EM302 Yöneylem Araştırması 2

Doğrusal Olmayan Programlamaya Giriş

Dr. Özgür Kabak

Doğrusal Olmayan Programlama

- Eğer bir Matematiksel Programlama modelinin amaç fonksiyonu ve/veya kısıtları doğrusal değil ise bu tip modellere Doğrusal Olmayan Programlama (DOP) denir.

- DOP'un çözümü DP'ye göre çok daha zordur.

- DOP'ta esas çaba problemin çözümü için harcanır.

Diferansiyel Analiz

- **Limit:**

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

x, *a* 'ya yaklaşırken (ama eşit değil), *f(x)*'in değeri *c*'ye yaklaşmaktadır.

- *f(x)* fonksiyonu a nokasında **sürekli** olması için

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

olmalıdır. Eğer *f(x)*, *x*=*a*'da sürekli değil ise *a* noktasında **süreksiz** denir.

Diferansiyel Analiz

- $f(x)$'in $x = a$ noktasındaki **türevi** [$f'(a)$ olarak ifade eidlir] aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

- $f'(a)$, $f(x)$'in $x = a$'daki eğimidir.
  - Eğer $x = a$ 'dan başlayarak x çok küçük bir miktar, Δ kadar (Δ pozitif veya negatif olabilir), arttırılırsa, $f(x)$'teki artış yaklaşık olarak $\Delta f'(a)$ olacaktır.

  - Eğer $f'(a)>0$ ise $f(x)$, $x = a$ 'da artandır.
  - Eğer $f'(a)<0$ ise $f(x)$, $x = a$ 'da azalandır.

Diferansiyel Analiz

- $f'(x)$ fonksiyonun $x = a$ ‘daki türevi (eğer varsa) $f^{(2)}(a) = f''(a)$ şeklinde tanımlanır.

- Benzer şekilde daha yüksek dereceli türevler şu şekilde tanımlanabilir.
  - $f^{(n)}(a)$: $f^{(n-1)}(x)$’nın $x = a$ ’daki türevi

Diferansiyel Analiz

- **Parçalı Türev**
- $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$'in x_i 'ye göre parçalı türevi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots x_n)}{\Delta x_i}$$

- **İkinci derece parçalı türev**niçin aşağıdaki notasyonu kullanacağız.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Diferansiyel Analiz

- İikinci derece parçalı türev alabilmek için önce $f(x_1, x_2,\ldots x_n)$ fonksiyonunun x_i 'ye göre parçalı türevi alınır, sonra ortaya çıkan fonksiyonun x_j'ye göre parçalı türevi alınır.
- Eğer bir fonksiyon için ikinci derece parçalı türev var ve tüm tanımlı noktalarda sürekli ise aşağıdaki ifade doğrudur:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

Doğrusal Olmayan Programlama

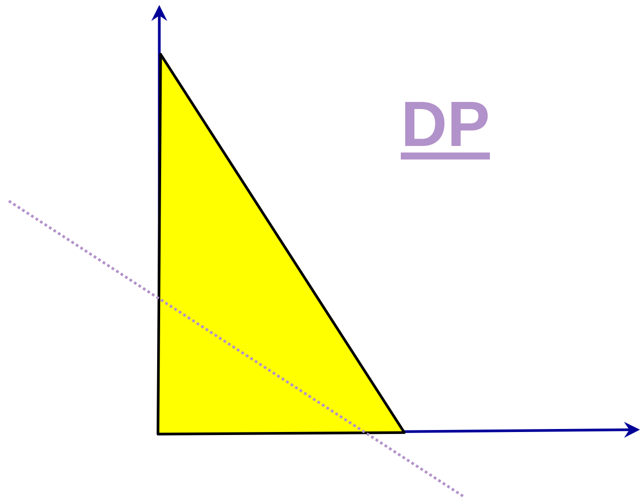
- Genel olarak **doğrudal olmayan programlama (DOP)** aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

  $x_1, x_2, \ldots x_n$ karar değişkenleri olmak üzere;

$$
\begin{array}{ll}
\text{maks (veya min) } z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) & \\
\text{s.t.} & g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (\leq,\ =\ \text{veya}\ \geq)\ b_1 \\
& g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (\leq,\ =\ \text{veya}\ \geq)\ b_2 \\
& \ldots \\
& \ldots \\
& g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ (\leq,\ =\ \text{veya}\ \geq)\ b_m
\end{array}
$$

- DP, DOP'nın özel bir durumudur.

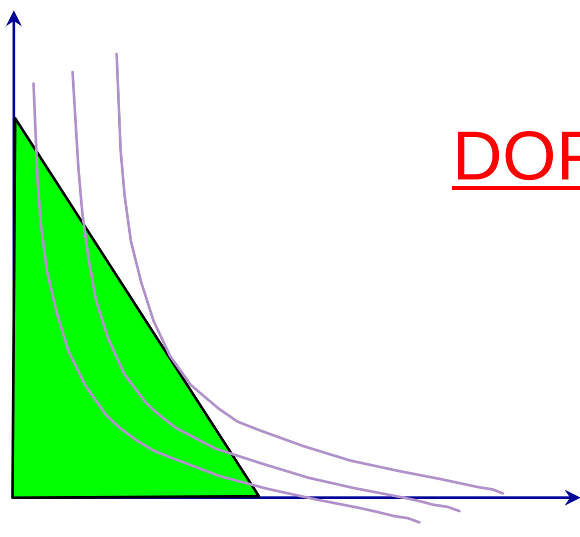
DOP



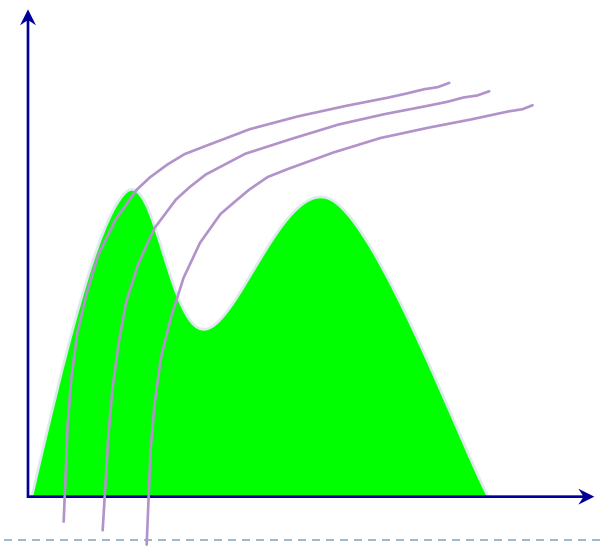
DP

Oransallık

Toplanabilirlik



DOP



DOP

- $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **amaç fonksiyonu**
- $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (≤, =, or ≥)b_1, …, $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (≤, =, or ≥)b_m **kısıtlar**

- DOP'ta doğrusal olmayan kısıt ve amaç fonksiyonlarına izin verilir.
- Hiç kısıt içermeyen DOP'a **kısıtsız DOP** denir.

DOP

- DOP'un **olurlu bölgesi** tüm m kısıtı sağlayan (x_1, x_2,…,x_n) noktalarının kümesidir.

- Eğer DOP *enbüyükleme (maksimizasyon)* problemi ise, tüm olurlu x noktaları için $f(x^*) \geq f(x)$ koşulunu sağlayan olurlu x^* noktasına DOP'un **en iyi çözümü** denir.

