

# MONTE CARLO YÖNTEMİ İLE STATİK ELEKTRİK ALAN HESABI

**Özcan KALENDERLİ**

İ.T.Ü. Elektrik - Elektronik Fakültesi  
Elektrik Mühendisliği Bölümü  
80191 Gümüşsuyu / İSTANBUL

## ÖZET

Mühendislik uygulamalarında elektrik alan hesaplamalarında kullanılan değişik yöntemler vardır. Bu yöntemlerden birisi de, istatistiksel kökenli bir yöntem olan Monte Carlo Yöntemidir. Bu çalışmada, Monte Carlo Yönteminin iki temel türü olan sabit ve serbest rasgele yürüyüşlü Monte Carlo Yöntemleri ile Dirichlet sınır koşullarına sahip Laplace tipi iki boyutlu statik elektrik alan problemlerinin çözümü açıklanmış ve bir kabloda, serbest rasgele yürüyüşlü Monte Carlo Yöntemi ile potansiyel hesabı örneği verilmiştir.

## 1. GİRİŞ

Yüksek gerilim tekniğinde statik elektrik alan incelemeleri, aygıtların tasarımında ve boşalma olaylarının incelenmesinde önemli yeri olan bir konudur. Bu incelemeler yardımı ile bir düzende potansiyel ve alan dağılımları hakkında bilgi edinilir. Statik alan incelemeleri, çözümsel, örneksel veya sayısal yöntemler kullanılarak yapılmaktadır. Bunlar arasında sayısal yöntemlerin, hızlı, kapsamlı ve yeterli doğrulukta inceleme yapma olanağını vermeleri bakımından ayrı bir yeri vardır. Sonlu farklar, sonlu elemanlar, yük benzetim, sınır elemanları ve Monte Carlo yöntemleri bilinen ve yaygın olarak kullanılan sayısal yöntemlerdendir /1/.

Monte Carlo Yöntemi (MCY), istatistiksel kökenli, bir noktanın potansiyelini, bir anda, büyük yaklaşım işlevleri kullanmaksızın dolayısıyla az işlem ve bilgisayar belleği kullanarak kısa sürede hesaplama olanağı veren bir yöntemdir. Bu yöntem tüm problemi çözmeksizin bir alt bölgenin incelenmesine olanak verir. Bu çalışmada, temel Monte Carlo Yöntemleri ile Dirichlet tipi sınır koşullarına sahip bir bölge içinde Laplace denkleminin

sayısal olarak çözümü açıklanmıştır. Amaç, elektostatik alan problemlerinin çözümünde farklı bir seçenek sunmak, bir yöntemin uygulamasında kullanılabilecek farklı yollardan örnekler vermek ve bir problemin istatistiksel yaklaşımla nasıl çözüleceği göstermektir.

## 2. MONTE CARLO YÖNTEMİ (MCY)

Monte Carlo Yöntemi, rasgele yürüyüş ilkesine dayanır. Bu yöntemle bir noktanın potansiyeli, herbiri bu noktadan başlayan ve sınırlarda son bulan belli sayıda rasgele yürüyüş ile kestirilir /1-4/. Bu rasgele yürüyüşleri gerçekleştirebilmek için rasgele sayılara gereksinim vardır. Rasgele sayılar değişik yöntemler kullanılarak elde edilebilir /3/. Örneğin burada yapılacağı gibi rasgele sayılar bir bilgisayarın rasgele sayı üreticinden elde edilebilir.

Yöntemde kullanılan farklı rasgele yürüyüş türleri, farklı MCY'lerin ortaya çıkmasına yol açmıştır. Burada en tanınmış Monte Carlo yöntemlerinden, sabit ve serbest rasgele yürüyüşlü MCY hakkında bilgi verilecektir.

