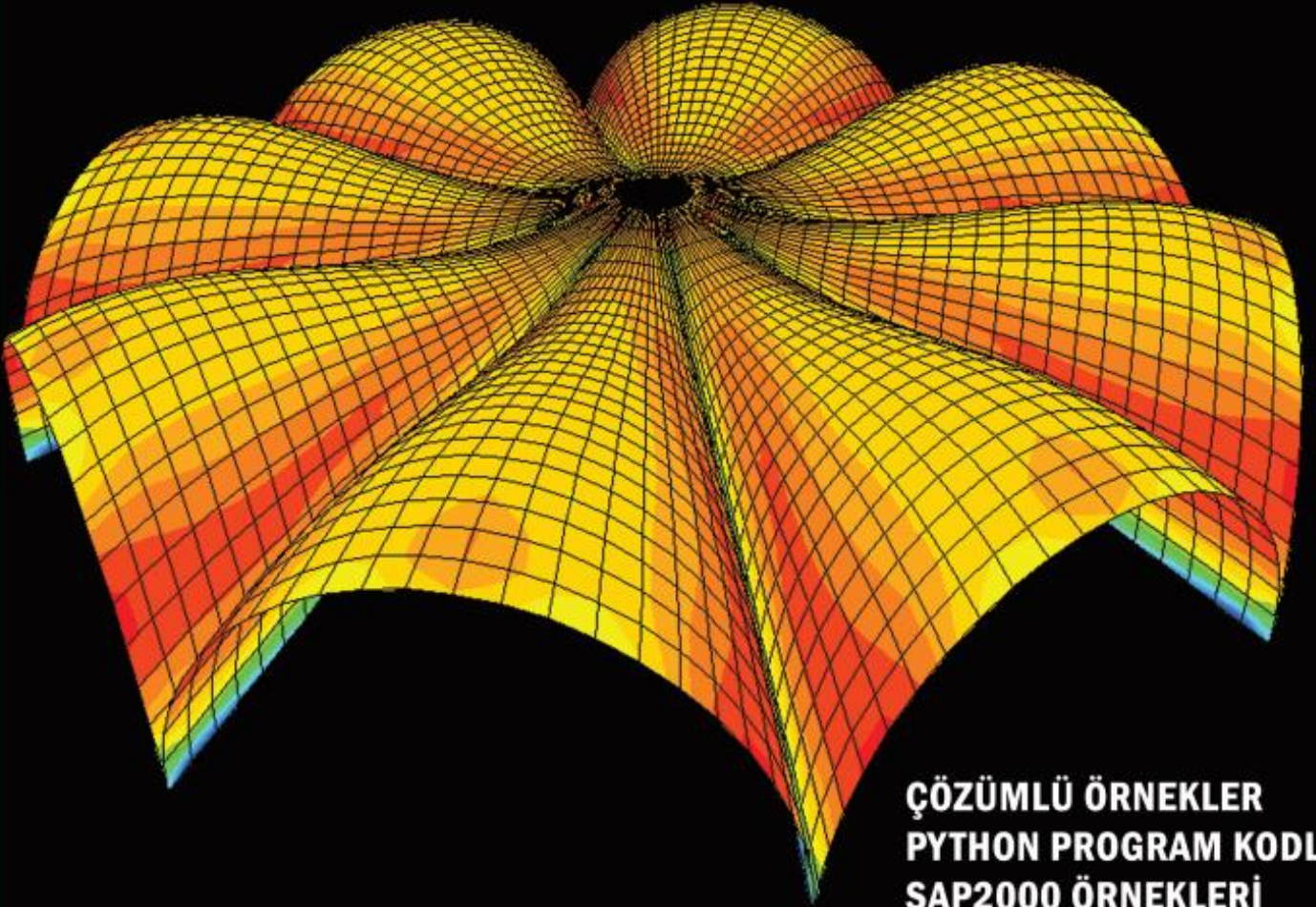


SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ



ÇÖZÜMLÜ ÖRNEKLER
PYTHON PROGRAM KODLARI
SAP2000 ÖRNEKLERİ
ANSYS ÖRNEKLERİ

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİ

KUTLU DARILMAZ

İçindekiler

1	Giriş.....	1
1.1	Giriş	1
1.2	Yöntemin Uygulanmasında İzlenen Adımlar	2
1.3	Yöntemin Uygulanması İçin Gerekli Ön Bilgiler	2
1.4	Sonlu Eleman Türleri	3
1.5	Eleman Karakteristik Matrisi	5
1.5.1	Doğrudan Yöntem (Direkt Yöntem)	6
1.6	Alan Değişkenleri	14
1.7	İnterpolasyon fonksiyonları, Şekil Fonksiyonları	14
1.8	Genel koordinatlar ve doğal koordinatlar	18
2	Genel Kavramlar	21
2.1	Gerilmeler ve Denge	21
2.2	Sınır koşulları	23
2.3	Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Bağlantıları	24
2.4	Gerilme-şekil değıştirme bağlantıları	26
2.4.1	Düzlem Gerilme Durumu	28
2.4.2	Düzlem Şekildeğiştirme Durumu	29
2.5	Toplam Potansiyel Enerji İlkesi	30
2.5.1	Potansiyel Enerji	30
2.6	Rayleigh-Ritz Yöntemi	35
3	Çubuk Elemanlar	38
3.1	Basit tek boyutlu çubuk eleman	38
3.1.1	Doğrusal Eleman	38
3.1.2	Yük matrisi	43
3.2	Düzlem Kafes Çubuk	54
3.3	Uzay Kafes Sistemler	77
3.4	Düzlem Kiriş Eleman	78
3.4.1	Yük Matrisi	83
3.5	Düzlem çubuk eleman	88

3.6	Üç Boyutlu Uzay Çubuk Eleman	105
4	İki Boyutlu Elemanlar	132
4.1	Giriş.....	132
4.2	Sabit Şekildeğiştirme Üçgen Elemanı (CST Constant Strain Element)	132
4.2.1	İlgili Matrislerin Doğal Eksenlerde Elde Edilmesi.....	150
4.3	Dikdörtgen Düzlem Eleman (İki doğrultuda doğrusal dikdörtgen Q4).....	163
4.4	İzoparametrik Formülasyon ile Genel Şekilli Dörtgen Düzlem Eleman.....	173
4.4.1	Hacim kuvveti.....	180
4.4.2	Yüzey kuvvetleri.....	180
4.5	Sayısal İntegral.....	181
4.5.1	Gauss kareleme yöntemi.....	182
4.5.2	Sabit Şekildeğiştirme Üçgen Elemanı ile Genel Şekilli Dörtgen Eleman Karşılaştırması.....	202
5	Plak Eleman	204
5.1	Plak eleman	204
5.2	Kirchoff plak teorisi varsayımları.....	204
5.3	Gerilme-şekildeğiştirme ilişkisi	206
5.4	Plağın Potansiyel Enerjisi.....	208
5.5	Yük vektörü.....	217
6	Üç Boyutlu Elemanlar	239
6.1	Giriş.....	239
6.2	Dört Noktalı Dört Yüzlü Eleman	239
6.3	Yük matrisi.....	244
6.4	İzoparametrik Formülasyon	261
6.5	8 Noktalı Eleman	265
7	Eksenel Simetrik Eleman	292
7.1	Eksenel Simetrik Üçgen Eleman.....	292
8	Yüksek Dereceden Elemanlar.....	304
8.1	Giriş.....	304
8.2	İkinci Dereceden Tek Boyutlu Çubuk Eleman	304
8.3	Altı düğüm noktalı üçgen eleman	307
8.4	Sekiz Düğüm Noktalı Dörtgen Eleman	308

8.5	20 Düğüm Noktalı Eleman	310
9	Matris İşlemleri ve Lineer Cebir	312
9.1	Giriş.....	312
9.2	Matrisler	312
9.3	Vektörler	312
9.4	Özel Matrisler	313
9.4.1	Kare matris	313
9.4.2	Köşegen Matris.....	313
9.4.3	Birim Matris	313
9.4.4	Simetrik Matris	313
9.4.5	Antimetrik Matris.....	314
9.4.6	Üst Üçgen Matris	314
9.4.7	Alt Üçgen Matris	314
9.4.8	Bant Matris	314
9.5	Matris İşlemleri	315
9.5.1	Toplama ve Çıkarma İşlemi:	315
9.5.2	Matrisin bir sayı ile çarpılması	316
9.5.3	Matris Çarpımı	317
9.5.4	Matrisin Devriği (Tranpozesi).....	318
9.5.5	Matris Tersi	319
9.5.6	İntegrasyon ve Türev	322
9.6	Sonlu elemanlar yönteminde matris kullanımı	323
9.7	Matris ve determinantların özellikleri	323
9.7.1	Determinantın özellikleri.....	324
9.8	Gauss İndirgeme Yöntemi	325
9.9	LU Yöntemi	332
10	Veri Dosyası Aktarımı.....	336
10.1	Giriş.....	336
10.2	SAP2000 Programına aktarım.....	336
10.3	ANSYS programına aktarım.....	337

ÖNSÖZ

Sonlu elemanlar yöntemi, mühendislik alanında karmaşık problemlerin çözümlenmesinde kullanılan en yaygın analiz yöntemidir. Elinizdeki bu kitapta, sonlu elemanlar yönteminin (SEY) yapı mühendisliği alanındaki uygulamalarına yönelik temel ilkeler açıklanmış, farklı yapısal elemanların analizinde SEY'nin nasıl kullanıldığı, örnek problemler ve çözüm yöntemleri ile detaylı bir şekilde ele alınmıştır.

Sonlu elemanlar yöntemi bilgisayar yazılımları kullanımı gerektirdiğinden kitaptaki örneklerin birçoğu günümüzde yaygın olarak kullanılan SAP2000, ANSYS gibi yazılımlar ile çözülmüştür. Ayrıca bilgisayar yazılımlarının sonlu elemanlar yöntemini nasıl uyguladığının anlaşılması için kitapta kullanılan sonlu elemanların formülasyonu, Python programlama dili ile geliştirilmiş özel kodlar şeklinde verilmiştir. Kitapta verilen Python program kodları anlaşılabilirliği artırmak için optimize edilmeden olabildiğince açık olarak verilmiştir.

Yazar, İTÜ'de sonlu elemanlar yönteminin öğretilmesinde ve geliştirilmesinde büyük emek harcayan değerli akademisyenlerin rolünü takdirle anmaktan onur duymaktadır. İTÜ'de bu alandaki çalışmalar dünyadaki sonlu elemanlar yöntemi gelişimine paralel ilerlemiştir. Prof. Dr. Adnan Çakıroğlu, Prof. Dr. Nahit Kumbasar, Prof. Dr. Kemal Özden, Prof. Dr. Yalçın Aköz bu alanda öncü çalışmalarda bulunmuştur. Sonrasında Prof. Dr. Ahmet Işın Saygun, Prof. Dr. Metin Aydoğan, Prof. Dr. Mehmet Omurtag bu alandaki çalışmalara gerek yayınlarıyla gerekse verdikleri derslerle katkıda bulunmuştur. Alanlarında derin bilgi birikimine sahip bu değerli öğretim üyeleri, yalnızca teorik bilgiyi aktarmakla kalmayıp, aynı zamanda yenilikçi düşünce ve analitik çözümleme becerilerini kazandırarak mühendislik eğitime katkılarda bulunmuşlardır. Onların özverili çalışmaları, sonlu elemanlar yönteminin ülkemizde ilerlemesinde önemli bir rol oynamıştır. İTÜ'deki bu misyon, günümüzde sonlu elemanlar yönteminin Prof. Dr. Tülay Aksu Özkul, Prof. Dr. Nihal Eratlı, Doç. Dr. Ülkü Hülya Çalık Karaköse, Doç. Dr. Murat Yılmaz tarafından lisans ve yüksek lisans dersleri olarak verilmesi şeklinde başarılı şekilde devam ettirilmektedir.

Kitap, yazım ve çizim işlerinin tamamı yazar tarafından yapılarak yoğun bir çalışma süreci sonucu oluşturulmuştur. Bunu göz önüne alarak okuyucuların olası eksiklikleri hoşgörü ile karşılayacağı ümit edilmektedir. Okuyucuların yazara iletecekleri her türlü eleştiri ve görüş, yazar tarafından memnuniyetle karşılanacak ve ileriki baskılar için önemli katkılar olarak değerlendirilecektir.

Yazar kitabın yazımı sürecinde görüşlerine başvurduğu Prof. Dr. Engin Orakdoğen, Prof. Dr. Konuralp Girgin, Doç. Dr. Cüneyt Vatansever, Dr. Yavuz Durgun ve Dr. Günhan Aksoylu'ya teşekkürlerini sunmaktadır.

Yazar, kitabın konu ile ilgilenen öğrencilerin ve uygulamadaki mühendislerin bilgi birikimlerine katkı sağlayacak bir kaynak olmasını umut etmektedir.

Kutlu Darılmaz

İstanbul, 2025

1.1 Giriş

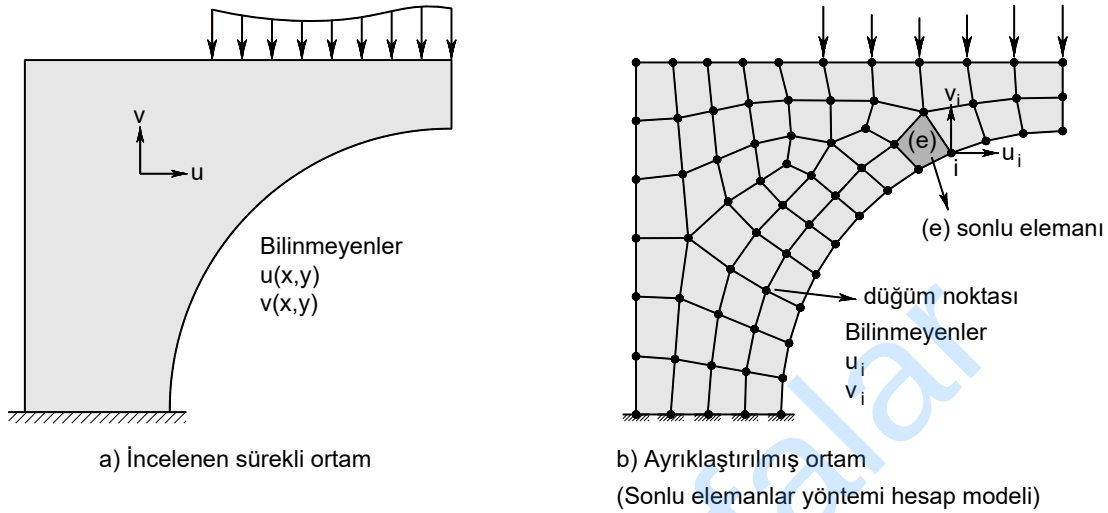
Sonlu elemanlar yöntemi (Finite Element Method), 1940'larda mühendislik ve fizik problemlerini çözmek için geliştirilen bir sayısal analiz yöntemidir. İlk olarak, uçak ve uzay mühendisliği problemlerinin analizinde kullanılmak üzere Hrennikoff ve Courant tarafından bağımsız olarak ortaya atılmıştır. Hrennikoff, sürekli bir ortamı ayırık elemanlara bölerek çözüm önerirken, Courant, varyasyonel yöntemleri kullanarak diferansiyel denklemleri çözmüştür.

1950'ler ve 1960'larda, bilgisayarların gelişmesiyle birlikte sonlu elemanlar yöntemi daha yaygın hale gelmiştir. Bu dönemde, Clough ve Turner gibi araştırmacılar, yöntemi daha da geliştirerek mühendislik problemlerine uygulanabilir hale getirmişlerdir. "Sonlu eleman" terimi ilk kez 1960 yılında R. W. Clough tarafından yayınlanan "Düzlemsel Gerilme Analizlerinde Sonlu Elemanlar Metodu (Finite Elements Method (FEM) in Plane Stress Analysis)" adlı çalışmada kullanılmıştır. Bu çalışmalarla birlikte özellikle, yapısal analiz, ısı transferi ve akışkanlar dinamiği gibi alanlarda büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Bu yöntemin geliştirilmesinde önemli katkılar sağlayan isimler arasında O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor ve J. Z. Zhu gibi araştırmacılar da bulunmaktadır.

1970'lerden itibaren, bilgisayar teknolojisinin çok hızlı gelişmesi ve yaygınlaşması ile birlikte sonlu elemanlar yöntemi ile analiz yapabilen ticari yazılımlar ortaya çıkmış ve bu yazılımlar mühendislik ve bilimsel araştırmalarda standart bir araç haline gelmiştir. Günümüzde, sonlu elemanlar yöntemi, karmaşık geometrilere ve malzeme özelliklerine sahip sistemlerin analizinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntem, mühendislik tasarımlarında ve çeşitli endüstriyel uygulamalarda vazgeçilmez bir araç olmuştur.

Genel olarak mühendislik problemleri, fiziksel durumun matematiksel modellenmesinden oluşmaktadır. Bu matematiksel modellerin analitik çözümünün bulunabilmesi genellikle geometri, yükleme türü, sınır koşulları ve malzeme özellikleri bakımından düzenli olan sistemlerde olası olmaktadır. Uygulamada karşılaşılan karmaşık geometriye, yüklemeye veya sınır koşullarına sahip sistemlerin çözümü için sayısal çözümlemelerin kullanılması uygun olmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi de bu amaçla kullanılan en yaygın sayısal çözümleme yöntemidir.

Yapının gerçek davranışını sistem üzerinde her noktada sağlayan analitik çözümün tersine, sayısal yöntemlerde düğüm noktası adı verilen, sistem üzerindeki ayırık noktalarda gerçek davranışa yaklaşım sağlanmaktadır. Sayısal yöntemlerin ilk aşamasını sistemin ayrıklaştırılması oluşturmaktadır. Sonlu elemanlar yönteminde ayrıklaştırma işlemi, söz konusu sürekli ortama sahip sistemin sonlu eleman adı verilen birbirine bağlı, küçük, daha basit geometriye sahip elemanlara bölünmesi anlamını taşımaktadır, Şekil 1-1.



Şekil 1-1

Daha sonra ayırıklaştırılmış sistemde eleman düzeyinde oluşturulan denklemler birleştirilerek sisteme ait denklem elde edilmektedir. Sisteme ait denklemlere sınır koşullarının uygulanması ve çözümü ile sistemin davranışı belirlenmektedir.

1.2 Yöntemin Uygulanmasında İzlenen Adımlar

Genel olarak bir sistemin çözümü için sonlu elemanlar yönteminin kullanılmasında aşağıdaki adımlar izlenmektedir.

- i. Sistemin çözümü için sonlu eleman modelinin oluşturulması
- ii. Çözülecek problem için uygun eleman türlerinin seçimi
- iii. Eleman matrislerinin ve vektörlerinin hesaplanması
- iv. Hesaplanan eleman matris ve vektörleri kullanılarak sistemi tanımlayan denklem takımının oluşturulması
- v. Genel sistem denklemlerine sınır koşullarının uygulanması
- vi. Denklemlerin çözülerek düğüm noktası bilinmeyenlerinin belirlenmesi
- vii. Elde edilen sonuçlar kullanılarak gerekli gerilme/şekildeğiştirme gibi diğer büyüklüklerin belirlenmesi
- viii. Sonuçların değerlendirilmesi

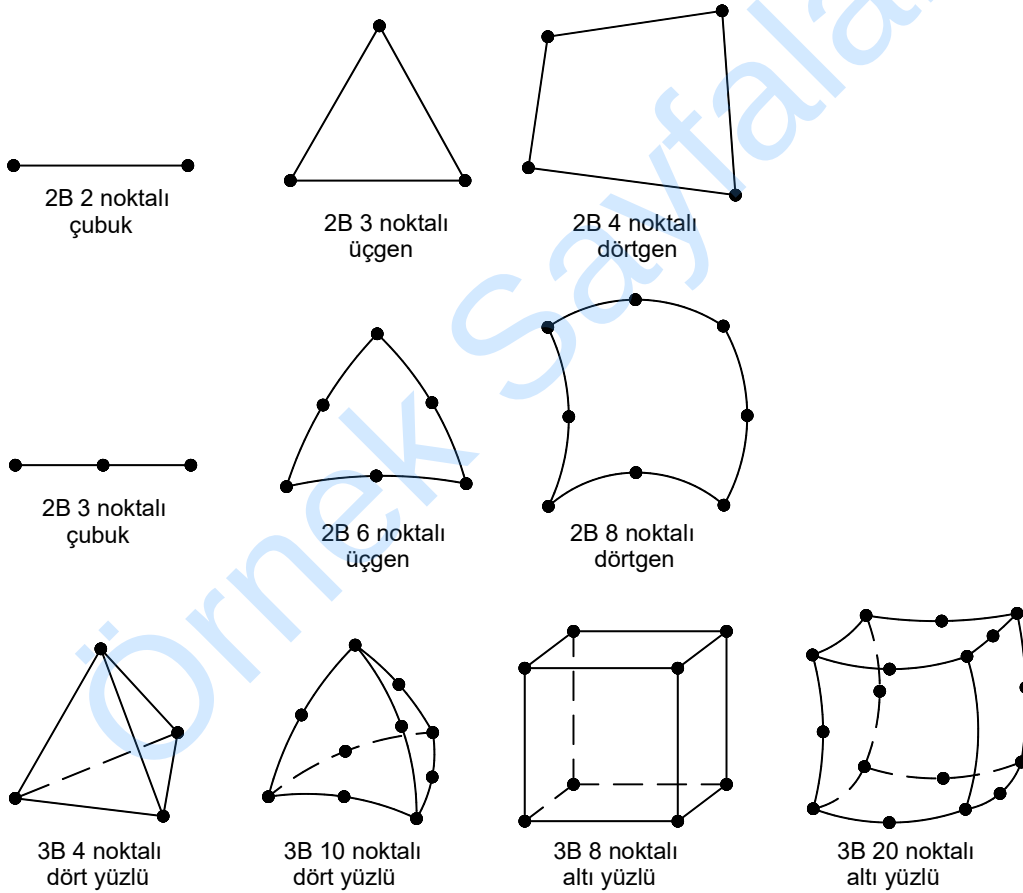
1.3 Yöntemin Uygulanması İçin Gerekli Ön Bilgiler

Bir sistemin çözümü için sonlu elemanlar yöntemi kullanıldığında el ile çözüm için çok fazla sayıda bilinmeyen ortaya çıkmaktadır. Bu bilinmeyenleri içeren denklem takımının çözümü için bilgisayar kullanımı zorunlu olmaktadır. Sonlu Elemanlar Yöntemi programlanmaya son derece uygundur. Programlama için herhangi bir programlama dili kullanılabilir. Son yıllarda bilimsel alanda geliştirilen yazılımlarda gücü ve esnekliği nedeniyle genellikle Python programlama dili kullanıldığından, bu kitapta da verilen program kodları bu dilde hazırlanmıştır.

Sonlu elemanlar yönteminin uygulanmasında matris işlemleri de yoğun olarak kullanılmaktadır. Matris düzeninde çalışma, programlama açısından da uygun olduğundan sonlu elemanlar yönteminin kullanımında neredeyse tüm işlemlerin matris işlemleri olarak yapıldığı söylenebilir. Yöntemin anlaşılmasında ve uygulanmasında çözülen problemlerin gerektirdiği mühendislik bilgilerine ek olarak lineer cebir konuları hakkındaki bilgilerin de yeterli düzeyde olması gerekmektedir. Matris işlemleri ile ilgili kısa bilgiler kitabın 9. bölümünde bulunmaktadır.

1.4 Sonlu Eleman Türleri

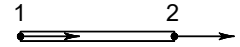
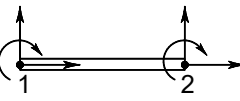
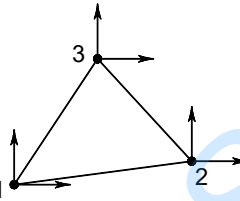
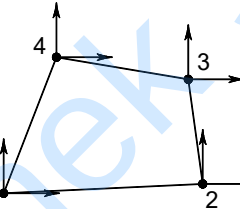
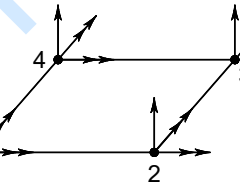
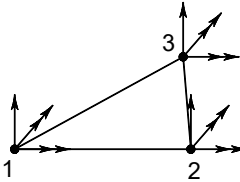
Sonlu elemanlar yönteminde çözülecek sistemin modellenmesinde kullanılacak eleman türleri farklı geometrilere sahip olmaktadır. Uygulamada sık olarak kullanılan eleman geometrileri Şekil 1-2'de gösterilmektedir.



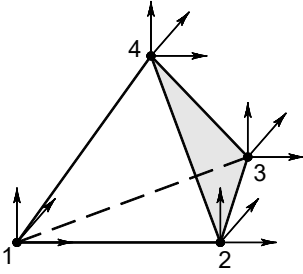
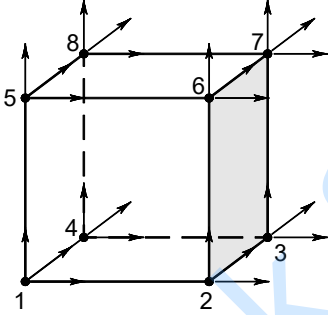
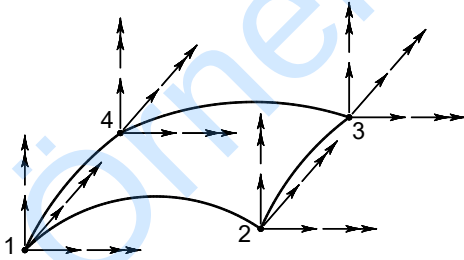
Şekil 1-2 Sonlu eleman türleri

Bu farklı geometri türleri kullanılarak farklı problemlerin çözümünde kullanılacak elemanlar geliştirilmiştir. Uygulamada sık olarak kullanılan tipik sonlu eleman türleri aşağıdaki tabloda gösterilmektedir.

Tablo 1-1 Tipik eleman türleri

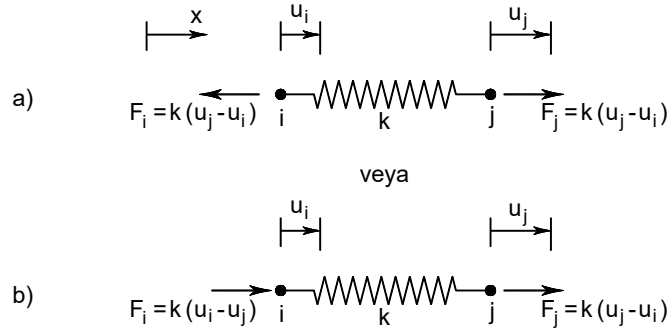
	Eleman	Uygulama Alanı	Düğüm noktası sayısı	Düğüm noktası serbestlik derecesi
Çubuk		Kafes sistem	2	1
Çubuk		Düzlem çubuk sistem	2	3
Sabit şekildeğiştirme Üçgen elemanı		Düzlem gerilme	3	2
Dörtgen eleman , düzlem gerilme		Düzlem gerilme	4	2
Dörtgen eğilme elemanı		Plak	4	3
Üçgen eğilme elemanı		Plak	3	3

Tablo 1-1 (Devam) Tipik eleman türleri

	Eleman	Uygulama Alanı	Düğüm noktası sayısı	Düğüm noktası serbestlik derecesi
Dört yüzlü		3 Boyutlu gerilme	4	3
Altı yüzlü		3 Boyutlu gerilme	8	3
Kabuk		Kabuk sistemler	4	6

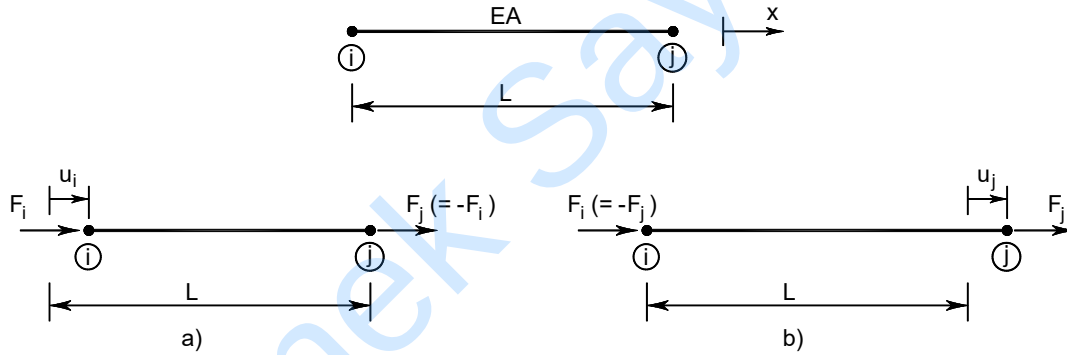
1.5 Eleman Karakteristik Matrisi

Eleman karakteristik matrisi, farklı problem türlerinde farklı isimlerle anılır. Yapı mekaniğinde buna rijitlik matrisi denir: düğüm noktası yer değiştirmelerini düğüm noktası kuvvetleriyle ilişkilendirir. Isı iletiminde buna iletkenlik matrisi denir: düğüm noktası sıcaklıklarını düğüm noktası akılarıyla ilişkilendirir. Bir eleman karakteristik matrisini türetmenin üç önemli yolu vardır.



Şekil 1-3 Yay eleman

Elastik eksenel çubuk (Doğrudan yöntem): Uzunluğu L , elastisite modülü E ve kesit alanı A olan ağırlıksız düz bir çubuk göz önüne alınacaktır, Şekil 1-4. Çubuk, iki düğüm noktalı bir sonlu eleman olarak kabul edilecektir. Çubukta yalnızca eksenel yüklere ve eksenel yer değiştirmelere izin verilecektir. Bu durumda düğüm noktası serbestlik dereceleri u_i ve u_j yer değiştirmeleri olacaktır.



Şekil 1-4 Elastik eksenel çubuk

Kuvvetlerin ve yer değiştirmelerin pozitif yönü $+x$ yönünde seçilecektir. Şekil 1-4(a)'da gösterildiği gibi $u_i > 0$ ve $u_j = 0$ olduğu durumda statik dengeden düğüm noktası kuvvetleri için

$$F_i = \frac{EA}{L} u_i \quad \text{ve} \quad F_j = -\frac{EA}{L} u_i \quad (1.5)$$

yazılabilir. Benzer şekilde Şekil 1-4(b)'da gösterildiği gibi $u_i = 0$ ve $u_j > 0$ olduğu durumda

$$F_i = -\frac{EA}{L} u_j \quad \text{ve} \quad F_j = \frac{EA}{L} u_j \quad (1.6)$$

olacaktır. u_i ve u_j 'nin aynı anda 0'dan farklı olduğu durumda Denk. (1.5) ve (1.6) birlikte değerlendirilerek

$$F_i = \frac{EA}{L}(u_i - u_j) \quad \text{ve} \quad F_j = \frac{EA}{L}(-u_i + u_j) \quad (1.7)$$

bağıntıları yazılabilir. Denk.(1.3) matris düzeninde yazılırsa

$$[k]\{u\} = \{F\} \quad \text{veya} \quad \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

elde edilir. Burada $[k]$ eleman rijitlik matrisidir.

Göz önüne alınan eksenel yüklü çubuk ile yukarıda göz önüne alınan elastik yay arasında yay rijitliği $k=EA/L$ alındığında analogi bulunduğu görülmektedir.

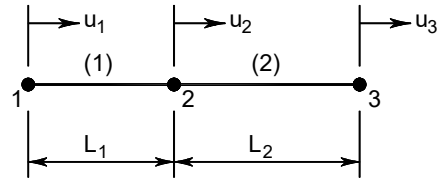
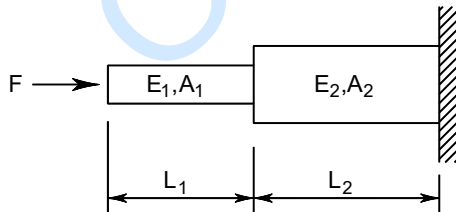
Denk. (1.8)'de ilk olarak $u_i = 1$ ve $u_j = 0$ ve daha sonra $u_i = 0$ ve $u_j = 1$ alınarak rijitlik matrisi ile çarpım yapılarak düğüm noktası kuvvetleri hesaplandığında, $[k]$ eleman rijitlik matrisinin herhangi bir sütunu, ilgili sütuna karşı gelen serbestlik derecesi değerinin 1, diğer serbestlik derecelerinin değerlerinin 0 olduğu durumu oluşturmak için uygulanması gerekli düğüm noktası yüklerine karşı geldiği görülür. Bu özellik doğrudan yöntem (direkt yöntem) ile eleman rijitlik matrisinin belirlenmesinde kullanılmaktadır.

Eleman rijitlik matrisi simetriktir. Bu özellik yerdeğiştirmeler ile yükler arasında doğrusal bağıntı bulunduğu durumda geçerlidir.

Örnek 1-1

Şekilde gösterilen eksenel yük etkisindeki sistemin çözümünü yapınız.

$$E_1 = E_2 = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \quad A_1 = 0.05 \text{ m}^2 \quad A_2 = 0.15 \text{ m}^2 \quad L_1 = 3 \text{ m} \quad L_2 = 4 \text{ m} \\ F = 800 \text{ kN}$$



$$u_1 = 0.002311\text{m} \quad u_2 = 0.000711\text{m}$$

Son olarak yerdeğiştirmeler kullanılarak şekildeğiştirmeler ve gerilmeler hesaplanır.

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon_1 = E_1 \frac{u_2 - u_1}{L_1} = 3 \cdot 10^7 \frac{0.000711 - 0.002311}{3} = -16000 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_2 = E_2 \epsilon_2 = E_2 \frac{u_3 - u_2}{L_1} = 3 \cdot 10^7 \frac{0 - 0.000711}{4} = -5333.3 \text{ kN/m}^2$$

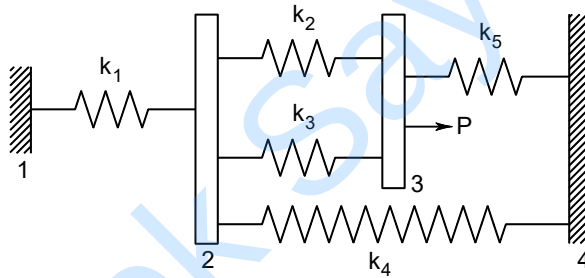
Gerilmelerdeki (−) işareti basınç gerilmesi olduğunu göstermektedir. Elde edilen bu yerdeğiştirme ve gerilme değerleri bu problem için kesin değerlerdir.

