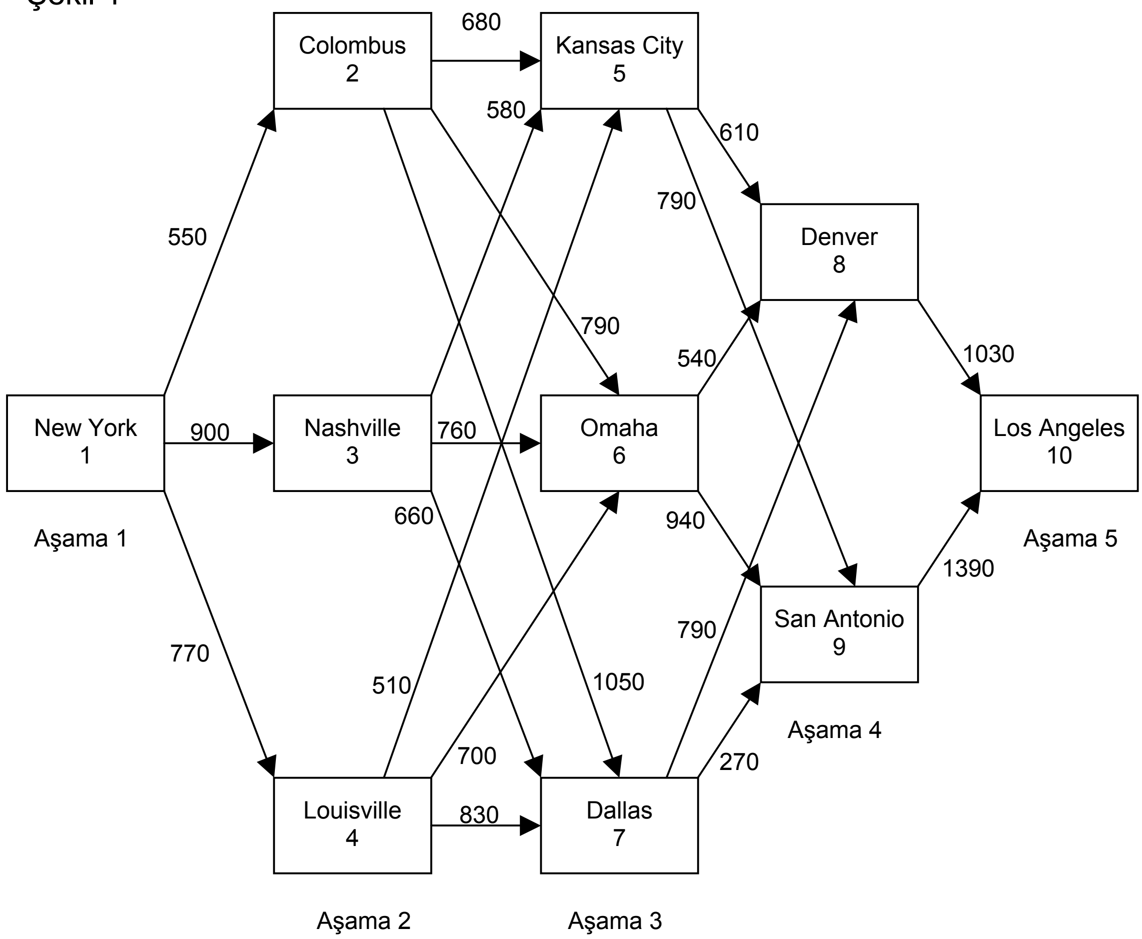
En Kısa Yol (Ağ) Sorunu

(Winston 20.2., s. 1005)

Joe Cougar New York'ta yaşamakta ancak ün ve şans aramak için Los Angeles'a gitmeyi planlamaktadır. Joe'nun sınırlı parası vardır, bu nedenle yolculuğundaki her geceyi bir arkadaşının evinde geçirmeye karar verir. Joe'nun Colombus, Nasville, Louisville, Kansas City, Omaha, Dallas, San Antonio ve Denver şehirlerinde arkadaşları vardır. Joe, bir günlük yolculuğun sonunda Colombus, Nashville veya Louisville'e; iki günlük yolculuğun sonunda Kansas City, Omaha veya Dallas'a; üç günlük yolculuğun sonunda ise San Antonio veya Denver'a ulaşabilir. Kat edilen yolu enküçüklemek için Joe yolculuğunun her gecesini hangi kentlerde geçirmelidir? Şehirler arasındaki yol uzunlukları Şekil 1'de gösterilmektedir.

Şekil 1



Yanıt:

Joe, Şekil 1'deki New York ve Los Angeles arasındaki en kısa yolu bilmek istemektedir. Bu yol geriye doğru giderek (**geriye doğru yineleme** yöntemi ile) bulunabilir.

Joe'nun yolculuğunun n. gününün başlangıcında bulunabileceği tüm şehirler, n. aşama şehirleri olarak sınıflandırılmıştır. Örneğin; Joe 4. günün başlangıcında (1. gün Joe New York'tan ayrıldığında başlar) sadece San Antonio ya da Denver'da bulunabileceğinden, San Antonio ve Denver dördüncü aşama şehirleri olarak sınıflandırılmıştır.

Geriye doğru gitme (yineleme) fikri, kolay bir problemin çözümüyle başlamanın, sonunda karmaşık bir problemin çözümüne yardım edeceğini göstermektedir. Bu nedenle, yalnız bir günlük sürüş mesafesinin kaldığı şehirlerden (4. aşama şehirler) Los Angeles'a giden en kısa yol belirlenir. Bundan sonra bu bilgiden yararlanılarak yalnız iki günlük sürüş mesafesinin kaldığı şehirlerden (3. aşama şehirleri) Los Angeles'a giden en kısa yol bulunur. Eldeki bu bilgi ile Los Angeles'a üç günlük uzaklıktaki şehirlerden (2. aşama şehirler) Los Angeles'a giden en kısa yol bulunabilir. Sonunda, Los Angeles'a dört gün uzaklıktaki şehirlerden (yalnız bir taner: New York) Los Angeles'a giden en kısa yol bulunabilir.

Gösterimi basitleştirmek için on şehir Şekil 1'deki 1,2,...,10 sayıları ile eşleştirilmiştir.

c_{ij} *i* şehirden *j* şehire gitmek için kat edilmesi gereken yolu göstermektedir. Örneğin; c_{35}=580 Nashville (3) ile Kansas City (5) arasındaki uzaklığı ifade etmektedir.

$f_t(i)$ ise t. aşamadaki *i.* şehirden Los Angeles'a (10. şehir) giden en kısa yoldur.

4. AŞAMA HESAPLAMALARI

Önce her 4. aşama şehirinden 10. şehire giden en kısa yol belirlenir.

Her 4. aşama şehirinden 10. şehire giden yalnız bir yol vardır. Denver'dan Los Angeles'a giden en kısa yol $f_4(8)$=1030'dur. Benzer şekilde, $f_4(9)$=1390'dur.

3. AŞAMA HESAPLAMALARI

Şimdi bir aşama geri giderek her 3. aşama şehirinden 10. şehire giden en kısa yol bulunur.

Örneğin; $f_3(5)$'i belirlemek için 5. şehirden 10. şehire giden en kısa yolun aşağıdaki yollardan biri olduğuna dikkat edilmelidir.

Yol 1: 5. şehirden 8. şehire git ve 8.'den 10.'ya en kısa yolu seç.

Yol 2: 5. şehirden 9. şehire git ve 9.'dan 10.'ya en kısa yolu seç.

Yol 1'in uzunluğu $c_{58}+f_4(8)$ ve Yol 2'nin uzunluğu $c_{59}+f_4(9)$ olarak yazılabilir.

Böylece 5. şehirden 10. şehire en kısa yol;

$$f_3(5) = \min \begin{cases} c_{58} + f_4(8) = 610 + 1030 = 1640* \\ c_{59} + f_4(9) = 790 + 1390 = 2180 \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir (* $f_3(5)$'i oluşturan rotayı göstermektedir): 5. şehirden 10. şehire en kısa yol 5-8-10 yoludur. Burada $f_4(8)$ ve $f_4(9)$ bilgilerinin kullanıldığına dikkat edilmelidir.

Benzer şekilde, $f_3(6)$'yı bulmak için 6. şehirden 10. şehire giden en kısa yolun 8. şehire veya 9. şehire giderek başladığına dikkat edilmelidir:

$$f_3(6) = \min \begin{cases} c_{68} + f_4(8) = 540 + 1030 = 1570* \\ c_{69} + f_4(9) = 940 + 1390 = 2330 \end{cases}$$

6. şehirden 10. şehire en kısa yol 1570 uzunluğundaki 6-8-10 yoludur.

$f_3(7)$'yi bulmak için;

$$f_3(7) = \min \begin{cases} c_{78} + f_4(8) = 790 + 1030 = 1820 \\ c_{79} + f_4(9) = 270 + 1390 = 1660* \end{cases}$$

$f_3(7)$=1660 ve 7. şehirden 10. şehire en kısa yol 7-9-10 yoludur.

2. AŞAMA HESAPLAMALARI

$f_3(5)$, $f_3(6)$ ve $f_3(7)$ bilgileri ile bir aşama geri gitmek ve $f_2(2)$, $f_2(3)$ ve $f_2(4)$'ü, yani 2., 3. ve 4. şehirlerden 10. şehire giden en kısa yolu hesaplamak kolaydır.

Bunu göstermek için ilgili şehirlerden 10. şehire giden en kısa yol (ve onun uzunluğu) bulunacaktır.

2. şehirden 10. şehire giden en kısa yol 2. şehirden 5., 6. veya 7. şehire giderek başlamalıdır. En kısa yol bir kez 5., 6., ya da 7. şehire geldiğinde bu şehirden Los Angeles'a giden en kısa yolu izlemelidir. Bu usavurum 2. şehirden 10. şehire giden yolun aşağıdakilerden biri olduğunu göstermektedir:

Yol 1: 2. şehirden 5. şehire git, 5. şehirden 10. iehre en kısa yolu izle. c_{25}+$f_3(5)$

Yol 2: 2. şehirden 6. şehire git, 6. şehirden 10. iehre en kısa yolu izle: c_{26}+$f_3(6)$

Yol 3: 2. şehirden 7. şehire git, 7. şehirden 10. iehre en kısa yolu izle: c_{27}+$f_3(7)$

$$f_2(2) = \min \begin{cases} c_{25} + f_3(5) = 680 + 1640 = 2320* \\ c_{26} + f_3(6) = 790 + 1570 = 2360 \\ c_{27} + f_3(7) = 1050 + 1660 = 2710 \end{cases}$$

Böylece, $f_2(2)$=2320 ve 2. şehirden 10. şehire en kısa yol: 2-5-8-10'dur.

