

SIVRI UÇ-YARIKÜRE ELEKTROT SİSTEMİNDE ELEKTROSTATİK ALAN DAĞILIMININ
SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ İLE BULUNMASI

Levent OVACIK

Üzcan KALENDERLİ

İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fak., Yüksek Gerilim Lab.

Gümüşsuyu, İSTANBUL

ÖZET

Bu çalışmada, dönel simetrisinin bulunduğu elektrot sistemlerinde eşpotansiyel yüzeylerin Sonlu Elemanlar Yöntemi (Finite Element Method) ile iki boyuta indirgenerek hesaplanması için gerekli bağıntılar verilmiştir. Bu sayısal yöntem, sivri uç-yarıküre elektrot sistemine uygulanarak sistemin eşpotansiyel çizgilerinin dağılımı, maksimum elektrik alan şiddeti ve kapasitesi yaklaşık olarak hesaplanmıştır.

1. GİRİŞ

Yüksek gerilim tekniği uygulamalarında karşılıklı karmaşık elektrot sistemlerinde alan hesabı analitik çözüm yöntemleri ile her zaman kolaylıkla yapılamaz. Bu gibi durumlarda analog veya sayısal yöntemlerden yararlanılır. Analog yöntemler uzun uğraşlar gerektiren, pahalı ve her elektrot modeline uygulanması kolay olmayan yöntemlerdir. Bu amaçla sayısal yöntemlere başvurulabilir. Bu sayısal yöntemlerden birisi sonlu elemanlar yöntemidir. Bu yöntem, sınır koşulları bilinen belirli bir bölge içinde tanımlanmış kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için geliştirilmiş ve bilgisayar alanındaki hızlı gelişmelere paralel olarak etkin şekilde kullanılan bir yöntemdir. Bu çalışmada çözümün yapıldığı bölgede parça-parça bir yaklaşım için, potansiyel fonksiyonunun içinde lineer bir bağıntıyla değiştiği üçgen elemanlar kullanılmıştır.

Yöntemin uygulandığı sivri uç-yarıküre elektrot sistemi yüksek gerilim tekniğinde elektriksel kısmi boşalma ölçme devrelerinin kalibrasyonunda kullanılan korona boşalmalı standart bir ayar kaynağıdır. Sistem sivri uçlu elektrodun eğrilik yarıçapına bağlı olarak belli bir gerilimde sabit genlikli ve sıklıklı boşalma darbeleri üretir. Standartlarda (TS 2051, IEC 270) 25 mm yarıçaplı yarıküre karşısında ve merkezinde sivri uç eğrilik yarıçapı 0.05, 0.2 ve 0.5 mm olan sivri uçlu elektrotlar için boşalma başlangıç gerilimleri ve üretilen işaret genlikleri verilmektedir. Burada, bu elektrot sistemindeki alan dağılımının, maksimum elektrik alanının ve sistemin kapasitesinin boşalma başlangıç gerilimi ve boşalma darbelerinin genliği ve sıklığı ile olan ilişkisi araştırılmıştır.

Sivri uç-yarıküre elektrot sisteminde, dönel-simetri nedeniyle herhangi bir (r, θ, z) noktasındaki

potansiyel r ve z sabit kalmak koşulu ile θ açısı ile değişmez (Şekil 1). Bu durumda problem üç boyutlu bir uzay yerine bir düzlem üzerinde incelenebilir. V potansiyelinin θ dan bağımsız düşünül-



Şekil-1. Sivri uç-yarıküre elektrot sistemi.

mesi nedeniyle potansiyelin silindirik koordinat sistemindeki gradyenti

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \quad (1)$$

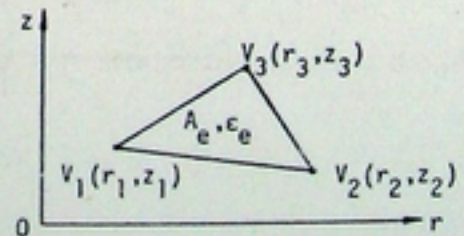
olur.

