MAT104 Problem Saati

Araş. Gör. İsmail GÜZEL

iguzel@itu.edu.tr

https://web.itu.edu.tr/iguzel/

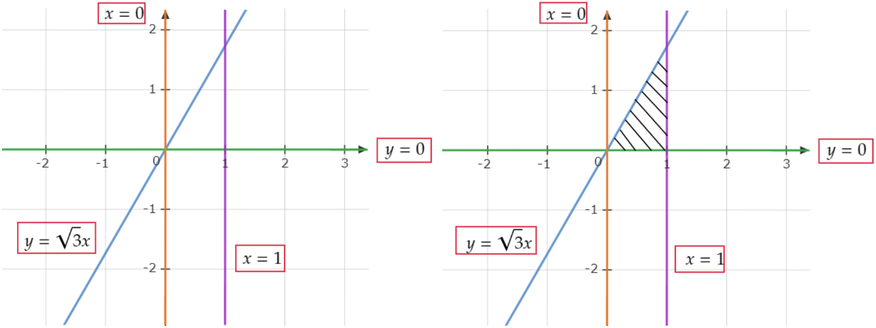
İstanbul Teknik Üniversitesi

Soru 1.

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{x}{y^2+x^2}\, dydx$$ integralini kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesaplayınız.

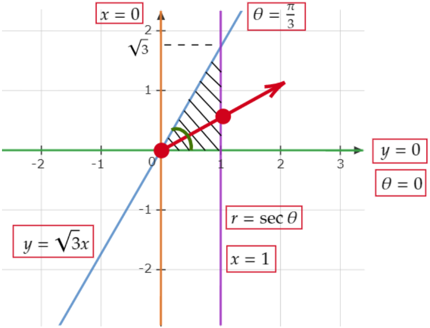
Cevap.

Bölge $x = 0$ ve $x = 1$ arasında $y = 0$ ve $y = \sqrt{3}x$ doğruları ile sınırlandırılmıştır.



Cevap.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ olsun ve $dydx$ ile $rdrd\theta$ yı yer değiştirelim.



$$y = \sqrt{3}x \Longrightarrow \tan\theta = \sqrt{3} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$x = 1 \Longrightarrow r\cos\theta = 1 \Longrightarrow r = \sec\theta$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{3}x} \frac{x}{y^2+x^2}\, dydx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sec\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2} rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{\sec\theta} \cos\theta drd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(r\Big|_0^{\sec\theta} \right) \cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec\theta\cos\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \frac{\pi}{3}$$

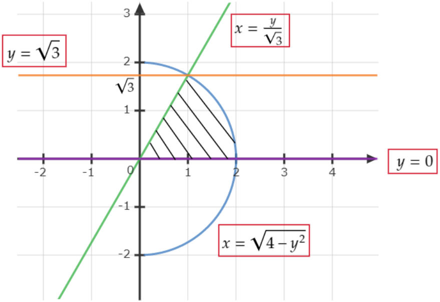
Soru 2.

$$\int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{(4-x^2-y^2)^3}\, dxdy$$

integralini kutupsal koordinatlara dönüştürerek hesaplayınız.

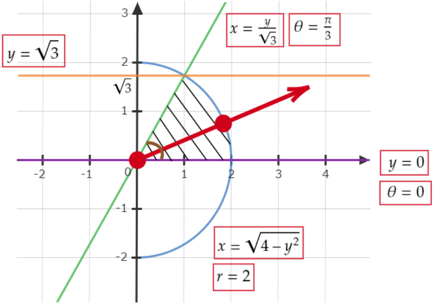
Cevap.

Bölge $y=0$ ve $y=\sqrt{3}$ arasında $x=\dfrac{y}{\sqrt{3}}$ doğrusu ve $x=\sqrt{4-y^2}$ eğrisi tarafından sınırlandırılmıştır.