### 2.1. Sabit Rasgele Yürüyüşlü MCY

Sabit rasgele yürüyüşlü MCY'de rasgele yürüyüşler sabit uzunluktaki adımlarla ve koordinat eksenlerine paralel olarak yapılır. Yöntem, Laplace denklemini çözmek için kullanılabilir. Dirichlet tipi sınır koşullarına sahip bir bölge için Laplace denklemi

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1)$$

ve bölgenin sınırında  $V = V_b$  yazılabilir. Sabit rasgele yürüyüşlü Monte Carlo Yönteminde işleme, bölgeyi düzgün (kare gözlü) bir ağa bölerek başlanır ve  $\nabla^2$  yerine sonlu fark eşdeğeri alınır. Şekil 1'den görüldüğü gibi kare

gözlerden oluşan bir ağın her bir kare gözünün kenar uzunluğu  $h$  olarak alınırsa,  $V$ 'nin  $x$ 'e ve  $y$ 'ye göre merkezi farklarla ikinci türevi yaklaşık olarak

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \cong \frac{V(x+h, y) - 2V(x, y) + V(x-h, y)}{h^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \cong \frac{V(x, y+h) - 2V(x, y) + V(x, y-h)}{h^2} \quad (3)$$

olarak yazılabilir. (2) ve (3) denklemleri (1)'de kullanılırsa Laplace denkleminin sonlu farklar yazılımı elde edilir.

$$0 = [V(x+h, y) + V(x-h, y) + V(x, y+h) + V(x, y-h) - 4V(x, y)]/h^2 \quad (4)$$

Buradan  $V(x, y)$  çözülürse

$$V(x, y) = p_{x+} V(x+h, y) + p_{x-} V(x-h, y) + p_{y+} V(x, y+h) + p_{y-} V(x, y-h) \quad (5)$$

elde edilir. Burada;

$$p_{x+} = p_{x-} = p_{y+} = p_{y-} = 1/4 \quad (6)$$

dir. Çözüm için düzgün dikdörtgen gözlü ağ kullanıldığında,  $p_{x+} = p_{x-}$ ,  $p_{y+} = p_{y-}$  ve  $p_x \neq p_y$  olur. (5) denklemi olasılıksal olarak değerlendirilebilir. Herhangi bir  $(x, y)$  noktasından rasgele hareket eden bir parçacığın sırasıyla  $(x, y)$  noktasından  $(x+h, y)$ ,  $(x-h, y)$ ,  $(x, y+h)$  ve  $(x, y-h)$  noktalarından birisine hareketi  $p_x$  ve  $p_y$  olasılıkları ile belirlenir. Parçacığın hareket edeceği yönü belirlemek için,  $0 < n < 1$  aralığında rasgele bir  $n$  sayısı üretmek gerekir. Üretilen  $n$  rasgele sayısının değerine göre parçacığın hareket edeceği yön belirlenir. Örneğin, varsayıma göre, parçacık  $(x, y)$  noktasından;

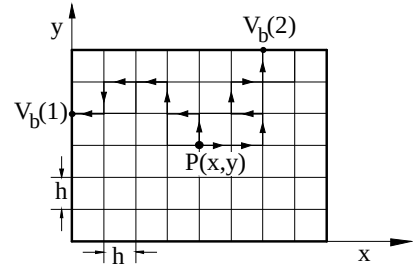
$0 < n < 0,25$  ise  $(x+h, y)$  noktasına;

$0,25 < n < 0,5$  ise  $(x-h, y)$  noktasına;

$0,5 < n < 0,75$  ise  $(x, y+h)$  noktasına veya

$0,75 < n < 1,0$  ise  $(x, y-h)$  noktasına hareket eder.

Bir  $(x, y)$  noktasındaki potansiyeli hesaplamak için bu noktadan başlamak üzere rasgele yürüyen bir parçacık göz önüne alınır.



Şekil 1. Sabit rasgele yürüyüş örneği.