Önek 1-2

Şekilde gösterilen sistemin çözümünü yapınız.

$$k_1 = 400 \text{ kN/m} \quad k_2 = k_3 = 300 \text{ kN/m} \quad k_4 = 500 \text{ kN/m} \quad k_5 = 200 \text{ kN/m}$$

$$P = 1000 \text{ kN}$$



Çözüm:

Sistem bilinmeyenleri u_1, u_2, u_3, u_4 olacaktır. Beş farklı varsayımsal durum göz önüne alınacaktır. Her bir durumda sistemde yalnızca tek bir eleman bulunacaktır. Bu durumlarda sistem rijitlik matrisi

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yalnızca 1 nolu eleman

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yalnızca 2 nolu eleman

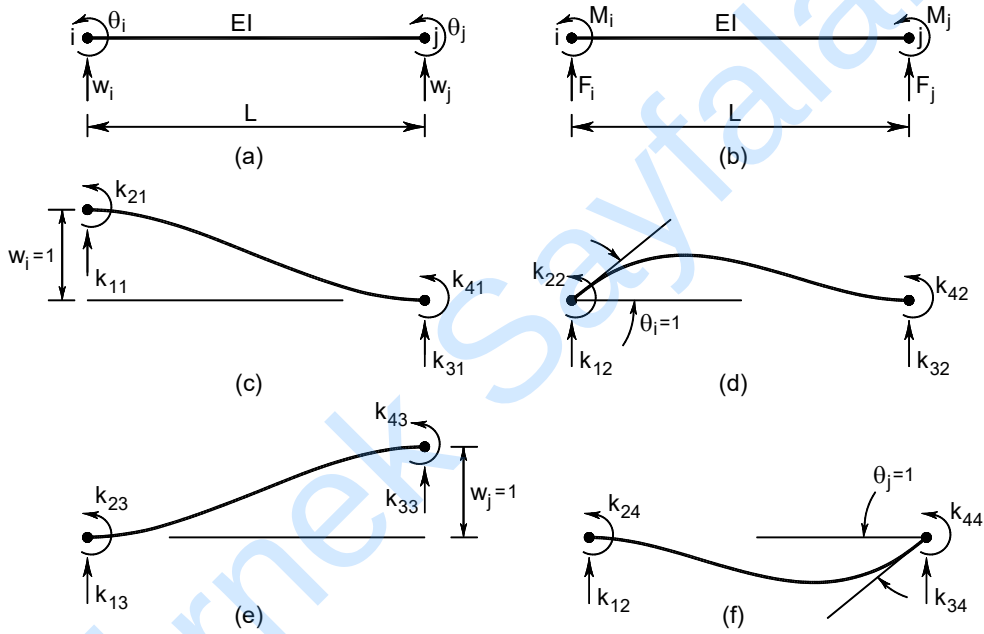
$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

yalnızca 3 nolu eleman

$$f_4 = k_4 (u_4 - u_2) = 300 \cdot (0 - 0.7143) = -357.15 \text{ kN}$$

$$f_5 = k_5 (u_4 - u_3) = 200 \cdot (0 - 1.7857) = -357.15 \text{ kN}$$

Elastik Kiriş (Doğrudan Yöntem): Sabit enkesitli aksenal şekildeğiştirme yapmayan düzlem kiriş eleman göz önüne alınacaktır. Bu eleman her bir düğüm noktasında çubuk eksenine dik yerdeğiştirme w ve θ dönme serbestliklerine sahip 4 serbestlik dereceli bir elemandır. F_i ve F_j düğüm noktası kuvvetleri w_i ve w_j düğüm noktası yerdeğiştirmeleriyle, M_i ve M_j düğüm noktası momentleri θ_i ve θ_j düğüm noktası dönmeleriyle ilişkilidir. Bu büyüklüklerin pozitif yönleri Şekil 1-5(a) ve (b)'de gösterilmektedir.

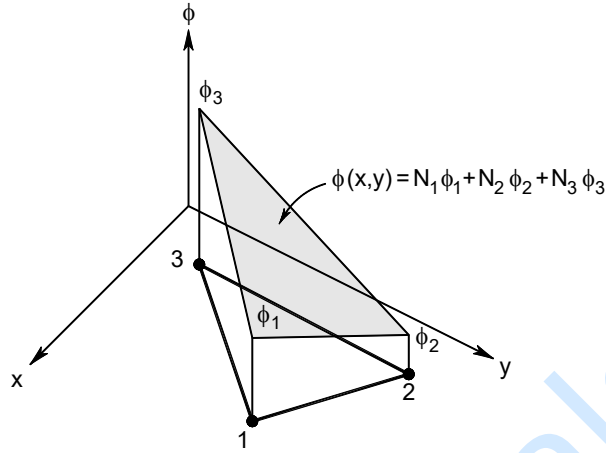


Şekil 1-5 Elastik kiriş eleman

Eleman denklemi $[k]\{u\} = \{F\}$ olarak yazıldığında düzlem kiriş eleman rijitlik matrisi $[k]$ 'nın 4×4 boyutunda olacağı belirlenir. Düğüm noktası yerdeğiştirme vektörü

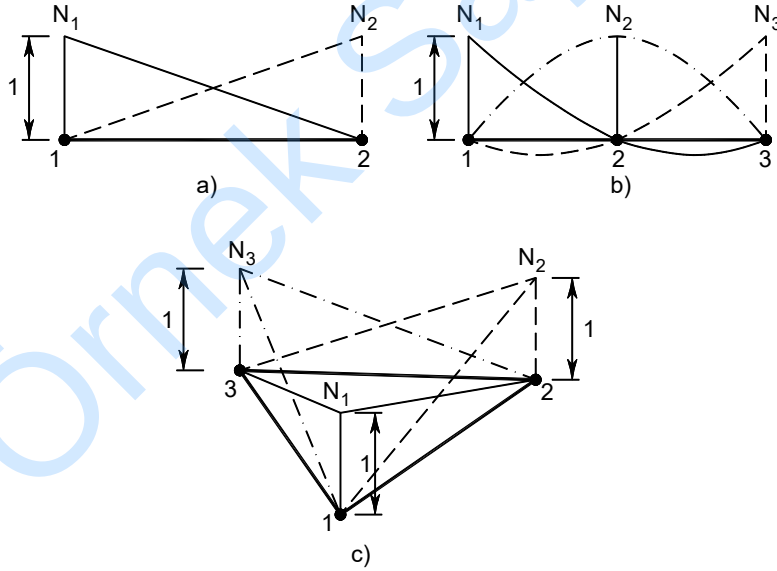
$$\{u\} = [w_i \quad \theta_i \quad w_j \quad \theta_j]^T \quad (1.9)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 1-8 Üç noktalı üçgen eleman üzerinde alan değişkeninin şekil fonksiyonlarına bağlı değişimi

Düğüm noktalarındaki bilinmeyenler hesaplandıktan sonra eleman üzerindeki alan değişkeni değeri düğüm noktalarında hesaplanan değerler kullanılarak Denk.(1.21)'de verilen interpolasyon ile belirlenmektedir.



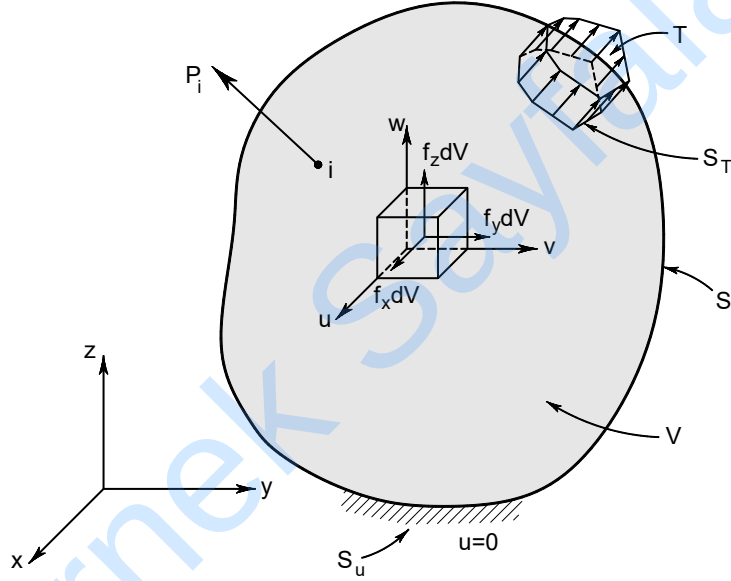
Şekil 1-9 Şekil fonksiyonu örnekleri

Genel Kavramlar

2

2.1 Gerilmeler ve Denge

Şekil 2-1’de hacmi V ve yüzeyi S olan üç boyutlu genel geometriye sahip bir cisim gösterilmektedir.



Şekil 2-1 Üç boyutlu genel geometrili cisim

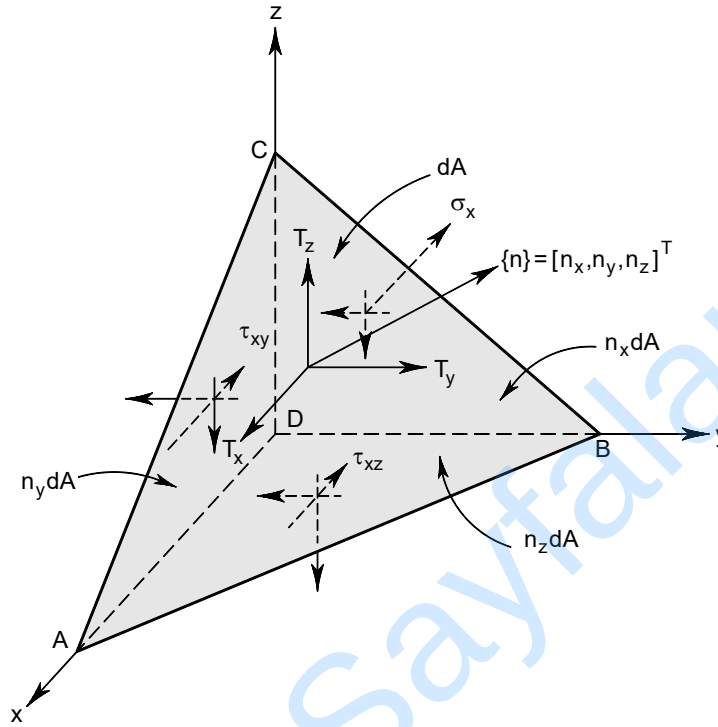
Cisim içindeki herhangi bir noktanın konumu x, y, z koordinatları ile belirlenmektedir. Cisim belirli bölgelerde sınır koşullarına sahiptir. Cismin herhangi bir noktasının yerdeğiştirmesi

$$\{u\} = [u, v, w]^T \quad (2.1)$$

birim hacimdeki yayılı kuvvet, örneğin birim hacmin ağırlığı

$$\{f\} = [f_x, f_y, f_z]^T \quad (2.2)$$

vektörleri ile gösterilebilir. Elemanter hacim dV üzerine etkiyen hacimsel kuvvet Şekil 2-1’de gösterilmektedir. Hacim kuvvetleri, cisim kuvvetleri olarak da adlandırılmaktadır.



Şekil 2-3 Yüzeyde elemanter bir hacim

2.3 Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Bağlılıları

Denk.(2.5)'de verilen gerilmelere karşılık gelen birim şekildeğiştirmeler

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (2.9)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada ϵ_x, ϵ_y ve ϵ_z aksenal birim şekildeğiştirmeleri, γ_{xy}, γ_{xz} ve γ_{yz} açısasal şekil değıişimleri göstermektedir.

Şekil 2-4'de, küçük şekil değıişimleri için, göz önüne alınan iki boyutlu x-y düzleminde ϵ_x, ϵ_y ve γ_{xy} şekildeğiştirmeleri gösterilmektedir. x- yönü yerdeğiştirmeleri u ve y-yönü yerdeğiştirmeleri v koordinatlarının fonksiyonu olarak $u=u(x,y)$ ve $v=v(x,y)$ şeklindedir. Bu nedenle şekildeğiştirmeler kısmi türev kullanılarak elde edilmelidir. İki boyutlu şekildeğiştirme-gerilme bağıntıları

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.10)$$

olarak elde edilir.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

bağıntıları elde edilir.

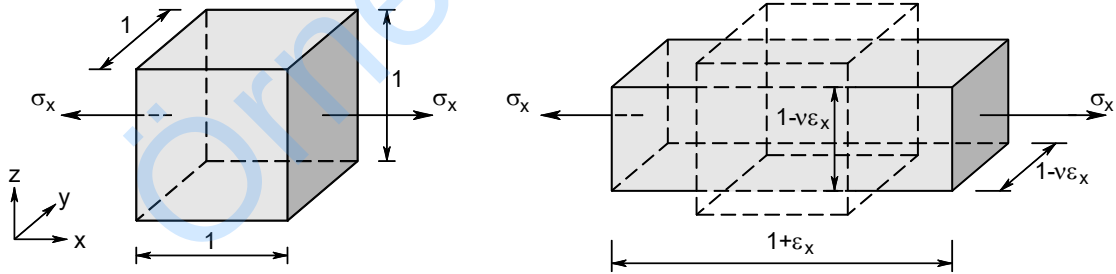
Sembolik olarak genel durumda şekildeğiştirme-yerdeğiştirme ilişkisi

$$\{\varepsilon\} = [\partial]\{u\} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir. Bu birim şekildeğiştirme bağıntıları küçük şekildeğişimleri için geçerlidir.

2.4 Gerilme-şekil değiştirme bağıntıları

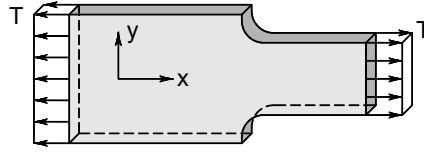
Doğrusal elastik malzemeler için gerilme-şekil değiştirme ilişkisi genelleştirilmiş Hooke yasasından elde edilmektedir. İzotrop malzemeler için iki malzeme özelliği elastisite modülü E ve Poisson oranı ν dır.



Şekil 2-5 Tek eksenli gerilme durumunda şekildeğiştirme

Şekil 2-5'deki birim uzunluklara sahip bir küp üzerinde gösterildiği gibi tek eksenli gerilmekten oluşan şekil değiştirmeler

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E}, \varepsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.15)$$



Şekil 2-6 Düzlem gerilme örneği

Ters bağıntılar kullanılarak gerilme-şekildeğiştirme bağıntıları

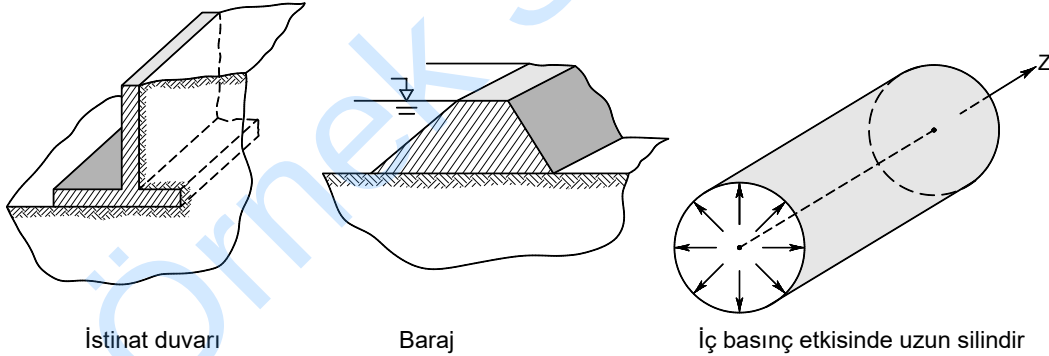
$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (2.26)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

şeklinde elde edilir.

2.4.2 Düzlem Şekildeğiştirme Durumu

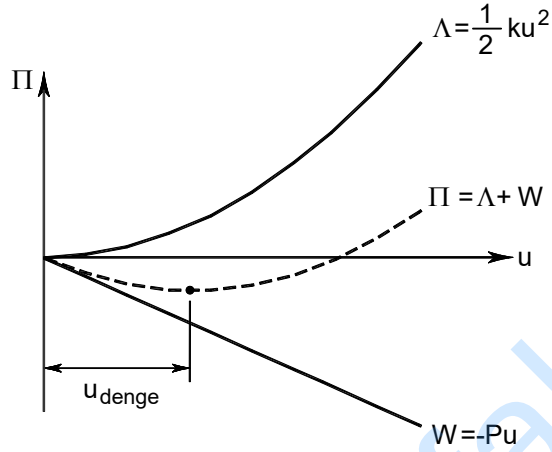
Düzlem şekildeğiştirme durumunda şekildeğiştirmelerin bir düzlemde olduğu ve bu düzleme dik şekildeğiştirmenin sıfır olduğu varsayılmaktadır.



Şekil 2-7 Düzlem şekildeğiştirme örnekleri

Bu durumda ε_z , γ_{xz} ve γ_{yz} şekildeğiştirmelerinin sıfır olduğu varsayılır. Düzlem şekildeğiştirme durumu, cismin bir boyutunun diğer iki boyutu yanında çok büyük olduğu (örneğin z eksenini doğrultusu), düzlem içerisinde (x-y düzlemi) etkiyen yüklerin diğer doğrultuda değişmediği problemlerin çözümünde kullanılır.

Bu çözümün grafiksel gösterimi Şekil 2-9'da gösterilmektedir.



Şekil 2-9 Tek serbestlik dereceli sistem için potansiyel enerji bağıntısının gösterimi
Sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülen sistemler genellikle çok serbestlik dereceli sistemlerdir. n serbestlik dereceli sistemdeki yerdeğştirmeler $\{u\} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$ ile gösterilirse sistemin potansiyeli (Π) yerdeğştirmelerin bir fonksiyonu olacaktır.
 $\Pi = \Pi(u_1, u_2, \dots, u_n)$

Potansiyel enerjinin durağan olması ilkesince denge durumunun devam etmesi için

$$d\Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Pi}{\partial u_2} du_2 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial u_n} du_n = 0 \quad (2.43)$$

olmalıdır.

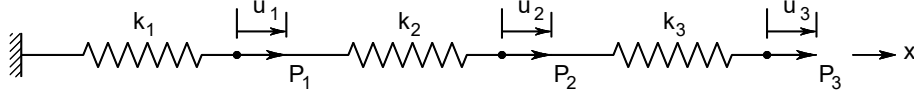
Bu koşulun sağlanması için Denk.(2.44) sağlanmalıdır.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \text{ veya } \left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial u} \right\} = \{0\} \quad (2.44)$$

Bu ifade denge durumuna ait, bilinmeyenleri u_i olan n adet denklemi içeren denklem takımını oluşturur.

Örnek 2-1

Aşağıda gösterilen yay sisteminde minimum potansiyel enerji ilkesini kullanarak yük ve yerdeğiştirme arasındaki ilişkiyi elde ediniz.



Çözüm:

Sistemin potansiyel enerjisi

$$\Pi = \frac{1}{2}k_1 u_1^2 + \frac{1}{2}k_2 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2}k_3 (u_3 - u_2)^2 - P_1 u_1 - P_2 u_2 - P_3 u_3$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$k_1 u_1 - k_2 (u_2 - u_1) - P_1 = 0$$

$$k_2 (u_2 - u_1) - k_3 (u_3 - u_2) - P_2 = 0$$

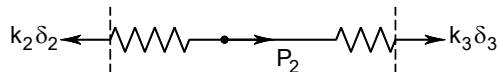
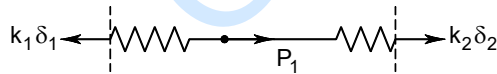
$$k_3 (u_3 - u_2) - P_3 = 0$$

Denklemler matris düzeninde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad \text{veya} \quad [K]\{u\} = \{P\} \quad \text{bağıntıları elde edilir.}$$

Burada $[K]$ sistemin rijitlik matrisini, $\{P\}$ sistem yük vektörünü ve $\{u\}$ bilinmeyenler vektörünü göstermektedir.

Aynı denklemler aşağıda gösterildiği gibi sistemin serbest cisim diyagramlarından yararlanılarak da elde edilebilir.



$$k_1 \delta_1 - k_2 \delta_2 = P_1$$

$$k_2 \delta_2 - k_3 \delta_3 = P_2$$

$$k_3 \delta_3 = P_3$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = 0 \rightarrow 900a_3 + 31.5 = 0$$

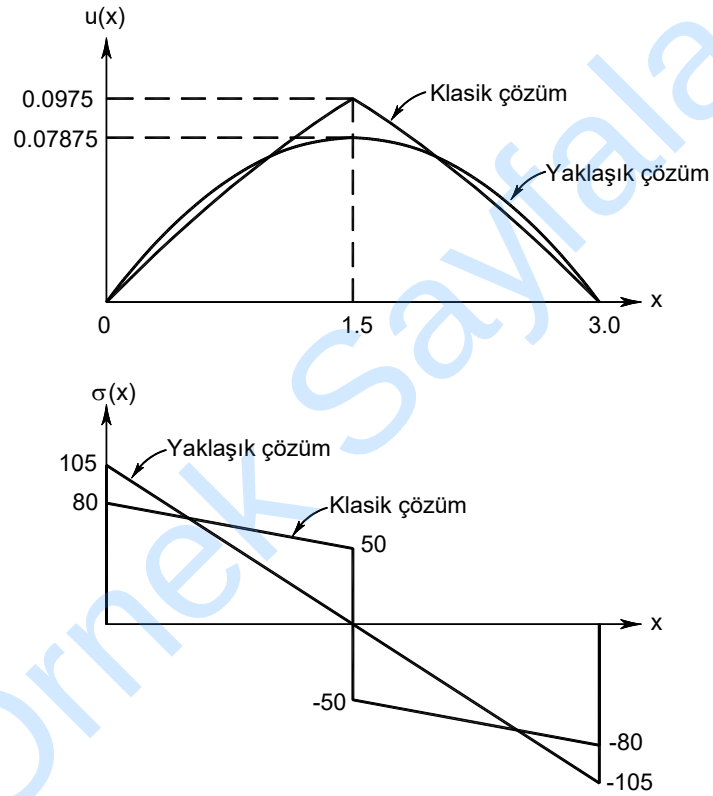
$a_3 = -0.035$ olarak belirlenir.

Çubuktaki gerilme

$$\sigma = E \frac{du}{dx} = 1000 \cdot a_3 (2x - 3) = 1000 \cdot (-0.035)(2x - 3) = 105 - 70x$$

Orta nokta yerdeğiştirmesi

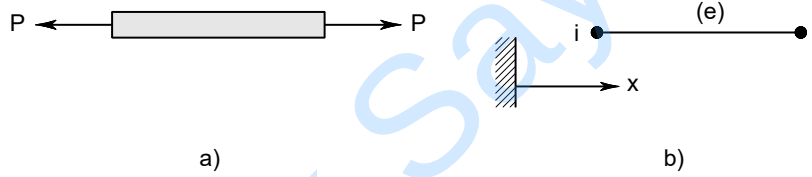
$$u_{x=1.5} = -2.25a_3 = -2.25 \cdot (-0.035) = 0.07875 \text{ m olarak hesaplanır.}$$



3.1 Basit tek boyutlu çubuk eleman

3.1.1 Doğrusal Eleman

Yapı sistemlerinin gerilme analizinde sonlu elemanlar yönteminin kullanımına giriş amacıyla kullanılabilecek en basit eleman Şekil 3-1(a)'da gösterilen çubuk elemandır. Çubuğun her iki ucunun mafsallı olduğu ve bu nedenle yalnızca aksenal basınç kuvveti veya aksenal çekme kuvveti taşıyabileceği varsayılmaktadır. Bu elemana ait sonlu eleman Şekil 3-1(b) de gösterilmektedir. Bu elemanda Bölüm 1.6'daki tanımlamaya göre alan değişkeni yerdeğiştirme olarak seçilir.



Şekil 3-1 Bir boyutlu çubuk eleman ve eşdeğer sonlu eleman gösterimi

Çubuk sonlu elemanın uçlarında i ve j adında iki düğüm noktası bulunmaktadır. Çubuk eleman x doğrultusunda bulunmakta ve yalnızca aksenal yerdeğiştirme yapmaktadır. Eleman yerdeğiştirmesi $u(x)$ olarak adlandırılırsa ve L eleman uzunluğu boyunca değişiminin doğrusal olduğu varsayılırsa yerdeğiştirme fonksiyonu a_1 ve a_2 sabitler olmak üzere Denk.(3.1)'deki gibi yazılabilir.

$$u(x) = a_1 + a_2x \quad (3.1)$$

Eğer düğüm noktalarındaki bilinmeyen yerdeğiştirmeler u_i ve u_j olarak adlandırılırsa bu yerdeğiştirmeler için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$u_i = a_1 + a_2x_i \quad (3.2)$$

$$u_j = a_1 + a_2x_j \quad (3.3)$$

Düğüm noktası koordinatları olan x_i ve x_j değerleri bilindiğinden yukarıda verilen iki denklem çözülerek a_1 ve a_2 sabitleri aşağıdaki şekilde belirlenir.

$$\Pi = \sum_{i=1}^N (\Lambda^{(i)} - W) \quad (3.20)$$

şeklindedir. $\Lambda^{(i)}$ (i) elemanı için şekildeğiştirme enerjisidir.

Sistem yük vektörünü oluşturan kuvvetler tarafından yapılan iş ise

$$W = u_1 F_1 + u_2 F_2 + \dots + u_n F_n = \{u\}^T \{F\} \quad (3.21)$$

şeklindedir.

Eğer modelde n tane düğüm noktası varsa potansiyel enerjinin minimum olması durumunda

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{u\}} = \left(\sum_{i=1}^N [k^{(i)}] \right) \{u\} - \{F\} = 0 \quad (3.22)$$

bağıntısı yazılabilir.

Burada $\sum_{i=1}^N [k^{(i)}]$ tüm sisteme ilişkin sistem rijitlik matrisini göstermektedir ve tüm elemanların rijitlik matrislerinin toplamı ile elde edilmektedir.

3.1.1.1 Eleman matrislerinin doğal koordinatlarda elde edilmesi

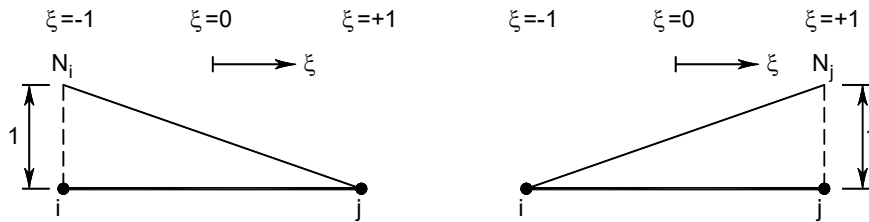
Yukarıdaki işlemlerde eleman rijitlik matrisinin elde edilmesinde genel eksenler kullanılmıştır. Doğal koordinatlar kullanılarak da benzer rijitlik matrisi elde edilebilmektedir. -1 ve +1 arasında değişen doğal koordinat ile genel koordinat arasında Denk.(3.23) bağıntıları yazılabilir.

$$x = \frac{L}{2}(\xi + 1) + x_i \text{ veya } \xi = \frac{2}{L}(x - x_i) - 1 \quad (3.23)$$

Doğal koordinatlarda doğrusal şekil fonksiyonları

$$N_i(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \quad N_j(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad (3.24)$$

şeklindedir.



Şekil 3-2

$$\int_V [N]^T \{f\} dV = \frac{A_e L_e f}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

eleman yüzey kuvveti T olmak üzere

$$\int_S [N]^T \{T\} dS = \frac{L_e T}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

olarak belirlenir.

Sıcaklık değişmesi etkisinin bulunması durumunda bu etki, şekildeğiştirme-yerdeğiştirme matrisi $[B]$ Denk.(3.29)'dan alınarak,

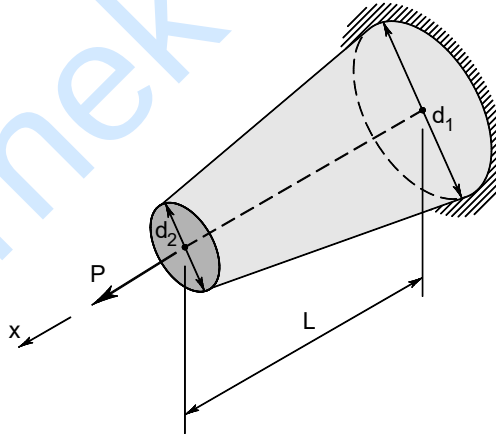
$$\int_V [B]^T [D] \{\epsilon_o\} dV = \int_V \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T E \alpha \Delta T dV = \frac{E \alpha \Delta T}{L} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \int_L A dx = E \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

bağıntısıyla yük etkisi olarak göz önüne alınabilir.

Örnek 3-1

Şekilde gösterilen doğrusal değişken daire kesitli çubuğa ucundan $P=500\text{kN}$ eksenel çekme kuvveti etkimektedir. Kuvvetten dolayı oluşan uzamayı hesaplayınız.

$$d_1 = 0.20\text{m} \quad d_2 = 0.10\text{m} \quad L = 0.90\text{m} \quad E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$



Çözüm:

Çubuk kesiti değişim bağıntısı

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{d_2}{d_1} - 1 \right) \quad d(x) = d_1 (1 + \alpha x) \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

Çubuğun değişken kesit alanı

$$A(x) = \pi d(x)^2 \quad A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \quad A(x) = A_1 (1 + \alpha x)^2$$

olmak üzere çubuğun ucunda oluşan uzama

$$u_1 = \int_0^L \frac{P}{EA(x)} dx = \frac{P}{EA_1} \int_0^L \frac{1}{(1 + \alpha x)^2} dx$$

$$\int \frac{1}{(1 + \alpha x)^2} dx = \frac{1}{\alpha(1 + \alpha x)} \text{ olduğundan } u_1 = \frac{P}{EA_1} \frac{d_1}{d_2} L = \frac{4PL}{\pi E d_1 d_2} \text{ olarak hesaplanır.}$$

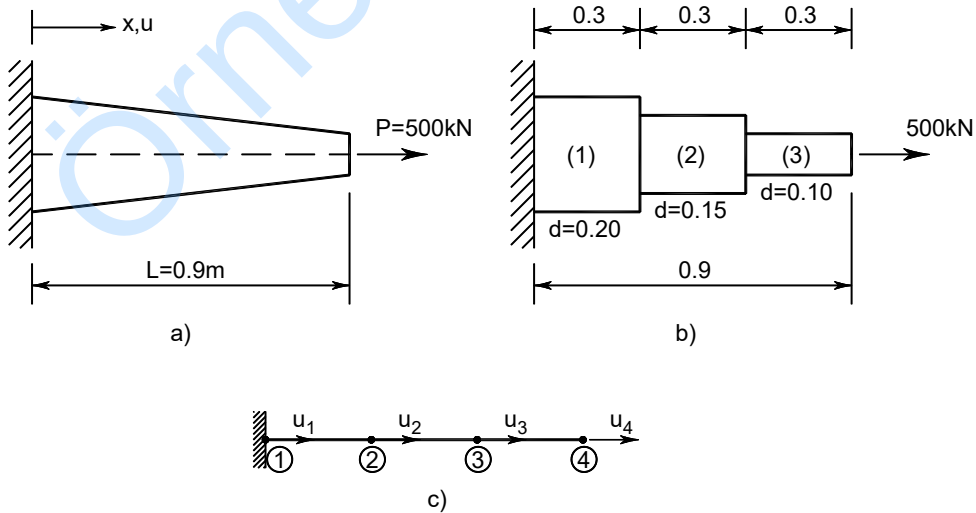
$$u_1 = \frac{4 \cdot 500 \cdot 0.9}{\pi \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 0.1 \cdot 0.2} = 1.4324 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Örnek 3-2

Örnek 3-1'de verilen çubuk sistemde, sonlu elemanlar yöntemini kullanarak

- Yerdeğiştirmeleri
- Şekildeğiştirmeleri
- Gerilmeleri

hesaplayınız.



$$[k]=10^7 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2.0944 & -2.0944 & 0 & 0 \\ -2.0944 & 2.0944+1.1781 & -1.1781 & 0 \\ 0 & -1.1781 & 1.1781+0.5236 & -0.5236 \\ 0 & 0 & -0.5236 & 0.5236 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[k]=10^7 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2.0944 & -2.0944 & 0 & 0 \\ -2.0944 & 3.2725 & -1.1781 & 0 \\ 0 & -1.1781 & 1.7017 & -0.5236 \\ 0 & 0 & -0.5236 & 0.5236 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Bu örnek için sistem yük vektörü düğüm noktalarına etkiyen yüklerden oluşacaktır.

$$\{F\}^T = [0 \ 0 \ 0 \ 500]$$

Sonuç denklem takımı

$$10^7 \begin{bmatrix} 2.0944 & -2.0944 & 0 & 0 \\ -2.0944 & 3.2725 & -1.1781 & 0 \\ 0 & -1.1781 & 1.7017 & -0.5236 \\ 0 & 0 & -0.5236 & 0.5236 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu aşamada sisteme sınır koşulları uygulanmamıştır. Bu durum bu aşamada üç çubuğun boşlukta birleştirilmiş olması gibi düşünülebilir. Sınır koşulları uygulanmamış haldeki sistem rijitlik matrisi tekil matris olacağından tersi alınamaz. Sistemin çözülebilmesi için sınır koşullarının uygulanması gerekmektedir. Söz konusu örnekte 1 nolu düğüm noktasında yerdeğiştirme olmayacağından sınır koşulu olarak $u_1=0$ olmalıdır.