Diğer şehirler için benzer bir hesaplama yapılırsa:

$$f_2(3) = \min \begin{cases} c_{35} + f_3(5) = 580 + 1640 = 2220* \\ c_{36} + f_3(6) = 760 + 1570 = 2330 \\ c_{37} + f_3(7) = 660 + 1660 = 2320 \end{cases}$$

$f_2(3)$=2220 ve 3. şehirden 10. şehire en kısa yol: 3-5-8-10’dur.

$$f_2(4) = \min \begin{cases} c_{45} + f_3(5) = 510 + 1640 = 2150* \\ c_{46} + f_3(6) = 700 + 1570 = 2270 \\ c_{47} + f_3(7) = 830 + 1660 = 2490 \end{cases}$$

$f_2(4)$=2150 ve 4. şehirden 10. şehire en kısa yol: 4-5-8-10’dur.

1. AŞAMA HESAPLAMALARI

$$f_1(1) = \min \begin{cases} c_{12} + f_2(2) = 550 + 2320 = 2870* \\ c_{13} + f_2(3) = 900 + 2220 = 3120 \\ c_{14} + f_2(4) = 770 + 2150 = 2920 \end{cases}$$

EN İYİ ÇÖZÜMÜN (OPTİMAL YOL) BELİRLENMESİ

$f_1(1)$=2870 ve New York’tan Los Angeles’a giden en kısa yol (1-2-5-8-10): New York, Columbus, Kansas City, Denver, ve Los Angeles’tir.

Dinamik Programlama Uygulamalarının Özellikleri

1. *Sorun her aşamada bir karar alınacak şekilde aşamalara bölünebilir.*

   "En Kısa Yol" sorununda t. aşama Joe'nun yolculuğunun t. gününün başlangıcında bulunabileceği şehirleri kapsamaktadır. Bir çok dinamik programlama sorununda aşama, sorunun başlangıcından itibaren geçen süredir. Bazı durumlarda her aşamada karar vermek gerekmeyebilir.

2. *Her aşamanın kendisi ile ilgili durumları vardır.*

   Durum ile her aşamada en iyi kararı vermek için gerekli bilgi kastedilmektedir. "En Kısa Yol" sorununda t. aşamadaki durum basit olarak Joe'nun t. günün başlangıcında bulunduğu şehirdir. Örneğin 3. aşamada olası durumlar; Kansas City, Omaha ve Dallas'tır. Herhangi bir aşamada doğru kararı vermek için Joe'nun o aşamadaki şehire nasıl geldiğini bilmesine gerek olmadığına dikkat edilmelidir. Örneğin Joe Kansas City'de ise, alacağı karar Kansas City'ye nasıl geldiğinden etkilenmez, sadece o anda Kansas City'de olmasından etkilenir.

3. *Herhangi bir aşamada seçilen karar mevcut aşamadaki durumun bir sonraki aşamadaki duruma nasıl dönüştüğünü tanımlar.*

   "En Kısa Yol" sorununda Joe'nun herhangi bir aşamadaki kararı basitçe ziyaret edeceği diğer şehirdir. Bu bir sonraki aşamadaki durumu açık bir şekilde belirler. Yine de bir çok sorunda karar, bir sonraki aşamanın durumunu "kesinlik" ile belirlemez, aslında, mevcut karar bir sonraki aşamadaki durumun yalnızca olasılık dağılımını belirler.

4. *Mevcut durum verildiğinde, geri kalan aşamalar için geçerli en iyi karar önceden erişilen durumlara veya önceden seçilen kararlara dayanmamalıdır.*

   Bu özelliğe "optimallik (en iyilik) ilkesi" de denir. "En Kısa Yol" sorununda optimallik ilkesi şu şekildedir: 1. şehirden 10. şehire en kısa yolun (R olsun) *i*. şehirden geçtiği bilinsin. Bu durumda R'nin *i*. şehirden 10. şehire giden parçası *i*. şehirden 10. şehire giden en kısa yol olmak zorundadır. Bu zorunluluk olmasaydı R'nin 1. şehirden *i*. şehire giden parçasına *i*. şehirden 10. şehire giden en kısa yolu ekleyerek R'den daha kısa bir yol elde edilebilirdi ki bu durum R'nin 1. şehirden 10. şehire giden en kısa yol olma özelliği ile çelişir. Örneğin, 1. şehirden 10. şehire giden en kısa yolun 2. şehirden geçtiği biliniyorsa, o zaman 1. şehirden 10. şehire giden en kısa yol 2. şehirden 10. şehire giden en kısa yol parçasını da (2-5-8-10) içermelidir.

5. *Sorundaki durumlar T aşamadan birine sınıflandırılmışsa; t, t*+1*,...,T aşamaları boyunca kazanılan ödül veya maliyetleri, t*+1*, t*+2*,..., T aşamalarında kazanılan ödül veya maliyetler ile ilişkilendiren bir yineleme vardır.*

"En Kısa Yol" sorununda geriye doğru yineleme bağıntısı (denklemi)

$$f_t(i) = \min_j \{c_{ij} + f_{t+1}(j)\}$$

şeklinde yazılabilir. Burada j, t+1. aşamadaki bir şehir olmalıdır ve $f_5(10)=0$'dır.

Stok Modelleri

Aşağıdaki özelliklere sahip herhangi bir stok (envanter) sorunu dinamik programlama ile çözülebilir:

1. Zaman dönemlere ayrılmıştır. Mevcut dönem Dönem 1, bir sonraki Dönem 2 ve son dönem de Dönem T olarak isimlendirilir. Dönem 1'in başlangıcında, her dönem boyunca talep bilinmektedir.
2. Her dönemin başlangıcında, firma üretilmesi gereken ürün adedinii belirlemelidir. Her dönem boyunca üretim kapasitesi sınırlıdır.
3. Her dönemin talebi mevcut üretimden veya stoktan zamanında karşılanmalıdır. Üretim yapılan her dönemde üretim için bir sabit maliyet ve birim başına değişken maliyet oluşmaktadır.
4. Firmanın sınırlı stok kapasitesi vardır. Bu kapasite dönem sonu stoğunda bir sınırlama ile yansıtılır. Dönem sonu stoğunda ürün varsa birim başına stokta tutma (envanter taşıma) maliyeti söz konusudur.
5. Firmanın amacı; 1., 2., ..., T. dönemlerin taleplerini zamanında karşılama maliyetini en küçüklemektir.

Bu modellerde, firmanın stok düzeyine her dönemin (örneğin her ayın) sonunda bakılmakta ve daha sonra üretim kararı verilmektedir. Böyle bir modele Dönemsel İnceleme Modeli denir.

Stok Sorunu

(Winston 20.3., s. 1013)

Bir şirketin ürününe önümüzdeki dört ay boyunca talep sırasıyla 1, 3, 2 ve 4 adettir. Her ayın başında şirket o ay kaç adet ürün üreteceğine karar vermek zorundadır. Üretim için hazırlık (sabit) maliyeti \$3'dır. Üretilen her ürün için değişken maliyet \$1'dır. Her ayın sonunda eldeki her ürün için 50¢'lik bir stokta tutma maliyeti söz konusudur. Bir ayda en fazla 5 adet ürün üretilebilir. Her ayın sonunda stokta en fazla 4 adet ürün olabilir. Birinci ayın başında elde 0 ürün olduğu varsayılacaktır. Şirket dört ay boyunca taleplerin zamanında karşılandığı ve üretim ile taşıma maliyetlerinin en küçüklendiği bir üretim çizelgesi belirlemek istemektedir.

Yanıt

Bu sorunun çözümünde dinamik programlama kullanılabilmesi için uygun durum, aşama ve kararın belirlenmesi gerekmektedir. Tek bir aşama kaldığında sorun açıkça çözülebilecek şekilde aşama tanımlanmalıdır.

Dördüncü ayın başlangıcında firma talebi en küçük maliyetle basit olarak o ay ürettiğinin ve üçüncü ay sonu stokda kalanın dördüncü ay talebini karşılayacak şekilde üretimi yaparak (4. ay üretimi = 4. ay talebi – 3. ay sonu stoğu) karşılayacaktır. Böylece geriye bir ay kaldığında firmanın sorunu kolayca çözülebilir. Bu nedenle zaman aşamayı gösterecektir. Pek çok dinamik programlama sorununda aşama zamanla ilgilidir.

Her aşamada (ya da ayda) şirket kaç adet ürün üreteceğine karar vermelidir. Bu kararı vermek için şirket içinde bulunulan ayın başlangıcındaki stok düzeyini bilmelidir. Bu nedenle herhangi bir aşamadaki durum başlangıç stoğu düzeyi olacaktır.

$f_t(i)$'yi t, t+1, ..., 4 ayları için t ayının başlangıcında i birimin elde olması durumunda talebi karşılamanın en düşük maliyeti olacak şekilde tanımlamak gereklidir.

$c(x)$; bir dönemde x adet üretmenin maliyetidir.

$c(0)=0$ ve $x>0$ için $c(x)=3+x$'dir.

Sınırlı stok kapasitesi ve talebin zamanında karşılanması zorunluluğu nedeniyle her dönemde olası durumlar 0, 1, 2, 3 ve 4'dür.

Bu nedenle $f_4(0)$, $f_4(1)$, $f_4(2)$, $f_4(3)$, ve $f_4(4)$ belirlenerek çözüme başlanmalıdır.

Daha sonra bu bilgi kullanılarak $f_3(0)$, $f_3(1)$, $f_3(2)$, $f_3(3)$ ve $f_3(4)$ belirlenir.

Bir sonraki aşama $f_2(0)$, $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_2(3)$ ve $f_2(4)$ belirlenmesidir.

