MAT104 Problem Saati

Araş. Gör. İsmail GÜZEL

iguzel@itu.edu.tr

https://web.itu.edu.tr/iguzel/

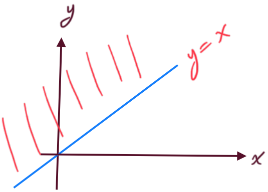
İstanbul Teknik Üniversitesi

Soru 1.

$f(x, y) = \sqrt{y - x}$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulun. Tanım kümesinin açık veya kapalı olup olmadığına karar verin. Ayrıca tanım kümesinin sınırlı olup olmadığını bulun. Son olarak, seviye eğrilerini çizin.

$y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x \Rightarrow D_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x \}$

"Kapalı" ve "Sınırsız"

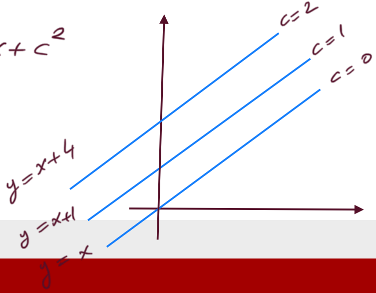


$f(x,y) = \sqrt{y-x} \geq 0 \Rightarrow R_f = [0, \infty)$

Seviye Eğrileri : $f(x,y) = c$

$f(x,y) = \sqrt{y-x} = c \Rightarrow y = x + c^2$

* $c = 0 \Rightarrow y = x$
* $c = 1 \Rightarrow y = x + 1$
* $c = 2 \Rightarrow y = x + 4$



Soru 2.

$f(x, y) = x^2 - y^2$ fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini bulun. Tanım kümesinin açık veya kapalı olup olmadığına karar verin. Ayrıca tanım kümesinin sınırlı olup olmadığını bulun. Son olarak, seviye eğrilerini çizin.

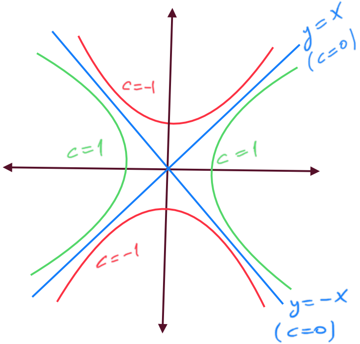
1) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y)$ tanımlıdır. $D_f = \mathbb{R}^2$ Hem kapalı hem açık "Sınırsızdır"

2) $f(x,y) = x^2 - y^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow R_f = \mathbb{R}$

Seviye Eğrileri:

3) $f(x,y) = x^2 - y^2 = C$

* $c = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = |x$
* $c = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1 \Rightarrow$ hiperbol
* $c = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = -1 \Rightarrow$ hiperbol



Soru 3.

$f(x,y) = \dfrac{(x+y+2)^2}{x^2 + y^2 - 4x + 8y + 20}$ olsun. Fonksiyonun $(x,y) \to (2,-4)$ limitini bulunuz.

$4+16 \quad (x-2)^2 + (y+4)^2$

$$\left.\begin{array}{l} u = x-2 \\ v = y+4 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) \to (2,-4) \Rightarrow (u,v) \to (0,0)$$

$$f(x,y) = \frac{(x-2+y+4)^2}{(x-2)^2 + (y+4)^2} \Rightarrow f(u,v) = \frac{(u+v)^2}{u^2+v^2}$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} f(u,v) = ?$$

$v=0$ yolu üzerinde $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{(u+0)^2}{u^2+0^2} = 1$

$v=u$ yolu üzerinde $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{(u+u)^2}{u^2+u^2} = \lim_{u\to 0} \frac{4u^2}{2u^2} = 2$

$1 \neq 2$

Limit yoktur.

Çözüm 2

$v = ku$ olsun.

$$f(u,ku) = \frac{(u+ku)^2}{u^2+(ku)^2} = \frac{\cancel{u^2}(1+k)^2}{\cancel{u^2}(1+k^2)} = \frac{(1+k)^2}{1+k^2} \Rightarrow \lim_{\substack{(u,v)\to(0,0)\\(v=ku)}} f(u,v) = \frac{(1+k)^2}{1+k^2}$$

Yani, Her k değeri için limit farklı değer olacaktır.
Dolayısıyla, $\angle$ limit değeri yoktur.

Çözüm 3 (Kutupsal Koordinatlar)

$x-2 = r\cos\theta$

$y+4 = r\sin\theta$

$$\lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta + r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r}^2(\overbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}^{=1}+\overbrace{2\sin\theta\cos\theta}^{=\sin 2\theta})}{\cancel{r}^2(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})}$$

$$= \lim_{r\to 0}(1+\sin 2\theta) = 1+\sin 2\theta$$

Sonuç θ'ya bağlı olduğundan $\angle$ limit değeri yoktur. //

Soru 4. $x-y=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

$$f(x,y)=\frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?.$$

$$f(x,y)=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})+2(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$=\frac{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{y})}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+2)}{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+2$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{x}+\sqrt{y}+2)=2.$$

Soru 5.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = ? = L$$

$y = kx \;,\; x > 0$ olsun.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(kx)^2}{(x^2+(kx)^2)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{k^2 \cdot \cancel{x^3}}{\underbrace{(x^2)^{3/2}}_{=\cancel{x^3}} \cdot (1+k^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{k^2}{(1+k^2)^{3/2}} = \frac{k^2}{(1+k^2)^{3/2}}$$

- $k = 0 \Rightarrow L = \frac{0}{(1+0)^{3/2}} = 0$
- $k = 1 \Rightarrow L = \frac{1}{(1+1)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$0 \neq \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Dolayısıyla, L limit değeri YOKTUR!