Cevap.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ olsun ve $dxdy$ ile $rdrd\theta$ yı yer değiştirelim.



$$x = \sqrt{4 - y^2} \Longrightarrow x^2 + y^2 = 4$$
$$\Longrightarrow r = 2$$
$$x = \frac{y}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \tan\theta = \sqrt{3}$$
$$\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} \int_{\frac{y}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{(4 - x^2 - y^2)^3}\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2} \sqrt{(4 - r^2)^3}\, rdrd\theta$$

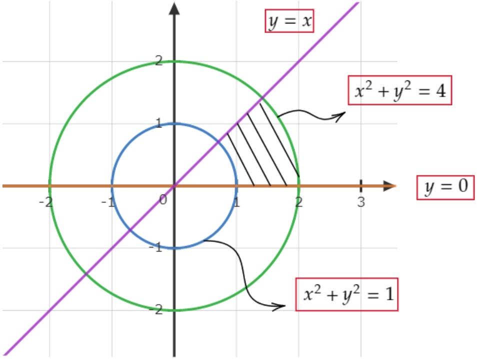
$u = 4 - r^2$ olsun. Dolayısıyla $du = -2rdr$ dir. $r = 0$ iken $u = 4$ dür. $r = 2$ iken $u = 0$ dır.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_4^{0} -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{2}\, dud\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(-\frac{1}{5} u^{\frac{5}{2}} \Big|_4^0 \right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{32}{5} d\theta = \frac{32}{5} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{32\pi}{15}$$

Soru 3.

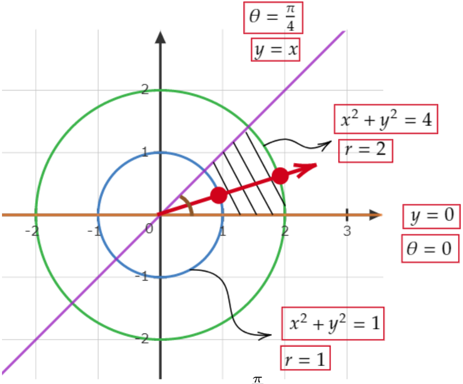
R; $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq y \leq x$ ile tanımlı bölge olmak üzere $\displaystyle\iint_R \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dA$ integralini hesaplayınız.

Cevap.



Cevap.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ olsun ve dA ile $rdrd\theta$ yı yer değiştirelim.



$$x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow r = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Longrightarrow r = 2$$

$$y = x \Longrightarrow \tan\theta = 1 \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_R \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \tan^{-1}(\tan\theta)\, rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \theta\, rdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{r^2}{2}\Big|_1^2\right) \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3}{2}\theta d\theta = \frac{3\theta^2}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi^2}{48}$$

Soru 4.

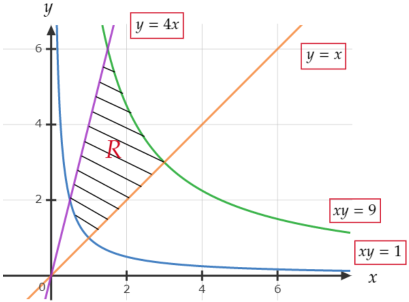
R; $xy = 1$, $xy = 9$ eğrileri ve $y = x$, $y = 4x$ doğruları ile sınırlı birinci bölgede bir bölge olsun. $u > 0$ ve $v > 0$ olmak üzere $x = \dfrac{u}{v}$, $y = uv$ dönüşümünü uygulayarak $\displaystyle\iint\limits_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy$ integralini hesaplayınız.

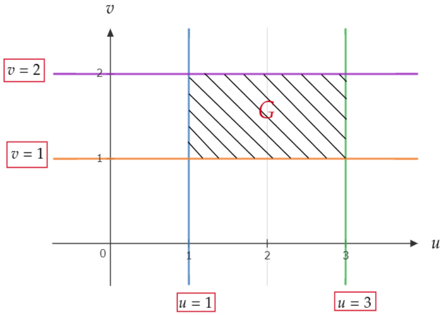
Cevap.

Sınırlar:

$$\begin{aligned}
xy &= 1 && \Longrightarrow \frac{u}{v}uv = 1 \ (u, v > 0) && \Longrightarrow u = 1 \\
xy &= 9 && \Longrightarrow \frac{u}{v}uv = 9 \ (u, v > 0) && \Longrightarrow u = 3 \\
y &= x && \Longrightarrow uv = \frac{u}{v} \ (u, v > 0) && \Longrightarrow v = 1 \\
y &= 4x && \Longrightarrow uv = 4\frac{u}{v} \ (u, v > 0) && \Longrightarrow v = 2
\end{aligned}$$

Cevap.