Son olarak $f_1(0)$ belirlenir.

Tüm bu işlemler sonucu her ay için en iyi bir üretim seviyesine karar verilir.

$x_t(i)$: t ayının başlangıcında elde i birim olması durumunda t, t+1, ..., 4 ayları boyunca toplam maliyeti en küçükleyen üretim düzeyidir.

4. AY HESAPLAMALARI

Firma dördüncü ay boyunca dördüncü ayın talebi olan dört birimi karşılamaya yetecek kadar ürün üretecektir.

$f_4(0)$= 4 – 0 birim üretmenin maliyeti = c(4)= 3 + 4= $7 ve $x_4(0)$= 4 – 0 = 4

$f_4(1)$= 4 – 1 birim üretmenin maliyeti = c(3)= 3 + 3= $6 ve $x_4(1)$= 4 – 1 = 3

$f_4(2)$= 4 – 2 birim üretmenin maliyeti = c(2)= 3 + 2= $5 ve $x_4(2)$= 4 – 2 = 2

$f_4(3)$= 4 – 3 birim üretmenin maliyeti = c(1)= 3 + 1= $4 ve $x_4(3)$= 4 – 3 = 1

$f_4(4)$= 4 – 4 birim üretmenin maliyeti = c(0)= 0 ve $x_4(4)$= 4 – 4 = 0

3. AY HESAPLAMALARI

$f_3(i)$, 3. ve 4. aylar boyunca 3. ayın başlangıcında elde i birm olması durumunda oluşan en küçük maliyettir.

3. ay boyunca bütün olası üretim düzeyleri için 3. ve 4. aylar boyunca toplam maliyet:

$$(\tfrac{1}{2})(i + x - 2) + c(x) + f_4(i + x - 2) \tag{1}$$

3. ay boyunca *x* adet ürün üretilirse 3. ayın bitiş stoğu $i + x - 2$ olacaktır.

Bu durumda 3. ay stokta tutma maliyeti $(\tfrac{1}{2})(i + x - 2)$ ve

3. ay üretim maliyeti de $c(x)$ olacaktır.

4. aya elde $(i + x - 2)$ birim ile girileceğinden 4. ayın en iyi maliyeti $f_4(i + x - 2)$ olacaktır.

3. ayın üretim düzeyini Denklem 1'deki değeri en küçükleyecek şekilde seçmek istediğimizden

$$f_3(i) = \min_x \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)(i + x - 2) + c(x) + f_4(i + x - 2) \right\} \tag{2}$$

Denklem 2'de *x* {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin bir elemanı olmalıdır.

Ayrıca x, $4 \geq i + x - 2 \geq 0$ koşulunu sağlamalıdır.

Bu kısıt mevcut ayın talebinin karşılanması $(i + x - 2 \geq 0)$ ve

Dönem sonuı stok seviyesinin aşılmamasını $(4 \geq i + x - 2)$ ifade etmektedir.

$f_3(0)$, $f_3(1)$, $f_3(2)$, $f_3(3)$, ve $f_3(4)$ için hesaplamalar aşağıdaki Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1. f_3 için hesaplama

i	x	$(½)(i+x-2)+c(x)$	$f_4(i+x-2)$	Toplam maliyet 3.,4. aylar	$f_3(i)$ $x_3(i)$
0	2	$0+5=5$	7	$5+7=12$ *	
0	3	$\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$	6	$\frac{13}{2}+6=\frac{25}{2}$	$f_3(0)=12$
0	4	$1+7=8$	5	$8+5=13$	$x_3(0)=2$
0	5	$\frac{3}{2}+8=\frac{19}{2}$	4	$\frac{19}{2}+4=\frac{27}{2}$	
1	1	$0+4=4$	7	$4+7=11$	
1	2	$\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2}$	6	$\frac{11}{2}+6=\frac{23}{2}$	$f_3(1)=10$
1	3	$1+6=7$	5	$7+5=12$	$x_3(1)=5$
1	4	$\frac{3}{2}+7=\frac{17}{2}$	4	$\frac{17}{2}+4=\frac{25}{2}$	
1	5	$2+8=10$	0	$10+0=10$ *	
2	0	$0+0=0$	7	$0+7=7$ *	
2	1	$\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$	6	$\frac{9}{2}+6=\frac{21}{2}$	
2	2	$1+5=6$	5	$6+5=11$	$f_3(2)=7$ $x_3(2)=0$
2	3	$\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}$	4	$\frac{15}{2}+4=\frac{23}{2}$	
2	4	$2+7=9$	0	$9+0=9$	
3	0	$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$	
3	1	$1+4=5$	5	$5+5=10$	$f_3(3)=\frac{13}{2}$
3	2	$\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}$	4	$\frac{13}{2}+4=\frac{21}{2}$	$x_3(3)=0$
3	3	$2+6=8$	0	$8+0=8$	
4	0	$1+0=1$	5	$1+5=6$ *	
4	1	$\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2}$	4	$\frac{11}{2}+4=\frac{19}{2}$	$f_3(4)=6$ $x_3(4)=0$
4	2	$2+5=7$	0	$7+0=7$	

2. AY HESAPLAMALARI

İkinci ayın başında elde *i* adet ürün bulunması durumunda 2., 3. ve 4. aylar boyunca toplam en küçük maliyet demek olan $f_2(i)$ hesaplanabilir.

x, 2. ayın üretim miktarı olmak üzere, 2. ayın talebi 3 birim olduğundan 2. ayın sonunda stokta tutma maliyeti (½) ($i + x$ – 3) formülü ile hesaplanır.

Bu durumda 2. ay boyunca oluşan toplam maliyet (½) (i+x – 3) + $c(x)$ formülü ile hesaplanır.

Üçüncü ay ($i + x$ – 3) stoğu ile başladığından 3. ve 4. aylar boyunca oluşan maliyet $f_3(i + x - 3)$'dür.

(2)'deki denkleme benzer şekilde ağağıdaki denklem yazılabilir:

$$f_2(i) = \min_x \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)(i + x - 3) + c(x) + f_3(i + x - 3) \right\} \tag{3}$$

Denklem 3'de x {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanıdır

Ayrıca x, $0 \le (i+x - 3) \le 4$ koşulunu sağlamalıdır.

$f_2(0)$, $f_2(1)$, $f_2(2)$, $f_2(3)$, ve $f_2(4)$ hesaplamaları Tablo 2'de verilmiştir.

1. AY HESAPLAMALARI

$f_1(i)$ aşağıdaki yineleme bağıntısı ile belirlenebilir:

$$f_1(i) = \min_x \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)(i + x - 1) + c(x) + f_2(i + x - 1) \right\} \tag{4}$$

Denklem 4'de x {0, 1, 2, 3, 4, 5} kümesinin elemanıdır.

Ayrıca x, $0 \le (i+x - 1) \le 4$ koşulunu sağlamalıdır.

Birinci ayın başında elde ürün bulunmadığından $f_1(0)$ ve $x_1(0)$ değerlerinin hesaplanması yeterlidir (Tablo 3).

Tablo 2. f_2 için hesaplama

i	x	$(½)\ (i+x-3)+c(x)$	$f_3(i+x-3)$	Toplam maliyet 2-4. aylar	$f_2(i)$ $x_2(i)$
0	3	$0+6=6$	12	$6+12=18$	
0	4	$\frac{1}{2}+7=\frac{15}{2}$	10	$\frac{15}{2}+10=\frac{35}{2}$	$f_2(0)=16$ $x_2(0)=5$
0	5	$1+8=9$	7	$9+7=16*$	
1	2	$0+5=5$	12	$5+12=17$	
1	3	$\frac{1}{2}+6=\frac{13}{2}$	10	$\frac{13}{2}+10=\frac{33}{2}$	
1	4	$1+7=8$	7	$8+7=15*$	$f_2(1)=15$ $x_2(1)=4$
1	5	$\frac{3}{2}+8=\frac{19}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{19}{2}+\frac{13}{2}=16$	
2	1	$0+4=4$	12	$4+12=16$	
2	2	$\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2}$	10	$\frac{11}{2}+10=\frac{31}{2}$	
2	3	$1+6=7$	7	$7+7=14*$	$f_2(2)=14$ $x_2(2)=3$
2	4	$\frac{3}{2}+7=\frac{17}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{17}{2}+\frac{13}{2}=15$	
2	5	$2+8=10$	6	$10+6=16$	
3	0	$0+0=0$	12	$0+12=12*$	
3	1	$\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$	10	$\frac{9}{2}+10=\frac{29}{2}$	
3	2	$1+5=6$	7	$6+7=13$	$f_2(3)=12$ $x_3(3)=0$
3	3	$\frac{3}{2}+6=\frac{15}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}+\frac{13}{2}=14$	
3	4	$2+7=9$	6	$9+6=15$	
4	0	$\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$	10	$\frac{1}{2}+10=\frac{21}{2}*$	
4	1	$1+5=6$	7	$5+7=12$	$f_2(4)=\frac{21}{2}$
4	2	$\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{13}{2}+\frac{13}{2}=13$	$x_2(4)=0$
4	3	$2+6=8$	6	$8+6=14$	

Tablo 3 $f_1(0)$ için hesaplama

i	x	(½) (i+x – 1) + c(x)	f_2(i + x – 1)	Toplam maliyet 1.-4. aylar	f_1(i) x_1(i)
0	1	$0+4=4$	16	$4+16=20$ *	
0	2	$\frac{1}{2}+5=\frac{11}{2}$	15	$\frac{11}{2}+15=\frac{41}{2}$	
0	3	$1+6=7$	14	$7+14=21$	$f_1(0)=20$
0	4	$\frac{3}{2}+7=\frac{17}{2}$	12	$\frac{17}{2}+12=\frac{41}{2}$	$x_1(0)=1$
0	5	$2+8=10$	$\frac{21}{2}$	$10+\frac{21}{2}=\frac{41}{2}$	

EN İYİ ÜRETİM ÇİZELGESİNİN BELİRLENMESİ

Bu hesaplamaların sonunda her ayın talebini zamanında karşılayan en küçük maliyetli bir üretim çizelgesi belirlenebilir.