Sınır koşulları uygulanmış şekilde denklem takımı düzenlenirse

$$10^7 \begin{bmatrix} 2.0944 & -2.0944 & 0 & 0 \\ -2.0944 & 3.2725 & -1.1781 & 0 \\ 0 & -1.1781 & 1.7017 & -0.5236 \\ 0 & 0 & -0.5236 & 0.5236 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0+R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 500 \end{Bmatrix}$$

elde edilir. Burada ilk denklemdeki R_1 1 nolu düğüm noktasındaki yerdeğiştirmenin 0 olmasını sağlayan mesnet tepkisini göstermektedir. Sistem rijitlik matrisinde u_1 serbestlik derecesine karşı gelen 1. satır ve 1. sütun göz önüne alınmaz ve matris 3×3 boyutuna indirilir. Geriye kalan üç denklemin çözümünden

$$E_1 = E_3 = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2, E_2 = 7 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

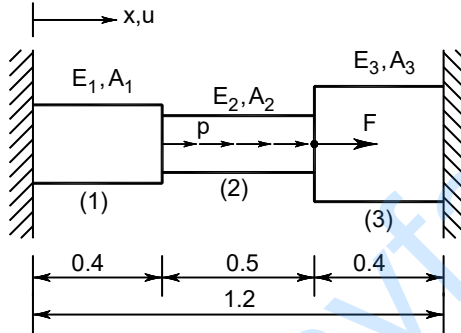
$$A_1 = 0.008 \text{ m}^2, A_2 = 0.005 \text{ m}^2, A_3 = 0.01 \text{ m}^2$$

$$\text{Isıl genleşme katsayıları } \alpha_1 = \alpha_3 = 1.2 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}, \alpha_2 = 2.3 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$$

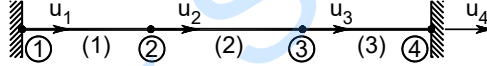
$$2 \text{ numaralı çubuğa etkiyen yayılı yük } p = 10 \text{ kN/m}$$

$$F = 300 \text{ kN}$$

$$\text{Sıcaklık değişimi } \Delta T = 30^\circ$$



Çözüm:



Her bir eleman için rijitlik matrisi

$$[k^{(i)}] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(i)} & k_{12}^{(i)} \\ k_{21}^{(i)} & k_{22}^{(i)} \end{bmatrix} = \frac{EA_i}{L_i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ bağıntısıyla hesaplanır.}$$

Elemanların bağlantı tablosu

Eleman	i	j
1	1	2
2	2	3
3	3	4

1 nolu elemanın rijitlik matrisi

$$[k^{(1)}] = 10^3 \begin{bmatrix} 4000 & -4000 \\ -4000 & 4000 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \leftarrow \text{Sistem serbestlik derecesi numarası}$$

1 nolu elemanın yük vektörü

$$\sigma^{(1)} = \frac{-302.59}{0.008} = -37823 \text{ kN/m}^2 \text{ (çubuk boyunca sabit)}$$

2 nolu çubukta gerilmeler (Basınç kuvvetleri negatif olarak alınmıştır)

$$\sigma_i^{(2)} = \frac{-302.59}{0.005} = -60518 \text{ kN/m}^2 \text{ (i ucunda)}$$

$$\sigma_j^{(2)} = \frac{-307.59}{0.005} = -61518 \text{ kN/m}^2 \text{ (j ucunda)}$$

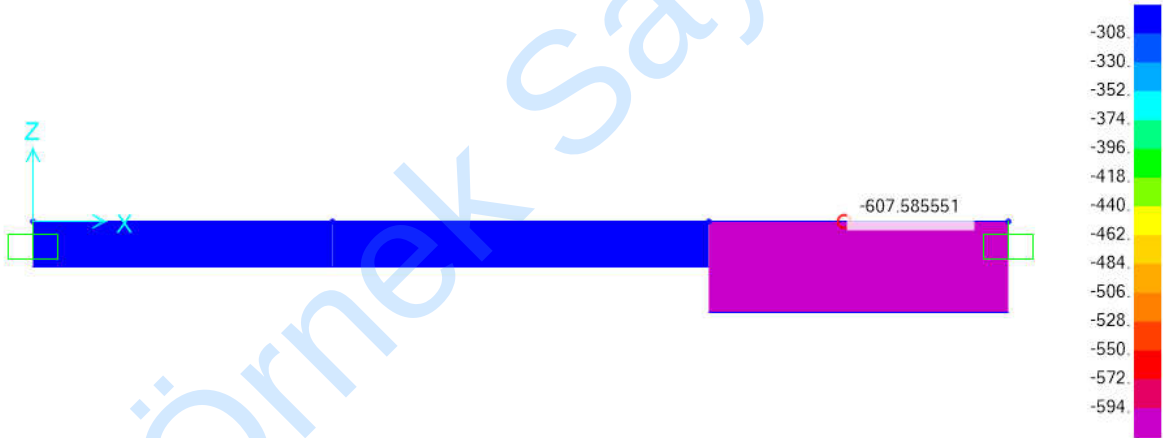
3 nolu çubukta gerilmeler

$$\sigma^{(3)} = \frac{-607.59}{0.01} = -60759 \text{ kN/m}^2 \text{ (çubuk boyunca sabit)}$$

olarak belirlenir.

```
TABLE: "PROGRAM CONTROL"
  ProgramName=SAP2000  Version=25.2.0  CurrUnits="KN, m, C"
TABLE: "ACTIVE DEGREES OF FREEDOM"
  UX=Yes  UY=Yes  UZ=Yes  RX=Yes  RY=Yes  RZ=Yes
TABLE: "COORDINATE SYSTEMS"
  Name=GLOBAL  Type=Cartesian  X=0  Y=0  Z=0  AboutZ=0  AboutY=0  AboutX=0
TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 01 - GENERAL"
  Material=AL  Type=Other  SymType=Isotropic  TempDepend=No  Color=Green
  Material=ST  Type=Other  SymType=Isotropic  TempDepend=No  Color=Green
TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 02 - BASIC MECHANICAL PROPERTIES"
  Material=AL  UnitWeight=0  UnitMass=0  E1=70000000  U12=0  A1=2.3E-05
  Material=ST  UnitWeight=0  UnitMass=0  E1=200000000  U12=0  A1=1.2E-05
TABLE: "FRAME SECTION PROPERTIES 01 - GENERAL"
  SectionName=A1  Material=ST  Shape=General  t3=0.08  t2=0.08  Area=0.008
  SectionName=A2  Material=AL  Shape=General  t3=0.05  t2=0.05  Area=0.005
  SectionName=A3  Material=ST  Shape=General  t3=0.15  t2=0.15  Area=0.01
TABLE: "LOAD PATTERN DEFINITIONS"
  LoadPat=L1  DesignType=Other  SelfWtMult=0
TABLE: "LOAD CASE DEFINITIONS"
  Case=L1  Type=LinStatic  InitialCond=Zero
TABLE: "CASE - STATIC 1 - LOAD ASSIGNMENTS"
  Case=L1  LoadType="Load pattern"  LoadName=L1  LoadSF=1
TABLE: "JOINT COORDINATES"
  Joint=1  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=0  Y=0  Z=0
  Joint=2  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=0.4  Y=0  Z=0
  Joint=3  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=0.9  Y=0  Z=0
  Joint=4  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=1.3  Y=0  Z=0
TABLE: "CONNECTIVITY - FRAME"
  Frame=1  JointI=1  JointJ=2  IsCurved=No  Length=0.4
```

Frame=2	JointI=2	JointJ=3	IsCurved=No	Length=0.5				
Frame=3	JointI=3	JointJ=4	IsCurved=No	Length=0.4				
TABLE: "JOINT RESTRAINT ASSIGNMENTS"								
Joint=1	U1=Yes	U2=Yes	U3=Yes	R1=Yes	R2=Yes	R3=Yes		
Joint=4	U1=Yes	U2=Yes	U3=Yes	R1=Yes	R2=Yes	R3=Yes		
TABLE: "JOINT LOADS - FORCE"								
Joint=3	LoadPat=L1	CoordSys=Local	F1=300	F2=0	F3=0	M1=0	M2=0	M3=0
TABLE: "FRAME SECTION ASSIGNMENTS"								
Frame=1	SectionType=General		AnalSect=A1					
Frame=2	SectionType=General		AnalSect=A2					
Frame=3	SectionType=General		AnalSect=A3					
TABLE: "FRAME LOADS - DISTRIBUTED"								
Frame=2	LoadPat=L1	CoordSys=Local	Type=Force	Dir=1	DistType=RelDist			
RelDistA=0	RelDistB=1	AbsDistA=0	AbsDistB=0.5	FOverLA=10	FOverLB=10			
TABLE: "FRAME LOADS - TEMPERATURE"								
Frame=1	LoadPat=L1	Type=Temperature	Temp=30	JtPattern=None				
Frame=2	LoadPat=L1	Type=Temperature	Temp=30	JtPattern=None				
Frame=3	LoadPat=L1	Type=Temperature	Temp=30	JtPattern=None				
END TABLE DATA								



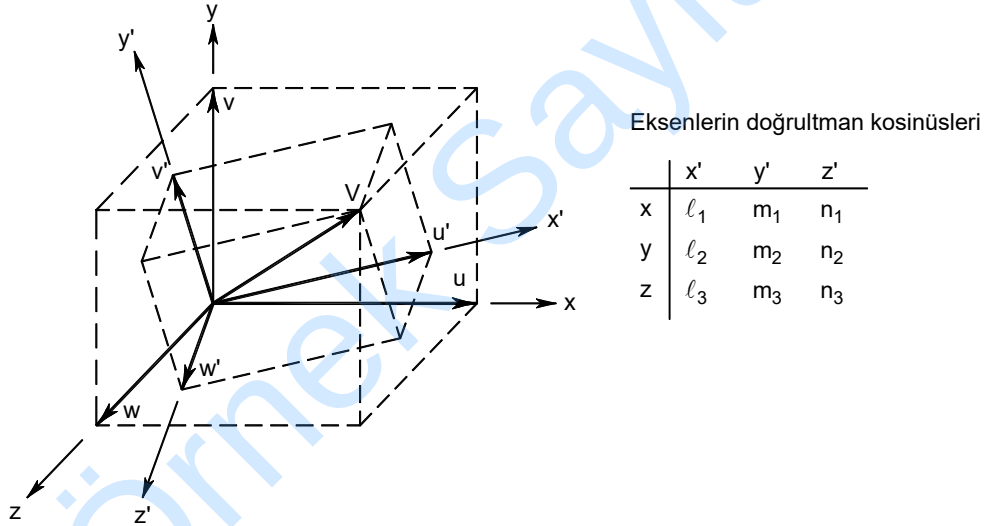
3.2 Düzlem Kafes Çubuk

Yukarıdaki bölümde rijitlik matrisi elde edilen yatay çubuk sisteminde çubuk eksenini ile sistem eksenini yatay durumda birbirine paralel konumdadır. Oysa gerçekte birçok çubuktan oluşan taşıyıcı sistemlerde çubuklar yatay ile belirli bir açıda eğimli olarak bulunacaktır. Bu durumda çubuk yerel eksenlerine göre elde edilen rijitlik matrisinin koordinat dönüşümlerinin yapılması gerekecektir. Bu dönüştürme işlemi eleman eksenleri ile genel eksenler arasındaki dönüşüm ilişkileri kullanılarak kolayca yapılabilir.

Bir O noktasından geçen ve ortak xyz eksenleri doğrultularında u , v ve w gibi üç ayrı bileşeni bulunan $\vec{V}$ vektörü, aynı noktadan geçen birbirine dik diğer bir $x'y'z'$ eksenleri doğrultularında u' , v' ve w' gibi eşdeğer bileşenlere ayrılabilir. $\vec{V}$ vektörü her iki durumda da aynıdır. Yalnızca bileşenlerinin şiddeti, doğrultu ve yönleri değişir.

Eğer her iki eksen takımının birbirleri ile aralarındaki açılar biliniyorsa, bir eksen takımına göre verilmiş bileşenler, diğer eksen takımına göre verilmiş bileşenler cinsinden yazılabilir.

Bir doğrultunun, verilen bir eksen takımına göre eğikliğini belirlemek için o doğrultunun verilen eksen takımına göre yazılmış doğrultman kosinüsleri kullanılabilir. Örneğin, bir A ekseninin doğrultu kosinüsleri ℓ_A , m_A ve n_A şeklinde yazılırsa, bu değerler, A doğrultusunun pozitif yönünün, sırası ile, verilen x , y ve z eksenlerinin pozitif yönleri ile yaptığı küçük açılarının kosinüslerini gösterirler. Şekil 3-3' esası alındığında $x'y'z'$ eksenlerinin xyz eksenlerine göre doğrultman kosinüsleri (ℓ_1, m_1, n_1) , (ℓ_2, m_2, n_2) ve (ℓ_3, m_3, n_3) olacaktır. Örneğin ℓ_1 , x' ve x ; m_3 , y ve z' eksenleri arasındaki açının kosinüsünü göstermektedir.



Şekil 3-3 Eksen takımları

Örnek olarak $x'y'z'$ eksenlerindeki u' , v' ve w' bileşenlerinin ve $x'y'z'$ eksenlerinin xyz eksenlerine göre doğrultman kosinüslerinin de bilindiği durumda u , v ve w bileşenleri hesaplanmak istendiğinde x eksenine doğrultusundaki bileşen olan u değerini bulmak için $\vec{V}$ vektörünün bütün bileşenlerinin x üzerindeki izdüşümlerinin toplanması gerekir. u' bileşenini x eksenine üzerine izdüşürmek için u' değerini, x' doğrultusunun x doğrultusuyla yaptığı açının kosinüsü ile çarpmak, $u'\ell_1$ yazmak gerekmektedir. Aynı şekilde v' bileşenini x eksenine üzerine izdüşürmek için v' ile y' doğrultusunun x doğrultusu ile yaptığı açının kosinüsünü çarpma, yani $v'm_1$ yazmak gerekmektedir.

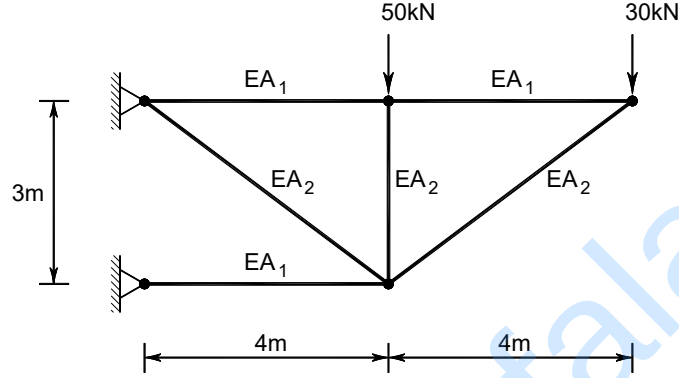
hesaplayınız.

Malzeme ve kesit özellikleri

$$E = 2 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$$

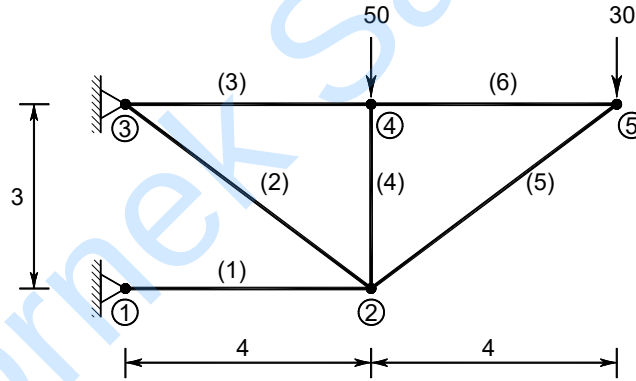
$$A_1 = 0.0015 \text{ m}^2$$

$$A_2 = 0.0010 \text{ m}^2$$



Çözüm:

Sistem aşağıdaki şekilde gösterildiği şekilde modelleneyecektir. Her bir kafes eleman tek bir sonlu eleman ile modellendiğinden hesap modelinde 5 düğüm noktası ve 6 eleman olacaktır.

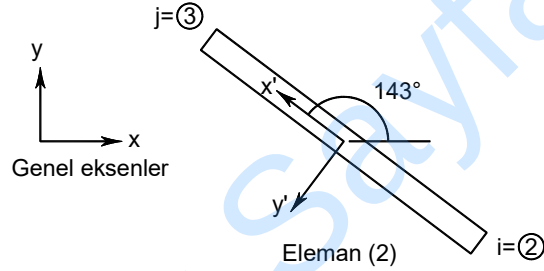


Eleman	i	j	θ
(1)	1	2	0°
(2)	2	3	143°
(3)	3	4	0°
(4)	2	4	90°
(5)	2	5	37°
(6)	4	5	0°

$$[k^{(6)}] = \begin{bmatrix} 75000 & 0 & -75000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -75000 & 0 & 75000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$[T^{(1)}] = [T^{(3)}] = [T^{(6)}] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olarak belirlenir.}$$

2. Eleman $\theta = 143^\circ$



Bu elemanın yerel eksenlerdeki $[k']$ ve genel eksenlerdeki rijitlik matrisi $[k]$

$$[k'^{(2)}] = \begin{bmatrix} 40000 & 0 & -40000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40000 & 0 & 40000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 25600 & -19200 & -25600 & 19200 \\ -19200 & 14400 & 19200 & -14400 \\ -25600 & 19200 & 25600 & -19200 \\ 19200 & -14400 & -19200 & 14400 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$10^3 \cdot \begin{bmatrix} 126.2 & 0 & 0 & 0 & -25.6 & -19.2 \\ 0 & 95.47 & 0 & -66.67 & -19.2 & -14.4 \\ 0 & 0 & 150 & 0 & -75 & 0 \\ 0 & -66.67 & 0 & 66.67 & 0 & 0 \\ -25.6 & -19.2 & -75 & 0 & 100.6 & 19.2 \\ -19.2 & -14.4 & 0 & 0 & 19.2 & 14.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \\ -30 \end{Bmatrix}$$

olarak oluşturulur ve çözülürse bilinmeyen yerdeğiştirme değerleri genel eksenlerde

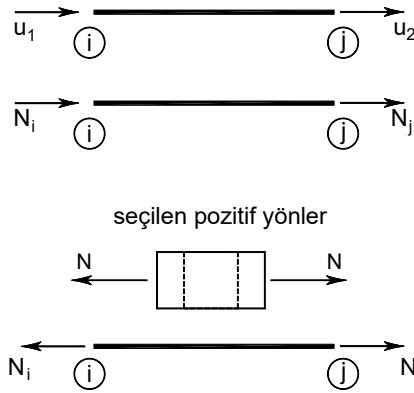
$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.001956 \\ -0.008163 \\ 0.000533 \\ -0.008913 \\ 0.001067 \\ -0.014276 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Genel eksenlerde tüm düğüm noktalarının yerdeğiştirmeleri

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.001956 \\ -0.008163 \\ 0 \\ 0 \\ 0.000533 \\ -0.008913 \\ 0.001067 \\ -0.014276 \end{Bmatrix} \text{ olarak belirlenir.}$$

Mesnet reaksiyonları

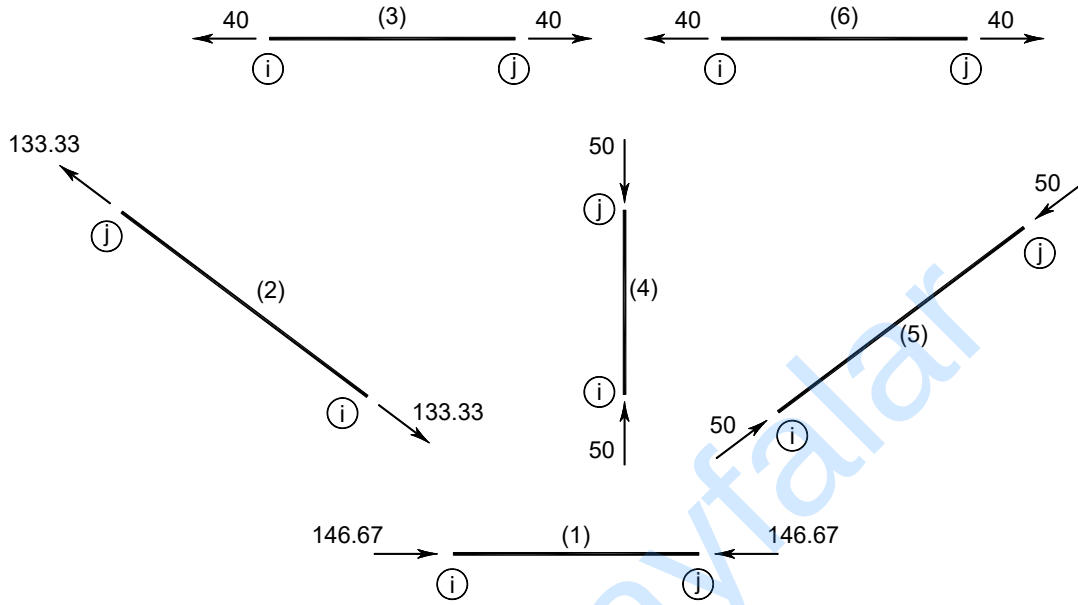
$$\{R\} = [K]\{U\} - \{F\}$$



Günümüzde kullanılan bilgisayar yazılımlarında iç kuvvetler için pozitif yön varsayımı yapılarak iç kuvvetler sonuç dosyalarına bu yönler göre yazılmaktadır. Yukarıda şekilde gösterildiği gibi kafes elemanda oluşacak eksenel çekme kuvveti pozitif yön olarak seçilirse elemanın i ucunda elde edilen eksenel kuvvetin işaretinin değiştirilmesi gerekir. Bu varsayım ile içkuvvetler yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \{F^{(1)}\} &= \begin{Bmatrix} -146.67 \\ 0 \\ -146.67 \\ 0 \end{Bmatrix} & \{F^{(2)}\} &= \begin{Bmatrix} 133.33 \\ 0 \\ 1333.33 \\ 0 \end{Bmatrix} & \{F^{(3)}\} &= \begin{Bmatrix} 40 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \{F^{(4)}\} &= \begin{Bmatrix} -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{Bmatrix} & \{F^{(5)}\} &= \begin{Bmatrix} -50 \\ 0 \\ -50 \\ 0 \end{Bmatrix} & \{F^{(6)}\} &= \begin{Bmatrix} 40 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Eksenel kuvvetin işaretinin (-) olması, içkuvvetin eksenel basınç kuvveti olduğu anlamı taşıyacaktır.



Çubukların eksenel kuvvet diyagramları aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

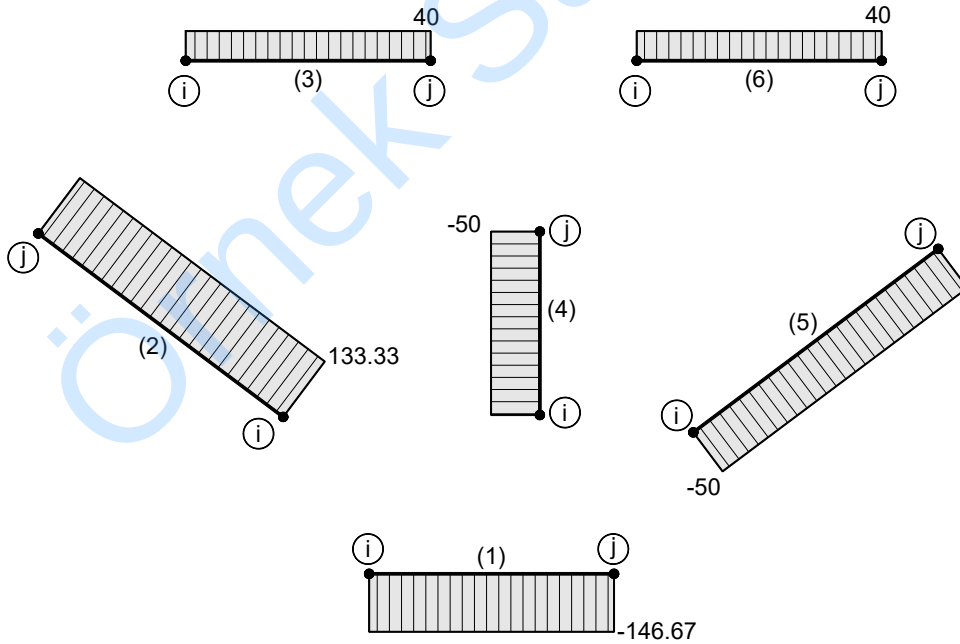


TABLE: "LOAD CASE DEFINITIONS"

Case=L Type=LinStatic InitialCond=Zero

TABLE: "LOAD PATTERN DEFINITIONS"

LoadPat=L DesignType=Other SelfWtMult=0

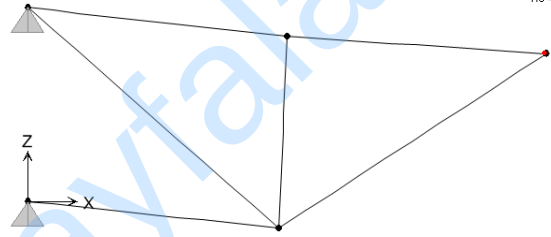
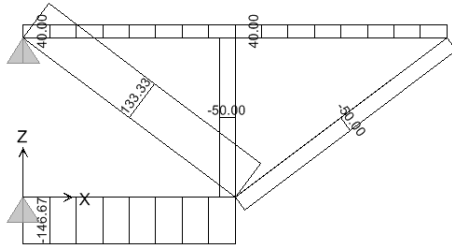
TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 01 - GENERAL"

Material=MAT Type=Other SymType=Isotropic TempDepend=No Color=Blue

TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 02 - BASIC MECHANICAL PROPERTIES"

Material=MAT UnitWeight=0 UnitMass=0 E1=200000000 G12=100000000 U12=0 A1=0

END TABLE DATA



Pr Obj: 5
Pr Elm: 5
U1 = .0011
U2 = 0
U3 = -.0143
R1 = 0
R2 = 0
R3 = 0

kafes2B.py Python dosyası

```
import math
import modul_kd

class KAFES:
    def __init__(self):
        self.L=0.0
        self.no=0
        self.A=0.0; self.E=0.0; self.A=0.0
        self.x=[0.0] * 2; self.y=[0.0] * 2
        self.dnNo=[0 for _ in range(2)]
        self.Kyerel = [[0.0 for _ in range(4)] for _ in range(4)]
        self.Kgenel = [[0.0 for _ in range(4)] for _ in range(4)]
        self.T = [[0.0 for _ in range(4)] for _ in range(4)]
        self.TT = [[0.0 for _ in range(4)] for _ in range(4)]
        self.disp_genel=[0.0] * 4
        self.icKuvvet_genel=[0.0] * 4
        self.icKuvvet_yerel=[0.0] * 4
        self.kod=[0] * 4

    def STIFF(self,fptr2):
        E=self.E; A=self.A
        dx=self.x[1]-self.x[0]
```

```

dy=self.y[1]-self.y[0]
L=math.sqrt(dx*dx+dy*dy)
self.L=L
c=(self.x[1]-self.x[0])/self.L
s=(self.y[1]-self.y[0])/self.L
sc=s*c; c2=c*c; s2=s*s
self.Kyerel[0][0]=(E*A/L);      self.Kyerel[0][1]=0.0
self.Kyerel[0][2]=(-E*A/L);     self.Kyerel[0][3]=0.0
self.Kyerel[1][0]=0.0;          self.Kyerel[1][1]=0.0
self.Kyerel[1][2]=0.0;          self.Kyerel[1][3]=0.0
self.Kyerel[2][0]=(-E*A/L);     self.Kyerel[2][1]=0.0
self.Kyerel[2][2]=(E*A/L);      self.Kyerel[2][3]=0.0
self.Kyerel[3][0]=0.0;          self.Kyerel[3][1]=0.0
self.Kyerel[3][2]=0.0;          self.Kyerel[3][3]=0.0
self.Kgenel[0][0]=c2*(E*A/L);   self.Kgenel[0][1]=sc*(E*A/L)
self.Kgenel[0][2]=-c2*(E*A/L);  self.Kgenel[0][3]=-sc*(E*A/L)
self.Kgenel[1][0]=sc*(E*A/L);   self.Kgenel[1][1]=s2*(E*A/L)
self.Kgenel[1][2]=-sc*(E*A/L);  self.Kgenel[1][3]=-s2*(E*A/L)
self.Kgenel[2][0]=-c2*(E*A/L);  self.Kgenel[2][1]=-sc*(E*A/L)
self.Kgenel[2][2]=c2*(E*A/L);   self.Kgenel[2][3]=sc*(E*A/L)
self.Kgenel[3][0]=-sc*(E*A/L);  self.Kgenel[3][1]=-s2*(E*A/L)
self.Kgenel[3][2]=sc*(E*A/L);   self.Kgenel[3][3]=s2*(E*A/L)
self.T[0][0]=c;                 self.T[0][1]=-s
self.T[0][2]=0.0;               self.T[0][3]=0.0
self.T[1][0]=s;                 self.T[1][1]=c
self.T[1][2]=0.0;               self.T[1][3]=0.0
self.T[2][0]=0.0;               self.T[2][1]=0.0
self.T[2][2]=c;                 self.T[2][3]=-s
self.T[3][0]=0.0;               self.T[3][1]=0.0
self.T[3][2]=s;                 self.T[3][3]=c
modul_kd.matris_transpoze(self.T,self.TT,4,4)

class DUGUM_NOKTASI:
    def __init__(self):
        self.no=0
        self.x=0
        self.y=0
        self.mesnet=[0] * 2
        self.disp=[0.0] * 2
        self.kod=[0] * 2

```

Düğüm Noktası Tepki Kuvvetleri

D. No	RX	RY
1	1.4667e+02	0.0000e+00
2	0.0000e+00	0.0000e+00
3	-1.4667e+02	8.0000e+01
4	0.0000e+00	0.0000e+00
5	0.0000e+00	0.0000e+00

Eleman iç Kuvvetleri

E. No	Ni	Nj
1	1.4667e+02	-1.4667e+02
2	-1.3333e+02	1.3333e+02
3	-4.0000e+01	4.0000e+01
4	5.0000e+01	-5.0000e+01
5	5.0000e+01	-5.0000e+01
6	-4.0000e+01	4.0000e+01

3.3 Uzak Kafes Sistemler

Üç boyutlu kafes sistemler uzak kafes sistem olarak adlandırılmaktadır. Uzak kafes sistemlerin sonlu eleman formülasyonu düzlem kafes sistemlerin geliştirilmiş hali olarak düşünülebilir. Uzak kafes sistemde elemanın yer değiştirmiş durumu her bir düğüm noktası üç yönde hareket edebileceğinden $u_{ix}, u_{iy}, u_{iz}, u_{jx}, u_{jy}, u_{jz}$ olmak üzere 6 bilinmeyen ile tanımlanabilir. Ayrıca $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ açıları elemanın genel eksenlere göre eğikliğini tanımlar, Şekil 3-6.

Doğrultman kosinüs değerleri i ve j düğüm noktalarının koordinatlarına ve eleman uzunluğuna bağlı olarak Denk.(3.57) ile belirlenir.

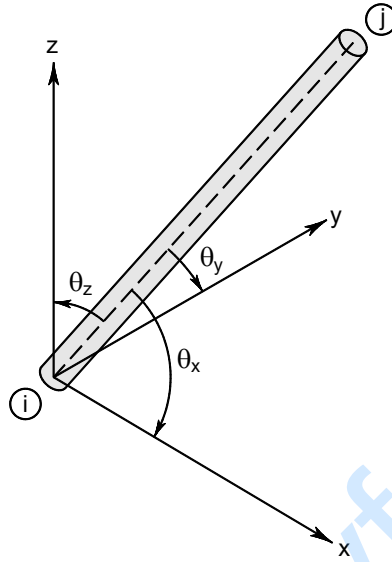
$$\cos\theta_x = \frac{x_j - x_i}{L}$$

$$\cos\theta_y = \frac{y_j - y_i}{L} \quad (3.57)$$

$$\cos\theta_z = \frac{z_j - z_i}{L}$$

Burada L eleman uzunluğunu göstermektedir.

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (3.58)$$



Şekil 3-6 Uzak kafes eleman ve doğrultman kosinüs açıları

Eleman rijitlik matrisinin elde edilmesinde izlenen yöntem düzlem kafes elemandakine benzerdir. Uzak kafes eleman için rijitlik matrisi $c_x = \cos\theta_x$, $c_y = \cos\theta_y$, $c_z = \cos\theta_z$ olmak üzere Denk.(3.59) ile elde edilebilir.

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z & -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z \\ c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z & -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z \\ c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 & -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 \\ -c_x^2 & -c_x c_y & -c_x c_z & c_x^2 & c_x c_y & c_x c_z \\ -c_x c_y & -c_y^2 & -c_y c_z & c_x c_y & c_y^2 & c_y c_z \\ -c_x c_z & -c_y c_z & -c_z^2 & c_x c_z & c_y c_z & c_z^2 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

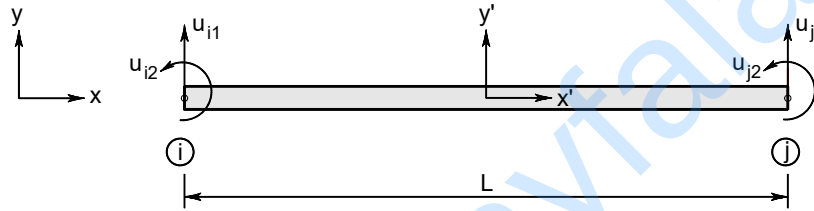
3.4 Düzlem Kiriş Eleman

Kiriş eleman kesit boyutları uzunluğuna göre küçük olan ve eğilme etkisinde bulunan elemanlardır. Şekil 3-7'da düzgün yayılı yük etkisindeki basit mesnetli bir kiriş eleman gösterilmektedir.

$$\Lambda^{(e)} = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (3.66)$$

elde edilir.

En basit kiriş eleman iki noktalı ve her bir düğüm noktasında düşey yerdeğiştirme ve dönme olmak üzere iki serbestlik derecesi bulunan elemandır, Şekil 3-8. Elemanda toplam dört düğüm noktası bilinmeyişi bulunduğundan yerdeğiştirme alanını tanımlamak üzere üçüncü dereceden dört katsayılı polinom kullanılmalıdır. Ayrıca şekil fonksiyonların birinci türevlerinin de sürekli olması gerekmektedir. Bu tür şekil fonksiyonları Hermite türünde şekil fonksiyonları olarak adlandırılmakta ve daha önceki bölümlerde değinilen doğrusal şekil fonksiyonlarından bazı farklılıklar içermektedir.



