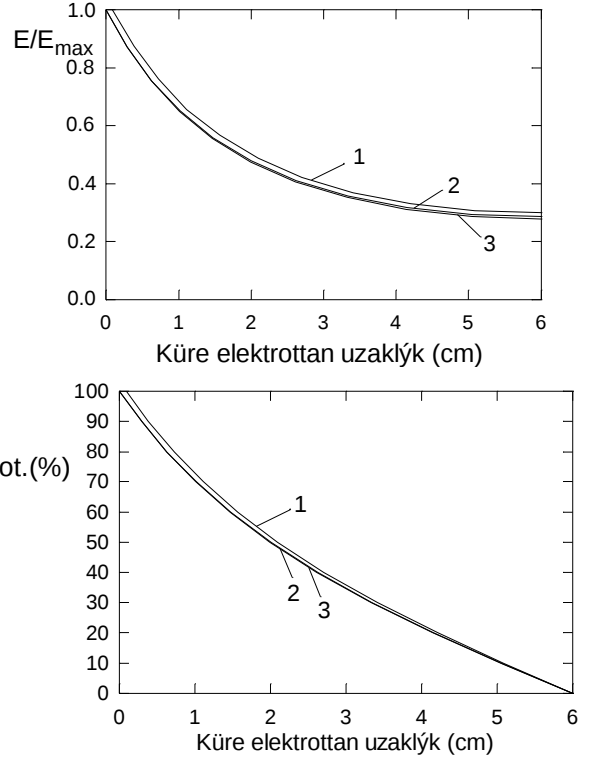


Şekil 3. Alan dağılımı.

Farklı benzetim yükü durumları için YBY ile hesaplanan, elektrotlar arası açıklıkta simetri ekseninde küre elektrodun ucundan uzaklıkla  $E/E_{max}$  ve potansiyel dağılımı eğrileri Şekil 4'te gösterilmiştir. Bu şekilden görüldüğü gibi elde edilen dağılımlar incelenen aralıkta birbirine çok yakındır.

## SONUÇ

Bu çalışmada YBY'de halkasal yükün kullanımı açıklanmıştır. Halkasal yükün potansiyel ve elektrik alan bağıntıları, noktasal ve çizgisel yük tiplerininkine göre daha karmaşık ve ileri matematik bilgisi gerektirmektedir. Bu bağıntılarda "birinci ve ikinci tür komple eliptik integraller" yer almakta ve literatürde halkasal yükün kullanıldığı çalışmalarda bu integrallerin hesabına ilişkin açıklamalara rastlanmamaktadır. Bunun yanında YBY'de halkasal yüklerin kullanımı da zordur; yüklerin yerleri, sayısı gibi her yük tipi için yapılan seçimlerin dışında yüklerin yarıçaplarının seçimine de gereksinim vardır.



Şekil 4. Elektrik alan şiddetinin (a) ve potansiyelin (b) kritik alan çizgisi üzerindeki değişimi.  
1: Üç halkasal yük,  $r_y = 1$  cm; 2: Üç halkasal yük,  $r_y = 0,21$  cm, 3: Üç noktasal yük [1].

Halkasal yükün kullanımında benzetimin doğruluğu bakımından, yüklerin yarıçapını ve yerini belirleyen yerküresinin yarıçapının ( $r_y$ ) ve yük sayısının önemi büyüktür. Yük sayısı arttırıldıkça  $r_y$ 'nin de büyütülmesi gerekmektedir. Sınır noktalarının yeri bakımından ise benzetimde en yüksek doğruluk, sınır noktalarının küre merkezinden çıkan ve her bir yükün ucundan geçen radyal doğruların küre sınırını kesim noktaları olarak alınması durumunda elde edilmektedir.

## KAYNAKLAR

- [1] H. Yıldırım, Ö. Kalenderli, M. Özkaya, Yüksek Gerilim Alan İncelemelerinde Yük Benzetim Yönteminin Kullanımı, Elektrik Mühendisliği 4. Ulusal Kongresi (EMUK), İzmir, 1991, s.373-376.
- [2] H. Yıldırım, Ö. Kalenderli, Kablolarda Elektrostatik Alan Dağılımının Yük Benzetim Yöntemiyle Analizi, 6. EMUK, Bursa, 1995, s.130-133.
- [3] H. Yıldırım, Ö. Kalenderli, B. Türkay, M. Çelikyay, Topraklama Ağlarının Bilgisayar Destekli Analizi, 6. EMUK, Bursa, 1995, s.261-264.
- [4] H. Singer, H. Steinbigler, P. Weiss, A Charge Simulation Method for the Calculation of High Voltage Fields, IEEE Trans. on PAS, Vol.93, 1974, pp.1660-1667.
- [5] Ollendorf, F., Potentialfelder der Elektrotechnik, Berlin, 1932, p.100.