

TAMSAYILI PROGRAMLAMAYA GİRİŞ

(Bu notlar **Doç.Dr. Şule Önsel** tarafından hazırlanmıştır)

DP sorunlarının modeli kurulurken bazı karar değişkenlerinin kesinlikle tamsayı değerler alması gerektiğini görürüz fakat DP'ye uygun olması için büyük değerler alabilecek karar değişkeninin kesirli kısmı yok sayılabilir mantığı ile kesirli değerler almalarına izin veririz. Bazı durumlarda bu varsayım kabul edilemez olabilir. Bulunacak sayısal sonucun tamsayı değerler alması gerekebilir.

Bu tip durumlardaki sorunlara **Tamsayılı Program (TP)**; Integer Programming – IP) denilir ve söz konusu programların çözümü konusu **Tamsayılı Programlama (TP)** olarak isimlendirilir.

Sonlu sayıda seçenek kümesindeki seçenekler ile ilgili birçok kararın yap/yapma, evet/hayır gibi kesikli olması yüzünden TP'ler sıklıkla kullanılır.

Tüm değişkenlerin tamsayı olduğu bir programlama sorunu **tamamen tamsayılı programlama sorunu** olarak isimlendirilir.

Eğer değişkenlerin bazıları tamsayı, bazıları kesirli ise söz konusu sorun **karma tamsayılı programlama sorunu** adını alır.

Bazı durumlarda tamsayı değişkenler sadece 0 veya 1 değerlerini alabilir. Bu tip sorunlar da **tamamen (karma) 0-1 programlama sorunları** veya **tamamen (karma) ikili tamsayı programlama sorunları** olarak isimlendirilir.

Sermaye Bütçeleme Örneği

Farzedelim ki \$14,000 yatırım yapmak istiyoruz. Dört yatırım fırsatı belirledik. Yatırım 1 \$5'lik bir yatırım gerektirmekte ve getirisinin şimdiki değeri \$8 olmaktadır. Yatırım 2 \$7'lik bir yatırım gerektirmekte ve getirisinin şimdiki değeri \$11 olmaktadır. Yatırım 3 \$4'lik bir yatırım gerektirmekte ve getirisinin şimdiki değeri \$6 olmaktadır. Yatırım 4 ise \$3'lik bir yatırım gerektirmekte ve getirisinin şimdiki değeri \$4 olmaktadır. Hangi yatırımlara para yatırarak toplam getirimizi en büyükleyebiliriz?

Yanıt

DP'de olduğu gibi ilk adım değişkenleri belirlemektir. Tamsayı sınırlamasının getirdiği çeşitli karışıklıklar ve numaralar yüzünden TP'de bu işlem daha zordur.

Örnekte her yatırım için bir 0-1 x_j değişkeni kullanacağız..

$x_j = 1$ ise j. yatırım yapılır , 0 ise j. yatırım yapılmaz

Bu durumda 0-1 programlama sorunu söz konusudur:

$$\text{maks } 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

öyle ki

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 < 14$$

$$x_j = 0 \text{ veya } 1 \quad j = 1, \dots, 4$$

Doğrudan yapılacak bir değerlendirmede (amaç fonksiyonu katsayılarının kısıt katsayılarına oranlanması) Yatırım 1'in en iyi seçenek olduğu önerilebilir.

Tamsayı kısıtlarına önem verilmezse en iyi DP çözümü aşağıdaki gibidir:

$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0.5$ ve $x_4 = 0$; toplam getiri değeri \$22,000.

Ne yazık ki bu çözüm tamsayılı çözüm değildir. x_3 0'a yuvarlanırsa \$19,000 toplam getiri değeri olan olurlu bir çözüm elde edilir.

TP çözüm tekniği kullanılarak en iyi tamsayılı çözüm bulunursa $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1$ ve toplam getiri değeri \$21,000 olur.

Bu örnek yuvarlamanın her zaman en iyi değeri vermediğini gösterir.

Çok Dönemli Sermaye Bütçeleme Örneği

Önümüzdeki üç yıllık planlama dönemi için dört projenin değerlendirilmesi yapılacaktır. Her projeye ait beklenen getiriler ile yıllık harcamalar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Üç yıl boyunca uygulamaya konulacak projeleri belirleyiniz.