Şekil 3-8 Düzlem kiriş eleman

Üçüncü dereceden polinom olarak

$$v = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (3.67)$$

Elemanın uç koşulları göz önüne alındığında

i ucunda düşey yerdeğiştirme $x=0$ $v = a_1 = u_{i1}$

i ucunda dönme (eğim) $x=0$ $\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = a_2 = u_{i2}$

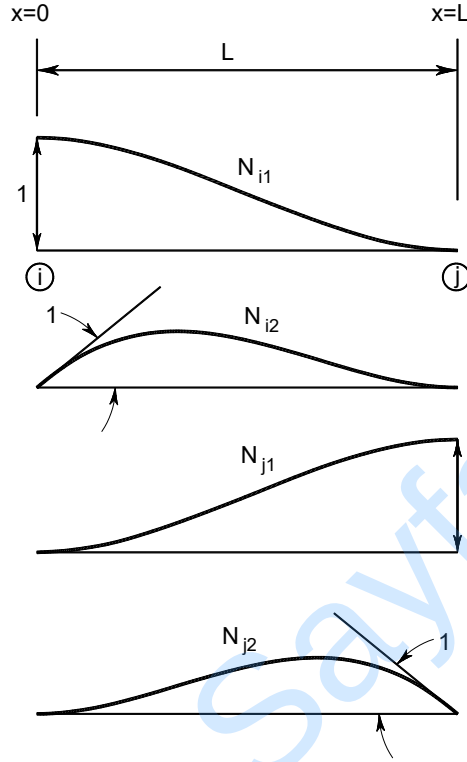
j ucunda düşey yerdeğiştirme $x=L$ $v = a_1 + a_2 L + a_3 L^2 + a_4 L^3 = u_{j1}$

j ucunda dönme (eğim) $x=L$ $\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = a_2 + 2a_3 L + 3a_4 L^2 = u_{j2}$

Elde edilen dört denklem çözülerek dört adet a_1, a_2, a_3, a_4 bilinmeyişi hesaplanır ve (3.67) denkleminde $u_{i1}, u_{i2}, u_{j1}, u_{j2}$ terimleri de kullanılarak yerine yazılırsa

$$v = N_{i1} u_{i1} + N_{i2} u_{i2} + N_{j1} u_{j1} + N_{j2} u_{j2} \quad (3.68)$$

Burada kullanılan şekil fonksiyonları



Şekil 3-9

Şekil fonksiyonların ikinci türevleri için aşağıdaki notasyon kullanılır ve

$$D_{i1} = \frac{d^2 N_{i1}}{dx^2}, \quad D_{i2} = \frac{d^2 N_{i2}}{dx^2}, \quad D_{j1} = \frac{d^2 N_{j1}}{dx^2}, \quad D_{j2} = \frac{d^2 N_{j2}}{dx^2} \quad (3.74)$$

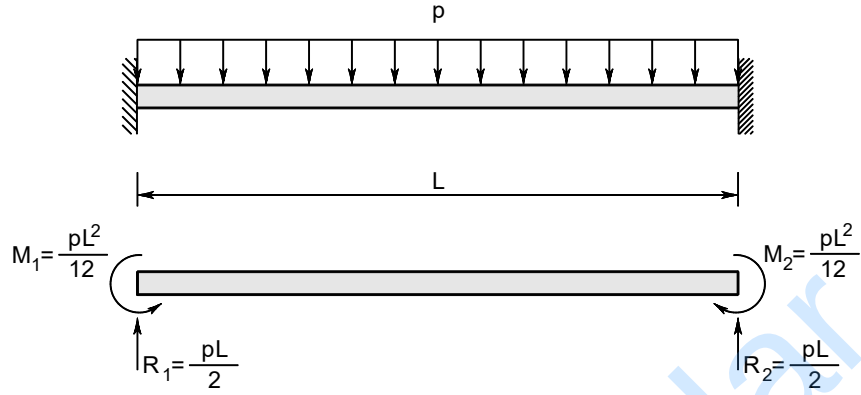
Denk.(3.73) matris düzeninde yazılırsa

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = [D] \{u\} \quad (3.75)$$

elde edilir. $\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2$ terimi $[D]$ ve $\{u\}$ cinsinden

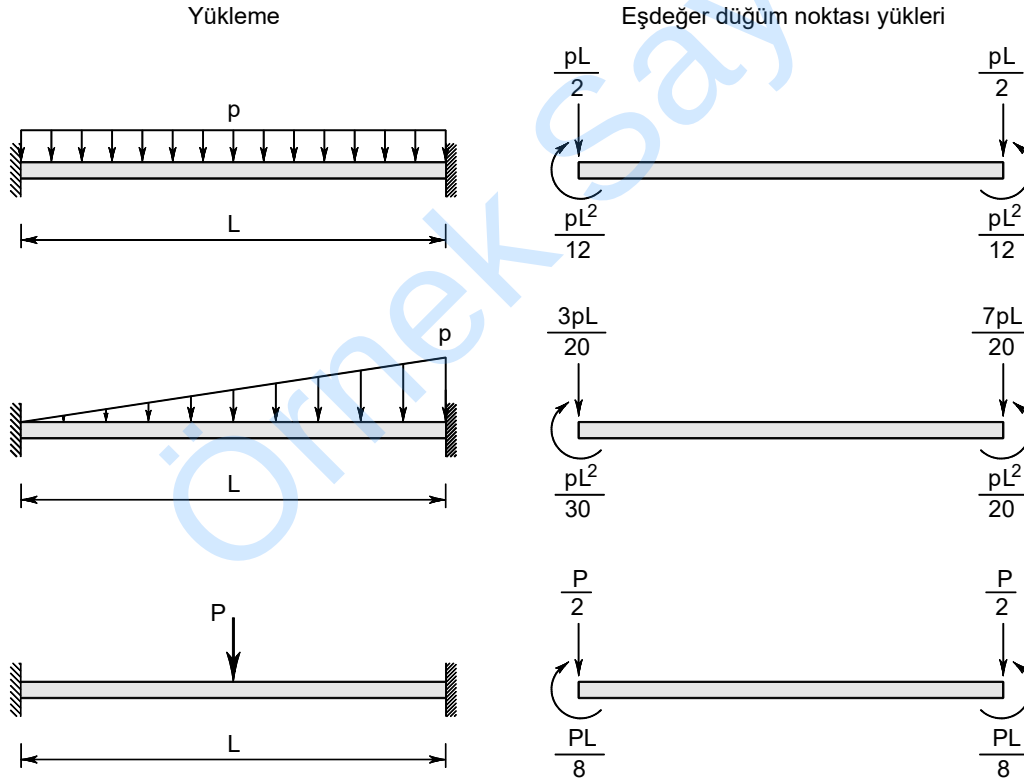
$$\left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 = \{u\}^T [D]^T [D] \{u\} \quad (3.76)$$

olarak yazılır.



Şekil 3-10 Düzgün yayılı yük için ankastrelik uç kuvvetleri

Benzer şekilde düğüm noktası yük matrisleri diğer yük şekilleri içinde belirlenebilir. Kiriş elemanlarda yaygın olarak karşılaşılan yük şekilleri ile karşı gelen eşdeğer düğüm noktası yükleri Şekil 3-11'de gösterilmektedir.



Şekil 3-11 Yük şekilleri ile karşı gelen eşdeğer düğüm noktası yükleri

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \cdot \begin{Bmatrix} -0.425 \\ -0.608 \\ -2.188 \\ -0.842 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

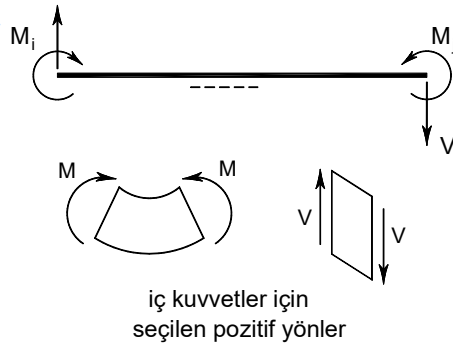
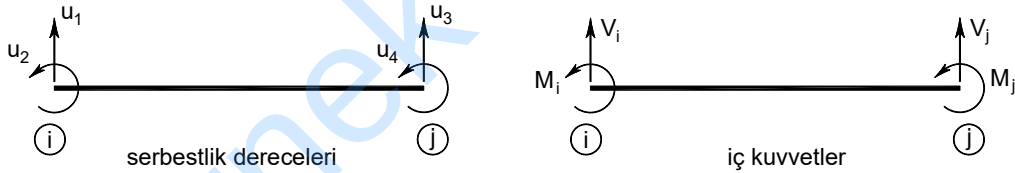
Eleman iç kuvvetleri

$$(1) \text{ elemanı için } \{F^{(1)}\} = [k^{(1)}] \{u^{(1)}\}$$

$$\{F^{(1)}\} = 10^3 \begin{bmatrix} 995.328 & 622.08 & -995.328 & 622.08 \\ 622.08 & 518.4 & -622.08 & 259.2 \\ -995.328 & -622.08 & 995.328 & -622.08 \\ 622.08 & 259.2 & -622.08 & 518.4 \end{bmatrix} 10^{-3} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.425 \\ -0.608 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45 \\ 106.875 \\ -45 \\ -50.625 \end{Bmatrix}$$

$$(2) \text{ elemanı için } \{F^{(2)}\} = [k^{(2)}] \{u^{(2)}\}$$

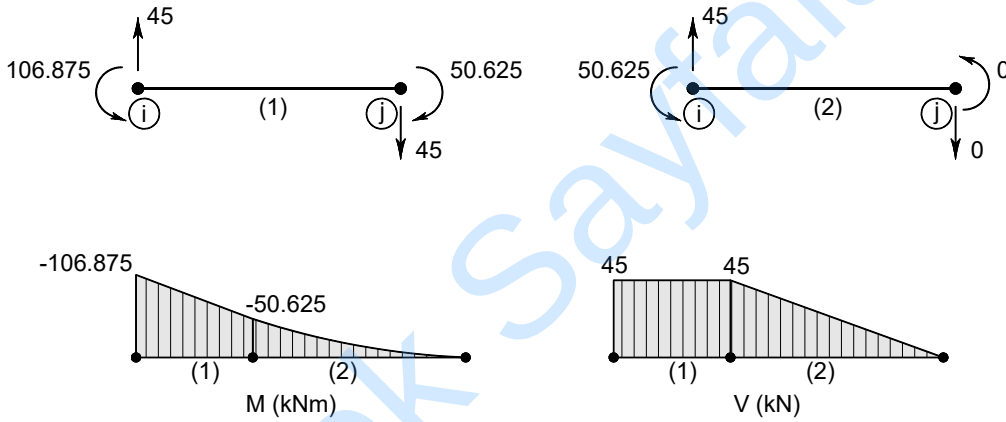
$$\{F^{(2)}\} = 10^3 \begin{bmatrix} 170.667 & 192 & -170.667 & 192 \\ 192 & 288 & -192 & 144 \\ -170.667 & -192 & 170.667 & -192 \\ 192.000 & 144 & -192 & 288 \end{bmatrix} 10^{-3} \cdot \begin{Bmatrix} -0.425 \\ -0.608 \\ -2.188 \\ -0.842 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -22.5 \\ -8.4375 \\ -22.5 \\ 8.4375 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 45 \\ 50.625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



Eleman iç kuvvetleri için pozitif yönler yukarıdaki şekildeki gibi seçilirse i ucunda M – ile , j ucunda V – ile çarpılarak

$$\{F^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} 45 \\ -106.875 \\ 45 \\ -50.625 \end{Bmatrix} \quad \{F^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 45 \\ -50.625 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Çubukların eğilme momenti ve kesme kuvveti diyagramları aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



3.5 Düzlem çubuk eleman

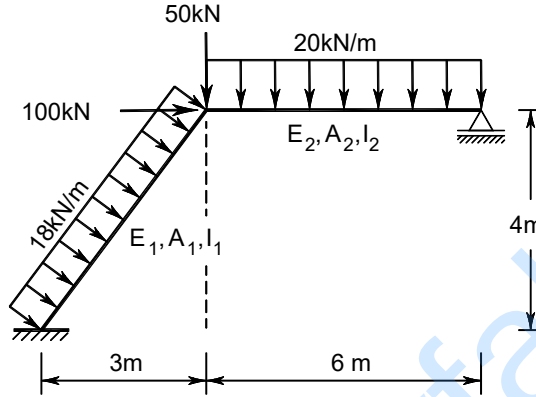
Düzlem çubuk eleman düzlem çerçeve sistemlerin çözümünde kullanılan elemandır. Kiriş elemenda düğüm noktasında bulunan çubuk eksenine dik yerdeğiştirme ve dönme serbestliklerine ek olarak eksenel doğrultudaki yerdeğiştirme de serbestlik derecesi olarak göz önüne alınır. Şekil 3-12 incelendiğinde elemanın iki düğüm noktası bulunduğu görülmektedir. Her bir düğüm noktasında 2 öteleme ve 1 dönme olmak üzere 3 serbestlik derecesi bulunmaktadır. Şekilde u_1 i ucundaki boyuna doğrultudaki yerdeğiştirmeyi, u_2 i ucunda çubuk eksenine dik doğrultudaki yerdeğiştirmeyi ve u_3 i ucundaki dönmeyi göstermektedir. Benzer şekilde u_{j1} , u_{j2} ve u_{j3} ; j ucundaki boyuna yerdeğiştirme, enine yerdeğiştirme ve dönmeyi göstermektedir.

Her bir düğüm noktasında 3 bilinmeyen bulunduğundan eleman rijitlik matrisi 6×6 boyutunda olacaktır. Genel eksenlerdeki serbestlik dereceleri ile yerel eksenlerdeki serbestlik dereceleri arasında ilişki dönüşüm matrisi ile kurulmaktadır.

Örnek 3-6

Şekilde gösterilen sistemin çözümünü yapınız.

$$E_1 = E_2 = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \quad A_1 = 0.2 \text{ m}^2 \quad A_2 = 0.18 \text{ m}^2 \quad I_1 = 4.167 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4 \quad I_2 = 5.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4$$



Çözüm:

Yerel eksenlerde eleman rijitlik matrisleri Denk.(3.86) kullanılarak hesaplanır.

1. Eleman $\theta = 53^\circ$

Yerel eksenlerde eleman rijitlik matrisi

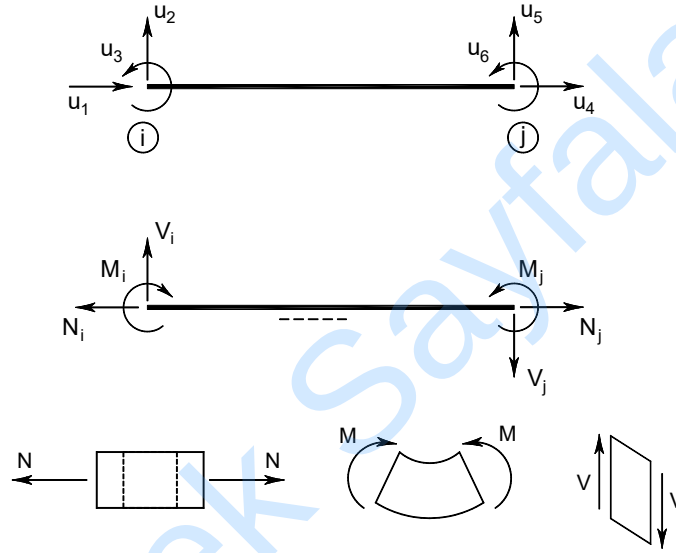
$$[k^{(1)}] = 10^3 \begin{bmatrix} 1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

Genel eksenlerde eleman rijitlik matrisi ve yük matrisi, dönüşüm matrisi kullanılarak elde edilir.

$$\{k\} = [T][k'][T]^T$$

$$\{F\} = [T]\{F'\}$$

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 1200 & 0 & 0 & -1200 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -1200 & 0 & 0 & 1200 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.010 \\ -20.312 \\ -2.748 \end{Bmatrix} 10^{-3} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 45 \\ 37.5 \\ 0 \\ 45 \\ -37.5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.60 \\ 206.30 \\ 509.45 \\ 11.60 \\ -116.30 \\ 297.03 \end{Bmatrix}$$



Eleman iç kuvvetleri için pozitif yönler yukarıdaki şekildeki gibi seçilirse i ucunda N ve M – ile, j ucunda V – ile çarpılarak

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11.60 \\ 206.30 \\ -509.45 \\ 11.60 \\ 116.30 \\ 297.03 \end{Bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

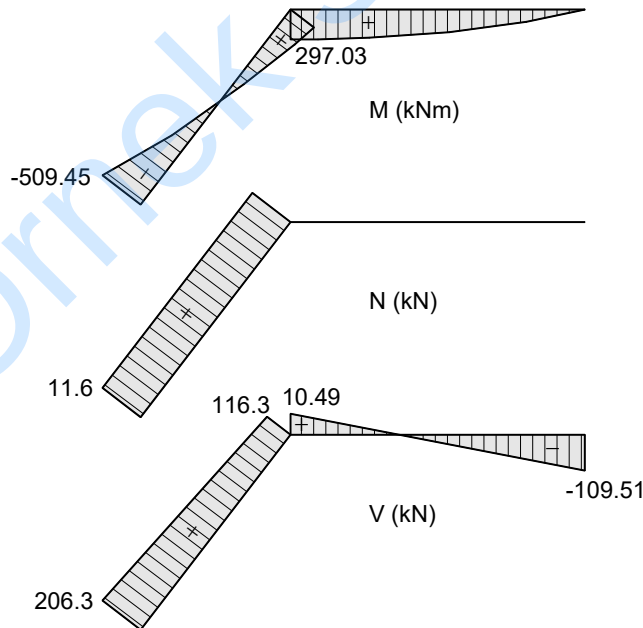
2 nolu elemanda benzer adımlar izlenirse

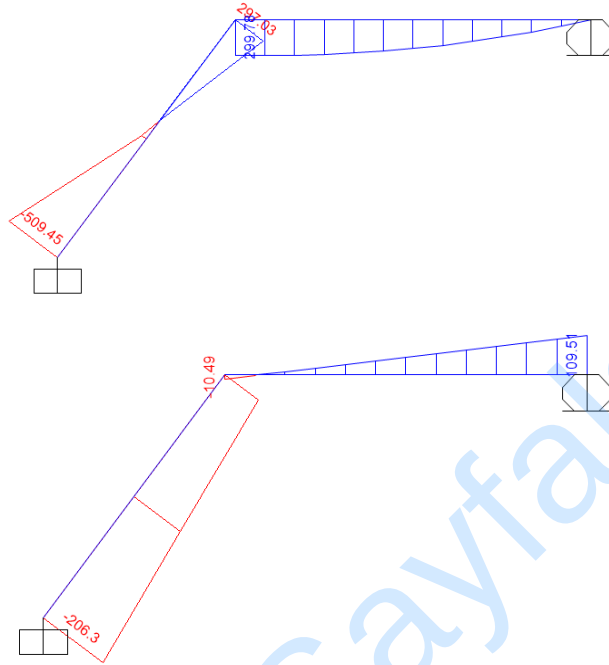
$$\begin{Bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 900 & 0 & 0 & -900 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 27 & 0 & -9 & 27 \\ 0 & 27 & 108 & 0 & -27 & 54 \\ -900 & 0 & 0 & 900 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -27 & 0 & 9 & -27 \\ 0 & 27 & 54 & 0 & -27 & 108 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 16.255 \\ -12.180 \\ -2.748 \\ 16.255 \\ 0.000 \\ 4.975 \end{Bmatrix} 10^{-3} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 60 \\ 60 \\ 0.00 \\ 60 \\ -60 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10.49 \\ -297.03 \\ 0 \\ 109.51 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Eleman iç kuvvetleri için seçilen pozitif yönler göz önüne alınarak i ucunda N ve M – ile ,j ucunda V – ile çarpılarak

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ V_i \\ M_i \\ N_j \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10.49 \\ 297.03 \\ 0 \\ -109.51 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

Çubukların eğilme momenti, normal kuvvet ve kesme kuvveti diyagramları aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.





cubuk2B.py Python dosyası

```
import math
import modul_kd

class CUBUK2D:
    def __init__(self):
        self.aci=0
        self.L=0.0
        self.no=0
        self.A=0.0; self.E=0.0; self.A=0.0
        self.x=[0.0] * 2; self.y=[0.0] * 2
        self.p2=0.0
        self.dnNo=[0 for _ in range(2)]
        self.Kyerel = [[0.0 for _ in range(6)] for _ in range(6)]
        self.Kgenel = [[0.0 for _ in range(6)] for _ in range(6)]
        self.T = [[0.0 for _ in range(6)] for _ in range(6)]
        self.TT = [[0.0 for _ in range(6)] for _ in range(6)]
        self.disp_genel=[0.0] * 6
        self.icKuvvet_genel=[0.0] * 6
        self.icKuvvet_yerel=[0.0] * 6
        self.kod=[0] * 6
        self.ankyerel=[0.0] * 6
```

```

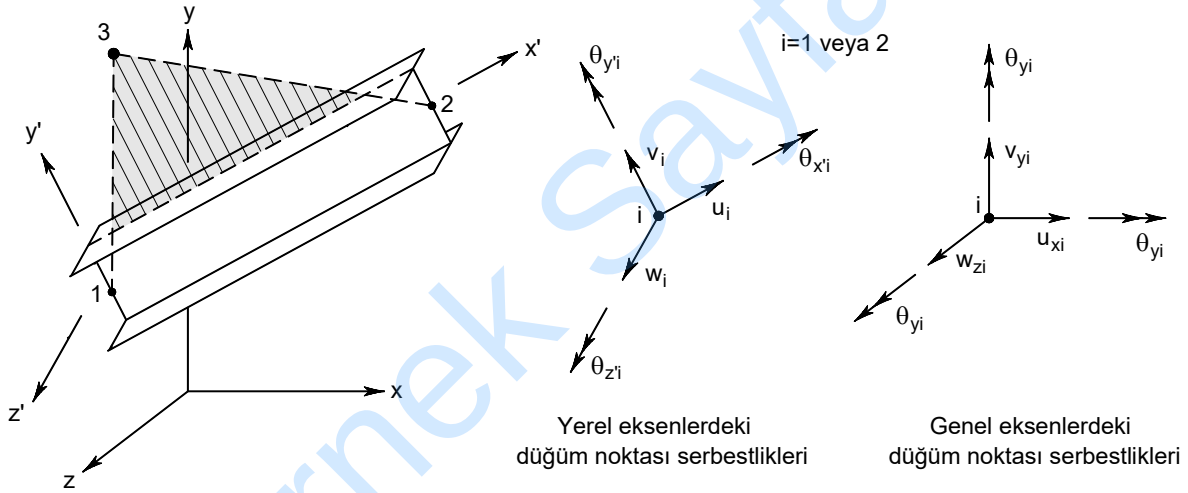
for i in range(nr):
    satir = fptr1.readline().strip()
    numbers=satir.split()
    dnNo=int(numbers[0])
    for j in range(ndof):
        DN[i].mesnet[j]=int(numbers[j+1])
        ID[dnNo-1][j]=int(numbers[j+1])
        MESNET[ndof*(dnNo-1)+j]=int(numbers[j+1])
SRM = [[0.0 for _ in range(un)] for _ in range(un)]
SYM=[0.0] * un
FX=[0.0] * nj
FY=[0.0] * nj
MZ=[0.0] * nj
YERDEGISTIRME=[0.0] * un
REAKSIYON=[0.0] * un
dn=[0]*2
# ***** Eleman Bilgileri *****
modul_kd.satirOku(fptr1,1)
nEleman=int(fptr1.readline())
EL=[CUBUK2D() for i in range(nEleman)]
modul_kd.satirOku(fptr1,2)
for i in range(nEleman):
    satir = fptr1.readline().strip()
    numbers=satir.split()
    No=int(numbers[0])
    EL[No-1].no=No
    for j in range(2):
        dn[j]=int(numbers[j+1])
        EL[No-1].dnNo[j]=dn[j]
    EL[No-1].E=float(numbers[3])
    EL[No-1].A=float(numbers[4])
    EL[No-1].I=float(numbers[5])
    EL[No-1].p2=float(numbers[6])
    for j in range(2):
        EL[No-1].x[j]=DN[dn[j]-1].x
        EL[No-1].y[j]=DN[dn[j]-1].y
    EL[No-1].STIFF(fptr2)
    EL[No-1].ank()
    for j in range(2):
        t1=EL[No-1].dnNo[j]
        for k in range(ndof):
            EL[No-1].kod[j*ndof+k]=DN[t1-1].kod[k]
    for j in range(2*ndof):
        y1=EL[No-1].kod[j]
        SYM[y1]+=EL[No-1].ankgenel[j]

```

Burada $[T]$ dönüştürme matrisidir ve Denk.(3.90) ile belirlenir.

$$[T] = \begin{bmatrix} [\lambda]_{3 \times 3} & & & \\ & [\lambda]_{3 \times 3} & & \\ & & [\lambda]_{3 \times 3} & \\ & & & [\lambda]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$



Şekil 3-13

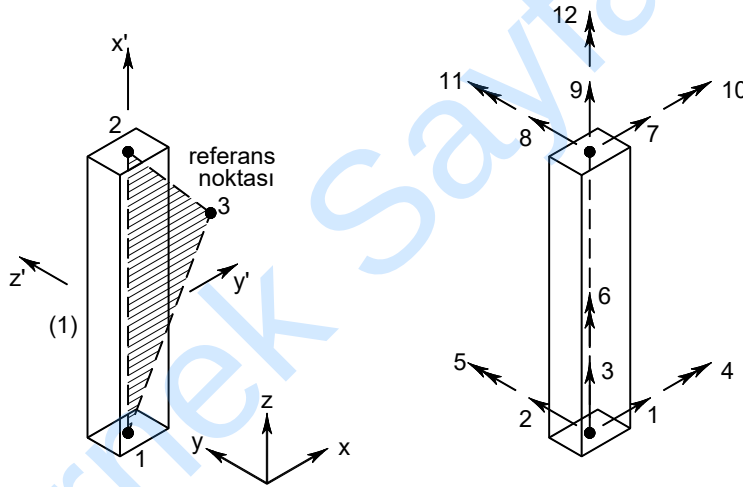
Burada ℓ_1 , m_1 ve n_1 x' eksenine ile sırasıyla x , y , z eksenleri arasındaki açıların kosinüsleridir. Benzer şekilde ℓ_2 , m_2 ve n_2 y' eksenine ile, ℓ_3 , m_3 ve n_3 z' eksenine ile x , y , z eksenleri arasındaki açıların kosinüsleridir.

Bu büyüklükler 1, 2 ve 3 noktalarının koordinatlarına bağlı olarak

$$\ell_1 = \frac{x_2 - x_1}{L} \quad m_1 = \frac{y_2 - y_1}{L} \quad n_1 = \frac{z_2 - z_1}{L} \quad (3.92)$$

olarak hesaplanır. Eleman uzunluğu da Denk. (3.93) ile hesaplanır.

$$[k^{(1)}] = 10^3 \begin{bmatrix} 2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 96 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 & -96 & 0 & 0 & 0 & 144 \\ 0 & 0 & 42.667 & 0 & -64 & 0 & 0 & 0 & -42.667 & 0 & -64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 37.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -37.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -64 & 0 & 128 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 144 & 0 & 0 & 0 & 288 & 0 & -144 & 0 & 0 & 0 & 144 \\ -2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -96 & 0 & 0 & 0 & -144 & 0 & 96 & 0 & 0 & 0 & -144 \\ 0 & 0 & -42.667 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0 & 42.667 & 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -37.56 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 37.56 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -64 & 0 & 64 & 0 & 0 & 0 & 64 & 0 & 128 & 0 \\ 0 & 144 & 0 & 0 & 0 & 144 & 0 & -144 & 0 & 0 & 0 & 288 \end{bmatrix}$$

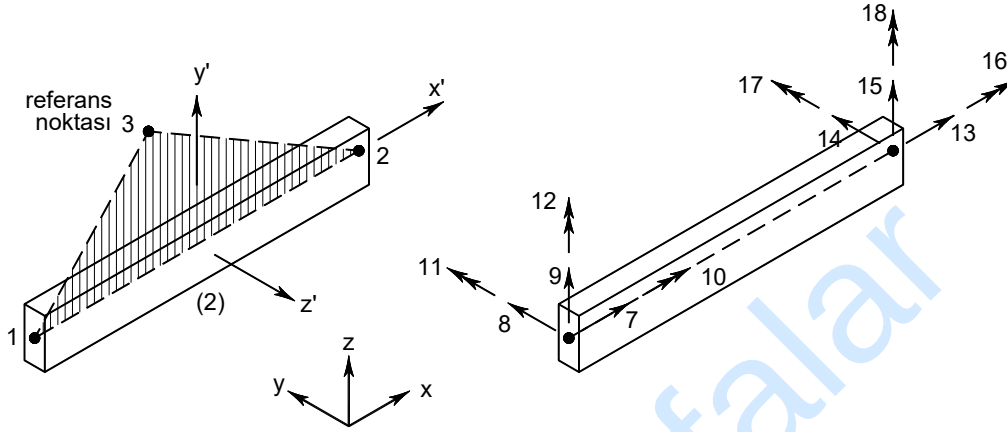


Genel eksenlerde eleman rijitlik matrisi ve yük matrisi dönüşüm matrisi kullanılarak elde edilir.

$$[k] = [T]^T [k'] [T]$$

$$\{F\} = [T] \{F'\}$$

$[\lambda]$ kullanılarak $[T]$ matrisi hesaplanır.



Denk.(3.88) kullanılarak yerel eksenlerde eleman rijitlik matrisi ve yük vektörü hesaplanır.

$$[k^{(2)}] = 10^3 \begin{bmatrix} 1125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25.313 & 0 & 0 & 0 & 50.625 & 0 & -25.313 & 0 & 0 & 0 & 50.625 \\ 0 & 0 & 4.395 & 0 & -8.790 & 0 & 0 & 0 & -4.395 & 0 & -8.790 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.651 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8.651 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.790 & 0 & 23.439 & 0 & 0 & 0 & 8.790 & 0 & 11.720 & 0 \\ 0 & 50.625 & 0 & 0 & 0 & 135 & 0 & -50.625 & 0 & 0 & 0 & 67.500 \\ -1125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1125 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -25.313 & 0 & 0 & 0 & -50.625 & 0 & 25.313 & 0 & 0 & 0 & -50.625 \\ 0 & 0 & -4.395 & 0 & 8.790 & 0 & 0 & 0 & 4.395 & 0 & 8.790 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8.651 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8.651 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8.790 & 0 & 11.720 & 0 & 0 & 0 & 8.790 & 0 & 23.439 & 0 \\ 0 & 50.625 & 0 & 0 & 0 & 67.500 & 0 & -50.625 & 0 & 0 & 0 & 135 \end{bmatrix}$$

Eleman ankastrelik uç kuvvetleri aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

Eleman ankastrelik uç kuvvetlerinin işaretleri ters çevrildiğinde düzgün yayılı yükün etkisini temsil eden eşdeğer düğüm noktası yükleri belirlenmiş olur.

Yerel eksenlerde eleman yük vektörü

$$\{f^{(2)}\} = [0 \quad -40 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -26.67 \quad 0 \quad -40 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 26.67]$$

$$v_{13} = \begin{bmatrix} \frac{x_3 - x_1}{L_{13}} & \frac{y_3 - y_1}{L_{13}} & \frac{z_3 - z_1}{L_{13}} \end{bmatrix}^T = [0 \quad 0.707 \quad 0.707]^T$$

vektörü tanımlansın. z' eksenini doğrultusundaki birim vektör

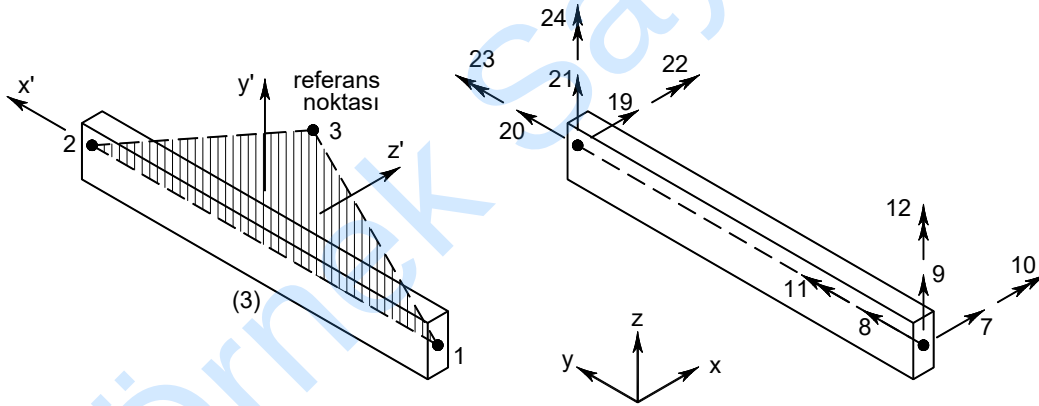
$$v_{z'} = [\ell_3 \quad m_3 \quad n_3]^T = \frac{v_{x'} \times v_{13}}{|v_{x'} \times v_{13}|} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$$

y' eksenini doğrultusundaki birim vektör

$$v_{y'} = [\ell_2 \quad m_2 \quad n_2]^T = v_{z'} \times v_{x'} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \\ \ell_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

$[\lambda]$ kullanılarak $[T]$ matrisi hesaplanır.



Denk.(3.88) kullanılarak yerel eksenlerde eleman rijitlik matrisi ve yük vektörü hesaplanır.