- Eğer DOP *enküçükleme (minimizasyon)* problemi ise, tüm olurlu x noktaları için $f(x^*) \leq f(x)$ koşulunu sağlayan olurlu x^* noktasınına DOP'un **en iyi çözümü** denir.

DOP

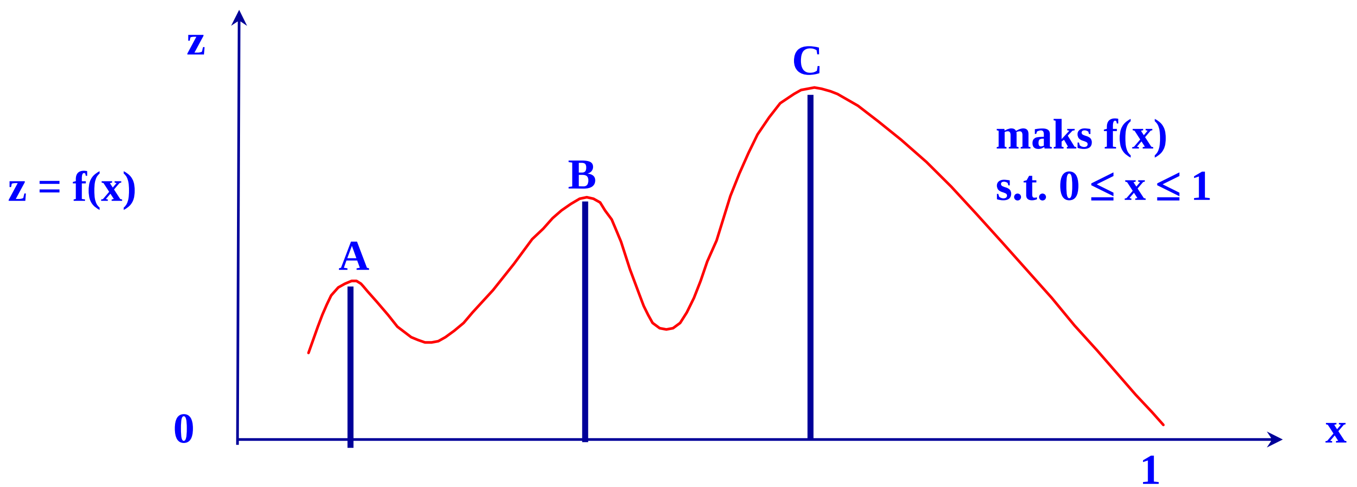
- Bir A noktası lokal (yerel) en büyük (maksimum) veya en küçük (minimum) ise bu noktaya **lokal uç değer** denir.

- DOP'un olurlu bölgesi konveks olsa bile en iyi çözüm bir uç nokta olmak zorunda değildir.

DOP

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bir olurlu çözüm olsun,

- Eğer x'e yeterince yakın x' noktaları ($x_j-\varepsilon<x_j'<x_j+\varepsilon$ tüm j ve çok küçük ε) için $f(x) \geq f(x')$ ise x bir **lokal maksimum**dur.



- Birden çok lokal maksimum olabilir: A, B ve C noktaları. Fakat DOP'un çözümü tektir: C noktası (**global maksimum**) to NLP

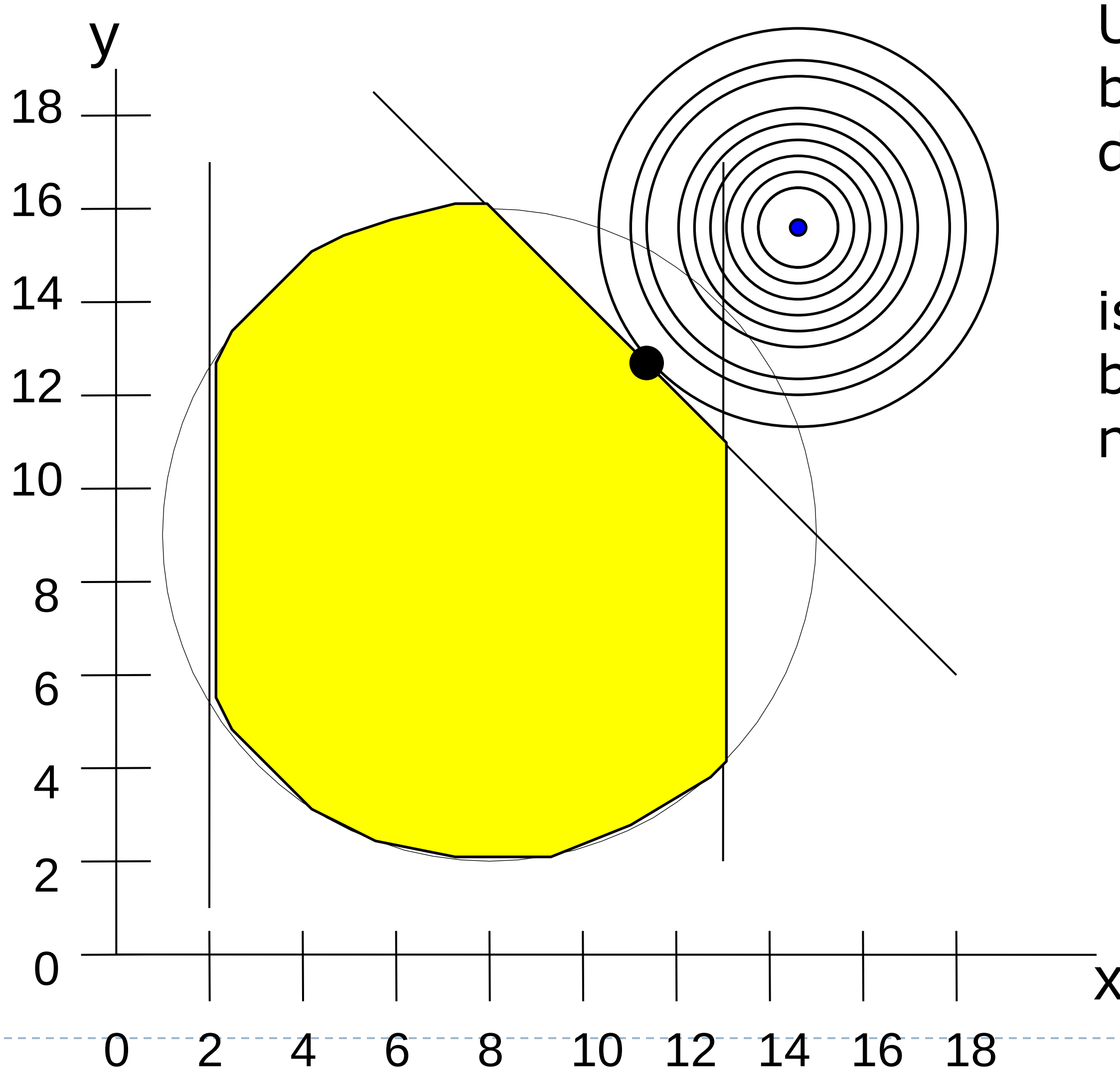
Örnek 1. Grafik Analizi

Min $\quad [(x - 14)^2 + (y - 15)^2]^{1/2}$

Öyle ki;

$$
\begin{aligned}
(x - 8)^2 + (y - 9)^2 &\leq 49 \\
x &\geq 2 \\
x &\leq 13 \\
x + y &\leq 24
\end{aligned}
$$

Örnek 1. Cevap



Uyarı: en iyi çözüm bir köşe noktası değildir.