Parçacık ağdaki düğümünden düğüme, sınıra ulaşana kadar ilerletilir. Parçacık sınıra ulaştığında yürüyüş sona erer ve parçacığın ulaştığı noktadaki  $V_b$  sınır potansiyeli kaydedilir. Örneğin, birinci yürüme sonundaki  $V_b$  değeri  $V_b(1)$  olarak kaydedilir (Şekil 1). İşleme  $(x, y)$  başlangıç noktasından ikinci bir parçacık yola çıkarılarak devam edilir. Bu parçacığın sınıra ulaşıp yürüyüşün sonlandığı sınırın  $V_b$  değeri de  $V_b(2)$  olarak alınır. Bu işlem,  $(x, y)$  noktasından çıkan 3., ..., N'inci parçacıklar ile yürüyüşleri sonunda  $V_b(3)$ , ...  $V_b(N)$  değerleri belirlenerek sürdürülür. Bilinmeyen potansiyel değeri, bilinen potansiyel değerlerinden istatistiksel olarak kestirilir. Buna göre Dirichlet probleminin çözümü olan  $(x, y)$  noktasındaki potansiyelin beklenen değeri,  $V_b(1)$ ,  $V_b(2)$ , ...  $V_b(N)$  değerlerinden

$$V(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N V_b(i) \quad (7)$$

bağıntısıyla hesaplanabilir. Burada  $N$  toplam yürüyüş sayısıdır. Daha doğru sonuçlar elde etmek için daha çok sayıda yürüyüş yapmak gerekir. Her yürüyüş dizisi yalnızca bir noktanın potansiyelini verir. Bu tür Monte Carlo yönteminin bir olumsuzluğu yavaş olmasıdır. Bu nedenle bu yöntem genellikle az sayıda potansiyel değerinin hesaplanması gerektiği durumlarda kullanılır.

## 2.2. Serbest Rasgele Yürüyüşlü MCY

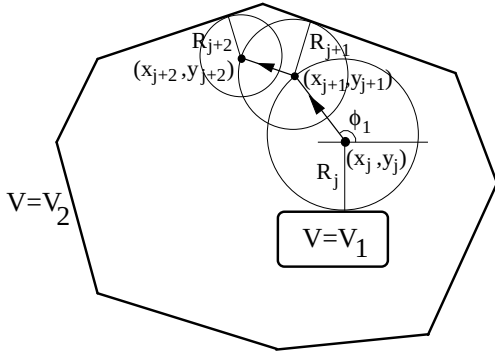
Serbest rasgele yürüyüşlü MCY'nin ilkesi, potansiyel teorisinin "Ortalama Değer Teoremi"ne dayanır. Bu teoreme göre, örneğin,  $(x, y)$  merkezli  $R$  yarıçaplı bir dairenin merkezindeki  $V(x, y)$  potansiyeli, daire çevresi üzerindeki potansiyellerin ortalamasına eşittir.

$$V(x,y) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} V(r) d\phi \quad (8)$$

dir. Buradan

$$V(x,y) = \int_0^1 V(r,\phi) dF \quad (9)$$

yazılabilir. Burada  $r$  ve  $\phi$  küresel koordinat değişkenleri ve  $F = \phi/2\pi$  dir.  $F$ ,  $\phi$ 'ye karşı düşen olasılık işlevi olarak gözönüne alınabilir.  $dF/d\phi = \text{sabit}$  olduğundan, bütün  $\phi$  açılarının eşit olasılıklı olduğu söylenebilir.



Şekil 2. Serbest rasgele yürüyüş örneği.

Serbest rasgele yürüyüşlü MCY'de, örneğin rasgele hareket eden bir parçacığın i. yürüyüşünde j. adımdan sonra  $(x_j, y_j)$  noktasında bulunduğu varsayılırsa, j+1'inci adım şu şekilde atılır: önce, merkezi  $(x_j, y_j)$  noktasında olan ve  $R_j$  yarıçapı  $(x_j, y_j)$  noktası ile sınır arasındaki en kısa uzaklığa eşit olan bir çember çizilir.  $\phi$  koordinatı,  $0 < \phi < 2\pi$  aralığında bir n rasgele sayısı ile  $(0, 2\pi)$  arasında düzgün olarak dağılmış bir raslantı değişkeni olarak  $\phi = 2\pi n$  bağıntısından hesaplanır. (j+1). adımdan sonra parçacık

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= x_j + R_j \cos \phi_j \\ y_{j+1} &= y_j + R_j \sin \phi_j \end{aligned} \quad (10)$$