		Harcamalar		
Proje	Getiri	1. Yıl	2. Yıl	3. Yıl
1	0.2	0.5	0.3	0.2
2	0.3	1	0.5	0.2
3	0.5	1.5	1.5	0.3
4	0.1	0.1	0.4	0.1
Kullanılabilir sermaye		3.1	2.5	0.4

Yanıt

$x_j = 1$, j. proje uygulanırsa

$x_j = 0$, aksi takdirde (j. proje uygulanmaz).

Kurulacak 0-1 programlama modeli:

Maks $0.2 x_1 + 0.3 x_2 + 0.5 x_3 + 0.1 x_4$

Öyle ki

$$0.5 x_1 + 1 x_2 + 1.5 x_3 + 0.1 x_4 < 3.1$$

$$0.3 x_1 + 0.8 x_2 + 1.5 x_3 + 0.4 x_4 < 2.5$$

$$0.2 x_1 + 0.2 x_2 + 0.3 x_3 + 0.1 x_4 < 0.4$$

$$x_j = 0 \text{ veya } 1 \quad j = 1, \dots, 4$$

Uyarı

Amaç fonksiyonu ve kısıtlar doğrusaldır. Bu derste Tamsayılı Doğrusal Programlama ile ilgileneceğiz. Doğrusal olmayan TP'ler de vardır – fakat bu dersin kapsamı dışındadırlar.

Sorunun Simpleks Yöntemi ile çözümü sonucunda $x_1=0.4975$ çıktığını varsayalım. Bu durumda kesirli kısma önem vermeyip yuvarlama işlemi mantıksız olacaktır. Bu yüzden DP yerine, TP algoritmaları kullanılarak en iyi çözüm bulunur.

Değiştirilmiş Sermaye Bütçeleme Örneği

Bazı yeni kısıtlarla sorunu genişletelim.

Örneğin, aşağıdaki önermeleri ve getirdiği kısıtları düşünelim:

Sadece iki yatırım yapabiliriz

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 2$$

Üç veya dört adet yatırım yapılması durumunda $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 3$ olacaktır

Eğer Yatırım 2 yapılırsa, Yatırım 4 de yapılmalıdır

$$x_2 < x_4 \text{ veya } x_2 - x_4 < 0$$

Eğer $x_2 = 1$ ise, x_4 de istediğimiz gibi 1 olur; eğer $x_2 = 0$ ise, x_4 için herhangi bir kısıtlama olmaz ($x_4 = 0$ veya 1 olur)

Eğer Yatırım 1 yapılırsa, Yatırım 3 yapılamaz

$$x_1 + x_3 < 1$$

Eğer $x_1 = 1$ ise, x_3 istediğimiz gibi 0 olur; eğer $x_1 = 0$ ise, x_3 için herhangi bir kısıtlama olmaz ($x_3 = 0$ veya 1 olur)

Ya Yatırım 1 ya Yatırım 2 yapılabilir

$$x_1 + x_2 = 1$$

Eğer $x_1 = 1$ ise, $x_2 = 0$ olur (sadece Yatırım 1 yapılır); eğer $x_1 = 0$ ise, $x_2 = 1$ olur (sadece Yatırım 2 yapılır).

Sırt Çantası Sorunu

Sadece bir kısıtı olan herhangi bir TP sırt çantası sorunu olarak isimlendirilir.

Bir diğer özellik de kısıtın ve amaç fonksiyonunun katsayıları negatif olmayan sayılardır.

Örneğin aşağıdaki model sırt çantası sorunudur:

$$\text{Maks} \quad 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4$$

Öyle ki

$$5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14$$

$$x_j = 0 \text{ veya } 1 \quad j = 1, \dots, 4$$

Geleneksel öykü, bir sırt çantasında (örnekte kapasitesi 14'dür) bazı eşyaları (dört çeşit eşya) taşımak ile ilgilidir. Her eşyanın bir büyüklüğü ve taşıma sonucu elde edilecek bir değeri vardır (eşya 2 için büyüklük 7, değer 11'dir).

Amaç, sırt çantasına sığabilecek eşyaların toplam değerini enbüyüklemektir.

Sırt çantası sorunları genellikle kolay çözülürler.