2. ELEKTROSTATİK ENERJİ

İncelenen elektrot sisteminin çözüm bölgesi içinde depolanan enerji,

$$W = \epsilon \pi \iint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] r dr dz \quad (2)$$

dir. Söz konusu çözüm bölgesi sistemin simetri ekseninden geçen bir düzlem üzerindeki çözüm bölgesinin simetri eksenine etrafında 2π kadar döndürülmesiyle elde edilen hacimdir.



Şekil-2. Radyal-eksenel koordinatlarda bir üçgen eleman.

3. PROBLEMİN FORMÜLASYONU

Potansiyelin θ dan bağımsız olması nedeniyle üçgen elemanlar r - z koordinat sisteminde tanımlanabilir (Şekil-2). Burada r ve z sırasıyla radyal ve ekselel koordinatları göstermektedir.

Üçgen elemanlar içinde potansiyelin lineer olarak değiştiği kabul edilirse, potansiyel fonksiyonu

$$V = p_1 + p_2 r + p_3 z \quad (3)$$

şeklinde yazılabilir. (3) ifadesi üçgenin her düğümü için yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Bu denklem sisteminden p_1, p_2 ve p_3 katsayıları Cramer kuralı ile bulunur. Buna göre daha sonra kullanacak olan p_2 ve p_3 katsayıları

$$p_2 = \frac{1}{2A_e} [(z_3 - z_2)V_1 + (z_1 - z_3)V_2 + (z_2 - z_1)V_3]$$

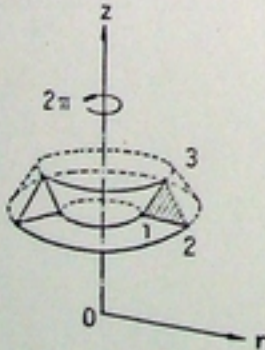
$$p_3 = \frac{1}{2A_e} [(r_3 - r_2)V_1 + (r_1 - r_3)V_2 + (r_2 - r_1)V_3] \quad (5)$$

dir. Bu bağıntılarda

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

ve A_e bir üçgen elemanın alanıdır.

(3) ifadesinin $\partial V / \partial r$ ve $\partial V / \partial z$ şeklindeki türevleri (2) bağıntısında yerine konulursa, bir üçgen elemanın z -ekseni etrafında 2π kadar döndü-



Şekil-3. Üçgen kesitli halka.

rülmesiyle elde edilen Şekil-3'de gösterilen üçgen kesitli halka içerisindeki enerji

$$W_e = \epsilon_{re} \cdot \epsilon_o \cdot (p_2^2 + p_3^2) \iint_{A_e} r \, dr \, dz \quad (6)$$

olarak bulunur. Şekil-3'deki üçgen elemanın A_e yüzeyi üzerinden yapılan integrasyon işlemi

$$\iint_{A_e} r \, dr \, dz = \frac{A_e}{3} (r_1 + r_2 + r_3) = A_e \cdot r_o \quad (7)$$

olup (6) bağıntısında yerine konulursa

$$W_e = \epsilon_{re} \cdot \epsilon_o \cdot \pi \cdot A_e \cdot (p_2^2 + p_3^2) \cdot r_o \quad (8)$$

olarak bulunur. Burada ϵ_{re} , eleman içindeki ortamın bağıl dielektrik sabiti, $r_o = (r_1 + r_2 + r_3)/3$ dür.

Sonlu elemanlar yöntemi (SEY), tüm bölge içindeki enerjinin minimumlaştırılması prensibine dayanır. Eleman içindeki enerji düğüm potansiyellerine göre minimumlaştırılırsa

$$\frac{\partial W_e}{\partial V_i} = \epsilon_{re} \cdot \epsilon_o \cdot \pi \cdot A_e \cdot (2p_2 \frac{\partial p_2}{\partial V_i} + 2p_3 \frac{\partial p_3}{\partial V_i}) \cdot r_o = 0 \quad (9)$$