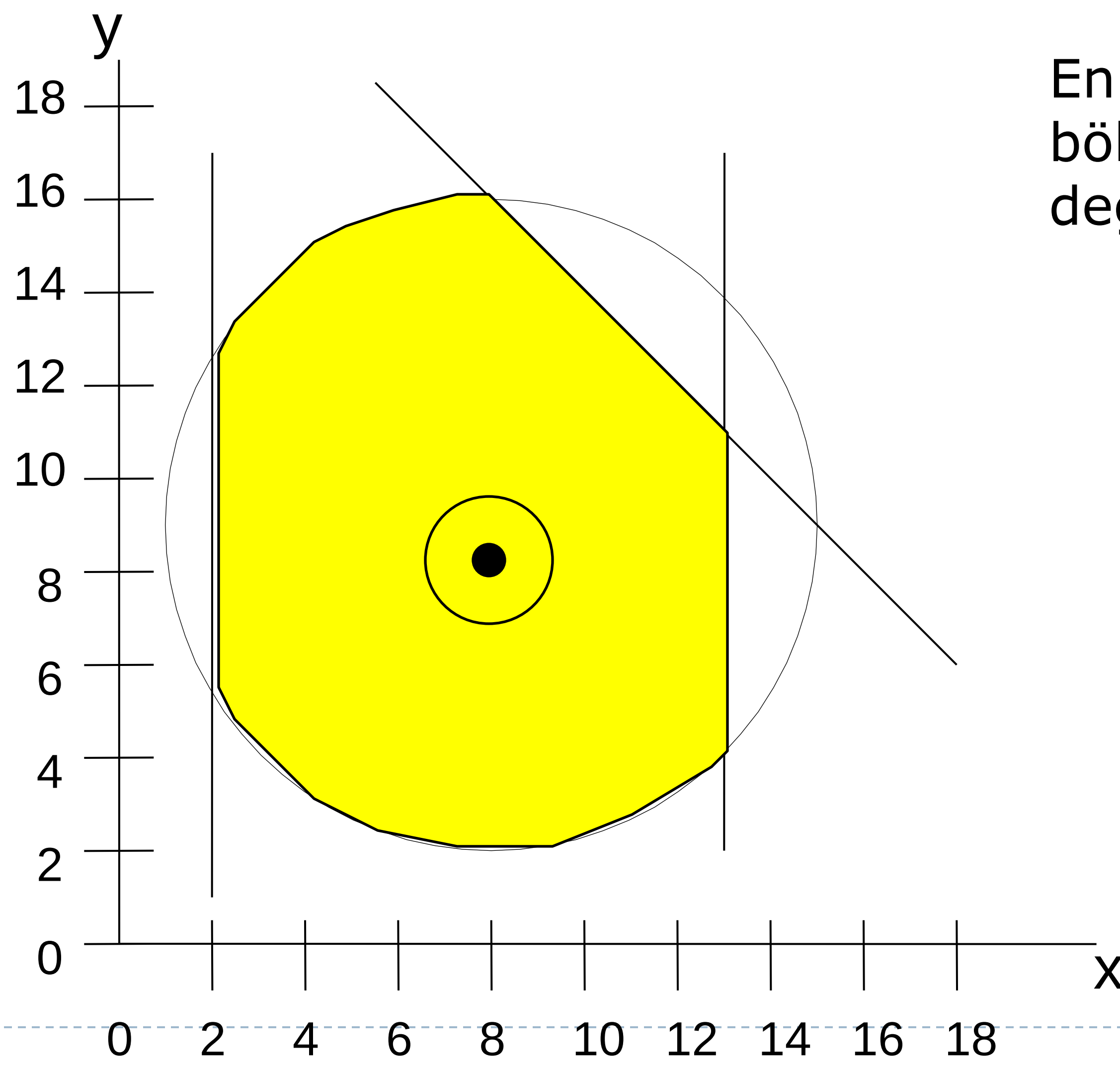
isokonturun olurlu bölgeyi ilk kestiği noktadır.

Örnek 2. Grafik Çözüm

Min $[(x - 8)^2 + (y - 8)^2]^{1/2}$

Öyle ki
$$
\begin{aligned}
(x - 8)^2 + (y - 9)^2 &\leq 49 \\
x &\geq 2 \\
x &\leq 13 \\
x + y &\leq 24
\end{aligned}
$$

Örnek 2. Çözüm



En iyi çözüm olurlu bölgenin sınırında değildir.

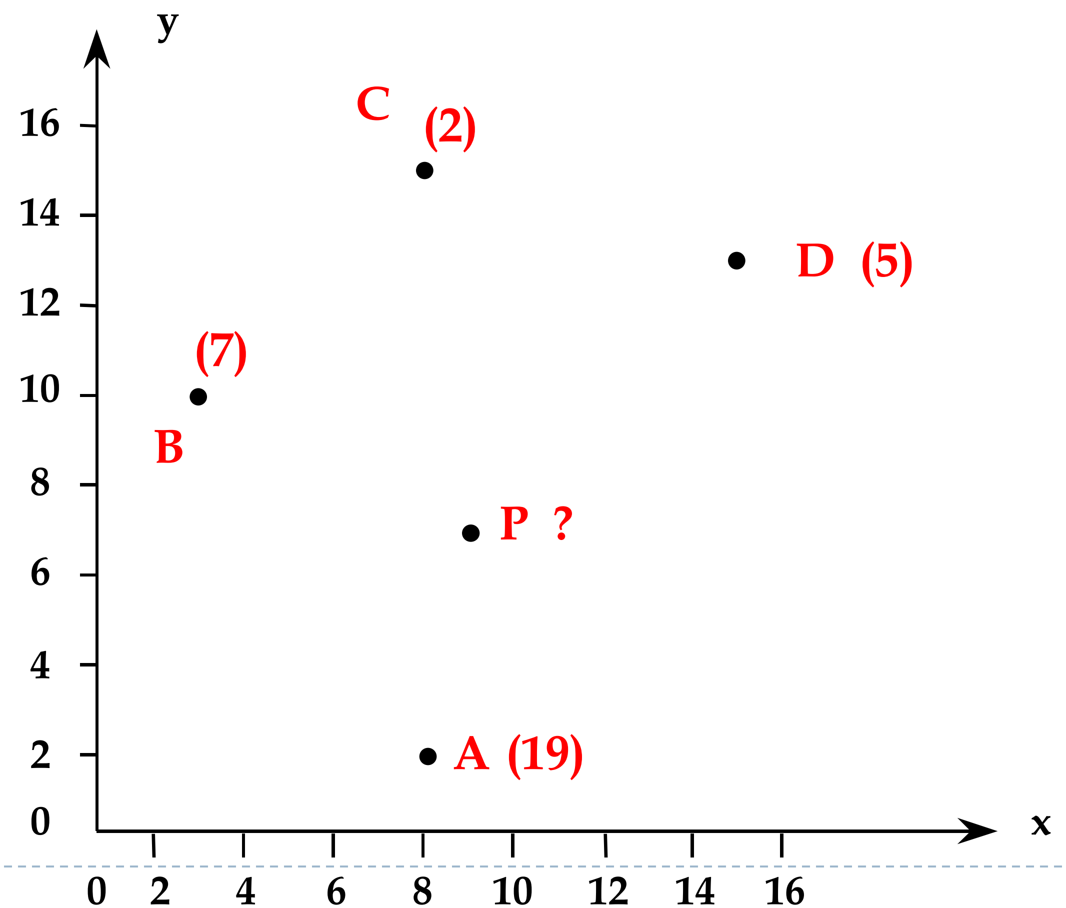
DOP modelleme

- En yaygın DOP uygulamaları lokasyon problemleri, portföy yönetimi, regresyon …
- DOP çok geneldir ve çözümü oldukça zordur.