Sabit Maliyet Sorunları

Çok sayıda üretim ve yer seçimi sorunlarının modellenmesi için de TP kullanılabilir.

Burada üretim sorununa örnek olarak Gandhi örneği ve yer seçimi sorununa örnek olarak da Çek tahsilat ofisi örneği verilmiştir.

Gandhi Örneği

(Winston 9.2., s. 470)

Gandhi Co sınırlı işçilik ve kumaş kullanarak gömlek, şort ve pantolon üretmektedir. Ayrıca her ürünü üretmek için makine kiralama söz konusudur.

	Gömlek	Şort	Pant.	Toplam Mevcut
İşçilik (saat/hafta)	3	2	6	150
Kumaş (m2/hafta)	4	3	4	160
Satış fiyatı	12	8	15	
Makine kirası (\$/hafta)	200	150	100	
Değişken birim maliyet	6	4	8	

Yanıt

x_j üretilen j . giysi sayısı olsun

y_j de j . giysinin üretim kararı olsun.

$y_j = 1$, j . giysi üretilen; $y_j = 0$, aksi takdirde.

Kar = Satış geliri – Değişken maliyet – Makine kirası

Örneğin gömlekten elde edilecek kar $z_1 = (12 - 6) x_1 - 200 y_1$.

İşçilik ve kumaş sınırlı olduğundan Gandhi iki kısıtla karşılaşır.

$x_j > 0$ iken $y_j = 1$ olmasını sağlamak için aşağıdaki kısıtlar eklenir

$x_j < M_j y_j$

Kumaş kısıtı göz önüne alınarak en fazla 40 gömlek yapılabilir ($M_1 = 40$), böylece gömlek için eklenecek kısıt x_1 üzerinde gereksiz bir sınır oluşturmaz (Eğer M_1 yeterince büyük seçilmezse (örn. $M_1 = 10$) x_1 'in alabileceği değere gereksiz bir sınır getirilmiş olur)

Benzer şekilde kumaş kısıtı göz önüne alınarak en fazla 53 şort yapılabilir ($M_2 = 53$) ve işçilik kısıtı göz önüne alınarak en fazla 25 pantolon yapılabilir ($M_3 = 25$). bulunur.

Böylece aşağıdaki karma 0-1 TP elde edilir::

$$\text{maks } 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$$

öyle ki

$$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150 \quad (\text{İşçilik kısıtı})$$

$$4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160 \quad (\text{Kumaş kısıtı})$$

$$x_1 \leq 40 y_1 \quad (\text{Gömlek üretimi ve makine kısıtı})$$

$$x_2 \leq 53 y_2 \quad (\text{Şort üretimi ve makine kısıtı})$$

$$x_3 \leq 25 y_3 \quad (\text{Pantolon üretimi ve makine kısıtı})$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ ve tamsayı}$$

$$y_1, y_2, y_3 = 0 \text{ veya } 1$$

Gandhi sorununa en iyi çözüm $z = \$ 75$, $x_3 = 25$, $y_3 = 1$.

Bu durumda 25 pantolon yapmaları ve bir pantolon makinesi kiralamaları durumunda \$75 kar elde edeceklerdir.

Çek Tahsilatı Ofisi Örneği

(Winston 9.2., s. 473'den uyarlanmıştır)

Bir Amerikan şirketinin Birleşik Devletlerdeki müşterilerinin ödemelerini gönderdikleri çekler ile topladığını varsayalım. Çekin tanzim edilip postalanması (müşterinin yükümlülüğünü yerine getirmesi) ile çekin şirketin eline geçmesi (paraya dönüştürülmesi) arasında bir zaman olacağı ve şirketin parayı kullanmasının gecikeceği açıktır. Bu yüzden şirket çeşitli şehirlerde çek tahsilat ofisleri açarak çekleri paraya dönüştürmeyi hızlandırmayı ve zaman kaybından dolayı uğrayacağı zararı azaltmayı hedeflemektedir.

Şirketin batı, ortabatı, doğu ve güney bölgelerindeki müşterileri günde sırasıyla \$70,000, \$50,000, \$60,000 ve \$40,000'lık ödemeyi çekle yapsınlar. Şirket L.A., Chicago, New York, ve/veya Atlanta'da çek tahsilat ofisleri açabilir. Bir çek tahsilat ofisini işletmek için yıllık masraf \$50,000'dır. Bölgelerden ofislere çeklerin tanzim edilip gönderimi ve paraya çevrilmesi süreleri tabloda verilmiştir.