Başlangıç stoğu 0 adet ürün olduğundan dört ay için en düşük maliyet $f_1(0)$=$20 olacaktır.

$f_1(0)$'ı bulmak için birinci ay boyunca bir adet ürün üretilmelidir: $x_1(0)=1$.

İkinci. ayın başındaki stok 0 + 1 – 1 = 0 adet olacaktır.

İkinci ayda $x_2(0)=5$ adet ürün üretilmelidir.

Bu durumda üçüncü ayın başında eldeki stok miktarı: 0 + 5 – 3 = 2'dir.

Bu nedenle üçüncü ay boyunca $x_3(2)=0$ adet ürün üretilmeli, yani üretim yapılmamalıdır.

Bu durumda dördüncü ay stokta 2 – 2 + 0 = 0 adet ürün ile başlayacaktır.

Böylece dördüncü ay boyunca $x_4(0)=4$ adet ürün üretilmelidir.

Özetle, en iyi üretim planı $20'lık toplam maliyet ile birinci ayda 1 adet, ikinci ayda 5 adet ve dördüncü ayda 4 adet ürün üretmekle elde edilir.

Kaynak Tahsisi Modelleri

Sınırlı kaynakların, belirli aktivitelere atandığı kaynak tahsisi sorunları, genellikle dinamik programlama ile çözülür.

Kaynak tahsisi sorunlarını doğrusal programlama ile de çözmek mümkündür. Ancak kaynak tahsis sorunlarında doğrusal programlama kullanmak için aşağıdaki varsayımları yapmamız gerekir:

1. Kaynağın herhangi bir aktiviteye tahsis edilen miktarı, negatif olmayan bir sayıdır.
2. Her bir aktiviteden elde edilen fayda, o aktiviteye tahsis edilen kaynak ile orantılıdır.
3. Birden çok aktiviteden elde edilen fayda, her bir aktiviteden elde edilen faydaların toplamıdır.

Dinamik programlama ise birinci ve ikinci kabullenme koşulları sağlanmasa bile, üçüncü koşul sağlandığında ve her bir aktiviteye atanacak kaynak miktarının sonlu bir kümenin elemanı olması durumunda; kullanılabilmektedir.

Kaynak Tahsisi Sorunu

(Winston 20.4., s. 1018)

Finco'nun yatırım için ayırdığı \$6000 ve bu yatırımı yapabileceği üç yatırım seçeneği vardır. Finco d_j doları j yatırımına harcarsa $r_j(d_j)$ dolar kazanç sağlayacaktır:

$$r_1(d_1) = 7d_1 + 2 \qquad (d_1 > 0)$$
$$r_2(d_2) = 3d_2 + 7 \qquad (d_2 > 0)$$
$$r_3(d_3) = 4d_3 + 5 \qquad (d_3 > 0)$$
$$r_1(0) = r_2(0) = r_3(0) = 0$$

Her bir yatırıma ayrılan para \$1000'ın katları kadar olmalıdır. Finco kazancını enbüyüklemek için \$6000'ı nasıl kullanmalıdır?

Yanıt:

Yatırımın geri dönüş oranı, yatırım miktarı ile doğru orantılı değildir. (Örneğin; $16=r_1(2)\neq 2r_1(1)=18$). Bu yüzden bu sorunda en iyi çözümü bulmak için doğrusal programlama kullanılamaz.

Finco sorunu matematiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$\max \{r_1(d_1) + r_2(d_2) + r_3(d_3)\}$

s.t. $d_1 + d_2 + d_3 = 6$

$d_j > 0$ ve tamsayı (j=1,2,3)

$r_j(d_j)$ doğrusal olsaydı, bir sırtçantası sorunu söz konusu olacaktı.

Finco sorununu bir dinamik programlama modeli olarak formüle etmek için, öncelikle aşamalar tanımlanmalıdır (Stok ve en kısa yol örneklerinde olduğu gibi, sorunu aşama aşama ele almak çözümü kolaylaştırmaktadır).

t. aşama eldeki paranın t, t+1, ..., 3 yatırımları için tahsis edilmesi olarak tanımlanabilir.

Belirlenen bir aşama için bulunması gereken en iyi yatırımın ne olduğudur. Basit olarak, "t, t+1, ..., 3 yatırımları için ne kadar para kullanılabilir?" sorusu yanıtlanmaya çalışılır.

Bu doğrultuda, her bir aşamadaki durum; t, t+1, ..., 3 yatırımları için kullanılabilir para miktarı (binlik birimlerde) olarak tanımlanabilir.

\$6000'dan daha fazla harcanılmayacağı için, aşamalardaki olası durumlar da 0, 1, 2, 3, 4, 5 ve 6'dır.

d_t, t. yatırıma yatırılabilecek mevcut kullanılabilir parayı göstersin.

t, t+1,..., 3 yatırımlarına d_t bin doları yatırarak elde edilebilecek en büyük net şimdiki değer (NŞD) para miktarı $f_t(d_t)$ olarak tanımlanır.

Ayrıca $x_t(d_t)$ de $f_t(d_t)$'yi elde etmek için t yatırımına tahsis edilmesi gereken miktar olarak tanımlanır.

Öncelikle $f_3(0)$, $f_3(1)$, ..., $f_3(6)$'yı belirlenir, daha sonra ise $f_2(0)$, $f_2(1)$,...,$f_2(6)$ belirlerinir. \$6000'ı yatırım 1, 2, ve 3'e yatırmamız mümkün olduğu için, hesaplamalar $f_1(6)$'nın hesaplandığı noktada tamamlanır. Daha sonra her bir aşamayı geriye doğru izleyerek, hangi yatırımlara ne miktarda yatırım yapılacağını belirlenir.

3. AŞAMA HESAPLAMALARI

$f_3(d_3)$ kullanılabilir d_3 miktar parayı 3. yatırıma tahsis etme durumu olarak belirlenmişti:

$f_3(0) = 0 \qquad x_3(0) = 0$

$f_3(1) = 9 \qquad x_3(1) = 1$

$f_3(2) = 13 \qquad x_3(2) = 2$

$f_3(3) = 17 \qquad x_3(3) = 3$

$f_3(4) = 21 \qquad x_3(4) = 4$

$f_3(5) = 25 \qquad x_3(5) = 5$

$f_3(6) = 29 \qquad x_3(6) = 6$

2. AŞAMA HESAPLAMALARI

$f_2(0)$, $f_2(1)$,...,$f_2(6)$'yı hesaplamak için, 2. yatırıma atanabilecek olası miktarlara bakılır. $f_2(d_2)$'yi bulmak için, x_2 yatırım 2'ye yatırılan para miktarı olarak tanımlanmıştı. Böylece ikinci yatırımdan elde edilebilecek en büyük değer $r_2(x_2)$ ve üçüncü yatırımdan elde edilebilecek olan en büyük değer $f_3(d_2–x_2)$ kazanılmış olacaktır. $x_{2,}$ en iyilik ilkesi gereği, 2. ve 3. yatırımlardan elde edilecek net şimdiki değeri en büyüklemeye çalıştığına göre, aşağıdaki denklem yazılabilir:

$$f_2(d_2) = \max_{x_2}\{r_2(x_2) + f_3(d_2 - x_2)\} \qquad (5)$$

x_2 $\{0,1,...,d_2\}$ kümesinin bir elemanıdır.

$f_2(0)$, $f_2(1)$, ..., $f_2(6)$ ve $x_2(0)$, $x_2(1)$, ..., $x_2(6)$ için yapılan hesaplamalar aşağıdaki Tablo 4'de verilmiştir.

1. AŞAMA HESAPLAMALARI

(5) nolu denkleme benzer bir denklem yazılır:

$$f_1(6) = \max_{x_1}\{r_1(x_1) + f_2(6 - x_1)\} \qquad (6)$$

Denklem 6'da x1 {0,1,2,3,4,5,6} kümesinin bir elemanıdır. $f_1(6)$ için yapılan hesaplamalar Tablo 5'de gösterilmiştir.

Tablo 4. f_2 için hesaplama

d_2	x_2	$r_2(x_2)$	$f_3(d_2–x_2)$	Yatırım 2 ve 3 İçin NŞD	$f_2(d_2)$ $x_2(d_2)$
0	0	0	0	0*	$f_2(0)=0$ $x_2(0)=0$
1	0	0	9	9	$f_2(1)=10$
1	1	10	0	10*	$x_2(1)=1$
2	0	0	13	13	$f_2(2)=19$
2	1	10	9	19*	$x_2(2)=1$
2	2	13	0	13	
3	0	0	17	17	
3	1	10	13	23*	$f_2(3)=23$
3	2	13	9	22	$x_2(3)=1$
3	3	16	0	16	
4	0	0	21	21	
4	1	10	17	27*	
4	2	13	13	26	$f_2(4)=27$
4	3	16	9	25	$x_2(4)=1$
4	4	19	0	19	
5	0	0	25	25	
5	1	10	21	31*	
5	2	13	17	30	$f_2(5)=31$
5	3	16	13	29	$x_2(5)=1$
5	4	19	9	28	
5	5	22	0	22	
6	0	0	29	29	
6	1	10	25	35*	
6	2	13	21	34	
6	3	16	17	33	$f_2(6)=35$
6	4	19	13	32	$x_2(6)=1$
6	5	22	9	31	
6	6	25	0	25	

Tablo 5. f_1 için hesaplama

d_1	x_1	$r_1(x_1)$	$F_2(6–x_1)$	Yatırım 1–3 İçin NŞD	$f_1(6)$ $x_1(6)$
6	0	0	35	35	
6	1	9	31	40	
6	2	16	27	43	
6	3	23	23	46	$f_1(6)=49$ $x_1(6)=4$
6	4	30	19	49*	
6	5	37	10	47	
6	6	44	0	44	

EN İYİ ÇÖZÜMÜN BELİRLENMESİ

$f_1(6)=49$, $x_1(6)=4$ olduğundan, Finco birinci yatırıma $4000 tahsis edecektir..

Bu durumda ikinci ve üçüncü yatırımlara $6000 – $4000 = $2000 kalmaktadır: $f_2(2)$, $x_2(2)=1$.