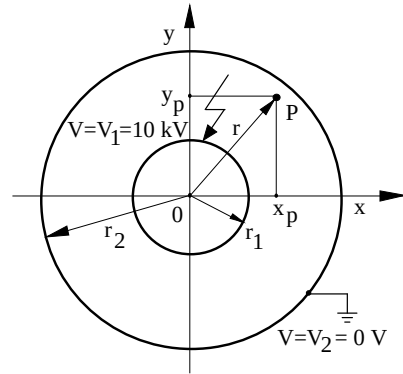
noktasında bulunur (Şekil 2). Bir sonraki adım, merkezi  $(x_{j+1}, y_{j+1})$  noktasında bulunan ve yarıçapı  $R_{j+1}$ ,  $(x_{j+1}, y_{j+1})$  noktası ile sınır arasındaki en kısa uzaklığa eşit olan çemberin çizilmesi ile atılır. Bu işlem, birçok kere yinelenir. Yürüyüş, sınıra, önceden öngörülen küçük bir d uzaklığına yaklaşıncaya kadar sürer ve bu durumda sınıra ulaşıldığı varsayılır. i. yolun sonunda  $V_b(i)$  potansiyeli kaydedilir. Sonunda

sabit rasgele yürüyüşte olduğu gibi herhangi bir  $(x,y)$  noktasındaki potansiyel N yürüyüşten sonra (7) denklemi kullanılarak bulunur.

Serbest rasgele yürüyüşlü Monte Carlo Yönteminde, hem adım uzunlukları hem de hareket yönleri sabit değildir. Bu büyüklükler serbest olarak değerler aldığından bu hareket serbest rasgele hareket olarak göz önüne alınır. Serbest yürüyüşte uzun bir adımda sabit yürüyüşteki birçok ara adım geçilebilir. Sınıra ulaşmak için genelde birkaç adım yeterlidir, bu yüzden hesaplama sabit adımlı yürüyüşten daha hızlıdır.

### 3. UYGULAMA ÖRNEĞİ

Bu altbölümde, Dirichlet tipi sınır koşullara sahip, Laplace tipi iki boyutlu bir potansiyel probleminin serbest rasgele yürüyüşlü Monte Carlo yöntemi ile çözümüne ilişkin yapılan bir uygulama örneği verilmiştir. Monte Carlo Yönteminin doğruluğunu ve geçerliliğini görmek bakımından analitik çözüme sahip bir örnek ele alınmıştır (Şekil 3).



Şekil 3. Bir fazlı kablo.

Ele alınan örnek, Şekil 3'te görüldüğü gibi, sonsuz uzunlukta, daire kesitli, tek fazlı bir kablo yani bir eş eksenli silindrsel elektrot sistemidir. Kablonun damarının (iç iletkeninin) yarıçapı 10 mm, potansiyeli 10 kV ve siperinin (dış iletkeninin) yarıçapı 16 mm ve potansiyeli sıfır olarak alınmıştır. Kablo içinde, (8, 8), (9,9) ve (10, 10) noktalarındaki potansiyeller serbest rasgele yürüyüşlü MCY ile hesaplanmıştır.

Problemin çözümünde  $r_1 < r < r_2$  aralığındaki herhangi bir  $(x,y)$  noktasının orijine olan uzaklığı  $r = (x^2+y^2)^{1/2}$  bağıntısıyla hesaplanmış

ve bu noktanın kendisine en yakın sınıra olan uzaklığı ( $r-r_1$ ) ve ( $r_2-r$ ) değerlerinden küçük olana eşit alınmıştır. Rasgele yürüyüşte açığı (doğrultuyu) belirlemek için gerekli olan 0 ile 1 arasında düzgün dağılımlı rasgele sayılar, bir kişisel bilgisayarın rasgele sayı üreticinden elde edilmiştir. Rasgele yürüyüş sırasında gelinen bir nokta ile en yakın sınır arasındaki uzaklık  $d = 10^{-6}$  değerinden küçük olduğunda sınıra gelindiği varsayılmış ve söz konusu yakın sınırın potansiyeli ulaşılan sınır potansiyeli olarak alınmıştır.