Örnek 3. Kısıtsız tesis yeri seçimi

Deponun yeri x-y koordinatlarında herhangi bir yer olabilir. Depo yerini müşterilerin ağırlıklı uzaklıklarının toplamını en küçükleyecek şekilde belirlemek için DOP modelini kurunuz.

	Koordinat	Talep
A:	(8,2)	19
B:	(3,10)	7
C:	(8,15)	2
D:	(14,13)	5
P:	?	



Örnek 3. Cevap

- Maliyet mesafeye göre orantılıdır
- Taleplere göre ağırlıklandırılır

d(P,A) = $\sqrt{(x-8)^2+(y-2)^2}$

…

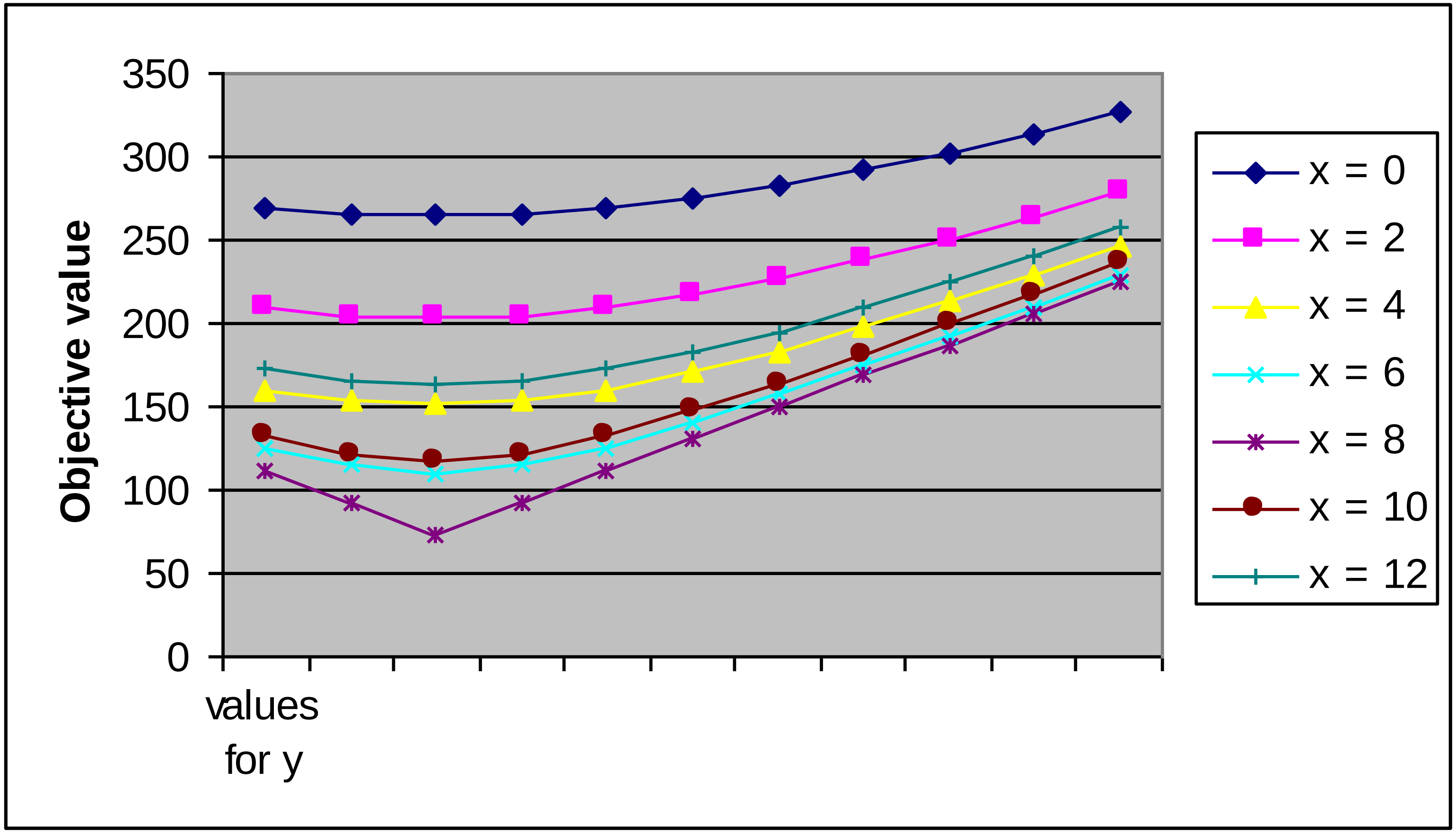
d(P,D) = $\sqrt{(x-14)^2+(y-13)^2}$

min 19 d(P,A) + … + 5 d(P,D)

Öyle ki; P kısıtsızdır.

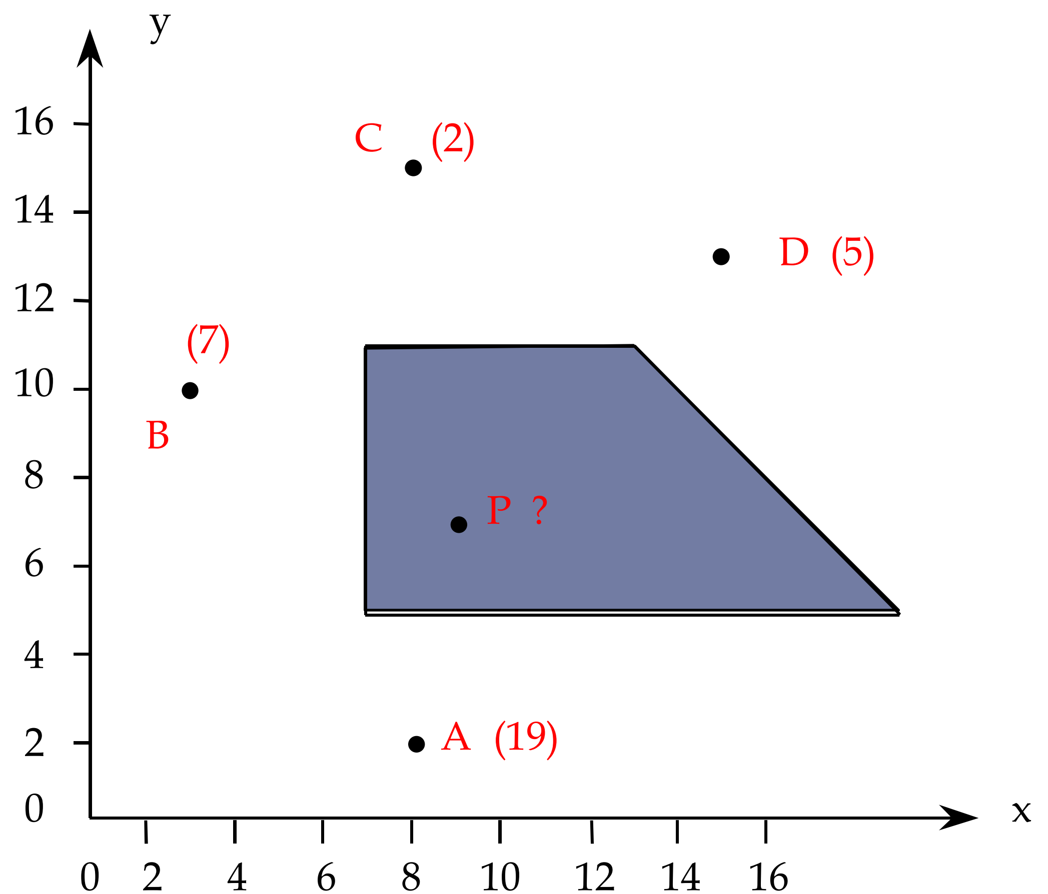
Örnek 3. Cevap

- 55 farklı nokta için maliyet fonksiyon değerleri



Örnek 4. Kısıtlı Tesis yeri seçimi

Depo yeri için belirli bir bölge şartı varsa?