Finco ikinci yatırıma $1000 tahsis edeceğinden üçüncü yatırıma da $1000 kalmaktadır: $f_3(1)$, $x_3(1)=1$

Böylece Finco üçüncü yatırıma $1000 tahsis eder.

Böylece Finco $49000 net şimdiki geliri, $4000 yatırım 1'e, $1000 yatırım2'ye ve $1000 yatırım 3'e yatırarak elde eder.

Genelleştirilmiş Kaynak Atama Sorunu

Mevcut kaynağın w birim ve bu kaynağın tahsis edilebileceği T adet aktivite olduğu varsayılsın.

t aktivitesi x_t düzeyinde (x_t negatif olmayan bir tamsayı iken) uygulanırsa, kaynağın $g_t(x_t)$ birimi t aktivitesi tarafından kullanılır ve $r_t(x_t)$ kadar yarar sağlar. Sınırlı kaynaklar kısıtı altında toplam yararın en büyüklenmesi sorunu aşağıdaki şekilde formüle edilebilir:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{t=1}^{t=T} r_t(x_t) \\ &\text{s.t.} \sum_{t=1}^{t=T} g_t(x_t) \leq w \end{aligned} \qquad (7)$$

Burada x_t {0, 1, 2,...} kümesinin elemanı olmak zorundadır.

Çeşitli örneklerde $r_t(x_t)$, $g_t(x_t)$, ve w için bazı olası yorumlar Tablo 6'da verilmiştir:

Tablo 6. Genelleştirilmiş Kaynak Atama Örnekleri

$r_t(x_t)$	$g_t(x_t)$	w
x_t miktarda t tipi birimin bir sırt çantasına yerleştirilmesinden elde edilen kazanç	x_t miktarda t tipinde birimin ağırlığı	Bir sırt çantasının alabileceği maksimum yük miktarı
Haftada x_t saat t dersinin çalışılması sonunda t dersinden elde edilen not	t dersini çalışmak için hafta harcanan x_t saat	Bir haftalık çalışma saati
t bölgesine x_t adet satış temsilcisi gönderildiğinde bir ürünün t bölgesindeki satışları	x_t satış temsilcisini t bölgesine atamanın maliyeti	Toplam satış gücü bütçesi
t bölgesine x_t adet araç atandığında 1 dakika içinde olumlu yanıt verilen yangın ihbarlarının sayısı	t bölgesine haftada x_t adet yangın aracının atanmasının maliyeti	Yangın araçları için haftalık bütçe

Denklem 7'yı dinamik programlama ile çözmek $f_t(d)$ tanımlanır: t, t+1, ..., T aktivitelerine d birim kaynak ayrıldığında bu aktivitelerden elde edilebilecek en büyük yarar.

Yinelemeler aşağıdaki şekilde genelleştirilebilir:

$$f_{T+1}(d)=0 \quad \text{tüm } d\text{'ler için}$$

$$f_t(d)=\max_{x_t} \{r_t(x_t) + f_{t+1}(d - g_t(x_t))\}$$

x_t, $g_t(x_t) \le d$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tam sayıdır.

$x_t(d)$, $f_t(d)$ yararını sağlayan tahsis miktarı olsun.

1, 2, ..., T aktivitelerine kaynakların en iyi şekilde tahsis edilmesini belirlemek için ilk önce $f_T(\cdot)$ ve $x_T(\cdot)$ belirlenir. Daha sonra $f_2(\cdot)$ ve $x_2(\cdot)$ belirlenene kadar tüm $f_{T-1}(\cdot)$ ve $x_{T-1}(\cdot)$'ler belirlenir. Sonuç olarak $f_1(w)$ ve $x_1(w)$ bulunur.

Bu durumda aktivite 1 $x_1(w)$ düzeyinde yerine getirilir. Bu noktada geri kalan 2, 3, ..., T aktiviteleri için $w-g_1(x_1(w))$ birim kaynak kalmıştır. Daha sonra aktivite 2 $x_2[w-g_1(x_1(w))]$ düzeyinde yerine getirilir. Tüm aktivitelerin yerine getirilme düzeyleri belirlenene kadar bu şekilde devam edilir.

Sırt Çantası Sorunu

(Winston 20.4., s. 1023)

Ağırlığı sırasıyla 4, 3 ve 5 kg olan eşya 1, 2 ve 3'ün sağlayacağı yararlar 11, 7 ve 12'dir. 10 kg'lık bir sırt çantası söz konusu olduğunda toplam faydayı en büyüklemek için sırt çantası nasıl doldurulmalıdır?

Yanıt:

$r_1(x_1) = 11x_1$, $r_2(x_2) = 7x_2$, $r_3(x_3) = 12x_3$

$g_1(x_1) = 4x_1$, $g_2(x_2) = 3x_2$, $g_3(x_3) = 5x_3$

$f_1(d)$, d kg ağırlığın t, t+1, ..., 3 eşyalarıyla doldurulmasından elde edilen en büyük fayda olarak tanımlanır.

3. AŞAMA HESAPLAMALARI

$$f_3(d) = \max_{x_3}\{12x_3\}$$

$5x_3 \leq d$ ve x_3 negatif olmayan bir tamsayı olduğu için:

$f_3(10) = 24$

$f_3(5) = f_3(6) = f_3(7) = f_3(8) = f_3(9) = 12$

$f_3(0) = f_3(1) = f_3(2) = f_3(3) = f_3(4) = 0$

$x_3(10) = 2$

$x_3(9) = x_3(8) = x_3(7) = x_3(6) = x_3(5) = 1$

$x_3(0) = x_3(1) = x_3(2) = x_3(3) = x_3(4) = 0$

2. AŞAMA HESAPLAMALARI

$$f_2(d) = \max_{x_2}\{7x_2 + f_3(d - 3x_2)\}$$

$3x_2 \leq d$ ve x_2 negatif olmayan bir tamsayı olduğu için:

$$f_2(10) = \max\begin{cases} 7(0)+f_3(10)=24\ * & x_2=0 \\ 7(1)+f_3(7)=19 & x_2=1 \\ 7(2)+f_3(4)=14 & x_2=2 \\ 7(3)+f_3(1)=21 & x_2=3 \end{cases}$$

$$f_2(10)=\max\begin{cases}7(0)+f_3(9)=12 & x_2=0\\ 7(1)+f_3(8)=19 & x_2=1\\ 7(2)+f_3(3)=14 & x_2=2\\ 7(3)+f_3(0)=21^* & x_2=3\end{cases}$$

$$f_2(8)=\max\begin{cases}7(0)+f_3(8)=12 & x_2=0\\ 7(1)+f_3(5)=19^* & x_2=1\\ 7(2)+f_3(2)=14 & x_2=2\end{cases}$$

$$f_2(7)=\max\begin{cases}7(0)+f_3(7)=12 & x_2=0\\ 7(1)+f_3(4)=7 & x_2=1\\ 7(2)+f_3(1)=14^* & x_2=2\end{cases}$$

$$f_2(6)=\max\begin{cases}7(0)+f_3(6)=12 & x_2=0\\ 7(1)+f_3(3)=7 & x_2=1\\ 7(2)+f_3(0)=14^* & x_2=2\end{cases}$$

$$f_2(5)=\max\begin{cases}7(0)+f_3(5)=12^* & x_2=0\\ 7(1)+f_3(2)=7 & x_2=1\end{cases}$$

$$f_2(4)=\max\begin{cases}7(0)+f_3(4)=0 & x_2=0\\ 7(1)+f_3(1)=7^* & x_2=1\end{cases}$$

$$f_2(3)=\max\begin{cases}7(0)+f_3(3)=0 & x_2=0\\ 7(1)+f_3(0)=7^* & x_2=1\end{cases}$$

$$f_2(2)=\max\left\{7(0)+f_3(2)=0 \qquad x_2=0\right.$$

$$f_2(1)=\max\left\{7(0)+f_3(1)=0 \qquad x_2=0\right.$$

$$f_2(0)=\max\left\{7(0)+f_3(0)=0 \qquad x_2=0\right.$$

1. AŞAMA HESAPLAMALARI

$4x_1 \le d$ ve x_1 negatif olmayan bir tamsayı olduğu için:

$$f_1(10)=\max\begin{cases}11(0)+f_2(10)=24 & x_1=0\\ 11(1)+f_2(6)=25^* & x_1=1\\ 11(2)+f_2(2)=22 & x_1=2\end{cases}$$

SIRTÇANTASI SORUNUNUN EN İYİ ÇÖZÜMÜNÜN BELİRLENMESİ

$f_1(10) = 25$ ve $x_1(10) = 1$ olarak belirlenmiştir.

Bunun için öncelikle birinci eşyadan 1 adet sırt çantasına yerleştirilmelidir.

Bundan sonra 10 – 4 = 6 kg ikinci ve üçüncü eşyalar için kalmış olur.

$x_2(6) = 2$, 2 adet ikinci eşyadan konulması gerektiğini önerir.

Son olarak 6 – 2(3) = 0 kg üçüncü eşya için kalmıştır.

Özet olarak, 10 kg'lık bir sırt çantasını doldurmak için elde edilen en büyük fayda $f_3(10)$=25'tir. Bu faydayı sağlamak için de birinci eşyadan 1 ve ikinci eşyadan 2 adet, çantaya konulmalıdır.

Teçhizat Yenileme Modelleri

Bir makinenin veya teçhizatın hizmet verme süresi arttıkça bakım maliyeti de aynı oranda yüksek olur ve üretkenliği de aynı oranda azalır. Bir makine belirli bir yaşa geldiği zaman onu yenilemek daha ekonomik olabilir. Burada sorun, makinenin en ekonomik kullanılacağı yaşın belirlenmesidir. Söz konusu sorun çoğu zaman dinamik programlama ile çözülür.

Teçhizat Yenileme Sorunu

(Winston 20.5., s. 1030)

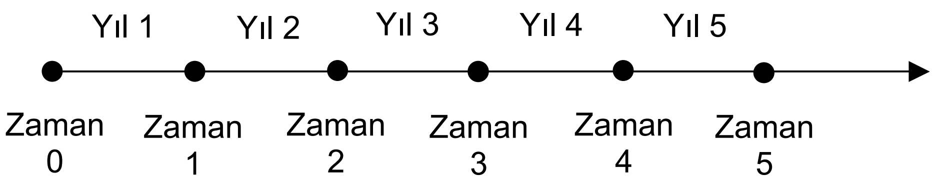
Bir otomobil tamir atölyesi, bir motor analiz makinesını her zaman hazır bulundurmalıdır. Yeni bir motor analiz makinesini $1000'a mal olmaktadır. *i*. yılındaki bir motor analiz makinesini onarma maliyeti şu şekildedir:

m_1 = \$60, m_2 = \$80, m_3 = \$120.