ve $i=1,2,3$ için

$$[s]_{3 \times 3} \cdot [V]_{3 \times 1} = 0 \quad (10)$$

3x3 boyutunda "Katılık Matrisi" (Stiffness matrix) elde edilir. Katılık matrisi simetrik bir matris olup elemanları

$$s_{11} = \frac{\epsilon_{re} \cdot \pi}{2A_e} [(r_3 - r_2)^2 + (z_2 - z_3)^2] \cdot r_o$$

$$s_{12} = \frac{\epsilon_{re} \cdot \pi}{2A_e} [(r_3 - r_2)(r_3 - r_1) + (z_2 - z_3)(z_3 - z_1)] \cdot r_o$$

$$s_{13} = \frac{\epsilon_{re} \cdot \pi}{2A_e} [(r_3 - r_2)(r_1 - r_2) + (z_2 - z_3)(z_1 - z_2)] \cdot r_o$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (11)$$

şeklinde (9) dan cebirsel işlemler sonucunda bulunabilir. Minimumlaştırma prensibi çözüm bölgesi içindeki tüm elemanlara aynı anda uygulanırsa, tanımlanan elemanların düğüm potansiyelleri arasındaki bağıntı bir lineer denklem sistemine dönüşür.

$$[s_{sist}] \cdot [V] = 0 \quad (12)$$

Burada $[V]$ sistemin düğüm noktalarının potansiyellerinden oluşan bir sütun matristir. $[s_{sist}]$ matrisi simetrik ve tekil olmayan bir matris olup oldukça seyrektir (Sparse Matrix). Elde edilen lineer denklem sistemindeki katsayılar matrisinin seyrekleşmesi dolayısıyla, doğrudan çözüm yöntemlerinden yararlanmak bilgisayarda hem gereksiz bellek kullanımına, hem de büyük boyutlu matrisler için bilgisayarın yuvarlatma hatasının artmasına neden olur. Bilinmeyen sayısı birkaç yüzü geçtiği zaman iteratif yöntemler önem kazanır. Bu çalışmada iteratif çözüm yöntemi olarak S.O.R. (Successive Over-Relaxation) yöntemi kullanılmıştır.

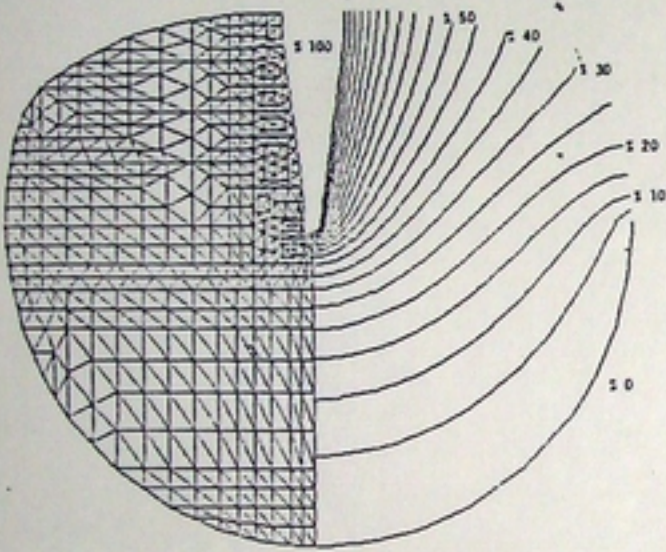
Şekil-4'deki üçgen elemanlar incelendiğinde, 5 numaralı düğüme ait V_5 potansiyelinin değeri, bu

7. SONUÇLAR

Sonlu elemanlar yöntemi ile sivri uç-yarıküre elektrot sisteminin potansiyel dağılımı, maksimum alan şiddeti ve kapasitesi bulunmuştur. Bilgisayar programı standart FORTRAN (Version: 3.30) da, çizim Quick Basic (Version: 4.00) da yazılmış ve Goupil G40 (PC) de çalıştırılmıştır. Hesaplarda sivri ucun eğrilik yarıçapı 0,5 mm, yarıkürenin yarıçapı 25 mm alınmıştır.