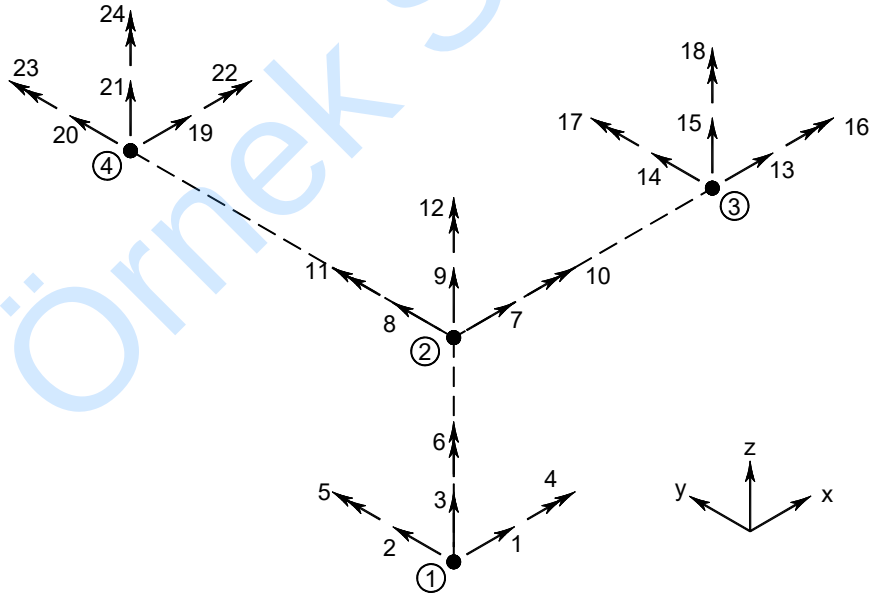
$$[k^{(3)}] = 10^3 \begin{bmatrix} 2.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.625 & -2.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5.625 \\ 0 & 900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -900 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12.96 & 32.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12.96 & 32.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32.4 & 108 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32.4 & 54 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6.921 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6.921 & 0 \\ -5.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.751 & 5.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.376 \\ -2.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.625 & 2.250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.625 \\ 0 & -900 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 900 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12.96 & -32.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12.96 & -32.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32.4 & 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & -32.4 & 108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6.921 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.921 & 0 \\ -5.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9.376 & 5.625 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18.751 \end{bmatrix}$$

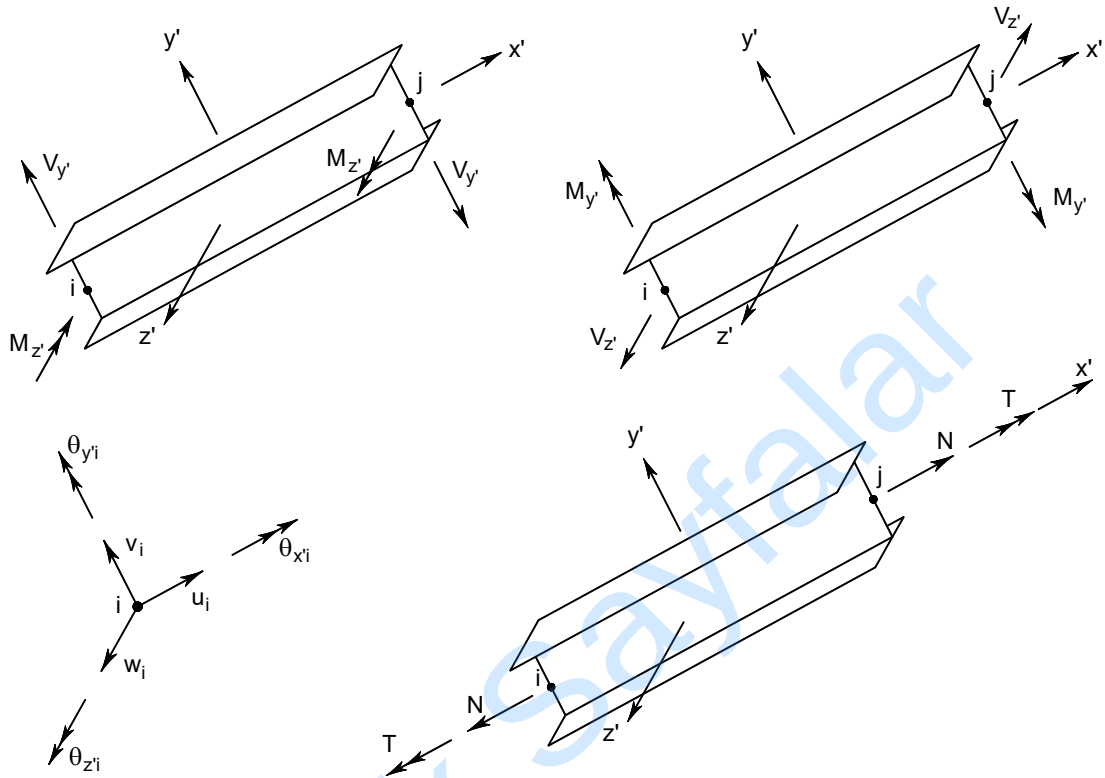
Sınır koşulları

1 nolu düğüm noktasında $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$

3 nolu düğüm noktasında $u_{14} = u_{15} = u_{16} = u_{18} = 0$

4 nolu düğüm noktasında $u_{19} = u_{20} = u_{21} = u_{22} = u_{23} = u_{24} = 0$





Yerel eksenlerdeki
düğüm noktası serbestlikleri

Eleman iç kuvvetleri için pozitif yönler yukarıdaki şekildeki gibi seçilirse çubuğun i ucunda N , M_z , T , j ucunda V_y , V_z , M_y – ile çarpılır. Bu yön kabulü ile 1, 2 ve 3 nolu çubuk elemanlar için iç kuvvet değerleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

```

    fptr2.write("\n")
for i in range(un):
    if MESNET[i]==1:
        SRM[i][i]=(SRM[i][i]-1)/(1e9+1)
# ***** Mesnet Reaksiyonları *****
modul_kd.matris_dizi_carp(SRM, YERDEGISTIRME,REAKSIYON, un, un)
for i in range(un):
    REAKSIYON[i]==SYM[i]
    if MESNET[i]==0:
        REAKSIYON[i]=0
fptr2.write("\nDüğüm Noktası Tepki Kuvvetleri\n")
fptr2.write("D. No      RX      RY      RZ ")
fptr2.write("      MX      MY      MZ\n")
fptr2.write("-"*100+"\n")
for i in range(nj):
    fptr2.write(f"DN[i].no:<{10}")
    for j in range(ndof):
        fptr2.write(f"{REAKSIYON[DN[i].kod[j]]:>{12}.4e}\t")
    fptr2.write("\n")
# ***** İç Kuvvet Hesabı ve Dosyaya Yazdırılması *****
fptr2.write("\nÇubuk Eleman İç Kuvvetleri \n")
fptr2.write("E. No      D. No      P      V2      V3 ")
fptr2.write("      T      M2      M3\n")
fptr2.write("-"*100)
for i in range(nEleman):
    for j in range(12):
        EL[i].disp_genel[j]=YERDEGISTIRME[EL[i].kod[j]]
    fptr2.write("\n")
    modul_kd.matris_dizi_carp(EL[i].T, EL[i].disp_genel, EL[i].disp_yerel, 12, 12)
    modul_kd.matris_dizi_carp(EL[i].Kyerel, EL[i].disp_yerel, EL[i].icKuvvet_yerel, 12,
12)
    for j in range(12):
        EL[i].icKuvvet_yerel[j]==EL[i].ankyerel[j]
    fptr2.write(f"{EL[i].no:<10} {EL[i].dnNo[0]:<10}")
    for j in range(6):
        fptr2.write(f"{EL[i].icKuvvet_yerel[j]:>{13}.4e}")
    fptr2.write("\n")
    fptr2.write(f"{EL[i].no:<10} {EL[i].dnNo[1]:<10}")
    for j in range(6,12) :
        fptr2.write(f"{EL[i].icKuvvet_yerel[j]:>{13}.4e}")
    fptr2.write("\n")
fptr2.close()
print("Analiz tamamlandı...")

```

Giriş bilgileri dosyası

3B Çubuk Sistem Analizi

ÖRNEK 1

Düğüm Noktası Sayısı

4

Düğüm Noktası Adı ve Koordinatları

No	x	y	z
1	0	0	0
2	0	0	3
3	4	0	3
4	0	5	3

Mesnet Koşulu Bulunan Düğüm Noktası Sayısı

3

Düğüm Noktası Mesnetlenme Koşulu (1 Tutulu/0 Serbest)

No	ux	uy	uz	rx	ry	rz
1	1	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	0	1
4	1	1	1	1	1	1

Referans nokta adedi

3

Referans nokta Adı ve Koordinatları

No	x	y	z
5	2	0	1.5
6	2	0	6
7	0	3	6

Eleman Adedi

3

Eleman Bağlantı Bilgisi, Malzeme Bilgisii Kesit özellikleri

No	i	j	Ref No	E	G	A	I33	I22	J	p2	p3
1	1	2	5	3e7	1.5e7	0.24	7.20e-3	3.20e-3	7.512e-3	0	0
2	2	3	6	3e7	1.5e7	0.15	4.50e-3	7.813e-4	2.307e-3	-20	0
3	2	4	7	3e7	1.5e7	0.15	4.50e-3	7.813e-4	2.307e-3	0	80

Yük Etkisindeki Düğüm Noktası Adedi

1

Yük Değerleri

No	FX	FY	FZ	MX	MY	MZ
2	100	0	-50	0	0	0

Sonuç dosyası

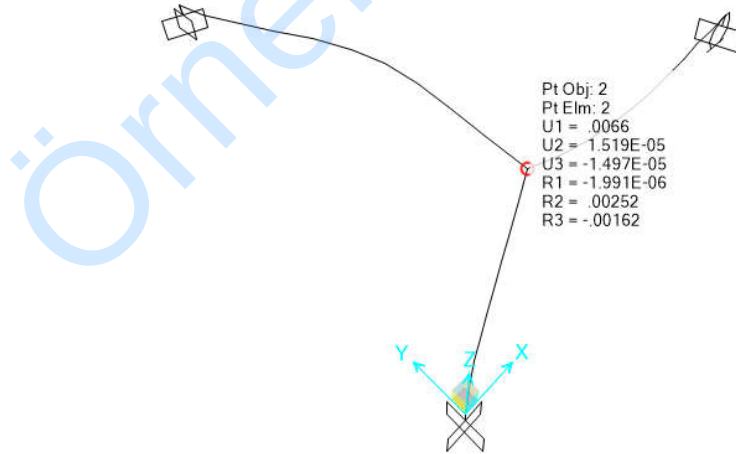
Yerdeğiştirmeler

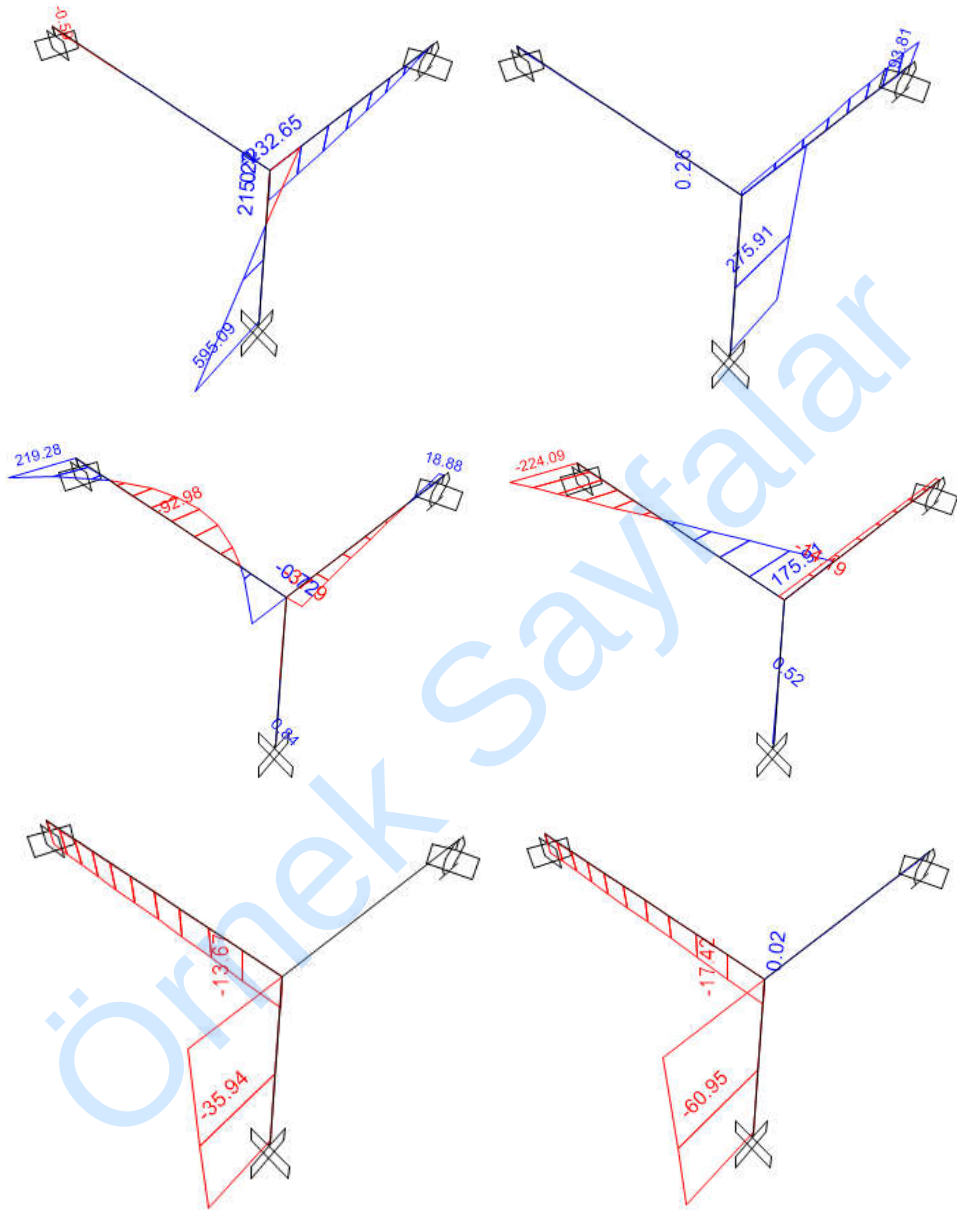
D. No	UX	UY	UZ	RX	RY	RZ
1	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
2	6.6495e-03	1.5193e-05	-1.4973e-05	-1.9915e-06	2.5170e-03	-1.6225e-03
3	6.6495e-03	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	-1.4616e-03	0.0000e+00

```

Joint=2  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=0  Y=0  Z=3
Joint=3  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=4  Y=0  Z=3
Joint=4  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=0  Y=5  Z=3
TABLE: "CONNECTIVITY - FRAME"
  Frame=1  JointI=1  JointJ=2
  Frame=2  JointI=2  JointJ=3
  Frame=3  JointI=2  JointJ=4
TABLE: "JOINT RESTRAINT ASSIGNMENTS"
  Joint=1  U1=Yes  U2=Yes  U3=Yes  R1=Yes  R2=Yes  R3=Yes
  Joint=3  U1=No  U2=Yes  U3=Yes  R1=Yes  R2=No  R3=Yes
  Joint=4  U1=Yes  U2=Yes  U3=Yes  R1=Yes  R2=Yes  R3=Yes
TABLE: "JOINT LOADS - FORCE"
  Joint=2  LoadPat=L1  CoordSys=GLOBAL  F1=100  F2=0  F3=-50  M1=0  M2=0  M3=0
TABLE: "FRAME SECTION ASSIGNMENTS"
  Frame=1  SectionType=Rectangular  AutoSelect=N.A.  AnalSect=C  DesignSect=N.A.
MatProp=Default
  Frame=2  SectionType=Rectangular  AutoSelect=N.A.  AnalSect=B  DesignSect=N.A.
MatProp=Default
  Frame=3  SectionType=Rectangular  AutoSelect=N.A.  AnalSect=B  DesignSect=N.A.
MatProp=Default
TABLE: "FRAME LOADS - DISTRIBUTED"
  Frame=2  LoadPat=L1  CoordSys=GLOBAL  Type=Force  Dir=Gravity  DistType=RelDist
RelDistA=0  RelDistB=1  FOverLA=20  FOverLB=20
  Frame=3  LoadPat=L1  CoordSys=GLOBAL  Type=Force  Dir=X  DistType=RelDist
RelDistA=0  RelDistB=1  FOverLA=80  FOverLB=80
END TABLE DATA

```





İki Boyutlu Elemanlar

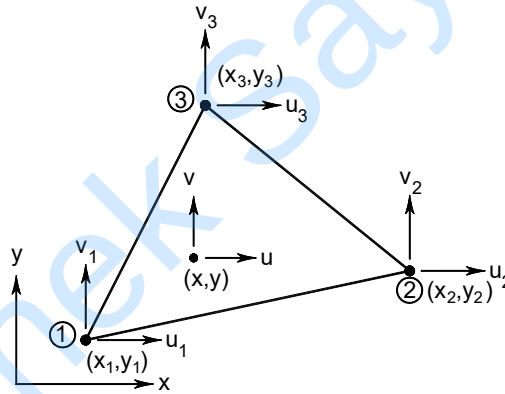
4

4.1 Giriş

İki boyutlu problemler gerçekte üç boyutlu olan bir durumun yaklaşık olarak düzlem gerilme veya düzlem şekildeğiştirme problemine dönüştürüldüğü durumda ortaya çıkmaktadır. Her iki durumda da aynı sonlu eleman kullanılabilen ancak malzeme özelliği matrisi $[D]$ farklılık göstermektedir.

4.2 Sabit Şekildeğiştirme Üçgen Elemanı (CST Constant Strain Element)

İki boyutlu problemlerin çözümünde kullanılabilecek en basit eleman Şekil 4-1'de gösterilen üç noktalı, her bir düğüm noktasında 2 serbestlik derecesi (u,v) bulunan toplam 6 serbestlik dereceli üçgen elemandır.



Şekil 4-1

Üç noktalı üçgen eleman için interpolasyon fonksiyonu

$$\phi(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (4.1)$$

olarak seçilir. ϕ alan değişkeninin düğüm noktalarındaki değerleri Şekil 4-2'de gösterildiği gibi ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ise α katsayılarının değerleri

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} (a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 + a_3 \phi_3)$$

$$N_1 = \frac{1}{2A}(a_1 + b_1x + c_1y)$$

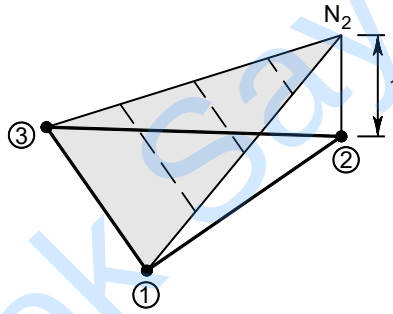
$$N_2 = \frac{1}{2A}(a_2 + b_2x + c_2y) \quad (4.6)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A}(a_3 + b_3x + c_3y)$$

Üç noktalı üçgen eleman için yukarıda elde edilen şekil fonksiyonlarının genel yapısı Denk.(4.7)'deki gibi yazılabilir.

$$N_\beta = \frac{1}{2A}(a_\beta + b_\beta x + c_\beta y) \quad \beta = 1,2,3 \quad (4.7)$$

Şekil fonksiyonun özelliği olarak her bir şekil fonksiyonu ilgili düğüm noktasında 1, diğer düğüm noktalarında 0 değerine sahiptir. Örneğin N_2 'nin değişimi Şekil 4-3'de gösterilmektedir.



Şekil 4-3 N_2 şekil fonksiyonu

İki boyutlu problemlerin çözümünde kullanılacak düğüm noktalarında iki serbestlik derecesine sahip eleman için iki interpolasyon fonksiyonuna gereksinim olacaktır.

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 \quad (4.8)$$

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 \quad (4.9)$$

Matris düzeninde yazılırsa aşağıdaki bağıntı elde edilir.

Hacimsel yük vektörü

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

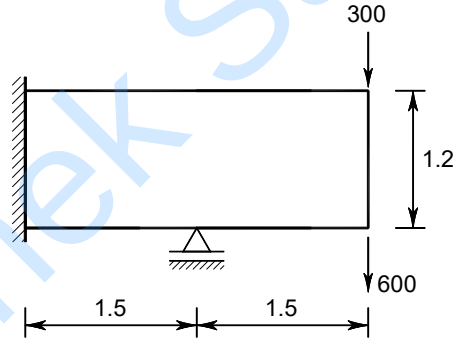
olarak tanımlanırsa düğüm noktalarına eşit olarak Denk.(4.20)'de verildiği şekilde dağıtılır.

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_{bix} \\ f_{biy} \\ f_{bjx} \\ f_{bjy} \\ f_{bkx} \\ f_{bky} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \\ f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \frac{At}{3} \quad (4.20)$$

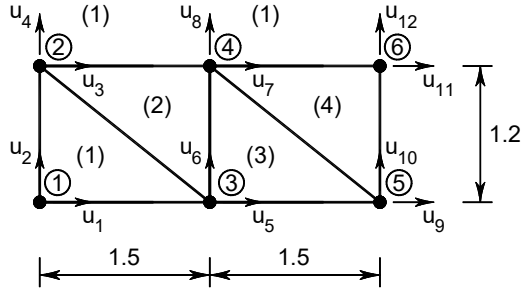
Örnek 4-1

Şekilde gösterilen düzlem gerilme etkisindeki sistemin çözümünü yapınız.

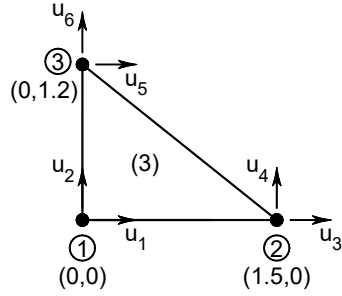
$$E = 200000 \text{ kN/m}^2 \quad \nu = 0.3 \quad t = 0.10 \text{ m}$$



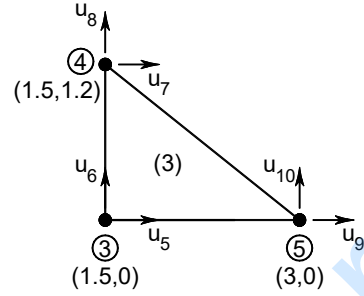
Çözüm: Düğüm noktası ve eleman numaralandırması aşağıdaki şekilde yapılacaktır.



3 Nolu eleman



a) Eleman yerel numaralandırılması



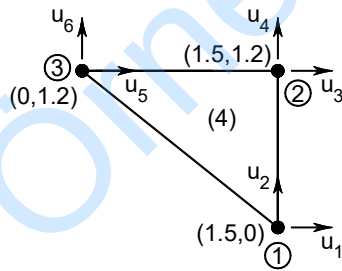
b) Sistem numaralandırılması

$$[k^{(3)}] = [k^{(1)}]$$

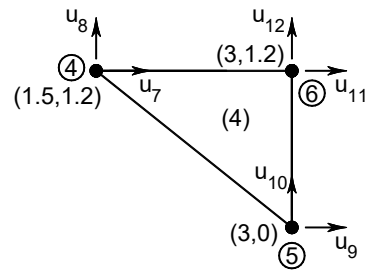
	5	6	9	10	7	8	
$[k^{(3)}]$	13598.9	7142.9	-8791.2	-3846.2	-4807.7	-3296.7	5
	7142.9	16813.2	-3296.7	-3076.9	-3846.2	-13736.3	6
	-8791.2	-3296.7	8791.2	0.0	0.0	3296.7	9
	-3846.2	-3076.9	0.0	3076.9	3846.2	0.0	10
	-4807.7	-3846.2	0.0	3846.2	4807.7	0.0	7
	-3296.7	-13736.3	3296.7	0.0	0.0	13736.3	8

← Sistem serbestlik derecesi numarası

4 Nolu eleman



a) Eleman yerel numaralandırılması



b) Sistem numaralandırılması

$$[k^{(4)}] = [k^{(2)}]$$

1 Nolu eleman için şekildeğiştirme ve gerilme değerlerinin belirlenmesi

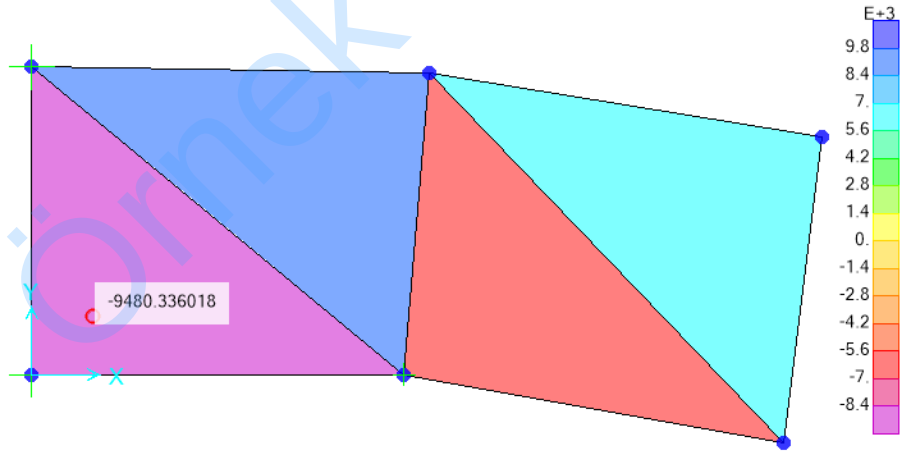
$$[\epsilon^{(1)}] = [B^{(1)}] \{u^{(1)}\}$$

$$[\epsilon^{(1)}] = \begin{bmatrix} -0.6667 & 0 & 0.6667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.8333 & 0 & 0 & 0 & 0.8333 \\ -0.8333 & -0.6667 & 0 & 0.6667 & 0.8333 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.064703 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.04314 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[\sigma^{(1)}] = [D^{(1)}] \{\epsilon^{(1)}\}$$

$$[\sigma^{(1)}] = \begin{bmatrix} 219780.2 & 65934.1 & 0 \\ 65934.1 & 219780.2 & 0 \\ 0 & 0 & 76923.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.04314 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -9480.34 \\ -2844.10 \\ 0.00 \end{Bmatrix}$$

Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda sonlu eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırlanmalıdır.



Python program kodu

```
import math
import modul_kd

class CST:
    def __init__(self):
        self.tur=0 #Düzlem gerilme 1, Düzlem şekildeğiştirme 2
        self.no=0
        self.A=0.0; self.E=0.0; self.nu=0.; self.t=0.0
        self.x=[0.0] * 3; self.y=[0.0] * 3
        self.dnNo=[0 for _ in range(3)]
        self.K = [[0.0 for _ in range(6)] for _ in range(6)]
        self.B = [[0.0 for _ in range(6)] for _ in range(3)]
        self.BT = [[0.0 for _ in range(3)] for _ in range(6)]
        self.D = [[0.0 for _ in range(3)] for _ in range(3)]
        self.gerilme=[0.0] * 3
        self.sekildegistirme=[0.0] * 3
        self.kod=[0] * 6
        self.disp=[0.0] * 6

    def STIFF(self,tur):
        E=self.E; nu=self.nu; t=self.t; A=self.A
        BTD = [[0.0 for _ in range(3)] for _ in range(6)]
        b1=self.y[1]-self.y[2]
        b2=self.y[2]-self.y[0]
        b3=self.y[0]-self.y[1]
        c1=self.x[2]-self.x[1]
        c2=self.x[0]-self.x[2]
        c3=self.x[1]-self.x[0]
        A=0.5*(self.x[0]*self.y[1]+self.x[1]*self.y[2]+self.x[2]*self.y[0]
            - self.x[0]*self.y[2]-self.x[1]*self.y[0]-self.x[2]*self.y[1])
        self.A=A
        if tur==1:
            E1=E/(1-nu*nu)
            self.D[0][0]=E1
            self.D[0][1]=E1*nu
            self.D[1][0]=E1*nu
            self.D[1][1]=E1
            self.D[2][2]=E1*((1-nu)/2.)
        else:
            E1=E/((1+nu)*(1-2*nu))
            self.D[0][0]=E1*(1-nu)
            self.D[0][1]=E1*nu
            self.D[1][0]=E1*nu
            self.D[1][1]=E1*(1-nu)
```

Eleman Adedi

4

Eleman Bağlantı Bilgisi, Malzeme Bilgisii Kesti kalınlığı

No	i	j	k	E	nu	t
1	1	3	2	200000	0.3	0.10
2	3	4	2	200000	0.3	0.10
3	3	5	4	200000	0.3	0.10
4	5	6	4	200000	0.3	0.10

Yük Etkisindeki Düşüm Noktası Adedi

2

Yük Değerleri

No	FX	FY
5	0	-600
6	0	-300

Program sonucu:

Düzlem Gerilme Problemi

Yerdeğiştirmeler

D. No	UX	UY
1	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0000
3	-0.0647	0.0000
4	0.0768	-0.0323
5	-0.0924	-0.3783
6	0.1212	-0.3904

Düşüm Noktası Tepki Kuvvetleri

D. No	RX	RY
1	568.8206	213.3077
2	-568.8203	-658.2518
3	0.0000	1344.9450
4	0.0000	0.0000
5	0.0000	0.0000
6	0.0000	0.0000

Eleman gerilmeleri

E. No	S11	S22	S12	SVM
1	-9480.3435	-2844.1030	0.0000	8426.3136
2	9480.3385	-2536.7603	7415.7344	16892.0297
3	-5838.3085	-7132.3544	-10329.3570	19063.1133
4	5838.3063	-263.4839	-4670.6451	10056.7550

4.2.1 İlgili Matrislerin Doğal Eksenlerde Elde Edilmesi

Sabit şekildeğiştirme üçgen eleman için ilgili matrisler doğal koordinatlar kullanılarak da elde edilebilir. Şekildeğiştirmeler Denk.(4.21), gerilme-şekildeğiştirme ilişkisi de Denk.(4.22)'de verildiği şekilde yazılabilir.

$$\{\varepsilon\} = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^T \quad (4.21)$$

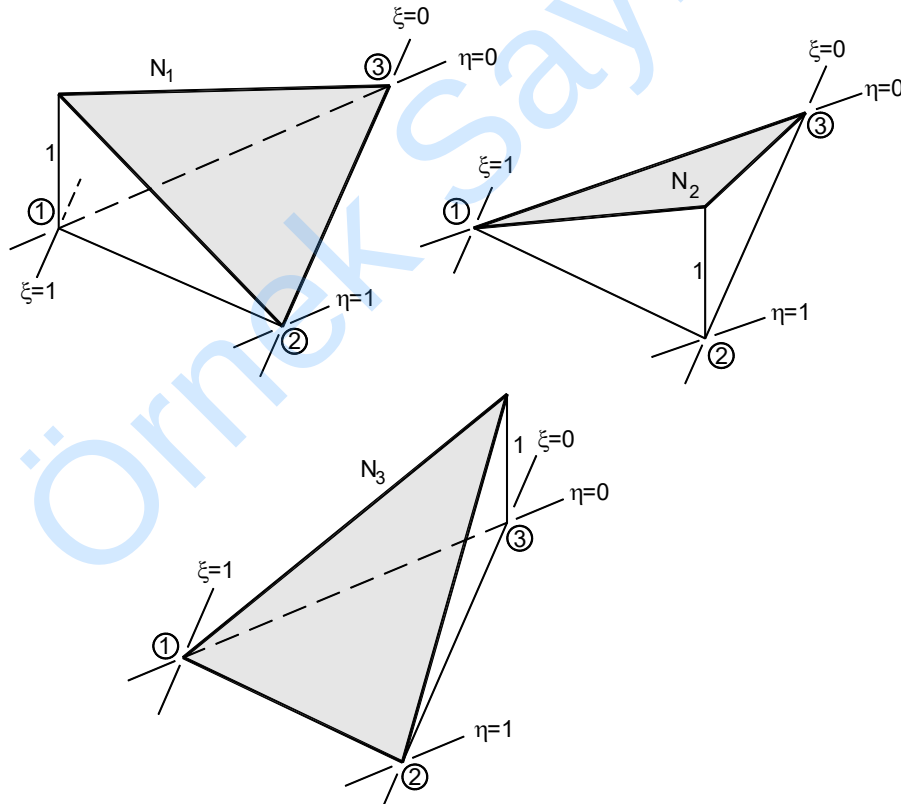
$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (4.22)$$

Şekil fonksiyonları Denk.(4.23)'ü sağlayacak şekilde Denk.(4.24)'deki gibi seçilebilir.

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1 \quad (4.23)$$

$$N_1 = \xi \quad N_2 = \eta \quad N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (4.24)$$

Bu şekil fonksiyonlarının eleman üzerindeki değişimi Şekil 4-4'de gösterilmektedir.



Şekil 4-4 Şekil fonksiyonları

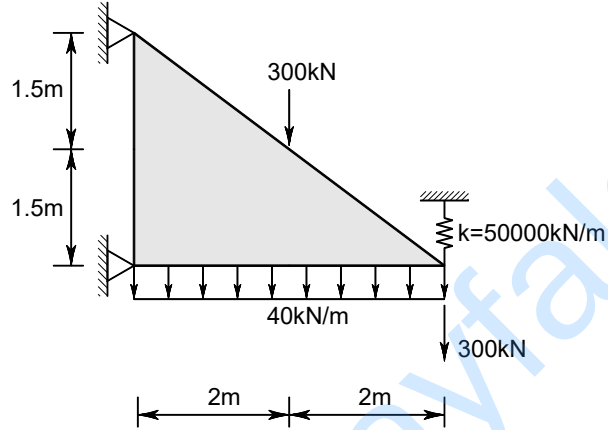
Örnek 4-2

Şekilde gösterilen düzlem gerilme etkisindeki sistemin çözümünü yapınız. Yayda oluşacak kuvveti hesaplayınız.

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$$

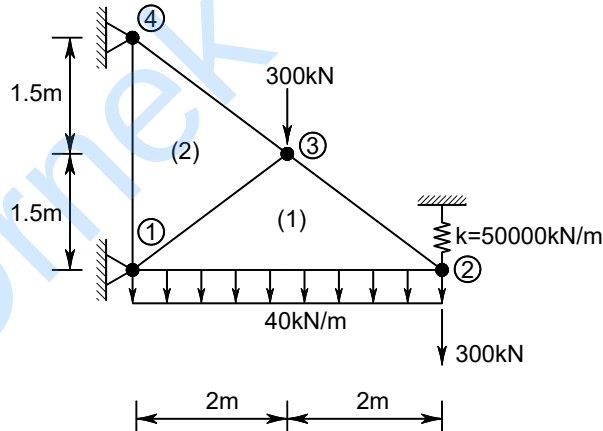
$$\nu = 0.2$$

$$t = 0.15 \text{ m}$$



Çözüm:

Sistem iki adet üçgen sonlu eleman ile modellenecek, düğüm noktası ve eleman numaralandırması aşağıdaki şekilde yapılacaktır.