	LA	Chicago	NY	Atlanta
Batı	2	6	8	8
Ortabatı	6	2	5	5
Doğu	8	5	2	5
Güney	8	5	5	2

Hangi ofisler açılmalıdır? Gönderim zamanı yüzünden oluşacak kayıpları ve ofis masraflarını enazlayacak şekilde bir TP modeli kurunuz. Faiz oranının % 20 olduğunu ve her bölgenin sadece bir şehirdeki ofise çeklerini gönderebileceğini varsayınız.

Yanıt

Öncelikle her atamanın getireceği gecikmeler yüzünden oluşacak kaybı hesaplamalıyız. Örneğin Batı bölgesi çeklerini New York'a gönderirse ortalama olarak günlük işlem gören miktar \$560,000 (= 8 * \$70.000) olacaktır. Bu durumda % 20 faiz oranı ile yıllık kayıp \$112,000 olur. Bu şekilde her bölgeden her şehire gönderimler sonucu oluşacak kayıpları hesaplayıp aşağıdaki tabloyu oluşturabiliriz.

	LA	Chicago	NY	Atlanta
Batı	28	84	112	112
Ortabatı	60	20	50	50
Doğu	96	60	24	60
Güney	64	40	40	16

y_j 0-1 değişken olsun ve j . ofis açılırsa 1 değerini, açılmazsa 0 değerini alsın

$x_{ij} = 1$, i . bölge j . ofise gönderirse; $x_{ij} = 0$, aksi takdirde.

Amacımız yıllık kayıpları ve masrafları enazlamaktır:

$$28 x_{11} + 84 x_{12} + 112 x_{13} + \dots + 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4$$

Bir kısıt kümesi her bölgenin sadece bir şehirdeki ofise çek göndermesini sağlamalıdır:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad \text{her } i \text{ için}$$

Bir kısıt kümesi de bir bölgenin açık bir ofise atanması koşulunu sağlamalıdır

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} \leq M y_j$$

Dört bölge olduğundan M en az dört olacak şekilde herhangi bir sayıdır

(L.A.'da ofis açılmadığını ($y_1 = 0$) varsayalım. Bu durumda x_{11} , x_{21} , x_{31} ve x_{41} de 0 olacaktır. Eğer y_1 1 ise x değerleri üzerinde bir kısıtlama olmayacaktır.)

Bu sorun için yirmi değişken (dört y değişkeni, onaltı x değişkeni) ve sekiz kısıt kullanılır ve aşağıdaki 0-1 TP kurulumu:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 28 x_{11} + 84 x_{12} + 112 x_{13} + 112 x_{14} \\ & + 60 x_{21} + 20 x_{22} + 50 x_{23} + 50 x_{24} \\ & + 96 x_{31} + 60 x_{32} + 24 x_{33} + 60 x_{34} \\ & + 64 x_{41} + 40 x_{42} + 40 x_{43} + 16 x_{44} \\ & + 50 y_1 + 50 y_2 + 50 y_3 + 50 y_4 \end{aligned}$$

Öyle ki

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 4y_1$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \leq 4y_2$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \leq 4y_3$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} \leq 4y_4$$

Tüm x_{ij} ve $y_j = 0$ veya 1

Aynı sorun için başka formülasyonlar da yapılabilir.

Örneğin aşağıdaki şekilde oluşturulan dört kısıt yerine

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + x_{4j} \leq M y_j$$

16 kısıtlı başka bir küme kullanılabilir:

$$x_{ij} \leq y_j \quad i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4$$

Bu kısıtlar da bir bölgenin açık bir ofisi kullanmasını sağlar.

($y_j = 0$ ise ilgili dört kısıt kullanılarak x_{1j} , x_{2j} , x_{3j} ve x_{4j} 'nin de 0 olduğu bulunur. Eğer $y_j = 1$ ise x değerleri üzerinde kısıtlama olmaz.)

