LİNEER CEBİR

Ders Notları

Fuat Ergezen

Kaynak: Linear Algebra With Applications

Steven J. Leon

Matrisler ve Lineer Denklem Sistemleri

- Lineer Denklem Sistemleri

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve b reel sayılar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenler (bilinmeyenler) olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

formundaki bir denkleme n bilinmeyenli lineer denklem denir

a_{ij} ve b_i reel sayılar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenler olmak üzere

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

formundaki sisteme n bilinmeyenli m denklemli lineer denklem sistemi denir. Bu sistem, $m \times n$ lineer sistemi olarak adlandırılır.

ÖRNEKLER

1) a) $x_1 + 3x_2 = 5$, $2x_1 + 5x_2 = 9$ b) $x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$, $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5$ c) $x_1 + x_2 = 3$, $x_1 - x_2 = 4$, $x_2 = 3$

(a) 2×2 sistem (b) 2×3 sistem (c) 3×2 sistem

$m \times n$ sistemin bir çözümü, sistemin bütün denklemlerini sağlayan sıralı $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sayılarıdır. Örneğin (a) sisteminin bir çözümü $(2,1)$ dir.

$$
\begin{aligned}
2 + 3.(1) &= 5 \\
2.(2) + 5(1) &= 9
\end{aligned}
$$

5

(b) sisteminin bir çözümü $(1,0,2)$ dir.
$\alpha \in \mathbb{R}$ (reel sayılar kümesi) olmak üzere
$(1, \alpha, 2+2\alpha)$ $\quad \alpha=-5 \quad (1,-5,-8)$

(c) çözüm yok.

Çözümü olan sistemlere <u>kararlı</u> sistemler, çözümü olmayan sistemlere <u>kararsız</u> sistemler denir. (a), (b) kararlı sistemler, (c) kararsız sistemdir.

6

Bir lineer sistemin bütün çözümlerinin kümesine çözüm kümesi denir.

(b) $\quad Ç = \{ (1, \alpha, 2+2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R} \}$

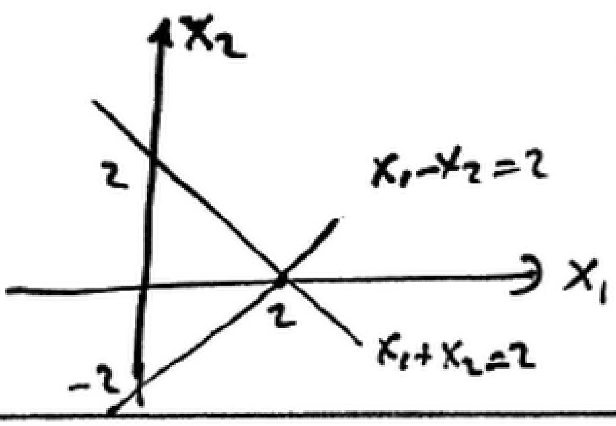
$(1,1,4) \in Ç \quad , \quad (1,0,3) \notin Ç$

2x2 sistemler

a) $\quad x_1 + x_2 = 2$
$\quad\;\; x_1 - x_2 = 2$

$x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

$(2,0)$

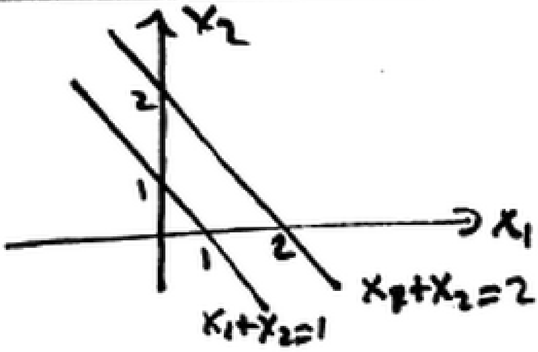


$y = mx + n$
$y + x = a$

7

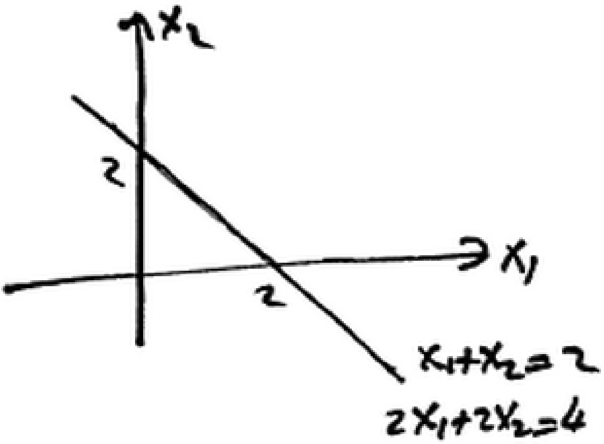
b) $x_1+x_2=2$

$x_1+x_2=1$



c) $x_1+x_2=2$

$2x_1+2x_2=4$



8

Tanım: Aynı çözüm kümesine sahip iki denklem sistemine <u>denktir</u> denir.

ÖRNEKLER

a) $x_1+x_2=4$

$2x_2=2$

$x_2=1 \quad x_1=3$

$(3,1)$

b) $x_1+3x_2=6$

$x_1-x_2=2$

$$\begin{array}{r} x_1+x_2=4 \\ +\quad 2x_2=2 \\ \hline x_1+3x_2=6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x_1+x_2=4 \\ -\quad 2x_2=2 \\ \hline x_1-x_2=2 \end{array}$$

(a) ve (b) sistemleri denktir.