Bir analiz makinesı 1, 2 veya 3 yıl kullanılabilir. *i* yıldır kullanılan makine yenisiyle değiştirildiğinde, s_i hurda değeri elde edilir. Yıllara göre hurda değerler

s_1=\$800, s_2=\$600, s_3=\$500.

şeklindedir. Şirketin şu an (zaman 0; şekile bakınız) yeni bir alet alması gerektiği gerçeğini göz önüne alarak gelecek beş yıl için şirketin net maliyetlerini [(onarım maliyetlerii) + (değiştirme maliyetlerii) –(hurda değeri)] enazlayacak bir satın alma politikası belirleyiniz.



Yanıt:

Öncelikle atölye yeni bir makine aldığında, bu makineyi yenisiyle ne zaman değiştireceğine karar vermelidir. Bu doğrultuda,

$g(t)$: t zamanında yeni bir makine alındığında t. zamandan 5. zamana kadar karşılaşılan en küçük net maliyet olarak tanımlanmıştır (Bu değerde yeni alınan makinenın ücreti ile, hurda değeri de göz önünde bulundurulmuştur).

Ayrıca c_{tx} bir makineyı t zamanında alıp x zamanına kadar kullanmanın net maliyetidir (satın alma ve hurda maliyetleri de buna eklenmiştir..

Bu durum için uygun yineleme bağıntısı aşağıdadır:

$$g(t) = \min_{x}\{c_{tx} + g(x)\} \qquad (t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

Makineyi x zamanında değiştirme kararı alındığında t. zamandan 5. zamana kadar oluşan maliyet, makinenın alımından x zamanındaki satışına kadar oluşan maliyet (c_{tx}) ile x zamanından 5. zamana kadar (x zamanında yeni bir makine alınacağı göz önünde bulundurularak) oluşan maliyetin ($g(x)$) toplamıdır. Söz konusu bağıntı $t+1 \le x \le t+3$ ve $x \le 5$ koşullarını sağlamalıdır.

Bu sorun beş yıllık bir zaman dilimini kapsadığından, 5. zaman için oluşan maliyet 0'dır: $g(5)=0$ yazılabilir.

Bakım maliyeti, hurda değer ve satın alma maliyeti sabit kabul edildiğinden her bir c_{tx} sadece makinenın ne kadar elde tutulacağı ile ilgilidir. Diğer bir deyişle c_{tx} sadece x – t ile ilgilidir.

$$c_{tx} = \$1000 + m_1 + \ldots + m_x - s_{x-t}$$

Buradan şu sonuçlara ulaşılır:

$$c_{01} = c_{12} = c_{23} = c_{34} = c_{45} = 1000 + 60 - 800 = \$260$$
$$c_{02} = c_{13} = c_{24} = c_{35} = 1000 + 60 + 80 - 600 = \$540$$
$$c_{03} = c_{14} = c_{25} = 1000 + 60 + 80 + 120 - 500 = \$760$$

Önce $g(4)$ hesaplanır ve $g(0)$'a ulaşana kadar geriye doğru yineleme yapılır. x'lerin $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$, $g(3)$ ve $g(4)$'teki değerleri optimal değiştirme stratejisinin belirlenmesinde kullanılır.

4 zamanında bir makine alındığında yalnız bir anlamlı karar vardır: 5 zamanına kadar makineyı elde tutmak ve hurda değerine satmak:

$$g(4) = c_{45} + g(5) = 260 + 0 = \$260\,^{*}$$

3 zamanında yeni bir makine alınırsa 4 zamanına kadar ya da 5 zamanına kadar elde tutulabilir:

$$g(3) = \min\begin{cases} c_{34} + g(4) = 260 + 260 = \$520\,^{*} \\ c_{35} + g(5) = 540 + 0 = \$540 \end{cases}$$

Bir makinenin 3 zamanında alınması durumunda 4 zamanında değiştirilmesi gerektiği anlaşılır.

2 zamanında bir makine alınırsa 3., 4., veya 5. zamanda değiştirilebilir.

$$g(2)=\min\begin{cases} c_{23}+g(3)=260+\ 520=\$780 \\ c_{24}+g(4)=540+\ 260=\$800 \\ c_{25}+g(5)=\$760\ * \end{cases}$$

Bir makinenin 2 zamanında alınması durumunda 5 zamanında değiştirilmesi gerektiği anlaşılır.

1 zamanında alınan bir makine ise 2, 3, veya 4 zamanında değiştirilebilir.

$$g(1)=\min\begin{cases} c_{12}+g(2)=260+760=1020\ * \\ c_{13}+g(3)=540+520=1060 \\ c_{14}+g(4)=760+260=1020\ * \end{cases}$$

1 zamanında bir makine alınırsa 2 veya 4 zamanında değiştirilmelidir.

0 zamanında bir makine alınırsa 1, 2, veya 3 zamanlarında değiştirilebilir.

$$g(0)=\min\begin{cases} c_{01}+g(1)=260+1020=1280\ * \\ c_{02}+g(2)=540+760\ =1300 \\ c_{03}+g(3)=760+520\ =1280\ * \end{cases}$$

0 zamanında bir makine alınırsa 1 veya 3 zamanında değiştirilmelidir.

EN İYİ ÇÖZÜMÜN BELİRLENMESİ

Önce rassal bir seçimle 0 zamanında alınan bir makine 1 zamanında değiştirilsin. 1 zamanında alınan makine 2 veya 4 zamanında değiştirilmelidir. Yine rassal bir seçimle 1 zamanında alınan makine 2 zamanında değiştirilsin. 2 zamanında alınan makine 5 zamanına kadar tutulacak ve 5 zamanında hurda değerine satılacaktır. Bu politika ile $g(0)$=$1280 net maliyet oluşmaktadır.

Aşağıdaki diğer değiştirme politikaları da aynı en iyi çözümü verir:

- 1, 4 ve 5 zamanlarında değiştirme yapmak
- 3, 4 ve 5 zamanlarında değiştirme yapmak

Burada bütün maliyetlerin sabit kaldığı varsayılmıştır. Bu varsayım c_{tx} hesaplamalarını basitleştirmek için yapılmıştır. Çok kısa bir planlama süresi söz konusu olduğunda, optimal değiştirme politikası bu süreye fazlasıyla bağımlı olmaktadır. Daha uzun planlama süresi kullanmak daha anlamlı sonuçlar yaratacaktır.

İleriye Doğru Yineleme

Dinamik programlama sorunları geriye doğru yineleme yöntemi ile çözülürken; t aşamasının başındaki i durumu için t, t+1, ..., T aşamalarında oluşan en küçük maliyet f_t(i) olarak tanımlanmıştı. Geriye yineleme ile öncelikle f_T(i), daha sonra f_{T-1}(i), ... ve en son $f_1(i_1)$ hesaplanmaktaydı. Elde edilen değerler kullanılarak sırasıyla en iyi birinci aşama, en iyi ikinci aşama, ..., en iyi T. aşama kararı veriliyordu.

Çoğu zaman dinamik programlama modelleri ileriye doğru yineleme yapılarak da çözülebilir:

T aşamasının sonunda, sistemin içinde olduğu arzulanan bir durum olduğu varsayılır.

f_t(i), t aşamasının sonundaki i durumu için 1, 2, ..., t aşamalarında oluşan en küçük maliyet olarak tanımlanır.

Öncelikle f_1(i), birinci aşama sonunda oluşabilecek tüm durumlar göz önünde bulundurularak, hesaplanır. Daha sonra f_2(i)'ler için f_1(i)'ler cinsinden yinelemeler geliştirilerek ikinci aşama sonunda oluşabilecek tüm durumlar için f_2(i) hesaplanır. Bu şekilde f_T belirleninceye kadar devam edilir.

Elde edilen değerler kullanılarak sırasıyla en iyi T–1. aşama, en iyi T–2. aşama, ..., en iyi birinci aşama kararı verilir.

Stok Sorunu

(Winston 20.3., s. 1013)

Bir şirketin ürününe önümüzdeki dört ay boyunca talep sırasıyla 1, 3, 2 ve 4 adettir. Her ayın başında şirket o ay kaç adet ürün üreteceğine karar vermek zorundadır. Üretim için hazırlık (sabit) maliyeti \$3'dır. Üretilen her ürün için değişken maliyet \$1'dır. Her ayın sonunda eldeki her ürün için 50¢'lik bir stokta tutma maliyeti söz konusudur. Bir ayda en fazla 5 adet ürün üretilebilir. Her ayın sonunda stokta en fazla 4 adet ürün olabilir. Birinci ayın başında elde 0 ürün olduğu varsayılacaktır. Şirket dört ay boyunca taleplerin zamanında karşılandığı ve üretim ile taşıma maliyetlerinin en küçüklendiği bir üretim çizelgesi belirlemek istemektedir.

Yanıt (İleriye yineleme ile):

Öncelikle $f_t(i_t)$; 1, 2 ..., t ayları sırasında oluşan en küçük maliyet olarak tanımlanır (t ayının bitiş stoğu i_t ve t ayındaki üretim miktarı $x_t(i_t)$ iken)

Sınırlı stok kapasitesi; 1., 2. ve 3. ayların sonundaki stok miktarının 0, 1, 2, 3 veya 4 değerine eşit olmasını gerektirmektedir.

Toplam maliyeti en küçüklemek için 4. ayın sonundaki stok düzeyi 0 olmalıdır.

Bundan sonra işlemlere $f_1(i_1)$ hesaplanarak başlanır.