Problemin analitik sonuçları silindrisel koordinatlarda yazılan iki boyutlu Laplace denkleminin çözümünden bulunan,

$$V = \frac{U}{\ln(r_2 / r_1)} \ln(r_2 / r) \quad (11)$$

bağıntısından hesaplanmıştır.

Çizelge 1'de problemin MCY ve analitik yöntemle bulunan sonuçları verilmiştir. Bu sonuçlar karşılaştırıldığında, yürüyüş sayısı arttıkça değerlerin birbirine yaklaştığı görülmektedir.

Çizelge 1. Hesap sonuçları.

| x<br>(mm) | y<br>(mm) | N    | MCY<br>Çözümü<br>(kV) | Analitik<br>Çözüm (kV) |
|-----------|-----------|------|-----------------------|------------------------|
| 8         | 8         | 250  | 7,8800                | 7,3738                 |
|           |           | 500  | 7,6600                |                        |
|           |           | 1000 | 7,5000                |                        |
|           |           | 3000 | 7,4033                |                        |
| 9         | 9         | 250  | 4,9200                | 4,8678                 |
|           |           | 500  | 4,9400                |                        |
|           |           | 1000 | 4,9400                |                        |
|           |           | 3000 | 4,9633                |                        |
| 10        | 10        | 250  | 2,2400                | 2,6261                 |
|           |           | 500  | 2,4400                |                        |
|           |           | 1000 | 2,4800                |                        |
|           |           | 3000 | 2,6900                |                        |

#### 4. SONUÇ

Elektrostatik alan hesaplarında Monte Carlo Yönteminin kullanımına ilişkin bilgilerin verildiği bu çalışmadan görüldüğü gibi, burada açıklanan Monte Carlo yöntemleri, Laplace tipi potansiyel problemlerini çözmek için basit ve uygun yöntemlerdir. Yöntem Neumann tipi

sınır koşullu problemlere, Poisson denkleminin çözümüne ve üç boyutlu problemlere de küçük değişikliklerle kolaylıkla uygulanabilir. Sonuç olarak Monte Carlo Yöntemi, özellikle az sayıda verinin hızlı bir şekilde elde edilmesinin istendiği, bütün sisteme ilişkin denklemleri yazıp çözmeden sonuç alınması gereken durumlarda uygun bir yöntemdir.

#### 5. KAYNAKÇA

- /1/ BEASLEY, M.D.R., PICKLES, J.H., D'AMICO, G., BERETTA, L., FANELLI, M., GIUSEPPE, G., DI MONACO, A., GALLET, G., GREGOIRE, J.P., MORIN, M., Comparative Study of Three Methods for Computing Electric Fields, Proc. IEE, Vol.126, No.1, pp.126-134, Jan. 1979.
- /2/ PICKLES, J.H., Monte Carlo Field Calculations, Proc. IEE, Vol.124, No.12, pp.1271-1276, Dec. 1977.
- /3/ HAMMERSLEY, J.M., HANDSCOMB, D.C., Monte Carlo Methods, Methuen, 1964.
- /4/ SADIKU, M.N.O., Monte Carlo Methods in an Introductory Electromagnetic Course, IEEE Trans. on Education, Vol.33, No.1, pp.73-80, Feb. 1990.
- /5/ SADIKU, M.N.O., Monte Carlo Solution of Axisymmetric Potential Problems, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 29, No.6, pp.1042-1046, Nov. 1993.



**Özcan KALENDERLİ**, 1956 yılında İstanbul'da doğdu. İTÜ Elektrik - Elektronik Fakültesi (EEF)'den 1978'de mühendis, 1980'de yüksek mühendis olarak mezun oldu. 1990'da İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora çalışmalarını tamamladı. İTÜ EEF Elektrik Mühendisliği Bölümü, Elektrik Tesisleri Anabilim Dalı'nda 1979-1991 yılları arasında mühendis olarak çalışan KALENDERLİ, 1991'den beri aynı Bölümde yardımcı doçent olarak görev yapmaktadır.