Birinci aşamada eleman sayısının 225 ve düğüm sayısının 136 olduğu üçgen elemanlardan oluşmuş bir ızgara ile hesaplar yapılmış ve maksimum alan şiddeti sivri ucun ucunda ve 6,130 p.u. bulunmuştur. Alanın p.u. cinsinden verilen bu değeri, kV cinsinden uygulanan gerilimle çarpılarak, her gerilim değeri için, kV/cm cinsinden maksimum alan şiddeti hesaplanabilir.

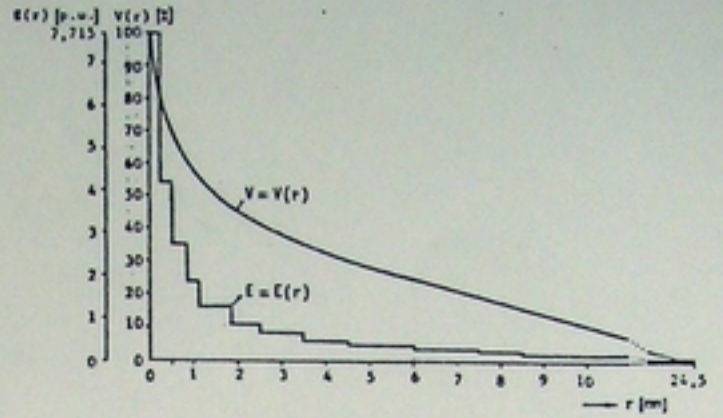
İkinci aşamada ızgaradaki eleman sayısı 900'e, düğüm sayısı 496'ya çıkarılmış ve Şekil-5'de gösterilen ızgara ve 5 aralıklarla potansiyel dağılımı elde edilmiştir.



Şekil-5. Sivri uç-yarıküre elektrot sisteminde potansiyel dağılımı ve hesapta yararlanılan ızgara.

Bu durumda maksimum alan şiddeti 7,715 p.u. olarak hesaplanmıştır. Standartlarda (TS 2051, IEC 270), 0,5 mm eğrilik yarıçaplı sivri uç-yarıküre elektrot sistemi için korona başlangıç gerilimi 8,5 kV olarak verilmektedir. Bu gerilimde sivri uçta $7,715 \text{ p.u.} \cdot 8,5 \text{ kV} = 65,5 \text{ kV/cm}$ lik bir alan şiddeti oluşacağı söylenebilir.

Sivri uç-yarıküre arasında sivri uçtan uzaklıkla potansiyel ve alan şiddeti değerleri hesaplanmış ve değişimleri Şekil-6'da gösterilmiştir. Burada sivri uçtan yaklaşık 0,3 mm uzaklıkta alanın 30 kV/cm'ye, potansiyelin de 79 U'ya düştüğü görülmektedir. Bu korona tabakasında tüm gerilimin 21 inin düştüğünü ve korona tabakası kalınlığının yaklaşık 0,3 mm olduğunu gösterir.



Şekil-6. Sivri uç-yarıküre elektrot sisteminde potansiyelin ve elektrik alan şiddetinin sivri uçtan uzaklıkla değişimi.

Söz konusu elektrot sisteminin kapasitesi de bu yöntemle yaklaşık 0,374 pF olarak hesaplanmıştır.

Yapılan bu çalışma ile yüksek gerilim tekniğinde düzgün olmayan alanlı elektrot sistemlerinde potansiyel ve alan dağılımlarının incelenmesinde sonlu elemanlar yönteminin yararlı ve uygulanabilir bir yöntem olduğu görülmüştür.

8. KAYNAKLAR

- /1/ Kuffel, E., Zaengl, W.S., "High Voltage Engineering", Pergamon Press, 1984, pp.266-279.
- /2/ Anderson, O.W., "Laplacian Electrostatic Field Calculations by Finite Elements with Automatic Grid Generation", IEEE Transactions, Vol.PAS-92 Sep./Oct. 1973, pp.1485-1492.
- /3/ Zienkiewicz, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill Book Co., London, 1971.
- /4/ Reddy, J.N., "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill Book Co., 1986.