1 Nolu eleman

$$x_{13} = x_1 - x_3 = 0 - 2 = -2$$

$$x_{23} = x_2 - x_3 = 4 - 2 = 2$$

$$y_{13} = y_1 - y_3 = 0 - 1.5 = -1.5$$

$$y_{23} = y_2 - y_3 = 0 - 1.5 = -1.5$$

$$y_{31} = y_3 - y_1 = 1.5 - 0 = 1.5$$

$$y_{12} = y_1 - y_2 = 0 - 0 = 0$$

$$[k^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1503906.25 & 703125 & -1757812.5 & -937500 & 253906.25 & 234375 \\ 703125 & 1914062.5 & -468750 & -703125 & -234375 & -1210937.5 \\ -1757812.5 & -468750 & 3515625 & 0 & -1757812.5 & 468750 \\ -937500 & -703125 & 0 & 1406250 & 937500 & -703125 \\ 253906.25 & -234375 & -1757812.5 & 937500 & 1503906.25 & -703125 \\ 234375 & -1210937.5 & 468750 & -703125 & -703125 & 1914062.5 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Eleman ve karşı gelen sistem serbestlik dereceleri

Eleman	1	2	3	4	5	6
Sistem	1	2	5	6	7	8

Eleman rijitlik matrisleri sistem rijitlik matrisine yerleştirilir ve sınır koşulları uygulanırsa

$$[K] = \begin{bmatrix} 1503906 & -703125 & -1250000 & 468750 \\ -703125 & 1914063 & 937500 & -3125000 \\ -1250000 & 937500 & 6015625 & 0 \\ 468750 & -3125000 & 0 & 7656250 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

← Sistem serbestlik derecesi numarası

Yay katsayısı sistemde 4 numaralı serbestlik derecesini etkileyeceğinden yukarıdaki matriste bu serbestlik derecesine karşı gelen köşegen terimine eklenerek sistemin rijitlik matris elde edilir.

$$[K] = \begin{bmatrix} 1503906 & -703125 & -1250000 & 468750 \\ -703125 & 1914063 + 50000 & 937500 & -3125000 \\ -1250000 & 937500 & 6015625 & 0 \\ 468750 & -3125000 & 0 & 7656250 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

1 nolu eleman kenarına etkiyen yayılı yük düğüm noktalarına tekil yük olarak dağıtılsa

$$F_1 = F_2 = \frac{-40 \cdot 4}{2} = -80 \text{ kN} \quad (\text{y yönünde}) \text{ elde edilir. Bu yükler düğüm noktalarına etkiyen diğer yüklere}$$

eklenerek sistem yük vektörü hesaplanır.

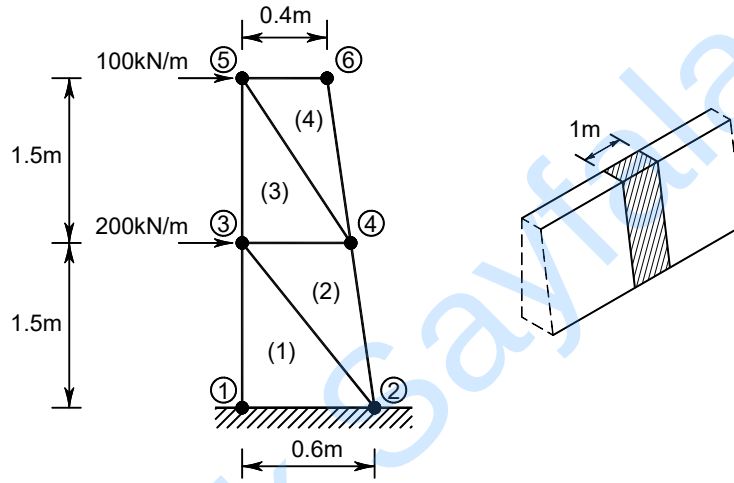
Sistem denklem takımı oluşturularak bilinmeyenler

Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırla tutulmalıdır.

Önek 4-3

Şekilde gösterilen düzlem şekildeğiştirme etkisindeki sistemin çözümünü yapınız. (1) numaralı elemanda oluşacak gerilmeleri hesaplayınız.

$$E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2 \quad \nu = 0.2 \quad t = 1.0 \text{ m}$$



Çözüm:

1 Nolu eleman

$$x_{13} = x_1 - x_3 = 0 - 0 = 0 \quad x_{23} = x_2 - x_3 = 0.6 - 0 = 0.6$$

$$y_{13} = y_1 - y_3 = 0 - 1.5 = -1.5 \quad y_{23} = y_2 - y_3 = 0 - 1.5 = -1.5$$

$$y_{31} = y_3 - y_1 = 1.5 - 0 = 1.5 \quad y_{12} = y_1 - y_2 = 0 - 0 = 0$$

$$x_{32} = x_3 - x_2 = 0 - 0.6 = -0.6 \quad x_{21} = x_2 - x_1 = 0.6 - 0 = 0.6$$

$$|J| = x_{13}y_{23} - x_{23}y_{13} = (0)(-1.5) - (0.6)(-1.5) = 0.9$$

$$A = \frac{|J|}{2} = \frac{0.9}{2} = 0.45$$

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{13} & y_{31} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.6667 & 0 & 1.6667 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.6667 & 0 & 0 & 0 & 0.6667 \\ -0.6667 & -1.6667 & 0 & 1.6667 & 0.6667 & 0 \end{bmatrix}$$

Düzlem şekildeğiştirme durumu için

Sınır koşulları uygulanmış sistem rijitlik matrisi

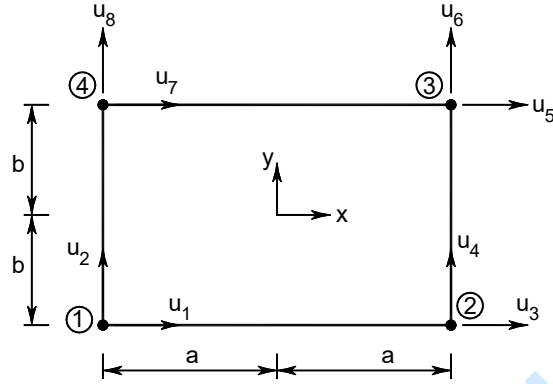
$$[k] = \begin{bmatrix} 10466666.7 & 12500000 & -100500000 & -12500000 & -2083333.33 & -4166666.667 & 0 & 0 \\ 12500000 & 4994444.44 & -12500000 & -3883333.33 & -6250000 & -555555.556 & 0 & 0 \\ -100500000 & -12500000 & 10466666.7 & 12500000 & 416666.6667 & 1041666.67 & -2083333.333 & -6250000 \\ -12500000 & -3883333.33 & 12500000 & 4994444.44 & 1041666.67 & 111111.111 & -416666.667 & -555555.556 \\ -2083333.333 & -6250000 & 416666.6667 & 1041666.67 & 64687500 & 2604166.667 & -63020833.33 & -6770833.333 \\ -416666.667 & -555555.556 & 1041666.67 & 111111.111 & 2604166.667 & 29270833.33 & -8854166.667 & -24826388.89 \\ 0 & 0 & -2083333.333 & -4166666.667 & -63020833.3 & -8854166.667 & 65104166.67 & 13020833.33 \\ 0 & 0 & -6250000 & -555555.556 & -6770833.33 & -24826388.89 & 13020833.33 & 30381944.44 \end{bmatrix}$$

Yük vektörü olarak elde edilir.

$$\begin{bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.319 \cdot 10^{-4} \\ 2.637 \cdot 10^{-5} \\ 1.335 \cdot 10^{-4} \\ -2.300 \cdot 10^{-5} \\ 3.229 \cdot 10^{-4} \\ 3.080 \cdot 10^{-5} \\ 3.232 \cdot 10^{-4} \\ -1.812 \cdot 10^{-5} \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır}$$

Düğüm noktası bilinmeyenleri



Şekil 4-7 Dikdörtgen düzlem eleman

Toplamda sekiz genelleştirilmiş serbestlik derecesi (a 'lar) ve eleman için toplamda sekiz serbestlik derecesi (1. düğümde u_1, v_1 'den 4. düğümde u_4, v_4 'e kadar) bulunmaktadır.

Düğüm noktası yerdeğiştirmeleri esas alındığında

$$x = x_i, y = y_i \text{ olduğunda} \quad u = u_i$$

$$x = x_j, y = y_j \text{ olduğunda} \quad u = u_j$$

$$x = x_k, y = y_k \text{ olduğunda} \quad u = u_k$$

$$x = x_\ell, y = y_\ell \text{ olduğunda} \quad u = u_\ell$$

olmalıdır. Benzer koşullar v için de sağlanmalıdır.

a_i bilinmeyenleri çözülerek Denk.(4.44) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k + N_\ell u_\ell \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k + N_\ell v_\ell \end{aligned} \quad (4.44)$$

elde edilir. Şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4ab} (a-x)(b-y) \\ N_j &= \frac{1}{4ab} (a+x)(b-y) \\ N_k &= \frac{1}{4ab} (a+x)(b+y) \\ N_\ell &= \frac{1}{4ab} (a-x)(b+y) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Eleman yük matrisi Denk.(4.52) ile belirlenebilir.

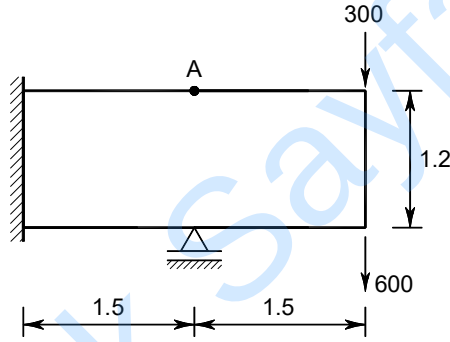
$$\{F\} = \int_V [N]^T \{f\} dV + \int_S [N_s]^T \{T\} dS \quad (4.52)$$

$[N]$ Denk.(4.47)'de verilen dikdörtgen matristir. N_1 'den N_4 'e kadar olan şekil fonksiyonları (4.45)'de verilen fonksiyonlardır.

Örnek 4-4

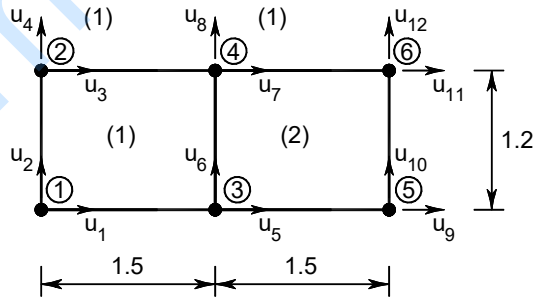
Şekilde gösterilen düzlem gerilme etkisindeki sistemin çözümünü yapınız.
A noktasındaki gerilme değerlerini belirleyiniz.

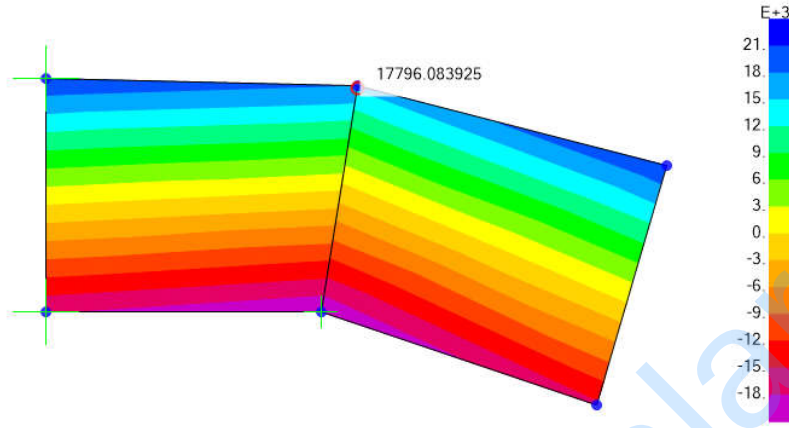
$E = 200000 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0.3$
 $t = 0.10 \text{ m}$



Çözüm:

Düğüm noktası ve eleman numaralandırması aşağıdaki şekilde yapılacaktır.





2 Nolu eleman için A noktası koordinatları $x=-0.75$, $y=0.60$ olacaktır. Bu noktadaki şekildeğişmeler

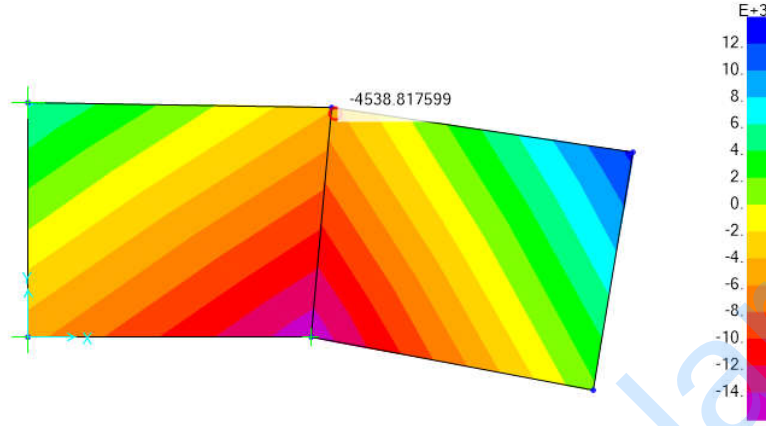
$$\{\varepsilon\} = [B]\{u_i\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0.66667 & 0 & -0.66667 & 0 \\ 0 & -0.83333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.83333 \\ -0.83333 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.66667 & 0.83333 & -0.66667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.12146 \\ 0 \\ -0.24224 \\ -0.67744 \\ 0.26962 \\ -0.63980 \\ 0.14221 \\ -0.05533 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.08494 \\ -0.04611 \\ -0.16992 \end{Bmatrix}$$

2 Nolu elemanda gerilmeler

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 219780.2 & 65934.07 & 0 \\ 65934.07 & 219780.2 & 0 \\ 0 & 0 & 76923.08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.08494 \\ -0.04611 \\ -0.16992 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15627.82 \\ -4533.47 \\ -13070.8 \end{Bmatrix}$$



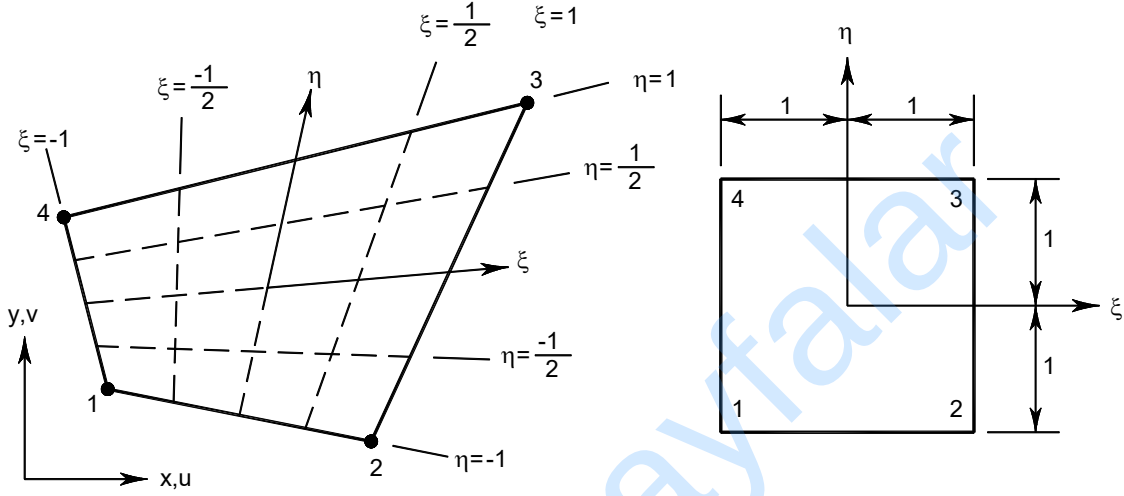
Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırd tutulmalıdır.

SAP2000 s2k veri dosyası

```
File F:\kutlu\fem\kdfem\q4_02_v22.s2k was saved on m/d/yy at h:mm:ss
TABLE: "PROGRAM CONTROL"
  ProgramName=SAP2000  Version=25.2.0  CurrUnits="KN, m, C"
TABLE: "ACTIVE DEGREES OF FREEDOM"
  UX=Yes  UY=Yes  UZ=No  RX=No  RY=No  RZ=No
TABLE: "COORDINATE SYSTEMS"
  Name=GLOBAL  Type=Cartesian  X=0  Y=0  Z=0  AboutZ=0  AboutY=0  AboutX=0
TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 01 - GENERAL"
  Material=MAT  Type=Other  SymType=Isotropic
TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 02 - BASIC MECHANICAL PROPERTIES"
  Material=MAT  UnitWeight=0  UnitMass=0  E1=200000  U12=0.3  A1=0
TABLE: "AREA SECTION PROPERTIES"
  Section=S  Material=MAT  MatAngle=0  AreaType=Plane  Type=Plane-Stress
Thickness=0.1  InComp=No
TABLE: "LOAD PATTERN DEFINITIONS"
  LoadPat=L  DesignType=Other  SelfWtMult=0
TABLE: "LOAD CASE DEFINITIONS"
  Case=L  Type=LinStatic
TABLE: "CASE - STATIC 1 - LOAD ASSIGNMENTS"
  Case=L  LoadType="Load pattern"  LoadName=L  LoadSF=1
TABLE: "JOINT COORDINATES"
  Joint=1  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=0  Y=0  Z=0
  Joint=2  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=0  Y=1.2  Z=0
  Joint=3  CoordSys=GLOBAL  CoordType=Cartesian  XorR=1.5  Y=0  Z=0
```

$$N_1 = c(1-\xi)(1-\eta) \quad (4.53)$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 4-8 Genel şekilli dörtgen düzlem eleman

1 nolu düğüm noktasında ($\xi = -1$ ve $\eta = -1$) $N_1 = 1$ olması gerektiğinden $c = 1/4$ olarak elde edilir. Böylece

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \quad (4.54)$$

Diğer düğüm noktalarında da benzer işlemler gerçekleştirilirse dört şekil fonksiyonu

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \end{aligned} \quad (4.55)$$

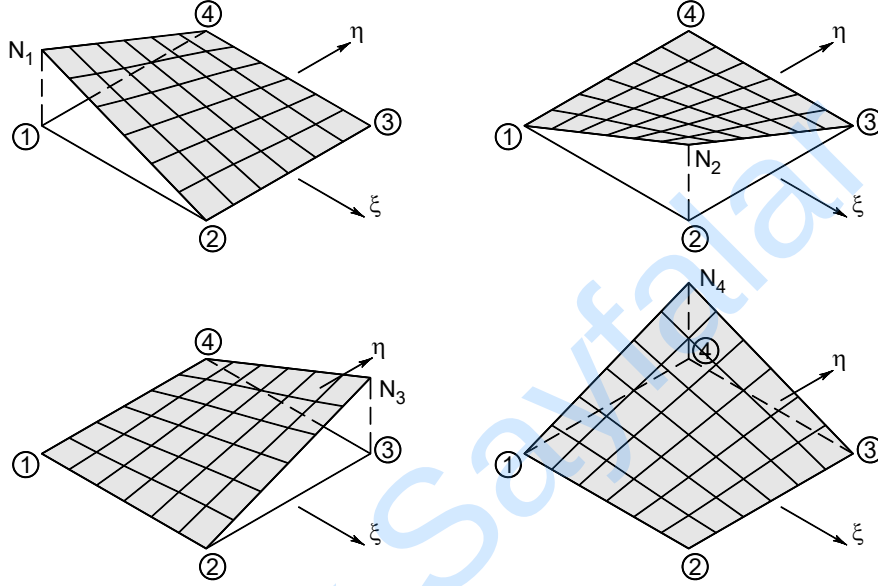
olarak belirlenir.

Eleman içerisindeki yerdeğiştirme değerleri düğüm noktası değerlerine bağlı olarak

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k + N_\ell u_\ell \quad (4.56)$$

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k + N_\ell v_\ell$$

olur.



Şekil 4-9

Bu bağıntıların matris formunda yazılışı Denk.(4.57)'de verilmektedir.

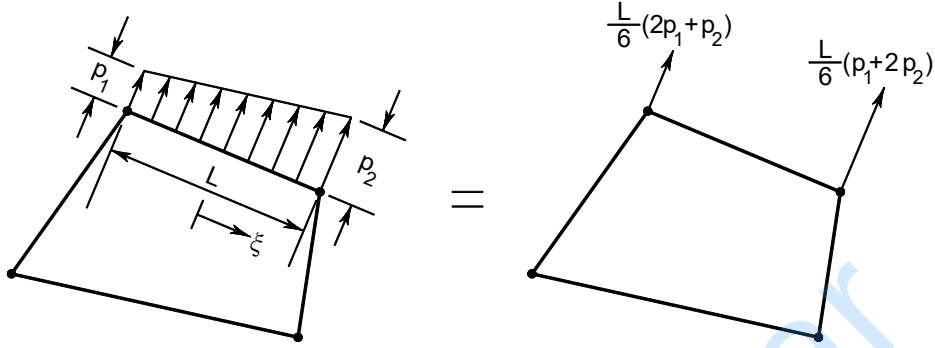
$$\{u\} = [N] \{u_i\} \quad (4.57)$$

Burada

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_\ell \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

şekil fonksiyonu matrisini göstermektedir. İzoparametrik formülasyonda aynı N_i şekil fonksiyonları eleman içindeki bir noktanın koordinatlarının düğüm noktası koordinatlarına bağlı olarak tanımlanmasında da kullanılır. Böylece

$$\begin{aligned} x &= N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k + N_\ell x_\ell \\ y &= N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_\ell y_\ell \end{aligned} \quad (4.59)$$

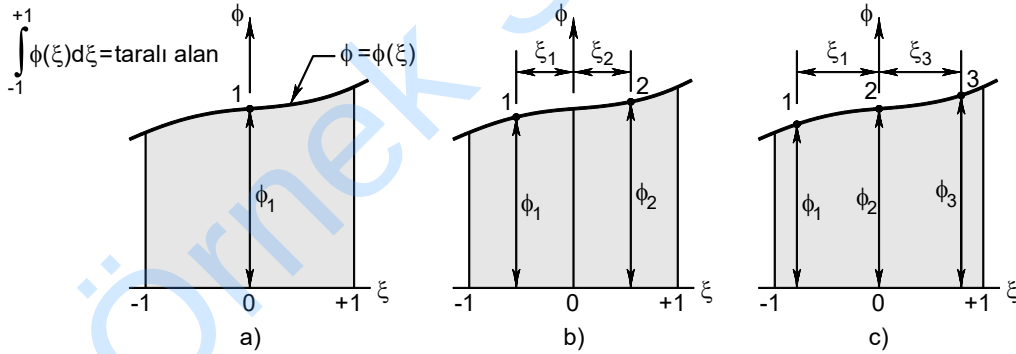


Şekil 4-10 Kenar kuvvetleri

4.5 Sayısal İntegral

Sonlu elemanlar yönteminde eleman düzeyinde hesaplamalarda sayısal integral kullanmak gerekebilmektedir. Sayısal integral işlemi için trapez yöntemi, Simpson yöntemi, Gauss kareleme (Gauss Quadrature) yöntemi gibi birçok yöntem bulunmakla birlikte burada Gauss kareleme yöntemi esas alınacaktır.

Belirli bir sınır içerisinde tanımlanmış bölgede integral hesaplama Şekil 4-11'de gösterildiği gibi o bölgede fonksiyon grafiğinin altında kalan alanın hesaplanması anlamına gelmektedir.



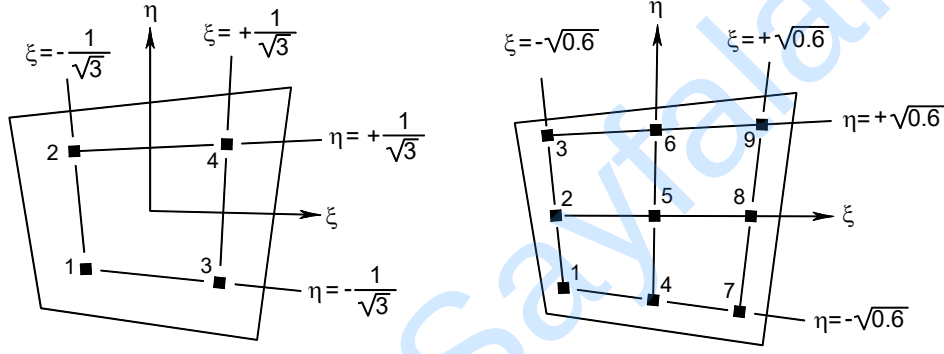
Şekil 4-11 $\phi = \phi(\xi)$ fonksiyonunun altında kalan alanın Gauss Kareleme yöntemi ile
a) bir b) iki c) üç örneklem noktası (Gauss noktaları) ile hesabı

Diğer yöntemler gibi Gauss kareleme yönteminde de belirli bir noktada fonksiyonun değeri hesaplanır ve ξ eksenine doğrultusunda belirlenen bir uzunlukla çarpılarak alan hesaplanır. Eğer fonksiyon doğrusal bir fonksiyon ise fonksiyonun $\xi=0$ 'daki değeri ξ eksenine doğrultusundaki uzunluk olan 2 ile çarpılarak alan kesin olarak hesaplanır. Fonksiyon birinci dereceden ise integrali hesaplamak için bir örneklem noktası kullanmak yeterlidir. Genel olarak, n örneklem noktası, $2n-1$ dereceli bir polinomun integralinin kesin olarak hesaplanmasını sağlar.

Sonuç olarak hesaplamalarda, kullanılacak yeterli örnekleme noktası adedinin seçimi istenen yaklaşıklıkla sağlayacak şekilde olmalıdır.

Çok boyutlu Gauss çarpım kuralı, tek boyutlu Gauss kuralının art arda uygulanması ile yapılmaktadır. İki boyutlu durumda örneğin $\phi = \phi(\xi, \eta)$ fonksiyonu göz önüne alınırsa ilk önce ξ 'ye göre integrasyon işlemi ve sonra η 'ye göre integrasyon işlemi yapılabilir.

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \int_{-1}^{+1} \left[\sum_i W_i \phi(\xi_i, \eta) \right] d\eta \approx \sum_j W_j \left[\sum_i W_i \phi(\xi_i, \eta_j) \right] = W_i W_j \phi(\xi_i, \eta_j) \quad (4.88)$$



Şekil 4-12 Dörtgen elemanda 4 noktalı ve 9 noktalı Gauss noktaları

Şekil 4-12'de gösterilen 4 Gauss noktalı durumda $W_i W_j = 1$ olacağından Denk.(4.88)

$$I \approx \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad (4.89)$$

9 noktalı durum için ise

$$I \approx \frac{25}{81} (\phi_1 + \phi_3 + \phi_7 + \phi_9) + \frac{40}{81} (\phi_2 + \phi_4 + \phi_6 + \phi_8) + \frac{64}{81} \phi_5 \quad (4.90)$$

olacaktır.

Üç boyutta, Gauss kareleme yöntemi ifadesi

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k \phi(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (4.91)$$

şeklinde kullanılabilir.

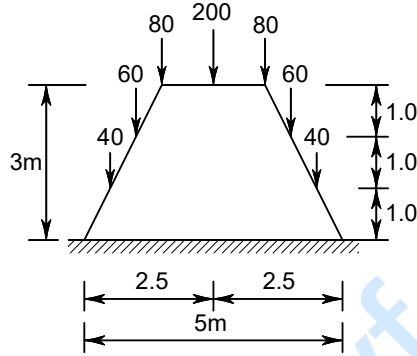
Örnek 4-6

Şekilde gösterilen düzlem gerilme etkisindeki sistemin çözümünü yapınız.

A noktasındaki gerilme değerlerini belirleyiniz.

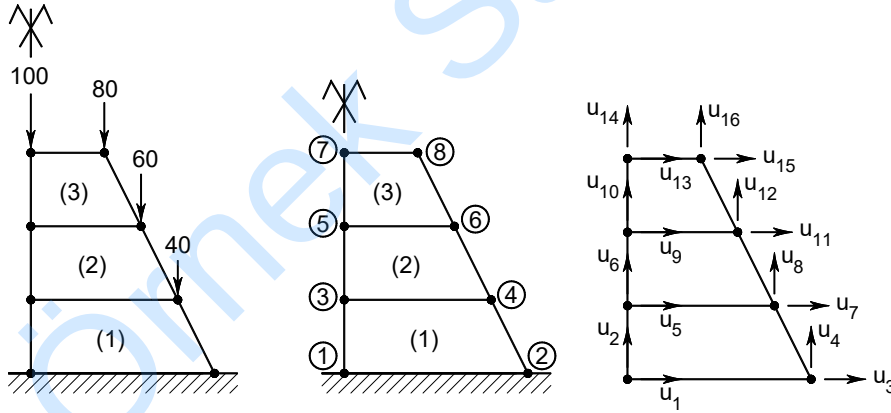
$$E = 210000 \text{ kN/m}^2 \quad \nu = 0.3$$

$$t = 0.10 \text{ m}$$



Çözüm:

Simetriden yararlanılarak sistemin yarısı ile hesap yapılacaktır. Simetri eksenini üzerindeki yükün yarı değeri göz önüne alınacaktır.



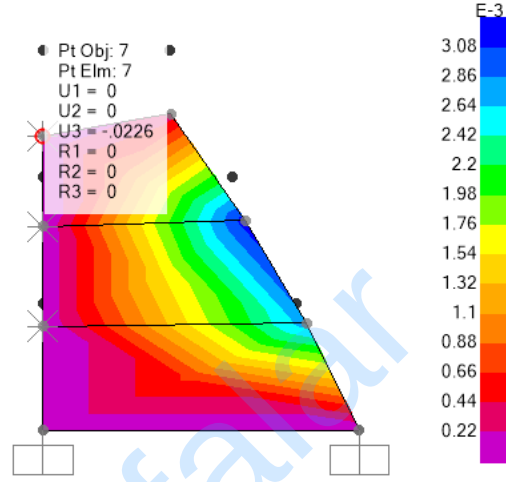
Sınır koşulları olarak $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_9 = u_{13} = 0$ belirlenir. $u_5 = u_9 = u_{13} = 0$ koşulları simetri özelliğinden yararlanılarak belirlenmektedir.

1 Nolu eleman rijitlik matrisinin hesaplanması:

$$\text{Genel durumda eleman rijitlik matrisi ifadesi } [k^{(e)}] = \iint_A [B]^T [D] [B] t_e dx dy \text{ şeklindedir.}$$

$$[K]\{u\}=\{F\}$$

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \\ u_{14} \\ u_{15} \\ u_{16} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.005990 \\ 0.002772 \\ -0.005247 \\ -0.013063 \\ 0.003184 \\ -0.011422 \\ -0.022561 \\ 0.000317 \\ -0.016737 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$



Gerilmelerin hesaplanması:

Genel şekilli dörtgen elemanda gerilmeler sabit değildir.

$\{\sigma\} = [D][B]\{u_i\}$ bağıntısı kullanılarak belirlenir.

Uygulamada gerilmeler Gauss noktalarında hesaplanmaktadır. Bilgisayar programlarında kullanılan yaygın yöntem ise tüm elemanların düğüm noktalarında gerilmelerin hesaplanması ve ortak düğüm noktalarında ortalamalarının alınması şeklindedir.

3 Nolu elemanın 4 nolu düğüm noktasında (sistemde 7 numaralı düğüm noktası) gerilme hesaplanmak istendiğinde $\xi_4 = -1$, $\eta_4 = +1$ alınmalıdır.

$$\{\sigma\} = [D][B]\{u_i\}$$

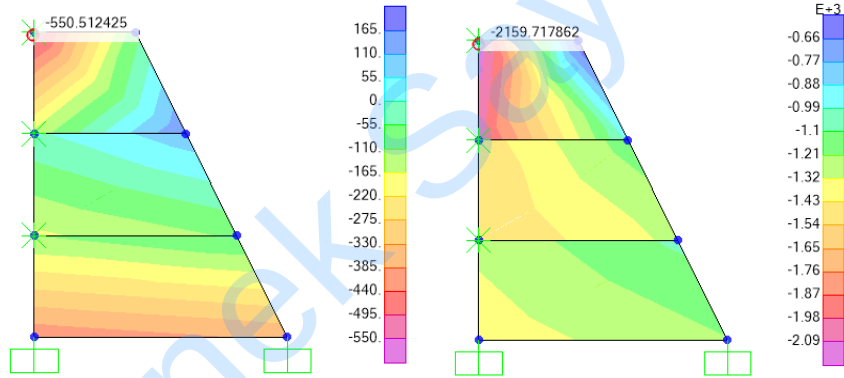
$\xi_4 = -1$, $\eta_4 = +1$ için

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad [G] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 230769 & 69230.8 & 0 \\ 69230.8 & 230769 & 0 \\ 0 & 0 & 80769.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.013063 \\ 0.003184 \\ -0.011422 \\ 0.000317 \\ -0.016737 \\ 0 \\ -0.022561 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -584.28 \\ -2169.85 \\ 470.37 \end{Bmatrix}$$

olarak hesaplanır.