Diğer bir bakış açısı da $x_{ij} = 1$ iken istediğimiz şekilde $y_j = 1$ olur. Aynı zamanda $x_{1j} = x_{2j} = x_{3j} = x_{4j} = 0$ iken y_j değerinde bir kısıtlama yazmaz. Ofis maliyetlerinin enazlanmak istenmesi y_j 'yi 0 yapar)

Bu şekilde daha büyük bir modelin (yirmi değişken ve yirmi kısıt) formülasyonu daha az etkin gözükse de söz konusu modeli DP olarak varsayarak çözersek tamsayılı bir çözüm buluruz. Çözüm bu yüzden TP için de en iyidir!)

Eğer-Öyleyse Kısıtı

Aşağıdaki durumla matematik programlama sorunlarında karşılaşılabilir.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ kısıtının sağlanması durumunda $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$:kısıtının da sağlanması istenir.

Eğer $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ sağlanmazsa $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ 'nin sağlanıp sağlanmaması önemli değildir.

Söz konusu koşulu sağlamak için aşağıdaki kısıtları formülasyona eklemeliyiz:

$$-g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M y \quad (1)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M (1 - y) \quad (2)$$

Burada y bir 0-1 değişken ve M de yeterince büyük bir sayıdır.

M , sorunun diğer kısıtlarını sağlayan her x_j değişkeni için $-g \leq M$ ve $f \leq M$ kısıtlarını sağlamalıdır.

$f > 0$ ise (2)'nin sağlanması için $y = 0$ olmalıdır. $y = 0$ iken, (1) $-g \leq 0$ veya $g \geq 0$ olmasını sağlar. Bu durumda istenilen eğer-öyleyse koşulu gerçekleşir.

Örnek

Çek ofisi örneğine takip eden koşulu ekleyelim. Eğer 1. bölgedeki müşteri ödemelerini Şehir 1'e göndermek istiyorsa başka hiç bir bölge bu ofisi kullanamaz. Matematiksel olarak,

$$\text{Eğer } x_{11} = 1 \text{ ise } x_{21} = x_{31} = x_{41} = 0$$

Tüm değişkenler 0-1 olduğundan aşağıdaki çevrimi yapabiliriz:

$$\text{Eğer } x_{11} > 0 \text{ ise } x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq 0 \text{ (veya } -x_{21} - x_{31} - x_{41} \geq 0)$$

Eğer $f = x_{11}$ ve $g = -x_{21} - x_{31} - x_{41}$ şeklinde tanımlarsak, aşağıdaki kısıtları kullanarak koşulu gerçekleştirebiliriz:

$$x_{21} + x_{31} + x_{41} \leq M y$$

$$x_{11} \leq M (1 - y)$$

$$y = 0 \text{ veya } 1$$

$-g$ ve f hiç bir zaman 3'ü geçemeyeceklerinden, M 3 olarak alınabilir.

Ya – Ya da Kısıtları

Aşağıdaki durumla matematik programlama sorunlarında karşılaşılabilir.

İki farklı biçimde kısıtlar verilsin:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (1)$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (2)$$

eğer (1) veya (2)'den **en az** birinin sağlanmasını istersek bu kısıtlar **ya – ya da** kısıtları olarak isimlendirilir.

Söz konusu koşulu sağlamak için (1') ve (2') kısıtlarını formülasyona eklemeliyiz:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M y \quad (1')$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M (1 - y) \quad (2')$$

Burada y bir 0-1 değişkenidir

M ise sorunun diğer kısıtlarını sağlayan her x_j değişkeni için $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M$ ve $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M$ koşullarını sağlayacak şekilde yeterince büyük bir sayıdır.

y = 0 iken (1) mutlaka ve (2) bazı durumlarda sağlanır.

y = 1 iken (2) mutlaka ve (1) bazı durumlarda sağlanır.

Örnek

Bir otomobil üretimi için 1.5 ton çelik ve 30 saat işçilik gerekmektedir. Mevcut miktarlar 6,000 ton çelik ve 60,000 saat işçiliktir.

Ekonomik olarak uygun bir üretim için en az 1000 otomobil üretilmelidir.