Örnek 4. Cevap

minimize $19\, d(\mathrm{P,A}) + \ldots + 5\, d(\mathrm{P,D})$

subject to:

$x \geq 7$

$5 \leq y \leq 11$

$x + y \leq 24$

Örnek 5. Lastik üretimi

(*Winston 11.2, p. 624*)

- Firerock lastiklerde kullanılan kauçuğu uç hammadde kullanarak üretmektedir: ham kauçuk, petrol ve siyah karbon.
- Her içeriğin birim maliyeti 4, 1 ve 7 TL'dir.
- Üretilecek lastiğin aşağıdaki özellikleri olmalıdır:
  - Sertlik 25 ile 35 arasında olmadır.
  - Esnekliği en az 16 olmalıdır
  - Gerilim kuvveti en az 12 olmalıdır.

- Bir lastiği üretmek için 100 birim hammadde gerekir. İçerikte ham kauçuk 25 ile 60 birim arasında olmalıdır, siyah karbon ise en az 50 birim olmalıdır.
- R = bir lastik üretiminde kullanılan ham kauçuk miktarı
  O = bir lastik üretiminde kullanılan petrol miktarı
  C = bir lastik üretiminde kullanılan siyah karbon miktarı
- İstatistik analizler bir lastik üretiminde kullanılan hammaddelere göre lastiğin sertlik, esneklik ve gerilim kuvveti formülleri aşağıda verilmiştir.

$$\text{Gerilim kuvveti} = 12.5 - .10O - .001O^2$$
$$\text{Esneklik} = 17 + .35R - .04O - .002R^2$$
$$\text{Sertlik} = 34 + .1R + .06O - .3C + .001RO + .005O^2 + .001C^2$$

Örnek 5. Cevap

- Ek karar değişkenleri: *TS* (gerilim kuvveri), *E* (Esneklik), *H* (sertlik)

  min $4R + O + 7C$

  $TS = 12.5 - .10O - .001O^2$

  $E = 17 + .35R - .04O - .002R^2$

  $H = 34 + .1R + .06O - .3C + .001RO + .005O^2 + .001C^2$

  $R + O + C = 100$

  $25 < R < 60$

  $O > 0$

  $C > 50$

  $TS > 12$

  $E > 16$

  $25 < H < 35$

Örnek 6. Mühendislik Tasarımı

(*Rardin 14.1, p. 794*)

- Kapalı silindirik bir bidon tasarlanacaktır. Bidona 20 m^3 kimyasal madde konulacaktır.
- Bidonun üstü ve yanı için kullanılacak metalin maliyeti \$2/m^2'dir. Bidonun altı için daha sağlam ve kalın bir metal kullanılmaktadır ve maliyeti \$8/m^2'dir.
- Ayrıca, bidonun yüksekliği çapının iki katından fazla olmamalıdır.
- En küçük maliyetli tasarımı bulmak için DOP modelini kurunuz.

Örnek 6. Cevap

- Karar değişkenleri:
  - d: bidonun çapı
  - h: bidonun yüksekliği
- DOP:

min $2(\pi dh+\pi d^2/4) + 8(\pi d^2/4)$ [metal maliyeti]

öyle ki;

$\pi hd^2/4 \geq 20$ [hacim]

$h \leq 2d$ [yükseklik çap oranı]

$h, d \geq 0$

Tek değişkenli DOP'lerin çözümü

- Aşağıdaki DOP'un çözümü

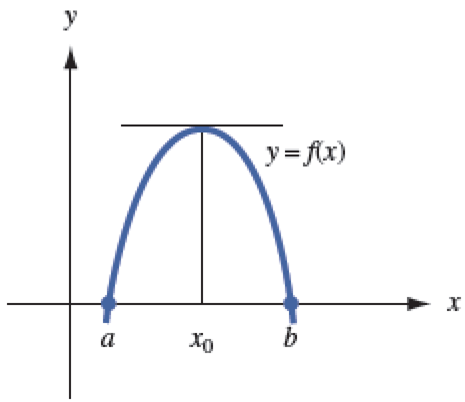
$$\max \,(veya \min)\, f(x)$$
$$\text{s.t.} \qquad x \in [a,b]$$

- Çözüm için tüm lokal maksimumlar (veya minimumlar) bulunur.
- Lokal maksimum veya local minimum noktalarına lokal uç noktalar denir.
- En iyi çözüm; en büyük (veya en küçük) *f(x) d*eğerine sahip lokal maksimum (veya minimum) noktadır.

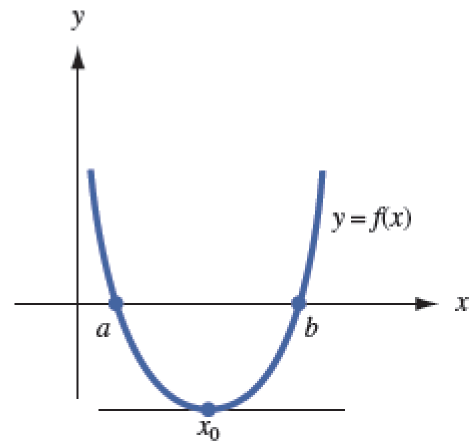
Tek değişkenli DOP’lerin çözümü

- DOP’da lokal maksimum veya minimum olabilecek üç tip nokta vardır (**uç nokta adayları**):
  - DURUM 1. a < x < b içerisindeki $f'(x) = 0$ olan noktalar
  - DURUM 2. $f'(x)$’in tanımlı olmadığı noktalar
  - DURUM 3. $[a,b]$ aralığının a ve b noktaları

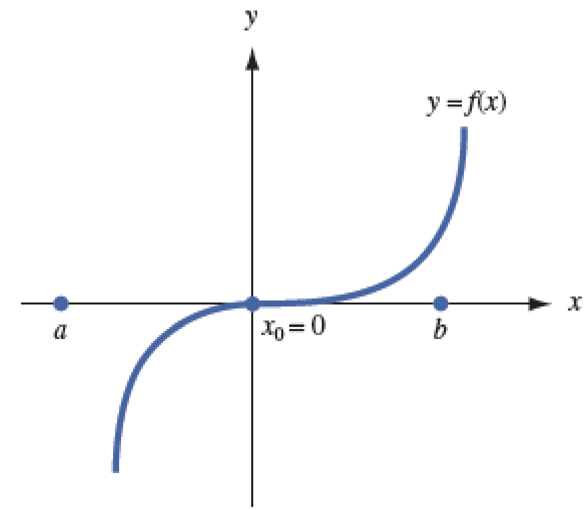
Tek değişkenli DOP'lerin çözümü
Durum 1



c $f'(x_0) = 0$
For $x < x_0, f'(x) > 0$
For $x > x_0, f'(x) < 0$
x_0 is a local maximum