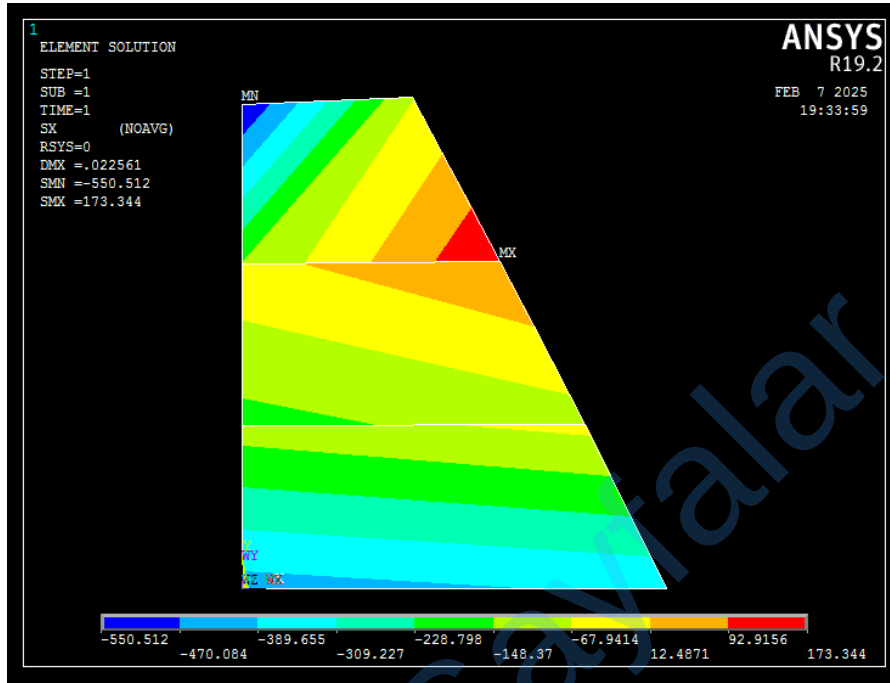
Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırd tutulmalıdır.

SAP2000 s2k veri dosyası

```
File F:\kutlu\fem\program_code\Q4\SAP2000\q4m01_v25.s2k was saved on m/d/yy at h:mm:ss
TABLE: "PROGRAM CONTROL"
  ProgramName=SAP2000  Version=25.2.0  CurrUnits="KN, m, C"
TABLE: "ACTIVE DEGREES OF FREEDOM"
  UX=Yes  UY=No  UZ=Yes  RX=No  RY=No  RZ=No
TABLE: "COORDINATE SYSTEMS"
  Name=GLOBAL  Type=Cartesian  X=0  Y=0  Z=0  AboutZ=0  AboutY=0  AboutX=0
TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 01 - GENERAL"
```

ANSYS veri dosyası

```
/prep7
n,1,0,0,0
n,2,2.5,0,0
n,3,0,1,0
n,4,2,1,0
n,5,0,2,0
n,6,1.5,2,0
n,7,0,3,0
n,8,1,3,0
!
et,1,42
KEYOPT,1,2,1
KEYOPT,1,3,3
R,1,0.10,
!
mp,ex,1,210000
mp,prxy,1,0.3
!
en,1,1,2,4,3
en,2,3,4,6,5
en,3,5,6,8,7
!
D,1,ALL,0
D,2,ALL,0
D,3,UX,0
D,5,UX,0
D,7,UX,0
!
F,7,FY,-100
F,8,FY,-80
F,6,FY,-60
F,4,FY,-40
!
FINISH
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
PLDISP,1
PRNSOL,U,COMP
```



Python programı

```
# Genel Şekli Dörtgen Eleman
import math
import modul_kd

def GaussKareleme_2(x2, w2):
    x2[0] = -0.57735026919
    x2[1] = 0.57735026919
    w2[0] = 1.0
    w2[1] = 1.0

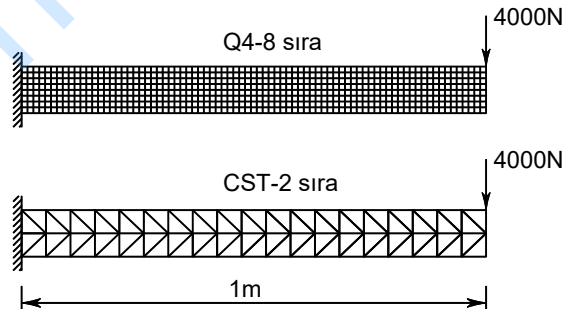
def Jacobian(JAC, X, Y, k, n):
    a1 = 0.25 * (-X[0] + X[1] + X[2] - X[3])
    a2 = 0.25 * (X[0] - X[1] + X[2] - X[3])
    a3 = 0.25 * (-X[0] - X[1] + X[2] + X[3])
    b1 = 0.25 * (-Y[0] + Y[1] + Y[2] - Y[3])
    b2 = 0.25 * (Y[0] - Y[1] + Y[2] - Y[3])
    b3 = 0.25 * (-Y[0] - Y[1] + Y[2] + Y[3])
    JAC[0][0] = a1 + a2 * n
    JAC[0][1] = b1 + b2 * n
    JAC[1][0] = a3 + a2 * k
```

1	1.6493	152.4997			
2	-32.6382	127.5003			
3	12.4392	0.0000			
4	0.0000	0.0000			
5	-0.6625	0.0000			
6	0.0000	0.0000			
7	19.2122	0.0000			
8	0.0000	0.0000			
Eleman gerilmeleri					
E. No	D. No	S11	S22	S12	SVM

1	1	-414.7097	-1382.3657	0.0000	1228.6735
1	2	-363.2622	-1210.8740	223.9024	1143.9875
1	4	-30.5398	-1072.0429	309.8890	1185.5642
1	3	-94.8491	-1286.4075	30.0110	1242.7904
2	3	-169.7812	-1536.1812	30.0110	1459.6457
2	4	-94.7564	-1286.0982	119.2240	1258.4930
2	6	100.1814	-1151.7584	207.3144	1257.3410
2	5	0.1483	-1485.2024	88.3637	1493.1412
3	5	-167.7585	-2044.8917	88.3637	1972.3340
3	6	159.6789	-953.4336	-57.4205	1047.2190
3	8	-93.1287	-532.6625	251.6978	657.9144
3	7	-584.2848	-2169.8496	470.3741	2108.4547

4.5.2 Sabit Şekildeğiştirme Üçgen Elemanı ile Genel Şekli Dörtgen Eleman Karşılaştırması

Tablo 4-2’de sabit şekildeğiştirme üçgen elemanı ve genel şekilli dörtgen eleman ile modellenmiş konsol bir kirişin uç noktasının düşey yerdeğiştirme ve kirişte oluşan maksimum asal gerilme değerleri karşılaştırılmıştır. ($h=0.10\text{m}$, $E=200000\text{MPa}$, $t=0.12\text{m}$)

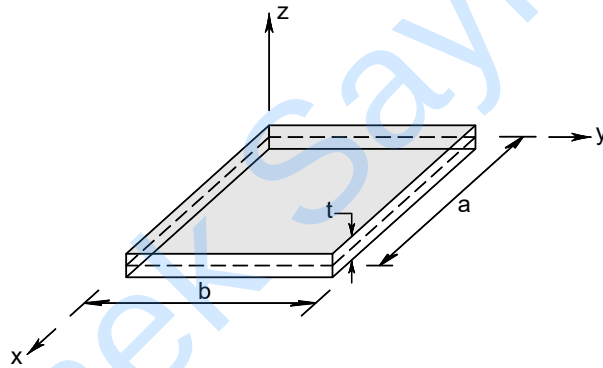


Plak Eleman

5

5.1 Plak eleman

Şekil 5-1’de gösterilen $x-y$ düzleminde bulunan, z doğrultusundaki kalınlığı t olan plak göz önüne alınsın. Plakın alt ve üst yüzeyleri $z = \pm t/2$, orta düzlemi ise $z = 0$ ’da olacaktır. Plak geometrisi için plak kalınlığının diğer plak boyutları yanında küçük olduğu ($t \ll a, b$) ve düşey yerdeğiştirmenin de kalınlığa göre küçük olduğu ($w/t \ll 1$) kabulleri yapılacaktır.



Şekil 5-1 Plak sistem

5.2 Kirchhoff plak teorisi varsayımları

Şekil 5-2’de plaktan x eksenine dik doğrultuda düzlemler ile kesilerek çıkarılan dx uzunluğunda bir diferansiyel parça gösterilmektedir. Plak, üzerindeki p yükü nedeniyle z doğrultusunda yukarı yönde yerdeğiştirme yapacaktır. Plak üzerindeki bir A noktasının yerdeğiştirmesi w , x ve y ’nin fonksiyonu olacaktır, $w = w(x, y)$. Yükleme öncesinde plak düzlemine dik olan bir düzlem kesit yükleme sonrasında da plak düzlemine dik kalacaktır. Bu durum Kirchhoff varsayımları ile uyumludur. Buna göre

- 1) Orta düzlemdeki ($z = 0$) herhangi bir nokta plak eğilmesi sonrasında yalnızca z doğrultusunda hareket eder.

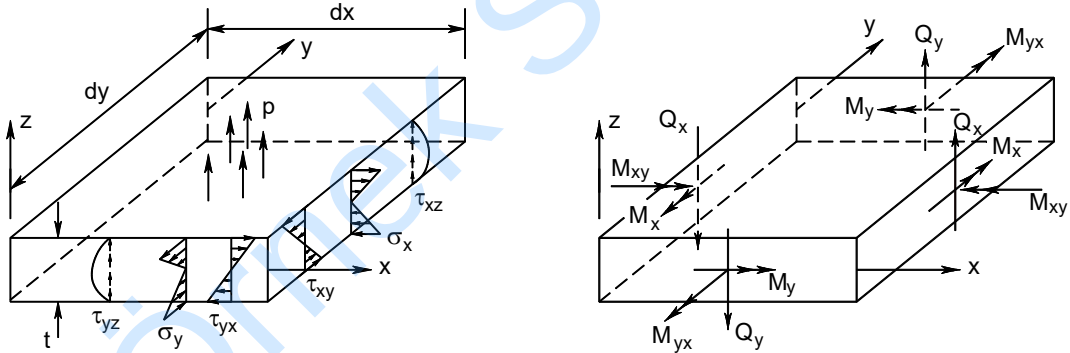
Burada

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (5.8)$$

plak eğilme rijitliğini göstermektedir.

Plak eğilme davranışına ait diferansiyel denklemi, sonlu elemanlar yöntemi için eleman yer değiştirme alanlarının seçilmesinde önemlidir. Bu ilişkinin temeli, sırasıyla z yönüne göre kuvvetlerin dengesi ve x ve y eksenlerine göre momentlerin dengesinden türetilen plak diferansiyel denklemleridir. Bu denge denklemleri kullanılarak aşağıdaki diferansiyel denklemlerle elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$



Şekil 5-3 Plak gerilmeleri ve iç kuvvetleri

Burada p düşey doğrultuda birim alana etkiyen yayılı yükü, Q_x ve Q_y birim genişliğe etkiyen kesme kuvvetlerini göstermektedir. Denk.(5.2)'deki eğrilikler 2. ve 3. Denge denklemlerinde yerine yazılır ve denklemlerden Q_x ve Q_y çözülerek 1. Denge denkleminde yerine yazılırsa izotrop malzemeden yapılmış ince plak sistemin diferansiyel denklemi elde edilir.

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p \quad (5.10)$$

$$DB_{3,11} = \frac{D(2b-3y)y(v-1)}{ab^2}$$

$$DB_{3,12} = \frac{-D(a^2-4ax+3x^2)(v-1)}{a^2b}$$

5.5 Yük vektörü

z yönünde birim alana etkiyen p yayılı yükünden kaynaklanan yük matrisi, Denk.(5.34) ile hesaplanır.

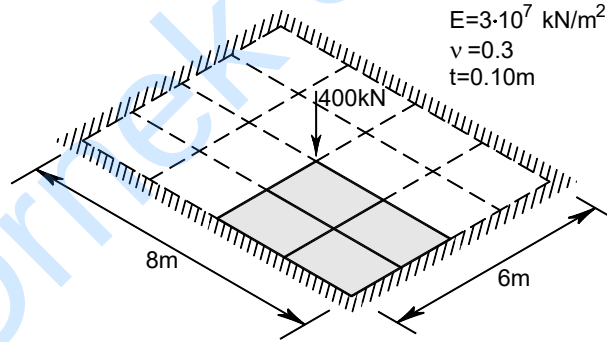
$$[F_s] = \int_0^b \int_0^a [N_s]^T p dx dy \quad (5.34)$$

a x b boyutlarındaki bir elemanın yüzeyine etkiyen düzgün p yükü için, düğüm noktası yükleri Denk. (5.35) ile hesaplanabilir.

$$\begin{Bmatrix} f_{wi} \\ f_{\theta xi} \\ f_{\theta yi} \end{Bmatrix} = pab \begin{Bmatrix} 1/4 \\ -b/24 \\ a/24 \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

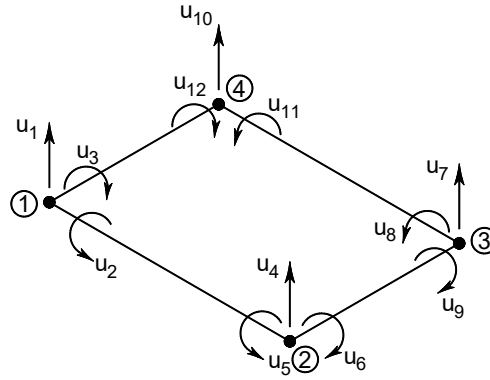
Örnek 5-1

Şekilde gösterilen dört kenarından ankastre mesnetli plak döşemeye orta noktasından 400kN tekil yük etkimektedir. Plak orta nokta düşey yerdeğişmesini hesaplayınız.



Çözüm:

Simetri özelliğinden yararlanarak sistemin 1/4'ü modellenenecektir. Simetri ekseninde bulunan yükün de 1/4'ü etkitilecektir. Eleman ve düğüm noktası numaralandırması aşağıda gösterilmektedir.



Eleman yerel numaralandırılması

Mesnet koşulları

Plak kenarları ankastre mesnetli

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = u_{16} = u_{17} = u_{18} = u_{25} = u_{26} = u_{27} = 0$$

Simetri nedeniyle plağın 1/4'ü modellenildiği için

- 7 nolu düğüm noktasında dönme olmayacak yalnızca düşey yerdeğiştirme oluşacaktır. $u_{19} \neq 0$, $u_{20} = u_{21} = 0$
- 4 nolu düğüm noktasında y eksenini etrafında dönme olmayacaktır. $u_{12} = 0$
- 8 nolu düğüm noktasında x eksenini etrafında dönme olmayacaktır. $u_{23} = 0$
- Yük değeri olarak $400/4 = 100 \text{ kN}$ etkililecektir.

Sınır koşulları uygulanmış sistem rijitlik matrisi:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{10,10}^{(1)} + k_{1,1}^{(3)} & k_{10,11}^{(1)} + k_{1,12}^{(3)} & k_{10,7}^{(1)} + k_{1,4}^{(3)} & k_{10,8}^{(1)} + k_{1,5}^{(3)} & k_{10,9}^{(1)} + k_{1,6}^{(3)} & k_{1,10}^{(3)} & k_{1,7}^{(3)} & k_{1,9}^{(3)} \\ k_{11,10}^{(1)} + k_{2,1}^{(3)} & k_{11,11}^{(1)} + k_{2,2}^{(3)} & k_{11,7}^{(1)} + k_{2,4}^{(3)} & k_{11,8}^{(1)} + k_{2,5}^{(3)} & k_{11,9}^{(1)} + k_{2,6}^{(3)} & k_{2,10}^{(3)} & k_{2,7}^{(3)} & k_{2,9}^{(3)} \\ k_{7,10}^{(1)} + k_{4,1}^{(3)} & k_{7,11}^{(1)} + k_{4,2}^{(3)} & k_{7,7}^{(1)} + k_{4,4}^{(3)} & k_{7,8}^{(1)} + k_{4,5}^{(3)} & k_{7,9}^{(1)} + k_{4,6}^{(3)} & k_{4,10}^{(3)} & k_{4,7}^{(3)} & k_{4,9}^{(3)} \\ k_{8,10}^{(1)} + k_{5,1}^{(3)} & k_{8,11}^{(1)} + k_{5,2}^{(3)} & k_{8,7}^{(1)} + k_{5,4}^{(3)} + k_{2,1}^{(4)} & k_{8,8}^{(1)} + k_{5,5}^{(3)} + k_{2,2}^{(4)} & k_{8,9}^{(1)} + k_{5,6}^{(3)} + k_{2,3}^{(4)} & k_{5,10}^{(3)} & k_{5,7}^{(3)} + k_{2,10}^{(4)} & k_{5,9}^{(3)} + k_{2,12}^{(4)} \\ k_{9,10}^{(1)} + k_{6,1}^{(3)} & k_{9,11}^{(1)} + k_{6,2}^{(3)} & k_{9,7}^{(1)} + k_{6,4}^{(3)} & k_{9,8}^{(1)} + k_{6,5}^{(3)} + k_{3,2}^{(4)} & k_{9,9}^{(1)} + k_{6,6}^{(3)} + k_{3,3}^{(4)} & k_{6,10}^{(3)} & k_{6,7}^{(3)} + k_{3,10}^{(4)} & k_{6,9}^{(3)} + k_{3,12}^{(4)} \\ k_{10,1}^{(3)} & k_{10,2}^{(3)} & k_{10,4}^{(3)} & k_{10,5}^{(3)} & k_{10,6}^{(3)} & k_{10,10}^{(3)} & k_{10,7}^{(3)} & k_{10,9}^{(3)} \\ k_{7,1}^{(3)} & k_{7,2}^{(3)} & k_{7,4}^{(3)} & k_{7,5}^{(3)} + k_{10,2}^{(4)} & k_{7,6}^{(3)} + k_{10,3}^{(4)} & k_{7,10}^{(3)} & k_{7,7}^{(3)} + k_{10,10}^{(4)} & k_{7,9}^{(3)} + k_{10,12}^{(4)} \\ k_{9,1}^{(3)} & k_{9,2}^{(3)} & k_{9,4}^{(3)} & k_{9,5}^{(3)} + k_{12,2}^{(4)} & k_{9,6}^{(3)} + k_{12,3}^{(4)} & k_{9,10}^{(3)} & k_{9,7}^{(3)} + k_{12,10}^{(4)} & k_{9,9}^{(3)} + k_{12,12}^{(4)} \end{bmatrix}$$

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} -0.01808 \\ -0.01895 \\ 0 \\ -0.00803 \\ -0.00764 \\ -0.00691 \\ -0.01492 \\ 0 \\ -0.01379 \\ -0.03892 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D][B]\{u_i\} = \begin{Bmatrix} -86.022 \\ -101.595 \\ 8.945 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırlanmalıdır.

SAP2000 s2k veri dosyası

File F:\kutlu\fem\program_code\PLAK4Nokta\sap2000\plak03v26.s2k was saved on m/d/yy at h:mm:ss

TABLE: "PROGRAM CONTROL"

ProgramName=SAP2000 Version=26.1.0 CurrUnits="KN, m, C"

TABLE: "COORDINATE SYSTEMS"

Name=GLOBAL Type=Cartesian X=0 Y=0 Z=0 AboutZ=0 AboutY=0 AboutX=0

TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 01 - GENERAL"

Material=MAT Type=Other SymType=Isotropic TempDepend=No Color=Blue

TABLE: "MATERIAL PROPERTIES 02 - BASIC MECHANICAL PROPERTIES"

Material=MAT UnitWeight=0 UnitMass=0 E1=30000000 U12=0.3 A1=0

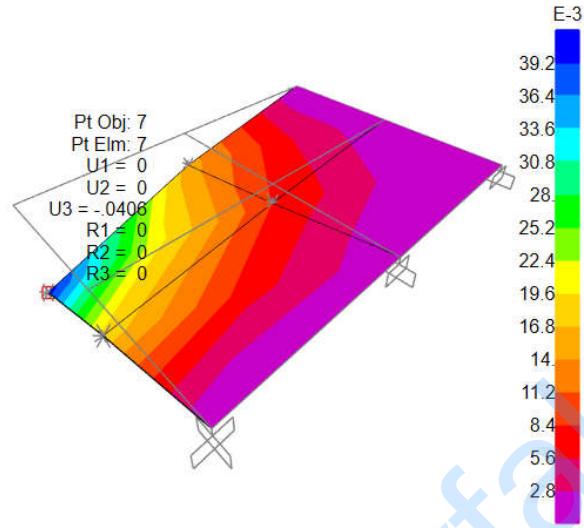
TABLE: "AREA SECTION PROPERTIES"

Section=ASEC1 Material=MAT MatAngle=0 AreaType=Shell Type=Plate-Thin

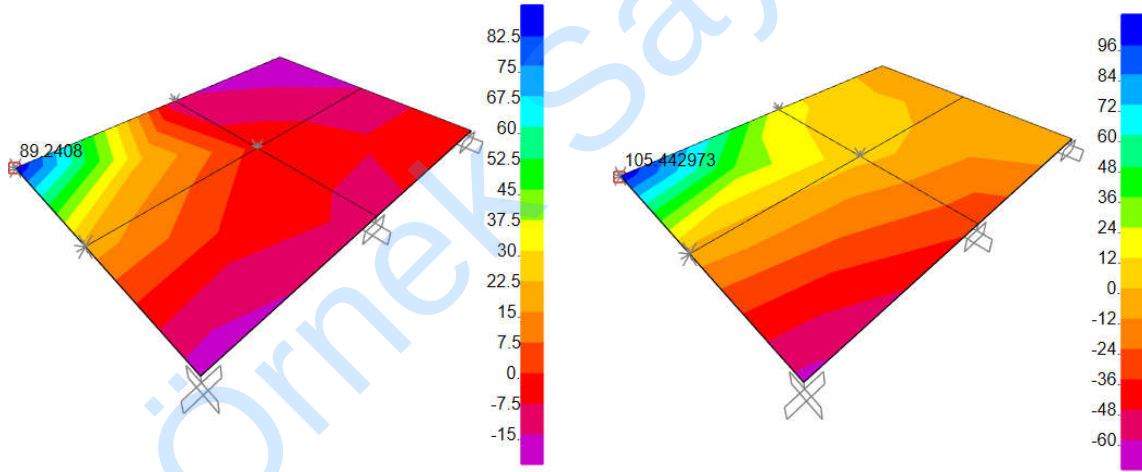
Thickness=0.1 BendThick=0.1 Color=Yellow

TABLE: "LOAD PATTERN DEFINITIONS"

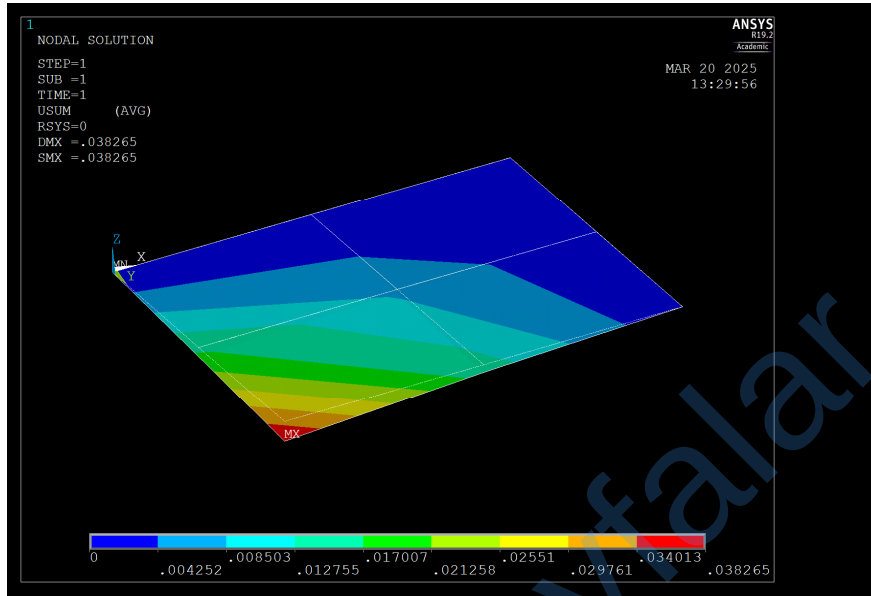
LoadPat=L1 DesignType=Other SelfWtMult=0



SAP2000 plak yerdeğiştirme grafiği



SAP2000 Plak eğilme momentleri



Python program kodu

```
import modul kd
def IC_KUVVET(DB,x,y,a,b,E,nu,t):
    a2=a*a;    b2=b*b
    a3=a*a*a;  b3=b*b*b
    a2b=a*a*b; ab2=a*b*b
    D=E*t*t*t/(12*(1-nu*nu))
    DB[0][0]= 6*D*(ab2*(b-y)+2*b2*x*(y-b)+a3*(b-2*y)*nu-a2*x*(b-2*y)*nu)/(a3*b3)
    DB[0][1]= 2*D*(a-x)*(2*b-3*y)*nu/ab2
    DB[0][2]= -2*D*(2*a-3*x)*(b-y)/a2b
    DB[0][3]= 6*D*(2*b2*x*(b-y)+ab2*(y-b)+a2*x*(b-2*y)*nu)/(a3*b3)
    DB[0][4]= 2*D*x*(2*b-3*y)*nu/ab2
    DB[0][5]= -2*D*(a-3*x)*(b-y)/a2b
    DB[0][6]= -6*D*(ab2*y-2*b2*x*y+a2*x*(b-2*y)*nu)/(a3*b3)
    DB[0][7]= 2*D*x*(b-3*y)*nu/ab2
    DB[0][8]= -2*D*(a-3*x)*y/a2b
    DB[0][9]= -6*D*(-ab2*y+2*b2*x*y+a3*(b-2*y)*nu-a2*x*(b-2*y)*nu)/(a3*b3)
    DB[0][10]= 2*D*(a-x)*(b-3*y)*nu/ab2
    DB[0][11]= (-4*D*a*y+6*D*x*y)/a2b
    DB[1][0]= 6*D*(a3*(b-2*y)-a2*x*(b-2*y)+ab2*(b-y)*nu+2*b2*x*(y-b)*nu)/(a3*b3)
    DB[1][1]= 2*D*(a-x)*(2*b-3*y)/ab2
    DB[1][2]= -2*D*(2*a-3*x)*(b-y)*nu/a2b
    DB[1][3]= 6*D*(a2*x*(b-2*y)+2*b2*x*(b-y)*nu+ab2*(y-b)*nu)/(a3*b3)
    DB[1][4]=2*D*x*(2*b-3*y)/ab2
    DB[1][5]= -2*D*(a-3*x)*(b-y)*nu/a2b
```

Plak Sistem Analizi

ÖRNEK 1

Düğüm Noktası Sayısı

9

Düğüm Noktası Adı ve Koordinatları

No	x	y
1	0	0
2	2	0
3	4	0
4	0	1.5
5	2	1.5
6	4	1.5
7	0	3
8	2	3
9	4	3

Mesnet Koşulu Bulunan Düğüm Noktası Sayısı

8

Düğüm Noktası Mesnetlenme Koşulu (1 Tutulu/0 Serbest)

No	w	tetax	tetay
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	1	1
4	0	0	1
6	1	1	1
7	0	1	1
8	0	1	0
9	1	1	1

Eleman Adedi

4

Eleman Bağlantı Bilgisi

No	i	j	k	l
1	1	2	5	4
2	2	3	6	5
3	4	5	8	7
4	5	6	9	8

Malzeme Bilgisi

E	nu
3E7	0.3
3E7	0.3
3E7	0.3
3E7	0.3

Kesit kalınlığı

t
0.10
0.10
0.10
0.10

Yük Etkisindeki Düğüm Noktası Adedi

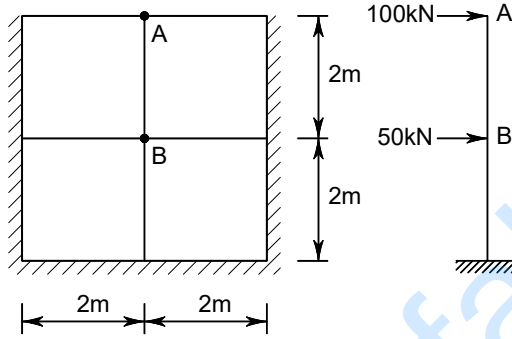
1

Yük Değerleri

No	FZ	MX	MY
7	-100	0	0

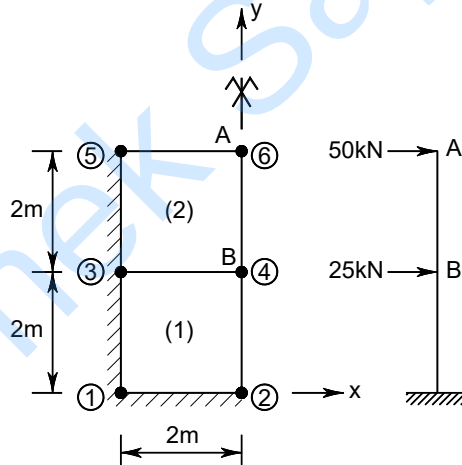
Örnek 5-2

Şekilde gösterilen üç kenarından ankastre mesnetli plak döşemeyi çözünüz ve A noktasındaki yerdeğiştirme ve iç kuvvetleri hesaplayınız. $E = 3 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$ $\nu = 0.2$ $t = 0.12 \text{ m}$



Çözüm:

Sistem y eksenine göre simetrik olduğundan yarısı ile hesap yapılacaktır.



Eleman ve karşı gelen sistem serbestlik dereceleri

Eleman No	Yerel Kod	i			j			k			l		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Genel Kod	1	2	3	4	5	6	13	14	15	10	11	12
2	Genel Kod	4	5	6	7	8	9	16	17	18	13	14	15

Her iki eleman da aynı özelliklere sahip olduğundan eleman rijitlik matrisleri aynı olacaktır.

Sistem bilinmeyenleri (düğüm noktası yerdeğiştirme ve dönmeleri)

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{16} \\ u_{17} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.001931 \\ -0.001865 \\ -0.007331 \\ -0.003505 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

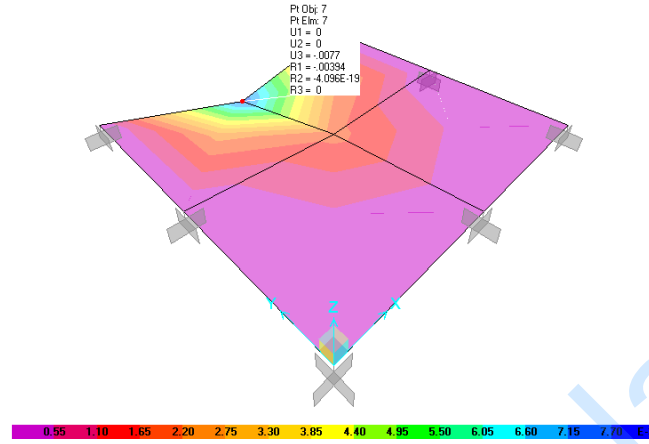
Plak A noktasına karşı gelen, 2 Nolu eleman için 6 nolu düğüm noktasında iç kuvvetlerin hesabı ($x=2, y=2, a=2, b=2$)

$$[D][B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1350 & -900 & 0 & 8100 & -1800 & 9000 & -6750 & 0 & 4500 \\ 0 & 0 & 0 & -6750 & -4500 & 0 & 8100 & -9000 & 1800 & -1350 & 0 & 900 \\ 900 & 0 & 0 & -900 & 0 & -1800 & 900 & -1800 & 1800 & -900 & 1800 & 0 \end{bmatrix}$$

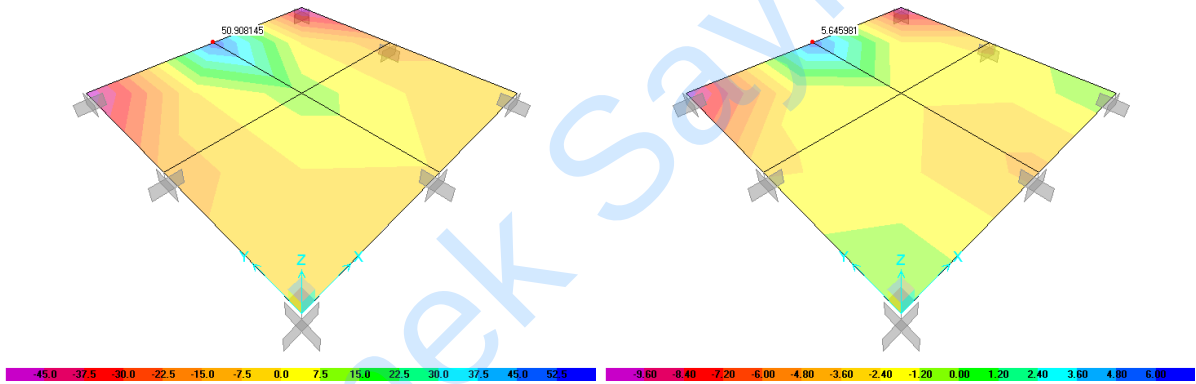
$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.001931 \\ -0.001865 \\ 0 \\ -0.007331 \\ -0.003505 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ olarak belirlenir.}$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D][B]\{u_i\} = \begin{Bmatrix} -48.789 \\ -6.409 \\ 1.450 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırlanmalıdır.



SAP2000 A noktası yerdeğiştirmeleri



SAP2000 A noktasında M_x

SAP2000 A noktasında M_y

Üç Boyutlu Elemanlar

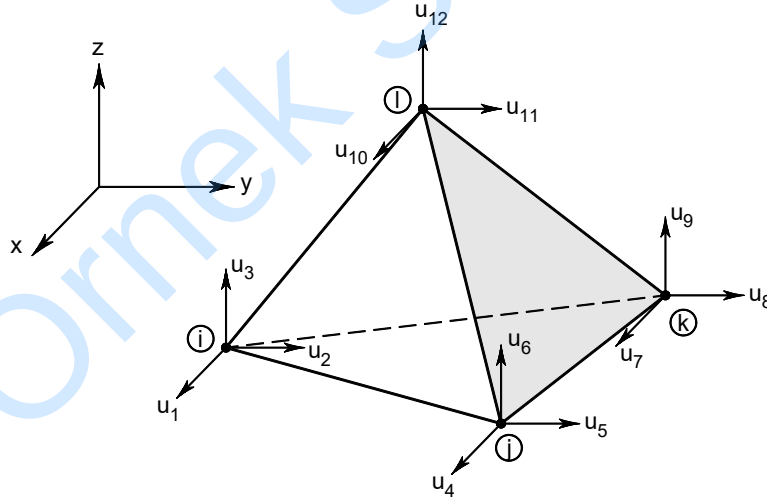
6

6.1 Giriş

Önceki bölümlerde, çubuk elemanlar, düzlemsel (iki boyutlu) elemanlar açıklanmıştır. Ancak gerçek dünyada çoğu zaman karmaşık geometrileri ve yükleme koşulları içeren problemlerin üç boyutlu sonlu elemanlar analizi ile çözülmesi gerekebilir. Bu bölümde, nesnelerin hacimsel özelliklerini dikkate alan ve daha gerçekçi analizlere olanak tanıyan üç boyutlu elemanların temel kavramları ve farklı eleman tipleri incelenecektir.