Kısıt: $x_1 \leq 0$ veya $x_1 \geq 1000$

$$[f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1; g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1000 - x_1]$$

İşaret sınırlaması $x_1 \geq 0$ ve tamsayı

Kısıtı aşağıdaki kısıt çifti ile değiştirerek modeli doğrusallaştırabiliriz:

$$x_1 \leq M_1 y_1$$

$$1000 - x_1 \leq M_1 (1 - y_1)$$

$$y_1 = 0 \text{ veya } 1$$

$$M_1 = \min(6.000/1.5, 60.000/30) = 2000$$

Ya hep – Ya hiç kısıtları

Gerçek hayatta, bazı değişkenlerin ya tümünün çözümde olması ya da hiç kullanılmaması gibi bir durum olabilir. Bu tarz problemler “ya hep ya hiç” olarak adlandırılırlar. Böyle durumlarda, yeni, kesikli değişkenler tanımlanmalıdır.

- “ya hep ya hiç” değişkenleri “ $x_j=0$ veya u_j ” şeklindedir
- Bu tarz x_j değişkenler $y_j=0$ or 1 olacak şekilde, “ u_j*y_j ” olarak değiştirilmelidir.

Örnek

Max $18x_1+3x_2+9x_3$

Öyle ki

$2x_1+x_2+7x_3<150$

$0<x_1<60$

$0<x_2<60$

$0<x_3<60$

Burada x_1 değişkeninin ya tamamı kullanılacak ya da hiçbiri kullanılmayacak deneşeydi:

$$y_1 = \begin{cases} 1, 1.bilesen kullaniliy or ise \\ 0, diger \end{cases}$$

Max $18(60y_1)+3x_2+9x_3$

Öyle ki

$2(60y_1)+x_2+7x_3<150$

$0<x_2<60$

$0<x_3<60$

GEZGİN SATICI SORUNU

Bir satıcı on adet şehiri birer kez ziyaret edip evine dönecektir. “Saticının yapacağı bu gezide katedeceği toplam uzaklığı enazlayacak rota (şehir sırası) nasıl olmalıdır?” sorunu **Gezgin Satıcı Sorunu** (GSS; Traveling Salesperson Problem – TSP) olarak isimlendirilir.

GSS’nin TP Formülasyonu

N adet şehir olduğunu varsayalım

$i \neq j$ için c_{ij} = şehir i ’den şehir j ’ye uzaklık ve

$c_{ii} = M$ (gerçek uzaklıklara göre çok büyük bir uzaklık) olsun

Aynı zamanda x_{ij} aşağıdaki şekilde bir 0-1 değişken olarak tanımlansın:

$x_{ij} = 1$, GSS çözümü şehir i ’den şehir j ’ye gitmeyi önersin

$x_{ij} = 0$, aksi takdirde

GSS formülasyonu:

$$\min \quad \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{öyle ki } \sum_{i=1}^N x_{ij} = 1 \quad \text{her } j \text{ için}$$

$$\sum_{j=1}^N x_{ij} = 1 \quad \text{her } i \text{ için}$$

$$u_i - u_j + N x_{ij} \leq N - 1 \quad \text{her } i \neq j \text{ için; } i=2,3,\dots,N; j=2,3,\dots,N$$

$$\text{Her } x_{ij} = 0 \text{ veya } 1, \text{ Her } u_i \geq 0$$

İlk kısıt kümesi satıcının her şehire salt bir kez uğramasını sağlar.

İkinci kısıt kümesi satıcının her şehirden salt bir kez ayrılmasını sağlar.

Üçüncü kısıt kümesi aşağıdakileri sağlar:

Tam tur yapmayan herhangi bir x_{ij} 'ler kümesi olurlu olmayan çözümdür. Tam tur yapan herhangi bir x_{ij} 'ler kümesi olurlu çözümdür.

UYARI: Büyük GSS için kurulacak bir TP modelinin çözümü etkin değildir karmaşık ve zordur. Çok sayıda şehrin söz konusu olması durumunda GSS'yi dal sınır yöntemi ile çözmek çok fazla bilgisayar zamanı gerektirir. Bu yüzden genellikle sezgisel yöntemler kullanılarak (her zaman en iyi çözüm bulunmasa da) GSS çözülür.