Verilen dönüşümün Jakobiyeni: $J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{v} & \frac{-u}{v^2} \\ v & u \end{vmatrix} = \frac{2u}{v}$

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dxdy = \iint_G \left(\sqrt{\frac{uv}{\frac{u}{v}}} + \sqrt{\frac{u}{v}uv}\right) |J(u,v)|\, dudv = \int_1^2 \int_1^3 (v+u)\,\frac{2u}{v}\, dudv$$

$$= \int_1^2 \left(u^2 + \frac{2u^3}{3v}\Big|_1^3\right) dv = \int_1^2 \left(8 + \frac{52}{3v}\right) dv = 8v + \frac{52}{3}\ln|v|\Big|_1^2 = 8 + \frac{52}{3}\ln 2$$

Soru 5.

$f(x, y)$ sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer $A(x)$ ve $B(y)$

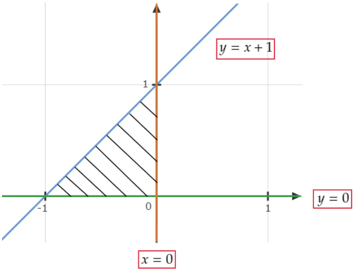
$A(x) = \int_0^{x+1} f(x, y)dy$ ve $B(y) = \int_{y-1}^{0} f(x, y)dx$ şeklinde tanımlı ise

$\int_{-1}^{0} A(x)dx = \int_0^1 B(y)dy$ olduğunu gösteriniz.

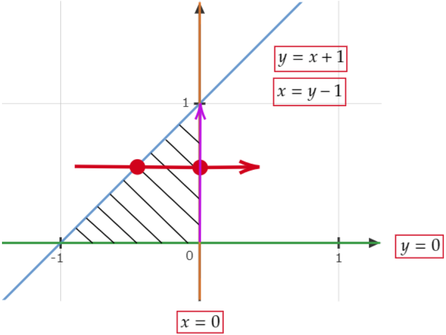
Cevap.

$$I = \int_{-1}^{0} A(x)dx = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} f(x, y)dydx$$

Bölge $x = -1$ ve $x = 0$ arasında $y = 0$ ve $y = x + 1$ doğrularıyla sınırlı bölge olsun.



Cevap.



Fubini teoreminden,

$$I = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1} f(x,y)dydx = \int_{0}^{1} \int_{y-1}^{0} f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1} B(y)dy$$

Soru 6.

R; $y = -x$, $y = -x + 1$, $y = x$, $y = x + 1$ doğruları ile sınırlandırılmış bölge olsun. $u = y - x$, $v = y + x$ dönüşümünü uygulayarak ve uv-düzlemi üzerinde uygun bir bölge üzerinde integre ederek $\iint\limits_R 2(y-x)dxdy$ integralini hesaplayınız.

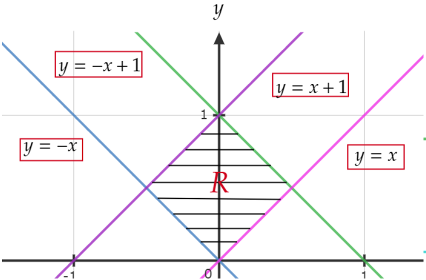
Cevap.

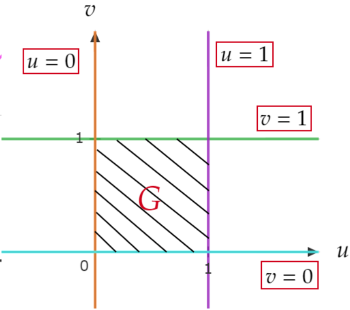
$$\left.\begin{aligned} u &= y - x \\ v &= y + x \end{aligned}\right] \implies x = \frac{v-u}{2} \text{ ve } y = \frac{u+v}{2}$$

Sınırlar:

$$\begin{aligned}
y &= -x && \implies \frac{u+v}{2} = -\frac{v-u}{2} && \implies v = 0 \\
y &= -x + 1 && \implies \frac{u+v}{2} = -\frac{v-u}{2} + 1 && \implies v = 1 \\
y &= x && \implies \frac{u+v}{2} = \frac{v-u}{2} && \implies u = 0 \\
y &= x + 1 && \implies \frac{u+v}{2} = \frac{v-u}{2} + 1 && \implies u = 1
\end{aligned}$$

Cevap.





Verilen dönüşümün Jakobiyeni: $J(u,v) = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$

$$\iint\limits_{R} 2(y-x)dxdy = \iint\limits_{G} 2\left(\frac{u+v}{2} - \frac{v-u}{2}\right)|J(u,v)|\,dudv = \int_0^1\int_0^1 ududv$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{u^2}{2}\bigg|_0^1\right) dv = \int_0^1 \frac{1}{2}dv = \frac{v}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$