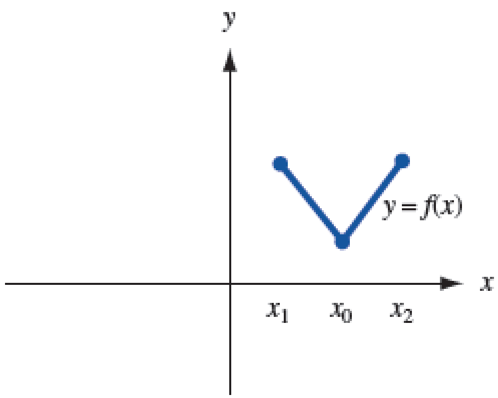
d $f'(x_0) = 0$
For $x < x_0, f'(x) < 0$
For $x > x_0, f'(x) > 0$
x_0 is a local maximum



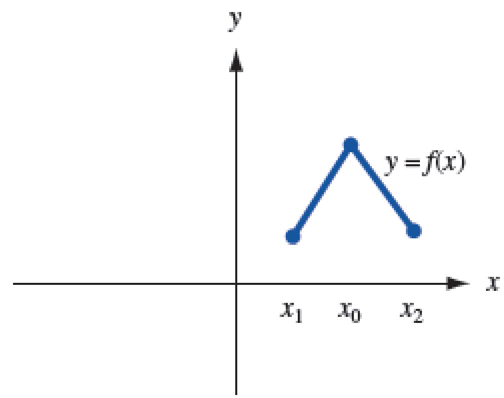
e $x_0 = 0$ not a local maximum
or a local minimum
but $f'(x_0) = 0$

If $f'(x_0) = 0$ and $f''(x_0) < 0$, then x_0 is a local maximum. If $f'(x_0) = 0$ and $f''(x_0) > 0$, then x_0 is a local minimum.

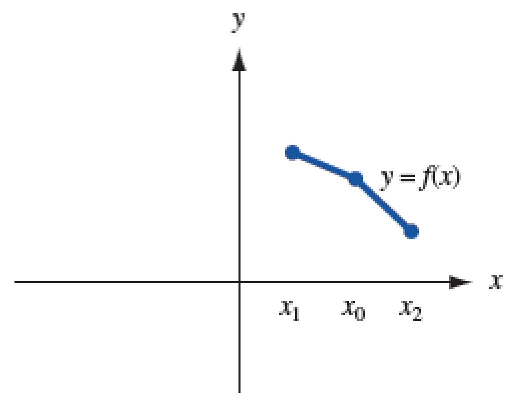
Tek değişkenli DOP'lerin çözümü
Durum 2



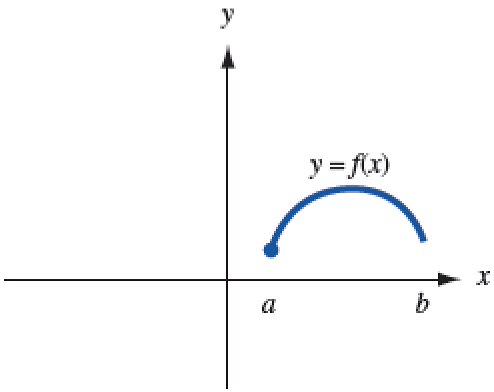
d x_0 is a local minimum



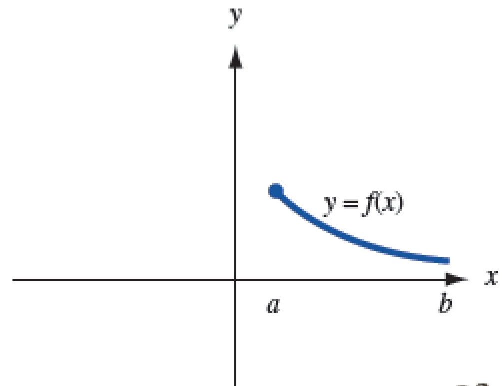
c x_0 is a local maximum



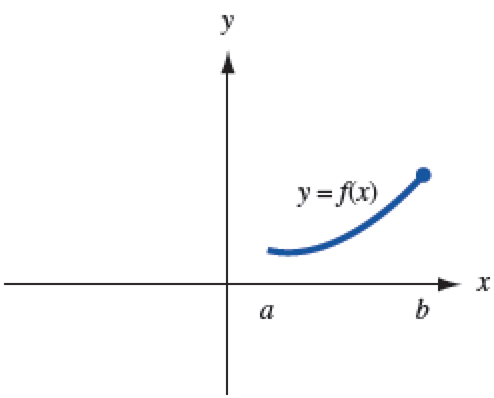
Tek değişkenli DOP'lerin çözümü
Durum 3



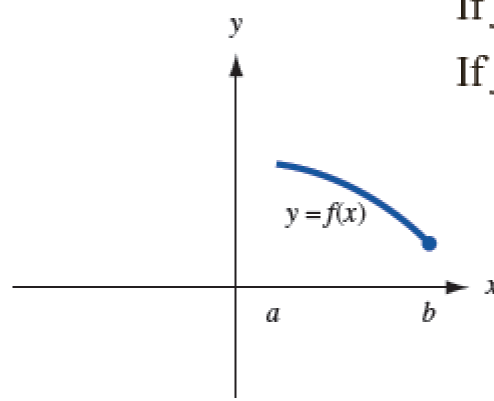
a $f'(a) > 0$
a is a local minimum



b $f'(a) < 0$
a is a local maximum



c $f'(b) > 0$
b is a local maximum



d $f'(b) < 0$
b is a local minimum

If $f'(a) > 0$, then a is a local minimum.

If $f'(a) < 0$, then a is a local maximum.

If $f'(b) > 0$, then b is a local maximum.

If $f'(b) < 0$, then b is a local minimum.

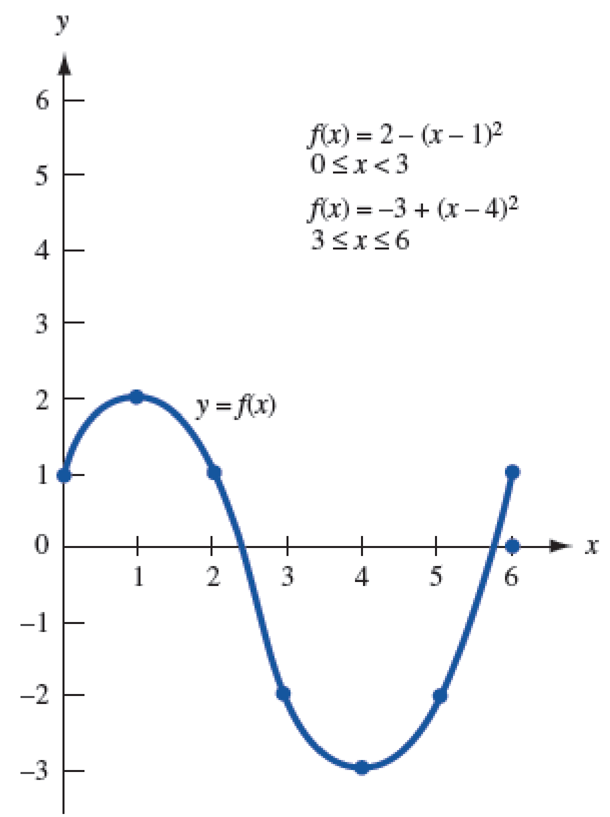
Örnek

Let

$$f(x) = 2 - (x-1)^2 \quad \text{for} \quad 0 \le x < 3$$
$$f(x) = -3 + (x-4)^2 \quad \text{for} \quad 3 \le x \le 6$$