Grup kapsama ve ayırma modelleri

- Çözümün parçası ise 1 değeri alan karar değişkenleri kullanarak; belirli alt kümelere üyeliği sağlayan modeller kurulabilir.
- Kapsama kısıtları j altkümesinin en az 1 değişkeninin çözümde olmasını gerekli kılar

$$\sum_{j \in J} x_j \geq 1$$

- Paketleme kısıtları j altkümesinin en çok 1 değişkeninin çözümde olmasını gerekli kılar

$$\sum_{j \in J} x_j \leq 1$$

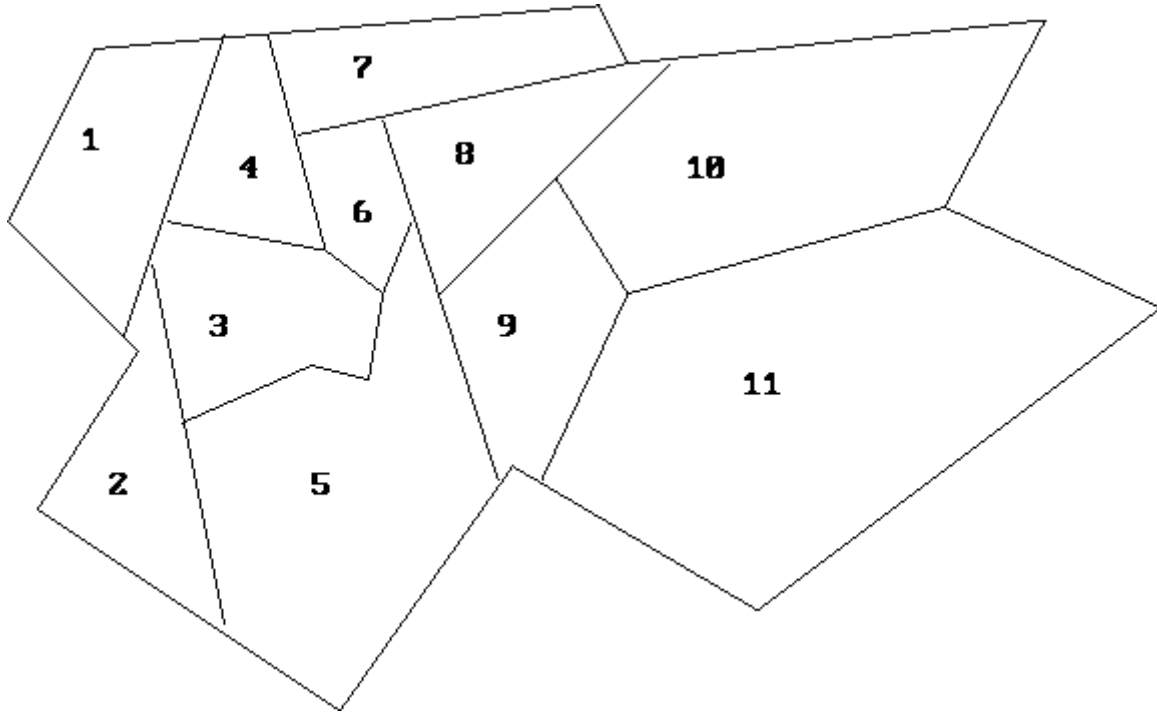
- Ayırma kısıtları j altkümesinin 1 değişkeninin çözümde olmasını gerekli kılar

$$\sum_{j \in J} x_j = 1$$

Kapsama Sorunu

İtfaiye merkezi belirleme

- Bir şehirde itfaiye merkezlerinin yeri gözden geçirilmektedir. Aşağıdaki şekildeki gibi şehrin onbir adet ilçesi vardır.



- Bir itfaiye merkezi herhangi bir ilçede kurulabilir. Merkez kendi ilçesindeki ve komşu ilçelerdeki yangınlara müdahale edebilir. Amaç merkez sayısını enazlayarak tüm ili yangına karşı koruyacak bir kapsama alanı kurmaktır.
- Her j şehri için bir x_j değişkeni kullanabiliriz.. Şehirde itfaiye merkezi varsa x değişkeni 1 değerini, yoksa 0 değerini alacaktır.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \\
 \text{st} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1 \text{ (şehir 1)} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \geq 1 \text{ (şehir 2)} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \text{ (şehir 3)} \\
 & x_1 + x_3 + x_4 + x_6 + x_7 \geq 1 \text{ (şehir 4)} \\
 & x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 \geq 1 \text{ (şehir 5)} \\
 & x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \text{ (şehir 6)} \\
 & x_4 + x_6 + x_7 + x_8 \geq 1 \text{ (şehir 7)} \\
 & x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \geq 1 \text{ (şehir 8)} \\
 & x_5 + x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \text{ (şehir 9)} \\
 & x_8 + x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \text{ (şehir 10)} \\
 & x_9 + x_{10} + x_{11} \geq 1 \text{ (şehir 11)} \\
 & \text{Her } x_j = 0 \text{ veya } 1
 \end{array}$$