Birinci ayın talebi 1 birim ve başlangıç stoğu 0 olduğu için eğer bu ay boyunca i_t+1 birim üretim yapılırsa birinci ay sonunda oluşacak stok miktarı i_t'dir.

c(x) bir ayda x miktar ürün üretmenin maliyeti olsun:

c(0) = 0, c(1) = 4, c(2) = 5, c(3) = 6, c(4) = 7 ve c(5) = 8 (ay sonu stok miktarı en fazla 4 adet olmalı!)

Elde tutma maliyetleri $0.5/adet/ay olduğu için

$f_1(i_1) = c(i_1+1) + 0.5\ (i_1)$

olarak yazılabilir. Bu doğrultuda aşağıdaki hesaplamalar yapılır:

$f_1(0) = c(1) = \$4.0$ $\quad x_1(0)=1$

$f_1(1) = c(2) + 0.5 = \$5.5$ $\quad x_1(1)=2$

$f_1(3) = c(3) + 1 = \$7.0$ $\quad x_1(2)=3$

$f_1(3) = c(4) + 1.5 = \$8.5$ $\quad x_1(3)=4$

$f_1(4) = c(5) + 2.0 = \$10.0$ $\quad x_1(4)=5$

Bu aşamada $f_1(.)$'lerden yararlanarak $f_2(-)$'yi hesaplamak için yineleme yapılır:

$f_2(i_2) = \min\ (c(x_2) + 0.5\ i_2 + f_1(3 + i_2 - x_2))$.

Eğer ikinci ay boyunca x_2 adet üretim yapılırsa, ikinci ay sonunda oluşan stok miktarı (i_2) $i_1 + x_2 - 3$ şeklinde gösterilebilecektir (ikinci ayın talebi 3 adet). Böylece ikinci ayda x_2 birim üretmenin maliyeti $c(x_2) + 0.5\ (i_2)$ olacaktır.

Ayrıca $0 \leq x_2 \leq 5$ ve $4 \geq 3 + i_2 - x_2 \geq 0$ koşulları gözönünde tutulmalıdır.

$$f_2(0) = \min \begin{cases} c(0) + f_1(3) = 0 + 8{,}5 = \$8.50\ * \\ c(1) + f_1(2) = 4 + 7 = \$11.01 \\ c(2) + f_1(1) = 5 + 5{,}5 = \$10.50 \\ c(3) + f_1(0) = 6 + 4 = \$10.00 \end{cases}$$

Buradan $f_2(0) = \$8.5$ ve $x_2(0) = 0$ olarak bulunur.

$$f_2(1) = \min\begin{cases} c(0) + 0{,}5 + f_1(4) = 0 + 0{,}5 + 10 = \$10.50\,* \\ c(1) + 0{,}5 + f_1(3) = 4 + 0{,}5 + 8{,}5 = \$13.00 \\ c(2) + 0{,}5 + f_1(2) = 5 + 0{,}5 + 7 = \$12.50 \\ c(3) + 0{,}5 + f_1(1) = 6 + 0{,}5 + 5{,}5 = \$12.00 \\ c(4) + 0{,}5 + f_1(0) = 7 + 0{,}5 + 4 = \$11.50 \end{cases}$$

Buradan $f_2(1)$ = \$10.5 ve $x_2(1) = 0$ olarak bulunur.

$$f_2(2) = \min\begin{cases} c(1) + 1 + f_1(4) = 4 + 1 + 10 = \$15.00 \\ c(2) + 1 + f_1(3) = 5 + 1 + 8{,}5 = \$14.50 \\ c(3) + 1 + f_1(2) = 6 + 1 + 7 = \$14.00 \\ c(4) + 1 + f_1(1) = 7 + 1 + 5{,}5 = \$13.50 \\ c(5) + 1 + f_1(0) = 8 + 1 + 4 = \$13.00\,* \end{cases}$$

Buradan $f_2(2)$ = \$13.0 ve $x_2(2) = 5$ olarak bulunur.

$$f_2(3) = \min\begin{cases} c(2) + 1{,}5 + f_1(4) = 5 + 1{,}5 + 10 = \$16.50 \\ c(3) + 1{,}5 + f_1(3) = 6 + 1{,}5 + 8{,}5 = \$16.00 \\ c(4) + 1{,}5 + f_1(2) = 7 + 1{,}5 + 7 = \$15.50 \\ c(5) + 1{,}5 + f_1(1) = 8 + 1{,}5 + 5{,}5 = \$15.00\,* \end{cases}$$

Buradan $f_2(3)$ = \$15.0 ve $x_2(3) = 5$ olarak bulunur.

$$f_2(4) = \min\begin{cases} c(3) + 2 + f_1(4) = 6 + 2 + 10 = \$18 \\ c(4) + 2 + f_1(3) = 7 + 2 + 8{,}5 = \$17.5 \\ c(5) + 2 + f_1(2) = 8 + 2 + 7 = \$17\,* \end{cases}$$

Buradan $f_2(4)$ = \$17.0 ve $x_2(2) = 4$ olarak bulunur.

$f_3(i_3)$'i $f_2(i_2)$ ile bağıntılı olarak tanımlamak için x_3'ün üçüncü ay boyunca yapılan üretim olduğunu söylüyoruz. Söz konusu ayın talebi 2 adet olduğu için üçüncü ay sonunda oluşan stok miktarı (i_3) $i_2 + x_3 - 2$ şeklinde gösterilebilecektir.

$0 \leq x_3 \leq 5$ ve $4 \geq 3 + i_3 - x_3 \geq 0$ koşulları için

$f_3(i_3) = \min\,(c(x_3) + 0.5\, i_3 + f_2(2 + i_3 - x_3))$

olarak yazılabilir.

$$f_3(0) = \min\begin{cases} 0 + f_2(2) = \$13.0\,* \\ 4 + f_2(1) = \$14.5 \\ 5 + f_2(0) = \$13.5 \end{cases}$$

Buradan $f_3(0)$ = \$13.0 ve $x_3(0) = 0$ olarak bulunur.

$$f_3(1) = \min \begin{cases} 0 + 0{,}5 + f_2(3) = \$15.5 \\ 4 + 0{,}5 + f_2(2) = \$17.5 \\ 5 + 0{,}5 + f_2(1) = \$16.0 \\ 6 + 0{,}5 + f_2(0) = \$15.0 * \end{cases}$$

Buradan $f_3(1)$ = \$15.0 ve $x_3(1)$ = 3 olarak bulunur.

$$f_3(2) = \min \begin{cases} 0 + 1 + f_2(4) = \$18.0 \\ 4 + 1 + f_2(3) = \$20.01 \\ 5 + 1 + f_2(2) = \$19.0 \\ 6 + 1 + f_2(1) = \$17.5 \\ 7 + 1 + f_2(0) = \$16.5 * \end{cases}$$

Buradan $f_3(2)$ = \$16.5 ve $x_3(2)$ = 4 olarak bulunur.

$$f_3(3) = \min \begin{cases} 4 + 1{,}5 + f_2(4) = \$22.5 \\ 5 + 1{,}5 + f_2(3) = \$21.5 \\ 6 + 1{,}5 + f_2(2) = \$20.5 \\ 7 + 1{,}5 + f_2(1) = \$19.0 \\ 8 + 1{,}5 + f_2(0) = \$18.0 * \end{cases}$$

Buradan $f_3(3)$ = \$18.0 ve $x_3(3)$ = 5 olarak bulunur.

$$f_3(4) = \min \begin{cases} 5 + 2 + f_2(4) = \$24.0 \\ 6 + 2 + f_2(3) = \$23.0 \\ 7 + 2 + f_2(2) = \$22.0 \\ 8 + 2 + f_2(1) = \$20.5 * \end{cases}$$

Benzer yinelemelerle $f_4(i_4)$ için:

$0 \leq x_4 \leq 5$ ve $4 \geq 3 + i_4 - x_4 \geq 0$ koşulları için

$f_4(i_4) = \min (c(x_4) + 0.5\, i_4 + f_3(4 + i_4 - x_4))$

yazılabilir:

$$f_4(0) = \min \begin{cases} 0 + f_3(4) = \$20.5 \\ 4 + f_3(3) = \$22.0 \\ 5 + f_3(2) = \$21.5 \\ 6 + f_3(1) = \$21.0 \\ 7 + f_3(0) = \$20.0 * \end{cases}$$

Buradan $f_4(0)$ = \$20.0 ve $x_4(0)$ = 4 olarak bulunur.

Tüm bu hesaplamalar yapıldıktan sonra en iyi üretim çizelgesi belirlenir:

$x_4(0) = 4$ olduğuna göre dördüncü ayda 4 adet ürün üretilmelidir.

Bu durumda üçüncü ayın sonunda $i_3 = 4 + i_4 – x_4 = 0$ stok olmalıdır.

$x_3(0) = 0$ olduğu için üçüncü ayda üretim yapılmamalıdır.

İkinci ayın sonunda $i_2 = 2 + i_3 – x_3 = 2$ birim stok olmalıdır.

$x_2(2) = 5$ birim olduğuna göre ikinci ayda 5 adet ürün üretilmelidir.

Son olarak birinci ayın sonunda $i_1 = 3 + i_2 – x_2 = 0$ birim stok olmalıdır.

Böylece $x_1(0) = 1$ adet ürün birinci.ayda üretilecektir.

Bu üretim çizelgesi için toplam maliyet $ 20 olacaktır.

Wagner-Whitin Algoritması ve Silver-Meal Sezgisel Yaklaşımı

Bu algoritmalar dinamik parti hacmi belirlemede kullanılırlar.

DİNAMİK PARTİ HACMİ MODELİNİN TANIMLANMASI

1. İlk dönemin başında t döneminin (t = 1, 2, ..., T) d_t talebi bilinmektedir.
2. t döneminin talebi stoktan veya t dönemi üretiminden karşılanabilmelidir.
   x adet ürünü herhangi bir dönemde üretme maliyeti *c*(x)'dir.
   c(0) = 0 ve x>0 için *c*(x) = *K* + *cx* olarak tanımlanmıştır *(K*= bir peryotta ürünü üretmenin sabit maliyeti, *c*= birim başına üretim maliyetidir.)
3. Bir t döneminin sonunda i_t stoğu oluşmaktadır ve bu stoğu elde tutma maliyeti hi_t'dir.
   i_0 birinci.dönemden önce elde bulunan stok miktarını göstermektedir.
4. Amaç her bir t dönemindeki talepleri zamanında karşılamak için toplam maliyeti en küçükleyecek x_i'leri (t dönemindeki üretim miktarı) hesaplamaktır.
5. *t* dönemi sonunda oluşan stok üst sınırı c_t 'dir.
6. *t* döneminin üretim üst sınırı r_t 'dir.