Find

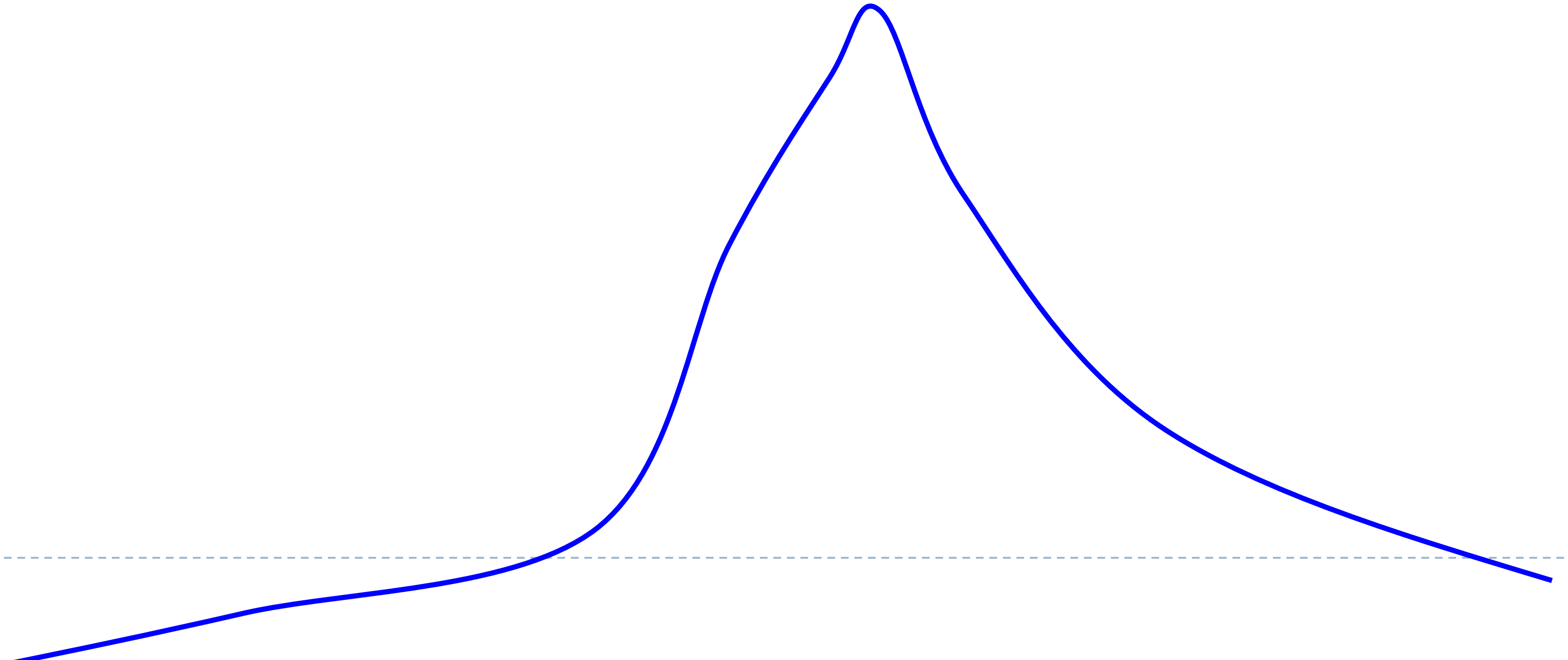
$$\max f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad 0 \le x \le 6$$



DURUM 1. a < x < b içerisindeki $f'(x) = 0$ olan noktalar
DURUM 2. $f'(x)$'in tanımlı olmadığı noktalar
DURUM 3. [*a*,*b*] aralığının *a* ve *b* noktaları

Altın Kesit Araması (Golden Section Search)

- $f'(x)$ tanımlı olmadığında veya $f'(x) = 0$ denklemini çözmesi zor ise
- ***Altın Kesit Araması Yöntemi*** ile DOP çözülebilir.
- Bu yöntemi kullanabilmek için DOP fonksiyonunun tekdoruklu (***unimodal***) olması gerekir.



Tekdoruklu fonksiyon

- Bir f fonksiyonun en çok tek bir lokal maksimumu (veya en çok tek bir lokal minimumu) varsa bu fonksiyona **tekdoruklu** (unimodal) denir
- Tekdorukluluk konvekslik ve konkavlıktan daha gevşek bir gerekliliktir.
- Bir tekdoruklu amaç fonksiyonu konveks veya konkav olmak zorunda değildir.
- Minimizasyon problemlerindeki katı konveks amaç fonksiyonları ve maksimizasyon problemlerindeki katı konkav amaç fonksiyonları tekdorukludur.

Altın kesit arama

- Bir *f(x)* fonksiyonu [*a*,*b*] aralığında tekdorukludur; eğer [*a*,*b*]'deki *x*' noktası için,
  - *f(x)* [*a*,*x*'] aralığında artan ve
  - [*x*',*b*] aralığında azalan (*maksimizasyon problemi için*) ise.
  - → *x*' DOP'nin en iyi çözümünü gösterir.

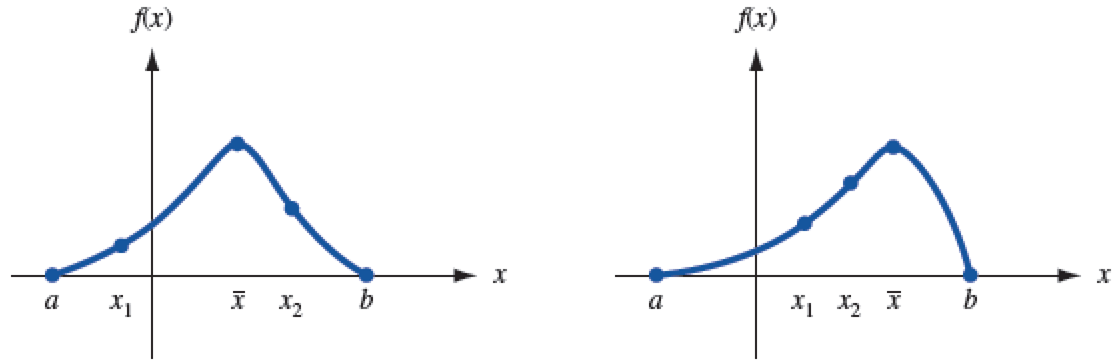
- DOP'un en iyi çözümü [*a*,*b*] aralığındadır.
  - *f(x)*'in [*a*,*b*] aralığındaki x_1 ve x_2 noktalarındaki (x_1<x_2 olduğu varsayılır) değerlerini bularak, DOP'un çözümünün olduğu aralığın boyutunu daraltabiliriz.