- İlk kısıt, Şehir 1'deki yangınların söndürülmesi için o şehirde veya komşu şehirlerde toplam en az bir merkezin kurulmasını sağlar.
- a_{ij} kısıt katsayısının şehir i'nin şehir j'ye komşu olması durumunda 1; $i=j$ veya komşu olmaması durumunda 0 olduğuna dikkat ediniz.
- Kısıt matrisinin j. sütunu, j. şehirdeki bir merkez tarafından hizmet görebilecek şehirler kümesini temsil eder. Çözüm olarak aranan, en az sayıda kümenin birleşiminin tüm şehirleri kapsamasıdır.

Ayırma Sorunu

Mürettebat planlama

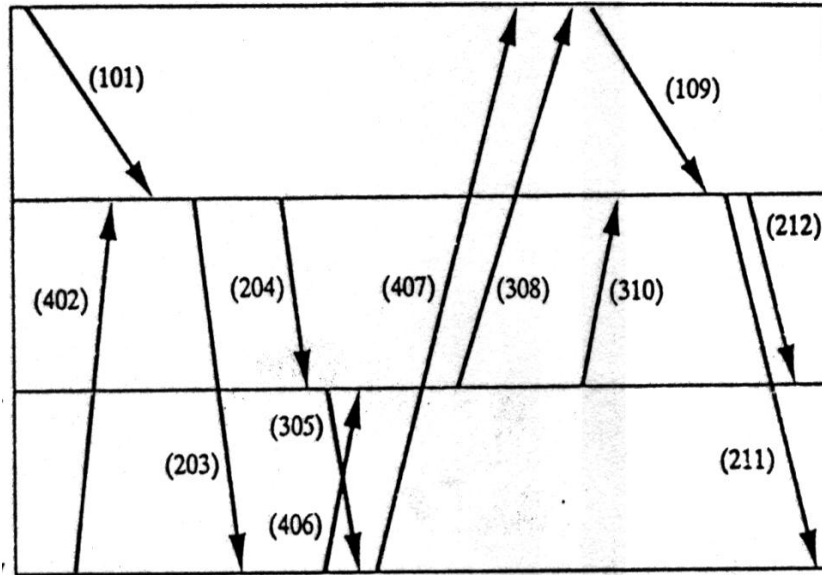
Bir hava yolu şirketi için mürettebat planlaması yapılmaktadır.

12 uçuş söz konusudur: 101, 109, 203, 204, 211, 212, 305, 308, 310, 402, 406, 407

15 olası mürettebat çizelgesi vardır.

En az maliyet ile hangi çizelgelerin kullanılması gerektiğini bulunuz

Uyarı: bir uçuş sadece bir kez gerçekleştirilebilir.



1	101-203-406-308	2900	9	305-407-109-212	2600
2	101-203-407	2700	10	308-109-212	2050
3	101-204-305-407	2600	11	402-204-305	2400
4	101-204-308	3000	12	402-204-310-211	3600
5	203-406-310	2600	13	406-308-109-211	2550
6	203-407-109	3150	14	406-310-211	2650
7	204-305-407-109	2550	15	407-109-211	2350
8	204-308-109	2500			

ÇÖZÜM

- Karar değişkeni:
$$x_j = \begin{cases} 1, & j \text{ cize l g e s i s e c i l i r s e} \\ 0, & d i g e r \end{cases}$$
- Amaç fonksiyonu: $\min \quad z = 2900x_1 + 2700x_2 + \dots + 2359x_{14}$
- kısıtlar: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \quad (ucus \ 101)$
 $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 1 \quad (ucus \ 203)$
....
 $x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + x_9 + x_{15} = 1 \quad (ucus \ 407)$