Parti Hacmi Sorunu

(Winston 20.7., s. 1047)

K = \$250, *c* = \$2, *h*= \$1, d_1 = 220, d_2 = 280, d_3 = 360, d_4 = 140 ve d_5 = 270 değerlerinden oluşan beş dönemlik bir dinamik parti hacmi modeli için en iyi üretim çizelgesi belirlenmek istenmektedir. Başlangıç stoğu sıfır olarak kabul edilecektir.

Wagner-Within Algoritması

Parti Hacmi Sorunu örneği bir dinamik programlama modeli olarak düşünülebilir. Birinci dönem sırasında 0'dan $d_1+d_2+d_3+d_4+d_5$ = 1270'e kadar her miktarda üretim olasıdır. Aynı durum ikinci dönem için de geçerlidir. İkinci dönem başlangıç stok değeri 0, 1, ..., 1270 – d_1 = 1050 olsun.

En iyi çözümü bulmak için $f_2(0)$, $f_2(1)$, ..., $f_2(1050)$'yi belirlemek gerekmektedir. Görüldüğü gibi söz konusu sorunu dinamik programlama yaklaşımıyla çözmek çok fazla matematiksel işlem gerektirmektedir. Bu yüzden Wagner ve Within (1958) parti hacmi belirleme modelleri için program yapmayı kolaylaştıran bir yöntem önermişlerdir. Wagner-Within algoritmasının geliştirilmesi için iki aksiyom kullanılır.

AKSİYOM 1

t döneminde pozitif bir değerde üretim yapmanın optimal olduğunu varsayılsın.

Bu durumda bazı *j* = 0, 1, ..., T – t değerleri için t dönemindeki üretimden sonra $d_t + d_{t+1} + ... + d_{t+j}$ miktarları stokta olacaktır.

Bir başka deyişle eğer *t* döneminde üretim yapılacaksa bu üretimin *t, t+1, ..., t+j* dönemlerinin taleplerini karşılaması gerekmektedir.

AKSİYOM 2

Eğer t döneminde üretim yapmak optimalse $i_{t-1} < d_t$ olmalıdır.

Bir başka deyişle t döneminin talebini karşılamaya yetmeyecek kadar az stok olmadıkça t döneminde üretim yapılamaz.

Wagner-Within Algoritması ile Soruna Yanıt:

$f_6 = 0$

$f_5 = 250 + 2(270) + f_6 = 790$ (beşinci dönem için üretim yapmak)

Eğer beşinci dönemin başında yeterli stok yoksa beşinci dönemde bu döneme yetecek miktarda üretim yapmak gerekmektedir.

$$f_4 = \min\begin{cases} 250 + 2(270) + f_5 = 1320^* & \text{(4. Dönem için üretim yapmak)} \\ 250 + 2(140 + 270) + 270 + f_6 = 1340 & \text{(4. ve 5. dönemler için üretim yapmak)} \end{cases}$$

Eğer dördüncü döneme 0 stok düzeyi ile başlanırsa dördüncü dönemin talebini karşılayacak miktarda üretim yapmak gerekmektedir.

$$f_3 = \min\begin{cases} 250 + 2(360) + f_4 = 2290 & \text{3. dönem için üretim yapmak} \\ 250 + 2(360 + 140) + 140 + f_5 = 2180^* & \text{3. ve 4. dönemler için üretim yapmak} \\ 250 + 2(360 + 140 + 270) + 140 + 2(270) + f_6 = 2470 & \text{3, ,4,5. dönemler için üretim yapmak} \end{cases}$$

Eğer üçüncü döneme 0 stok düzeyi ile başlanırsa üçüncü dönemin talebini karşılayacak miktarda üretim yapmak gerekmektedir.

$$f_2 = \min\begin{cases} 250 + 2(280) + f_3 = 2290^* \\ 250 + 2(280 + 360) + 360 + f_4 = 3210 \\ 250 + 2(280 + 360 + 140) + 360 + 2(140) + f_5 = 3240 \\ 250 + 2(280 + 360 + 140 + 270) + 360 + 2(140) + 3(270) + f_6 = 3240 \end{cases}$$

Eğer ikinci döneme 0 stok düzeyi ile başlanırsa ikinci dönemin talebini karşılayacak miktarda üretim yapmak gerekmektedir.

$$f_1 = \min \begin{cases} 250 + 2(220) + f_2 = 3680\ * \\ 250 + 2(220 + 280) + 280 + f_3 = 3710 \\ 250 + 2(220 + 280 + 360) + 280 + 2(360) + f_4 = 4290 \\ 250 + 2(220 + 280 + 360 + 140) + 280 + 2(360) + 3(140) + f_5 = 4460 \\ 250 + 2(220 + 280 + 360 + 140 + 270) + 280 + 2(360) + 3(140) + 4(270) \\ + f_6 = 4460 \end{cases}$$

Bu hesaplamalar sonucunda:

Birinci döneme 0 stok düzeyi ile başlandığı varsayıldığından birinci dönem sırasında d_1 = 220 adet ürün üretmek en iyidir.

İkinci döneme 0 stok düzeyi ile başlanılır ve f_2 ikinci dönemin talebini karşılamak olarak belirlendiği için ikinci dönem sırasında d_2 = 280 adet ürün üretilir.

Böylece üçüncü döneme de 0 stok ile başlanılır. En iyi f_3 değeri 3. ve 4. dönemler için üretim yapmak olarak belirlendiği için üçüncü dönem sırasında $d_3 + d_4$ = 500 adet ürün üretilir.

Beşinci döneme 0 stok düzeyi ile başlanılır ve beşinci dönem sırasında d_5 = 270 adet ürün üretilit.

Özetlenirse en iyi üretim çizelgesinin toplam maliyeti f_1 = $3680'dır ve birinci dönemde 220 adet, ikinci dönemde 280 adet, üçüncü dönemde 500 adet ve beşinci dönemde 270 adet ürün üretilir.

Silver-Meal Sezgisel Yaklaşımı

Silver-Meal sezgisel yaklaşımı, Wagner-Within algoritmasından daha kolay uygulanabilir ve en iyi çözüme yakın sonuç verir.

Söz konusu örnek gibi sorunlarda her zaman $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$ = 1270 adet ürün üretilmelidir. Bu da hesaplamaları yaparken her zaman 2(1270) olan değişken maliyeti göz ardı edebilmeyi sağlar. Bu tarz sorunların çözümünde, hesaplamaları kolaylaştırmak için değişken maliyetler göz ardı edilebilir.

Bu durumda amaç dönem başına ortalama maliyeti enküçüklemektir.

Birinci dönemin başında iken birinci dönemde yapılacak üretimle kaç dönemin talebinin karşılanması gerektiği belirlenmeye çalışılsın. Sonraki t dönem için üretim yapılırsa (değişken maliyetler göz ardı edildiğinde); HC(t), t dönem boyunca oluşan elde tutma maliyeti (şu anki dönem de dahil) olmak üzere toplam maliyet aşağıdaki gibidir:

TC (t) = K + HC(t)

t dönem boyunca oluşan ortalama maliyet:

$AC(t) = TC(t) / t$

1/t t'nin azalan bir konveks fonksiyonu olduğuna göre, t arttıkça k/t azalan ivmeyle azalır. Çoğu durumda $t < t^*$ için, $AC(t+1) \leq AC(t)$ ve $AC(t^*+1) \geq AC(t^*)$ koşullarını sağlayan t* tamsayısı vardır.

S-M yaklaşımı birinci dönemde 1, 2, ..., t* dönemlerinin talebini karşılayacak miktarda üretim yapılmasını önerir (eğer böyle bir t* yoksa 1. dönemde 1, 2, ..., T dönemlerinin tümünün karşılanması gerekmektedir). t*, AC(t) için yerel (belki de global) minimum olduğu için, birinci dönem sırasında $d_1 + d_2 + ... + d_{t^*}$ miktarında üretmek 1, 2 ..., t* dönemleri boyunca oluşan minimum ortalama maliyete yakın bir maliyet sağlayacaktır.

Daha sonra, t*+1'inci dönem ilk dönem olarak düşünülerek yeniden işlem yapılır ve T döneminin talebi karşılanana kadar S-M yaklaşımı uygulanmaya devam edilir.

Pek çok farklı dinamik parti hacmi belirleme problemi için S-M yaklaşımı en iyi çözümü verir. S-M yaklaşımı ile çözülen parti hacmi sorunlarının Wagner-Within algoritmasına göre %1'den az maliyet artışına yol açtığı belirlenmiştir.

Silver-Meal Sezgisel Yaklaşımı ile Soruna Yanıt:

TC(1) = 250 AC(1) = 250 / 1 = 250

TC(2) = 250 + 280 = 530 AC(2) = 530 / 2 = 265

$AC(2) \geq AC(1)$ olduğu için t*=1'dir. S-M yaklaşımı çerçevesinde birinci dönemde d_1 = 220 adet ürün üretilmelidir.

TC(1) = 250 AC(1) = 250 / 1 = 250

TC(2) = 250 + 360 = 610 AC(2) = 610 / 2 = 305

$AC(2) \geq AC(1)$ olduğu için t*=1'dir. S-M yaklaşımı çerçevesinde ikinci dönemde d_2 = 280 adet ürün üretilmelidir.

TC(1) = 250 AC(1) = 250 / 1 = 250

TC(2) = 250 + 140 = 390 AC(2) = 390 / 2 = 195

TC(3) = 250 + 2(270) + 140 = 930 AC(3) = 930 / 2 = 310

$AC(3) \geq AC(2)$ olduğu için t*=2'dir. S-M yaklaşımı çerçevesinde üçüncü dönemde üçüncü ve dördüncü dönemlerin talebini karşılamak üzere $d_3 + d_4$ = 500 adet ürün üretilmelidir.

Son dönem olan beşinci dönemde d_5 = 270 adet ürün üretilmelidir.