Altın kesit arama

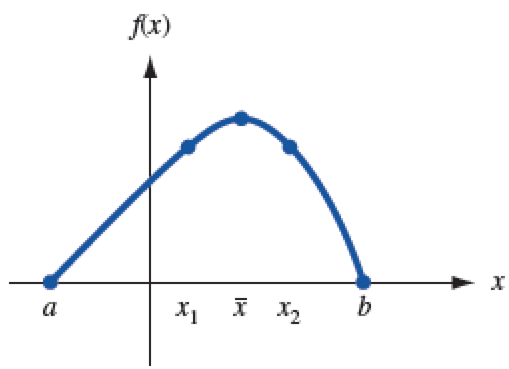
- (maks problemi için)

- $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ değerlerine göre en iyi çözümün $[a,b]$ aralığının bir alt kümesinde olduğu sonucuna varılabilir:
  - Durum 1: $f(x_1) < f(x_2)$ ve $x' \in (x_1,b]$
  - Durum 2: $f(x_1) = f(x_2)$ ve $x' \in [a,x_2]$
  - Durum 3: $f(x_1) > f(x_2)$ ve $x' \in [a,x_2)$
- x' in yer alması gerektiği aralık - $[a,x_2)$ veya $(x_1, b]$ - ***belirsizlik aralığı*** olarak adlandırılır.

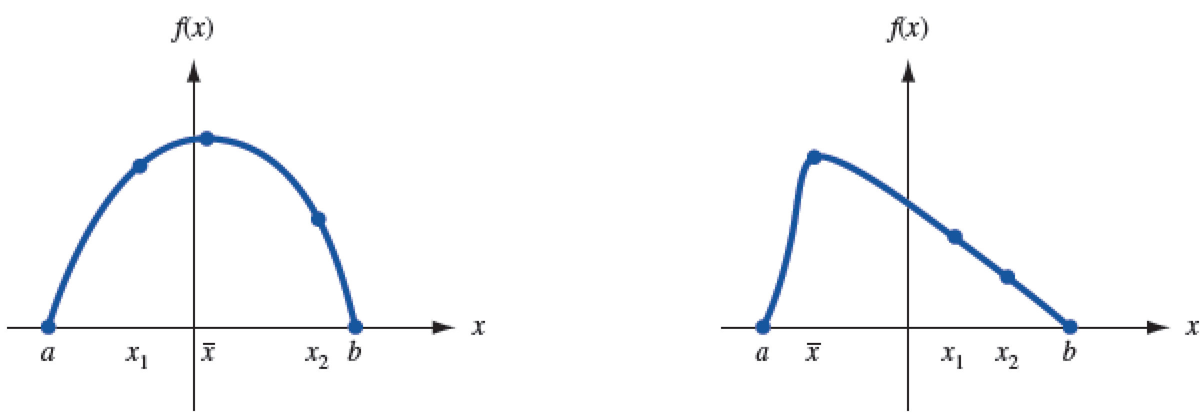
If $f(x_1) < f(x_2)$,
$\bar{x} \in (x_1, b]$



If $f(x_1) = f(x_2)$,
$\bar{x} \in [a, x_2)$



If $f(x_1) > f(x_2)$,
$\bar{x} \in [a, x_2)$



Altın kesit arama

- Belirsizlik aralığını daraltmaya dayalı bir çok arama yöntemi vardır.
- Bu yöntemlerin çoğu şu şekilde çalışır:
  1. X için belirsizlik aralığını [*a*,*b*] olarak belirleyerek başla. Yöntemin mantığına göre seçilen x_1 ve x_2 noktalarının $f(x)$ değerlerini bul.
  2. Durum 1-3'ten hangisinin geçerli olduğunu belirle ve daraltılmış belirsizlik aralığını bul.
  3. $f(x)$'i yeni iki noktada değerlendir (yeni iki nokta yönteme göre belirlenir). Belirsizlik aralığı yeterince küçük ise dur. Değil ise 2. adıma git.

Altın kesit arama

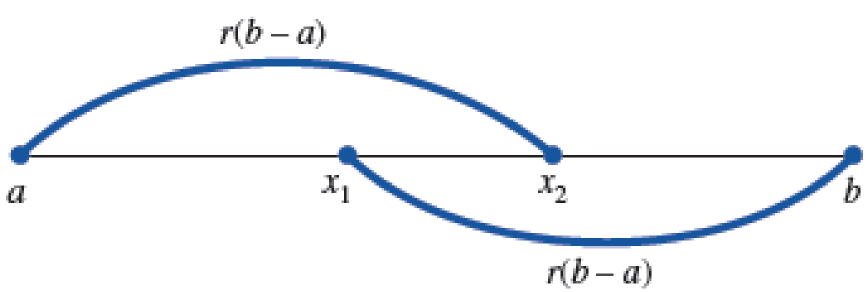
- Altın kesit arama yönteminde x_1 ve x_2 aşağıdaki gibi belirlenir.

$$x_1 = b - r\,(b - a)$$

$$x_2 = a + r\,(b - a)$$

burada

$$r = 0.618 \; [r^2 + r = 1\text{'in tek kökü}]$$

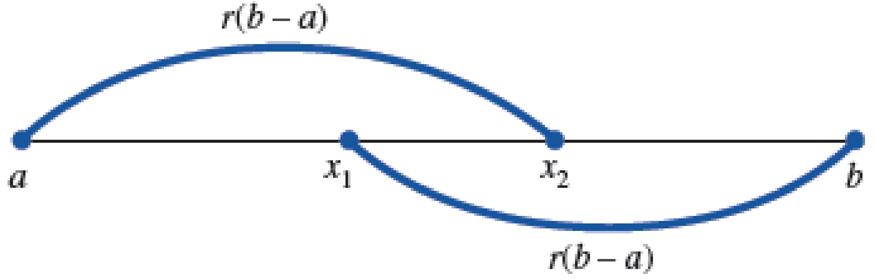


Altın oran

Fibonacci sayıları

Altın kesit arama

- Altın kesit arama yönteminde iki yeni nokta aşağıdaki gibi belirlenir:
  - Yeni Sol Taraf noktası: mevcut belirsizlik aralığının sağ sınırından mevcut belirsizlik aralığının *r* oranı kadar solunda.
  - Yeni Sağ Taraf noktası: mevcut belirsizlik aralığının sol sınırından mevcut belirsizlik aralığının *r* oranı kadar sağında



Örnek 13. Altın kesit arama

(*Winston 11.5, p. 652*)

- Altın kesit arama ile aşağıdaki DOP'yi çözünüz.

  maks $-x^2 - 1$

  öyle ki $-1 \leq x \leq 0.75$

  belirsizlik aralığı ¼'ten daha az oluncaya kadar ilerleyiniz.

Örnek 13. Cevap

- $a = -1$, $b = 0.75$, $b - a = 1.75$
- İterasyon sayısı bulabilmek için $1.75(0.618^k)<0.25$. denklemi çözülür.
- Her iki tarafın ln'i alınırsa; $k>4.06$ olarak bulunur.
- Bu yüzden yöntem beş adım çalıştırılmalıdır.
- En iyi çözüm (–0.0762,0.0815] aralığındadır (gerçek çözüm: $x = 0$)

a	b	b-a	x1	x2	fx1	fx2
-1,000	0,750	1,750	-0,332	0,081	-1,110	-1,007
-0,332	0,750	1,082	0,082	0,337	-1,007	-1,113
-0,332	0,337	0,668	-0,076	0,082	-1,006	-1,007
-0,332	0,082	0,413	-0,174	-0,076	-1,030	-1,006
-0,174	0,082	0,255	-0,076	-0,016	-1,006	-1,000
-0,076	0,082	0,158	-0,016	0,021	-1,000	-1,000