*) $\begin{matrix} x_1+2x_2=4 \\ 3x_1-x_2=2 \end{matrix}$ ve $\begin{matrix} 3x_1-x_2=2 \\ x_1+2x_2=4 \end{matrix}$ denktir

*) $\begin{matrix} x_1+2x_2=4 \\ 3x_1-x_2=2 \end{matrix}$ ve $\begin{matrix} 2x_1+4x_2=8 \\ 3x_1-x_2=2 \end{matrix}$ denktir.

*) $\begin{matrix} x_1+2x_2=4 \\ 3x_1-x_2=2 \end{matrix}$ ve $\begin{matrix} 7x_1=8 \\ 3x_1-x_2=2 \end{matrix}$ denktir

Denk sistemleri elde etmek için aşağıdaki üç işlem yapılır.

1) İki denklemin yerini değiştirmek
2) Herhangi bir denklemi sıfırdan farklı bir sayı ile çarpmak
3) Bir denklemin yerine, başka bir denklemi bir sayı ile çarpıp bu denklem ile toplamasını bu denklemin yerine yazmak

a
⋮

nxn sistemler

Tanım: Bir sistemin k. denkleminde ilk k-1 değişkenin katsayıları sıfır, x_k'nın katsayısı sıfırdan farklı ise sisteme üçgensel formdadır denir

Örnekler

1)
$$3x_1+2x_2+x_3=1$$
$$x_2-x_3=2$$
$$2x_3=4$$
üçgensel formdadır.

$$\left(\begin{array}{r} 4x_1+5x_2-x_3+x_4=5 \\ 2x_2+x_4=3 \\ x_3+x_4=2 \\ 2x_4=8 \end{array}\right)$$

$$2x_3=4 \Rightarrow x_3=2$$
$$x_2-x_3=2 \Rightarrow x_2=2+x_3=4$$
$$3x_1+2x_2+x_3=1 \Rightarrow 3x_1=1-2x_2-x_3=-9 \Rightarrow x_1=-3$$
$(-3,4,2)$ yerine koyma yöntemi

2)
$$x_1+x_2-x_3+2x_4=2$$
$$3x_2-2x_3+x_4=3$$
$$2x_3+x_4=6$$
$$2x_4=4$$
Sistemini çözünüz?

$$x_4=2$$
$$2x_3+x_4 \Rightarrow 2x_3=6-x_4=2 \Rightarrow x_3=1$$
$$3x_2-2x_3+x_4=3 \Rightarrow x_2=1$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$(-2, 1, 1, 2)$$

Eğer sistem üçgensel formda değilse, yukarıdaki üç işlemi kullanarak üçgensel forma getirilir.

3) $x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1$ sistemini çözünüz.

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 13$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$$
$$x_2 + 5x_3 = 3$$
$$-4x_2 + 8x_3 = 16$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$$
$$x_2 + 5x_3 = 3$$
$$28x_3 = 28$$

$$x_3 = 1$$
$$x_2 + 5x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = -2$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$(3, -2, 1)$$

a_{ij} $\left(\begin{smallmatrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n \end{smallmatrix}\right)$'ler reelsayılar olmak üzere

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklindeki dikdörtgensel sıralı forma <u>matris</u> denir. Genellikle A, B, C gibi büyük harflerle gösterilirler. Kısaca $A=(a_{ij})$ ile de gösterilir.

Bir lineer sistemde değişkenlerin önlerindeki katsayıları matris olarak yazalım. Bu durumda bu matrise lineer sistemin <u>katsayılar matrisi</u> denir.

<u>örnek:</u>

$$x_1+x_2-2x_3=-1$$
$$2x_1+3x_2+x_3=1$$
$$3x_1-x_2+2x_3=13$$

lineer sisteminin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

dır.

Eğer bir lineer sistemin sağ tarafındaki sayılarıda matrise dahil edersek bu matrise <u>genişletilmiş katsayılar matrisi</u> denir.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

yukardaki örnekte genişletilmiş katsayılar matrisi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{array}\right]$$

$$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 2x_3 = -1$$
$$2 \cdot x_1 + 3x_2 + 1 \cdot x_3 = 1$$
$$3 \cdot x_1 + (-1)x_2 + 2 \cdot x_3 = 13$$

$\Rightarrow$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$
$$x_2 + 5x_3 = 3$$
$$28x_3 = 28$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array}\right]$$

Elemanter Satır İşlemleri

I. iki satırın yerini değiştirmek $s_i \Leftrightarrow s_j$

II. Bir satırı sıfırdan farklı bir reel sayı ile çarpmak $s_i \rightarrow a s_i$

III. Bir satırın yerine, başka bir satırı bir sayı ile çarpıp o satır ile toplamını yazmak

$$s_i \rightarrow s_i + a s_j$$

19

örnek: $\begin{aligned} x_1+x_2-2x_3&=-1 \\ 2x_1+3x_2+x_3&=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3&=13 \end{aligned}$ lineer sistemini (elemanter satır işlemlerini kullanarak) çözünüz.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{S_2 \to S_2+(-2)S_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 13 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \to S_3+(-3)S_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -4 & 8 & 16 \end{array}\right] \xrightarrow{S_3 \to S_3+4S_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 28 & 28 \end{array}\right]$$

20

$$0\cdot x_1+0\cdot x_2+28x_3=28 \Rightarrow x_3=1$$

$$0x_1+1\cdot x_2+5x_3=3 \Rightarrow x_2=-2$$

$$1\cdot x_1+1\cdot x_2-2x_3=-1 \Rightarrow x_1=3$$