Soru 6.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy-y}{x^2-2x+y^2+1}, & (x,y)\neq(1,0) \\ 2, & (x,y)=(1,0) \end{cases}$$ olsun. $f(x,y)$ fonksiyonunun $(1,0)$ noktasında sürekli olup olmadığını bulun.

Sürekli olması için $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = f(1,0)$ olmalı.

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = L$ olsun. $\left.\begin{array}{l} u = x-1 \\ v = y \end{array}\right\} \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{(x-1)y}{(x-1)^2+y^2} \Rightarrow f(u,v) = \dfrac{uv}{u^2+v^2}$

$(x,y)\to(1,0) \Rightarrow (u,v)\to(0,0)$

$v = ku$ olsun.

$$\lim_{u\to 0} \frac{u\cdot(ku)}{u^2+(ku)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{k\cdot \cancel{u^2}}{(1+k^2)\cancel{u^2}} = \frac{k}{1+k^2}$$

Sonuç k'ya bağlı olduğundan her k değeri için farklı sonuçlar elde edilecektir. Yani, L limit değeri yoktur.

L Limit değeri olmadığından, $f(x,y)$ fonk. $(1,0)$ noktasında SÜREKSİZDİR //

Soru 7.

$\to -2(y^2-2y+1) = -2(y-1)^2$

$f(x,y) = x(y-1)\dfrac{x^2 - 2y^2 + 4y - 2}{x^2 + y^2 - 2y + 1}$, $(x,y) \neq (0,1)$ olsun. $f(0,1)$ değerini öyle bir sayı olarak tanımlayın ki $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,1)$'de sürekli olsun.

$\to (y-1)^2$

$$f(x,y) = x(y-1)\frac{x^2 - 2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \qquad \left.\begin{array}{l} u = x \\ v = y-1 \end{array}\right\} f(u,v) = uv \cdot \frac{u^2-2v^2}{u^2+v^2}$$

$$(x,y) \to (0,1) \Rightarrow (u,v) \to (0,0)$$

$$-2 = \frac{-2v^2}{v^2} \leq \frac{-2v^2}{u^2+v^2} \leq \frac{u^2-2v^2}{u^2+v^2} \leq \frac{u^2}{u^2+v^2} \leq \frac{u^2}{u^2} = 1$$

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} (-2uv) \leq \lim_{(u,v)\to(0,0)} \left(u \cdot v\,\frac{u^2-2v^2}{u^2+v^2}\right) \leq \lim_{(u,v)\to(0,0)} (uv)$$

$$\Rightarrow 0 \leq L \leq 0 \Rightarrow L = 0$$

Eğer $f(0,1) = 0$ tanımlanırsa, $f(x,y)$ fonk. $(0,1)$ noktasında sürekli olur. //

Soru 8.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x} = ? \quad L$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{x \cdot y} \cdot y = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\sin(xy)}{xy}} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,1)} (y)}_{=1}$$

$u = xy$ olsun

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

$$L = 1 \cdot 1 = 1$$

Soru 9.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-y)}{|x|+|y|}, & |x|+|y|\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

olsun. $f(x,y)$ fonksiyonunun $(0,0)$'da sürekli olup olmadığını belirleyin.

$y=-x$, $x>0$ olsun.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x-(-x))}{|x|+|-x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{2x}=1$$

$f(0,0)=0$

Sonuç olarak, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq f(0,0)$ olduğundan $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında süreksizdir. //

Soru 10.

$f(0,0)$ değerini öyle tanımlayın ki $f(x,y) = \dfrac{\tan x}{2x(y+1)}$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli olsun.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{2x(y+1)}, & (x,y) \neq (0,0), \\ ?, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan x}{2x(y+1)} = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin x}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2(y+1)\cos x}}_{=\frac{1}{2\cdot 1\cdot 1}}$$

Eğer $f(0,0) = \frac{1}{2}$ olursa, $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında sürekli olur. //

Soru 11.

Gösterin ki $f(x,y) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+y^2}}$ fonksiyonun $(x,y) \to (0,0)$ giderken limiti yoktur.

(1) $y = kx \Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+(kx)^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x\sqrt{x^2+k^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+k^2}}$

(2) $y = kx^2$ olsun.

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+(kx^2)^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{1+k^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+k^2}} = L$

$k = 0 \Rightarrow L = 1$

$k = 1 \Rightarrow L = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}} \neq 1$ olduğundan limit yoktur.

Soru 12.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^6}{y^6 + x^3} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

olsun. $f(x,y)$ fonksiyonu $(0,0)$'da sürekli midir?

$x = ky^2$ olsun

$$L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6}{y^6 + x^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6}{y^6 + (ky^2)^3} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6}{y^6 + k^3 y^6}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^6}{(1+k^3)y^6} = \frac{1}{1+k^3}$$

Sonuç k'ya bağlı olduğundan L limit değeri yoktur.

Limit yok ise $f(x,y)$ fonk. $(0,0)$ noktasında süreksizdir. //

Soru 13.

$f(x,y) = \dfrac{(xy-y)\cos y}{(x-1)^2+y^2}$ olsun. $f(x,y)$'nin $(x,y)\to(1,0)$ giderken limitini bulun ya da limitin olmadığını gösterin.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \underbrace{\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1).y}{(x-1)^2+y^2}}_{L_1} \cdot \underbrace{\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\cos y)}_{=\cos(0)=1}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-1 = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta . r\sin\theta}{(r\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}.\cos\theta.\sin\theta}{\cancel{r^2}(\underbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}_{=1})} = \cos\theta\sin\theta = \frac{\sin 2\theta}{2}$$

L_1 limit değeri yoktur.

Dolayısıyla, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$, L değeri yoktur.//