6.2 Dört Noktalı Dört Yüzlü Eleman

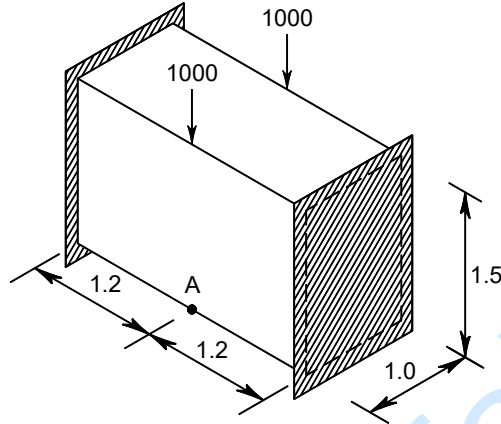
Dört noktalı, dört yüzlü (tetrahedral) eleman katı mekaniği problemlerinin çözümünde kullanılan en basit üç boyutlu elemandır. Bu eleman her düğüm noktasında x, y ve z doğrultularında üç yerdeğiştirme olmak üzere toplam 12 serbestlik derecesine sahiptir, Şekil 6-1.



Şekil 6-1 Dört noktalı dört yüzlü sonlu eleman

Dört noktalı dört yüzlü (tetrahedral) elemanın şekil fonksiyonlarını elde etmek için üçgen eleman şekil fonksiyonlarının elde edilmesindekine benzer bir yöntem izlenebilir.

Örnek 6-1

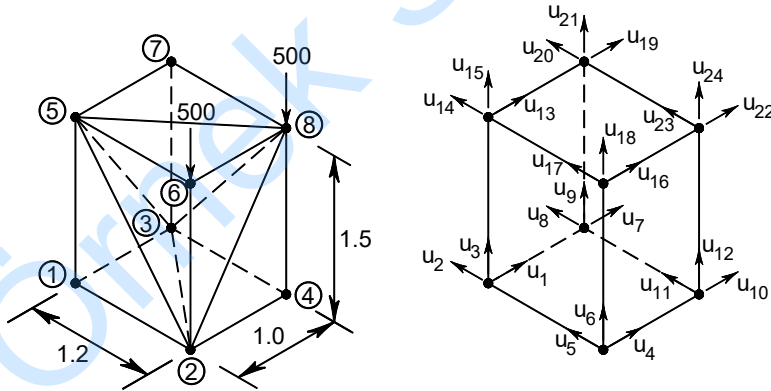


Şekilde gösterilen sistemde verilen yükler etkisinde A noktasında oluşacak düşey yerdeğiştirme değerini hesaplayınız.

Malzeme özelliği: $E = 3 \cdot 10^7$ $\nu = 0.3$

Çözüm:

Simetriden yararlanılarak sistemin yarısı ile hesap yapılacaktır. Simetri eksenini üzerindeki yükün yarı değeri göz önüne alınacaktır.



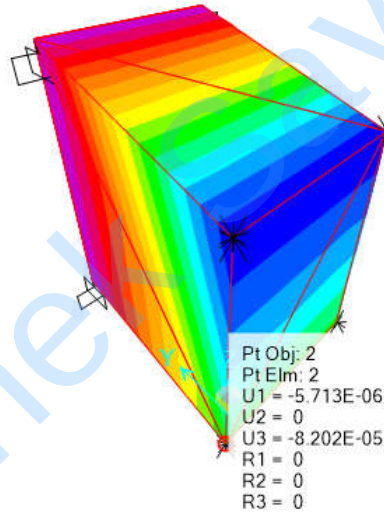
Sınır koşulları olarak $u_1 = u_2 = u_3 = u_7 = u_8 = u_9 = u_{13} = u_{14} = u_{15} = u_{19} = u_{20} = u_{21} = 0$ belirlenir. $u_5 = u_{11} = u_{17} = u_{23} = 0$ koşulları simetri özelliğinden yararlanılarak belirlenmektedir.

1 Nolu eleman rijitlik matrisinin hesaplanması:

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_6 \\ u_{10} \\ u_{12} \\ u_{16} \\ u_{18} \\ u_{22} \\ u_{24} \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -5.713 \\ -82.020 \\ 5.713 \\ -82.020 \\ -5.713 \\ -125.981 \\ 5.713 \\ -125.981 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

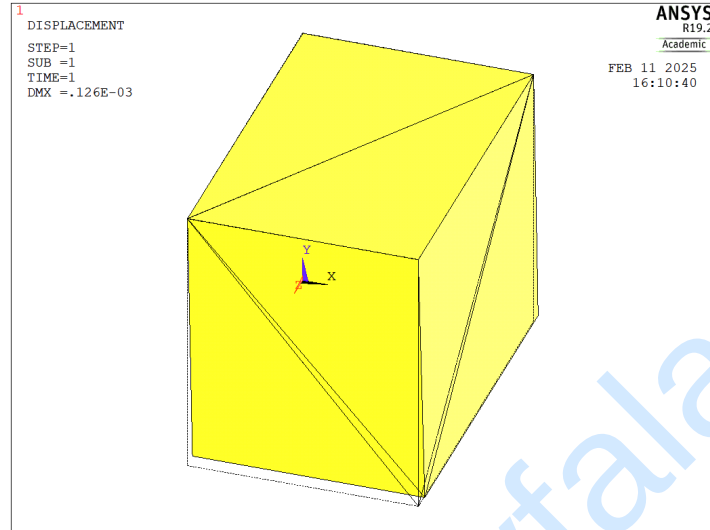
A noktası düşey yerdeğiştirmesi $u_6 = -82.020 \cdot 10^{-6}$ olarak belirlenir.

Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırd tutulmalıdır.



SAP2000 s2k veri dosyası

```
File F:\kutlu\fem\program_code\TetraHedron\sap2000\ornek01av26.s2k
TABLE: "PROGRAM CONTROL"
  ProgramName=SAP2000  Version=26.1.0      CurrUnits="KN, m, C"
TABLE: "ACTIVE DEGREES OF FREEDOM"
  UX=Yes  UY=Yes  UZ=Yes  RX=Yes  RY=Yes  RZ=Yes
TABLE: "ANALYSIS OPTIONS"
  Solver=Advanced  SolverProc=Auto
TABLE: "COORDINATE SYSTEMS"
```



Python program kodu

```
import modul_kd

def shape_functions(xi, eta, zeta):
    N1 = 1 - xi - eta - zeta
    N2 = xi
    N3 = eta
    N4 = zeta
    return [N1, N2, N3, N4]

def D_matris(D,E,nu):
    c1=E / (1 + nu)
    D[0][0]=c1*(1-nu)/(1-2*nu)
    D[0][1]=c1*(nu)/(1-2*nu)
    D[0][2]=c1*(nu)/(1-2*nu)
    D[1][0]=c1*(nu)/(1-2*nu)
    D[1][1]=c1*(1-nu)/(1-2*nu)
    D[1][2]=c1*(nu)/(1-2*nu)
    D[2][0]=c1*nu/(1-2*nu)
    D[2][1]=c1*nu/(1-2*nu)
    D[2][2]=c1*(1-nu)/(1-2*nu)
    D[3][3]=c1/2.
    D[4][4]=c1/2.
    D[5][5]=c1/2.
```

1	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
2	-5.7134e-06	0.0000e+00	-8.2019e-05
3	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
4	5.7134e-06	0.0000e+00	-8.2019e-05
5	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
6	-5.7134e-06	0.0000e+00	-1.2598e-04
7	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00
8	5.7134e-06	0.0000e+00	-1.2598e-04

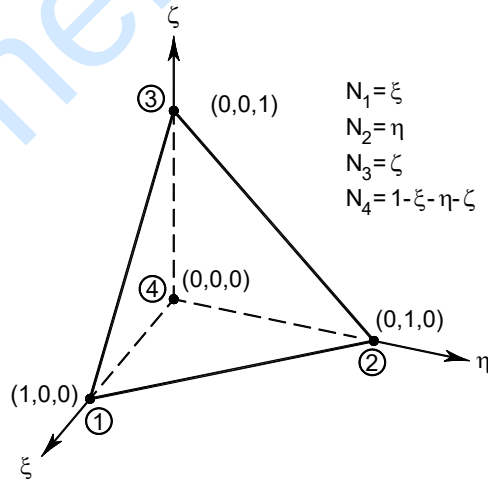
Düğüm Noktası Tepki Kuvvetleri

D. No	RX	RY	RZ
1	1.3734e+01	-1.7421e+02	1.9716e+02
2	0.0000e+00	-2.2579e+02	0.0000e+00
3	-1.3734e+01	-3.0316e+02	1.9716e+02
4	0.0000e+00	-9.6841e+01	0.0000e+00
5	1.3734e+01	9.6841e+01	3.0284e+02
6	0.0000e+00	3.0316e+02	0.0000e+00
7	-1.3734e+01	2.2579e+02	3.0284e+02
8	0.0000e+00	1.7421e+02	0.0000e+00

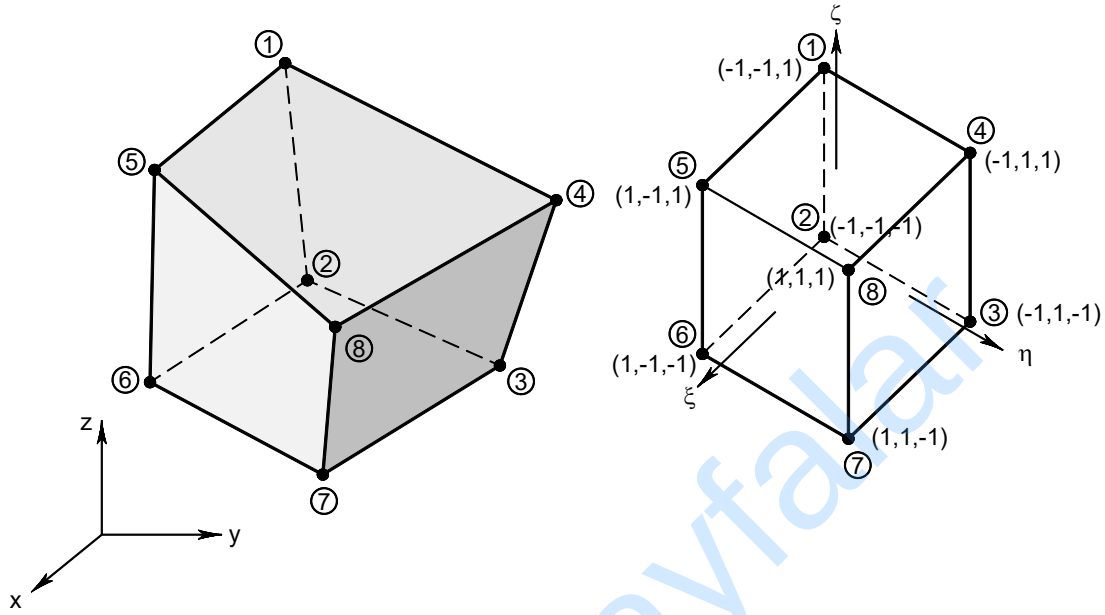
Eleman gerilmeleri

E. No	S11	S22	S33	S12	S13	S23
1	-4.5781e+01	-3.0948e+02	-9.8581e+02	-5.4937e+01	-2.9320e-14	7.8865e+02
2	-4.5781e+01	-3.0948e+02	-9.8581e+02	5.4937e+01	3.1275e-13	1.2114e+03
3	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	5.4937e+01	0.0000e+00	7.8865e+02
4	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	-5.4937e+01	0.0000e+00	1.2114e+03

6.4 İzoparametrik Formülasyon



Şekil 6-2 Ana eleman



Şekil 6-3 Sekiz noktalı altı yüzlü sonlu eleman

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

Buradaki şekil fonksiyonları ξ , η , ζ eksen takımında i düğüm noktasının koordinatları ξ_i , η_i , $\zeta_i = \pm 1$ ve $i=1,2,\dots,8$ olmak üzere

$$N_i = \frac{(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)}{8} \quad (6.42)$$

şeklinde elde edilir. Örneğin

$$N_1 = \frac{(1+\xi\xi_1)(1+\eta\eta_1)(1+\zeta\zeta_1)}{8}$$

olarak yazılır. Şekil 6-3'den $\xi_1 = -1$, $\eta_1 = -1$, $\zeta_1 = +1$ olarak belirlenir ve

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial \zeta} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

olmak üzere

$$[B] = [A][G] \quad (6.53)$$

bağıntısıyla elde edilebilir.

Eleman rijitlik matrisi de

$$[k^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] J d\xi d\eta d\zeta \quad (6.54)$$

bağıntısı kullanılarak hesaplanır.

Eleman rijitlik matrisi Gauss kareleme yöntemi ile sayısal integral kullanılarak belirlenmek istenirse Tablo 6-1'de verilen değerler kullanılarak

$$[k^{(e)}] = \sum_i \sum_j \sum_k [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] J(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) W_i W_j W_k \quad (6.55)$$

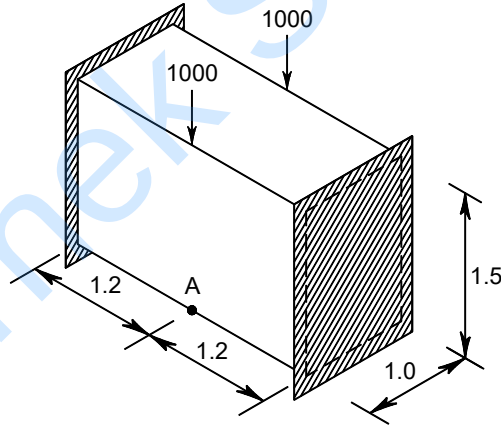
bağıntısıyla hesaplanabilir.

Tablo 6-1 Sekiz noktalı altı yüzlü (Hexahedral) eleman için Gauss noktaları koordinatları ve ağırlık fonksiyonu değerleri

Nokta, i	ξ_i	η_i	ζ_i	W_i
1	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
2	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
3	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
4	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	1
5	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
6	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
7	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1
8	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$-1/\sqrt{3}$	1

$$1/\sqrt{3} \cong 0.57735$$

Örnek 6-2

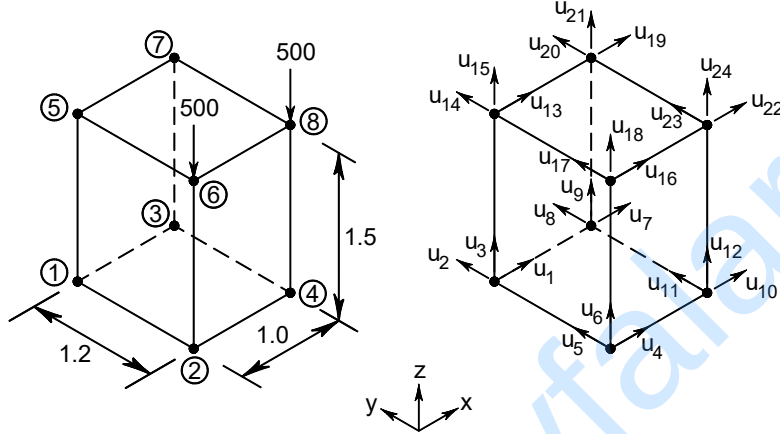


Şekilde gösterilen sistemde verilen yükler etkisinde A noktasında oluşacak düşey yerdeğiştirme değerini hesaplayınız.

$$E = 3 \cdot 10^7 \quad \nu = 0.3$$

Çözüm:

Simetriden yararlanılarak sistemin yarısı ile hesap yapılacaktır. Bu nedenle simetri eksenindeki yükün yarı değeri göz önüne alınacaktır.

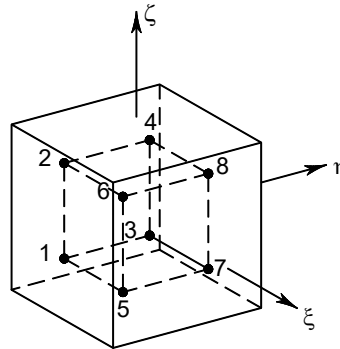


Sınır koşulları olarak $u_1 = u_2 = u_3 = u_7 = u_8 = u_9 = u_{13} = u_{14} = u_{15} = u_{19} = u_{20} = u_{21} = 0$ belirlenir. $u_5 = u_{11} = u_{17} = u_{23} = 0$ koşulları simetri özelliğinden yararlanılarak belirlenmektedir.

$$[D] = \begin{bmatrix} 40384615.4 & 17307692.3 & 17307692.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 17307692.3 & 40384615.4 & 17307692.3 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 17307692.3 & 17307692.3 & 40384615.4 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 11538461.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 11538461.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 11538461.5 \end{bmatrix}$$

Gauss Noktaları

- 1 (-0.5773,-0.5773,-0.5773)
- 2 (-0.5773,-0.5773,0.5773)
- 3 (-0.5773,0.5773,-0.5773)
- 4 (-0.5773,0.5773,0.5773)
- 5 (0.5773,-0.5773,-0.5773)
- 6 (0.5773,-0.5773,0.5773)
- 7 (0.5773,0.5773,-0.5773)
- 8 (0.5773,0.5773,0.5773)



$$[\bar{k}_{21}]_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} -2884615 & 240385 & -2548077 & 576923 & 480769 & -1634615 & 2884615 & 2403846 \\ 3814103 & -1802885 & 576923 & -4150641 & -360577 & 2884615 & -6762821 & -721154 \\ -1802885 & 2932692 & -480769 & 360577 & -264423 & -240385 & 721154 & 1009615 \\ -576923 & 480769 & -1634615 & 2884615 & 240385 & -2548077 & 576923 & 1201923 \\ 2948718 & -721154 & 1442308 & -4583333 & -3605769 & 288462 & -2676282 & -1802885 \\ 721154 & -3942308 & 480769 & -3605769 & -3701923 & 240385 & -1802885 & -2235577 \\ 1442308 & -480769 & 1346154 & -288462 & -240385 & -1057692 & -1442308 & -1201923 \\ -4583333 & 3605769 & -288462 & 2948718 & 721154 & -1442308 & 705128 & 360577 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}_{22}]_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 7500000 & -576923 & 1201923 & 288462 & -1442308 & -1201923 & -1875000 & 288462 \\ -576923 & 10705128 & -3605769 & -2884615 & 705128 & 360577 & 288462 & -2676282 \\ 1201923 & -3605769 & 8942308 & 2403846 & -360577 & -2740385 & -2403846 & 1802885 \\ 288462 & -2884615 & 2403846 & 7500000 & -288462 & -2403846 & -2019231 & 1442308 \\ -1442308 & 705128 & -360577 & -288462 & 10705128 & 3605769 & 2884615 & -6762821 \\ -1201923 & 360577 & -2740385 & -2403846 & 3605769 & 8942308 & 2403846 & -721154 \\ -1875000 & 288462 & -2403846 & -2019231 & 2884615 & 2403846 & 7500000 & -576923 \\ 288462 & -2676282 & 1802885 & 1442308 & -6762821 & -721154 & -576923 & 10705128 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}_{23}]_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} -2403846 & -2019231 & 1442308 & -480769 & 1346154 & -288462 & -240385 & -1057692 \\ 1802885 & 1442308 & -4583333 & 3605769 & -288462 & 2948718 & 721154 & -1442308 \\ -2235577 & -1201923 & 3605769 & -3701923 & 240385 & -721154 & -3942308 & 480769 \\ -1201923 & -1875000 & 288462 & -240385 & -1057692 & -1442308 & -480769 & 1346154 \\ 721154 & 576923 & -4150641 & 360577 & -2884615 & 3814103 & 1802885 & -576923 \\ 1009615 & 1201923 & -360577 & -264423 & -240385 & 1802885 & 2932692 & -480769 \\ 1201923 & 288462 & -2884615 & 240385 & -2548077 & 576923 & 480769 & -1634615 \\ -3605769 & -2884615 & 3814103 & -1802885 & 576923 & -4150641 & -360577 & 2884615 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{k}_{31}]_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 3605769 & -3701923 & 240385 & -721154 & -3942308 & 480769 & -360577 & -2740385 \\ 288462 & -240385 & -1057692 & -1442308 & -480769 & 1346154 & -288462 & -2403846 \\ -2676282 & 1802885 & -1442308 & 705128 & 360577 & -288462 & 2948718 & 721154 \\ 1802885 & -2235577 & 1201923 & -360577 & -2740385 & 2403846 & -721154 & -3942308 \\ -1442308 & 1201923 & -1875000 & 288462 & 2403846 & -2019231 & 1442308 & 480769 \\ 705128 & -360577 & 288462 & -2676282 & -1802885 & 1442308 & -4583333 & -3605769 \\ 360577 & -2740385 & 2403846 & -1802885 & -2235577 & 1201923 & -3605769 & -3701923 \\ -288462 & 2403846 & -2019231 & 1442308 & 1201923 & -1875000 & 288462 & 240385 \end{bmatrix}$$

Yük vektörü

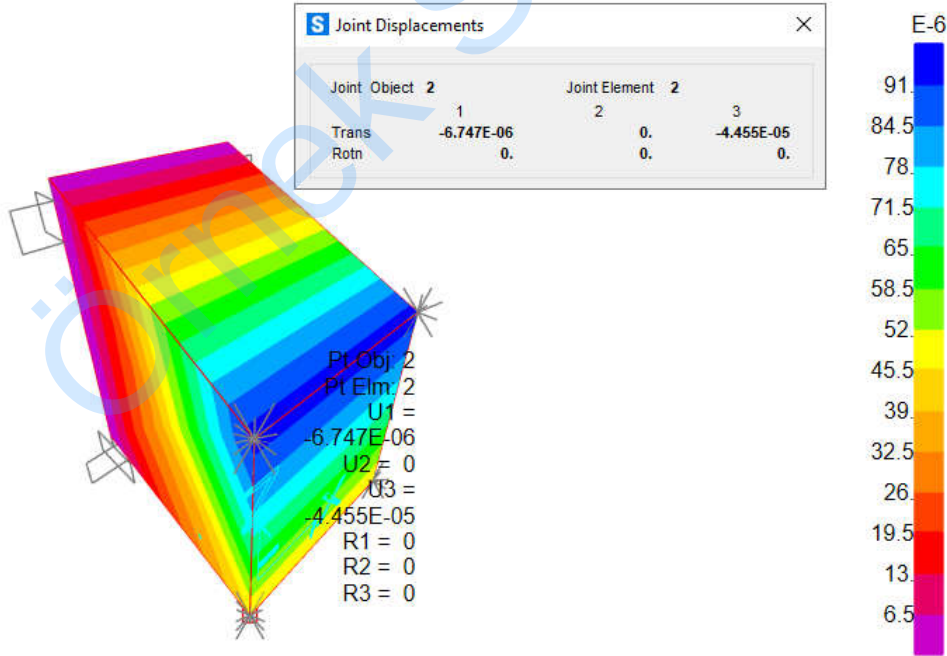
$$[F] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -500 \ 0 \ -500]^T$$

Yerdeğiştirmeler

$$\{u_i\} = \begin{Bmatrix} u_4 \\ u_6 \\ u_{10} \\ u_{12} \\ u_{16} \\ u_{18} \\ u_{22} \\ u_{24} \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{Bmatrix} -6.747 \\ -44.548 \\ 6.747 \\ -44.548 \\ -6.747 \\ -94.119 \\ 6.747 \\ -94.119 \end{Bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Sonuç olarak A noktası düşey yerdeğiştirmesi $u_6 = -44.548 \cdot 10^{-6}$ olarak belirlenir.

Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırlanmalıdır.



ANSYS Veri dosyası

```

/prep7
n,1,0,1.2,0
n,2,0,0,0
n,3,1,1.2,0
n,4,1,0,0
n,5,0,1.2,1.5
n,6,0,0,1.5
n,7,1,1.2,1.5
n,8,1,0,1.5
!
ET,1,SOLID5
!*
KEYOPT,1,1,2
KEYOPT,1,3,1
KEYOPT,1,5,0
!
mp,ex,1,3e7
mp,prxy,1,0.3
!
en,1,1,2,4,3,5,6,8,7
!
D,1,ALL,0
D,3,ALL,0
D,5,ALL,0
D,7,ALL,0
D,2,,0,, ,UY, , , ,
D,4,,0,, ,UY, , , ,
D,6,,0,, ,UY, , , ,
D,8,,0,, ,UY, , , ,
!
F,6,FZ,-500
F,8,FZ,-500
FINISH
/SOL
/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
/POST1
PLDISP,1

```

Hexahedral Eleman ile Analiz

ÖRNEK 1

Düğüm Noktası Sayısı

8

Düğüm Noktası Adı ve Koordinatları

No	x	y	z
1	0	1.2	0
2	0	0	0
3	1	1.2	0
4	1	0	0
5	0	1.2	1.5
6	0	0	1.5
7	1	1.2	1.5
8	1	0	1.5

Mesnet Koşulu Bulunan Düğüm Noktası Sayısı

8

Düğüm Noktası Mesnetlenme Koşulu (1 Tutulu/0 Serbest)

No	ux	uy	uz
1	1	1	1
3	1	1	1
5	1	1	1
7	1	1	1
2	0	1	0
4	0	1	0
6	0	1	0
8	0	1	0

Eleman Adedi

1

Eleman Bağlantı Bilgisi, Malzeme Bilgisi Kesti kalınlığı

No	i	j	k	l	m	n	o	p	E	nu
1	6	2	1	5	8	4	3	7	3e7	0.3

Yük Etkisindeki Düğüm Noktası Adedi

2

Yük Değerleri

No	FX	FY	FZ
6	0	0	-500
8	0	0	-500

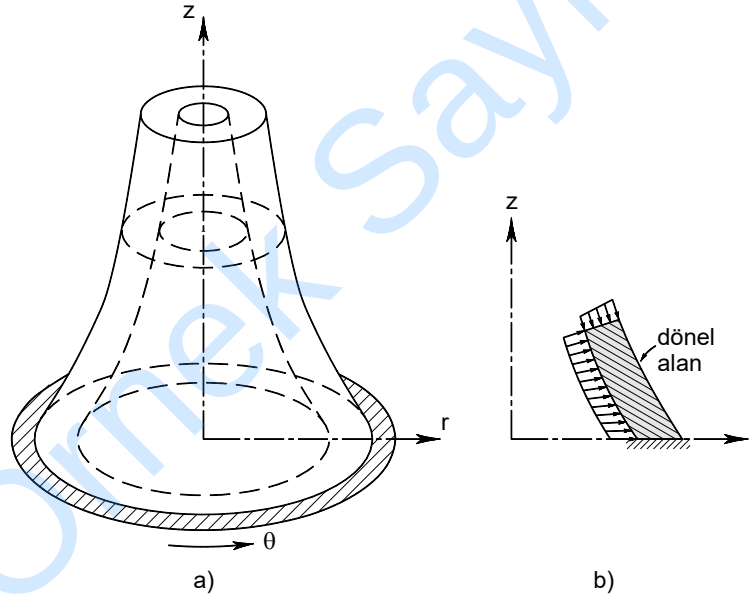
Yerdeğiştirmeler							
D. No	UX	UY	UZ				
1	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00				
2	-6.7469e-06	0.0000e+00	-4.4548e-05				
3	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00				
4	6.7469e-06	0.0000e+00	-4.4548e-05				
5	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00				
6	-6.7469e-06	0.0000e+00	-9.4119e-05				
7	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00				
8	6.7469e-06	0.0000e+00	-9.4119e-05				
Düğüm Noktası Tepki Kuvvetleri							
D. No	RX	RY	RZ				
1	1.2164e+01	-2.6345e+02	3.3031e+02				
2	0.0000e+00	-1.3655e+02	0.0000e+00				
3	-1.2164e+01	-2.6345e+02	3.3031e+02				
4	0.0000e+00	-1.3655e+02	0.0000e+00				
5	1.2164e+01	1.3655e+02	1.6969e+02				
6	0.0000e+00	2.6345e+02	0.0000e+00				
7	-1.2164e+01	1.3655e+02	1.6969e+02				
8	0.0000e+00	2.6345e+02	0.0000e+00				
Eleman gerilmeleri							
E. No	D. No	S11	S22	S33	S12	S23	S13
1	6	-1.8550e+02	-2.6335e+02	-6.9232e+02	2.3355e+01	3.2580e+02	7.8188e-14
1	2	-1.8550e+02	-2.6335e+02	-6.9232e+02	2.3355e+01	1.5420e+02	3.9094e-14
1	1	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	2.3355e+01	1.5420e+02	0.0000e+00
1	5	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	2.3355e+01	3.2580e+02	0.0000e+00
1	8	-1.8550e+02	-2.6335e+02	-6.9232e+02	-2.3355e+01	3.2580e+02	-4.8867e-15
1	4	-1.8550e+02	-2.6335e+02	-6.9232e+02	-2.3355e+01	1.5420e+02	-1.9547e-14
1	3	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	-2.3355e+01	1.5420e+02	0.0000e+00
1	7	0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	-2.3355e+01	3.2580e+02	0.0000e+00

Eksenel Simetrik Elemanlar

7

7.1 Eksenel Simetrik Üçgen Eleman

Geometrisi ve yüklemesi Şekil 7-1'de gösterildiği gibi z eksenine göre bir eksen etrafında simetrik olan özel durum içeren üç boyutlu problemler iki boyutlu probleme indirgenerek eksenel simetrik elemanlar kullanılarak analiz edilebilir. z eksenine göre tüm simetri bulunması nedeniyle şekildeğişiklikler ve gerilmeler dönme açısı θ 'dan bağımsız olur. Böylece problem dönel eleman üzerinde tanımlanan rz düzleminde iki boyutlu problem haline dönüşür.



Şekil 7-1 Eksenel simetrik problem

Şekil 7-2'de gösterilen ögesel hacim göz önüne alındığında potansiyel enerji

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_A [\sigma]^T \{\epsilon\} r dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_A [u]^T \{f\} r dA d\theta - \int_0^{2\pi} \int_L [u]^T \{T\} r d\ell d\theta - \sum_i [u_i]^T \{P_i\} \quad (7.1)$$

şeklinde yazılabilir. İntegraldeki tüm değişkenler θ 'dan bağımsızdırlar. Bunu göz önüne alarak denklem yeniden düzenlenirse

$$\Pi = 2\pi \left(\frac{1}{2} \int_A [\sigma]^T \{\epsilon\} r dA d\theta - \int_A [u]^T \{f\} r dA d\theta - \int_L [u]^T \{T\} r d\ell d\theta - \sum_i [u_i]^T \{P_i\} \right) \quad (7.2)$$

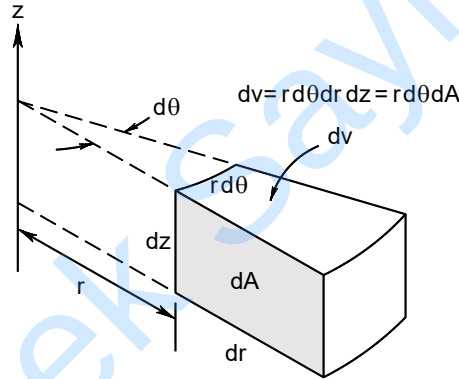
elde edilir. Burada

$$\{u\} = [u \quad w]^T \quad (7.3)$$

$$\{f\} = [f_r \quad f_z]^T$$

$$\{T\} = [T_r \quad T_z]^T$$

şeklindedir.

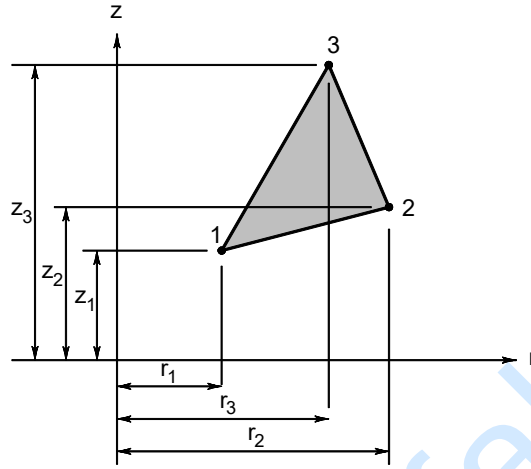


Şekil 7-2 Ögesel Hacim

Şekildeğiştirme-yerdeğiştirme arasındaki bağıntı

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \epsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{u}{r} \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

olarak yazılabilir.



Şekil 7-4

Buradaki katsayılar

$$\begin{aligned}
 a_1 &= r_2 z_3 - r_3 z_2 & b_1 &= z_2 - z_3 & c_1 &= r_3 - r_2 \\
 a_2 &= r_3 z_1 - r_1 z_3 & b_2 &= z_3 - z_1 & c_2 &= r_1 - r_3 \\
 a_3 &= r_1 z_2 - r_2 z_1 & b_3 &= z_1 - z_2 & c_3 &= r_2 - r_1
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

şeklindedir.

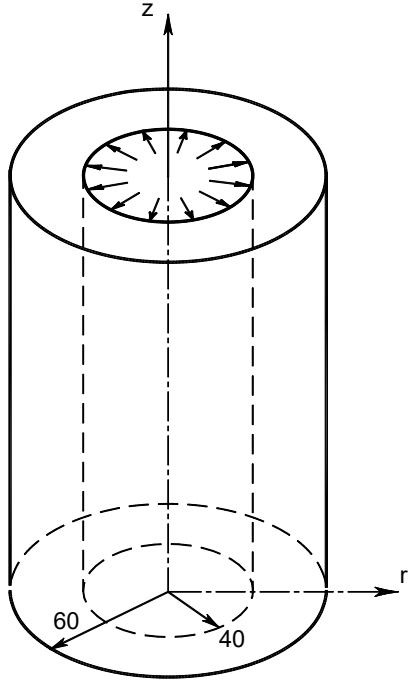
$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$$

Dönel simetrik eleman için malzeme matrisi eleman

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

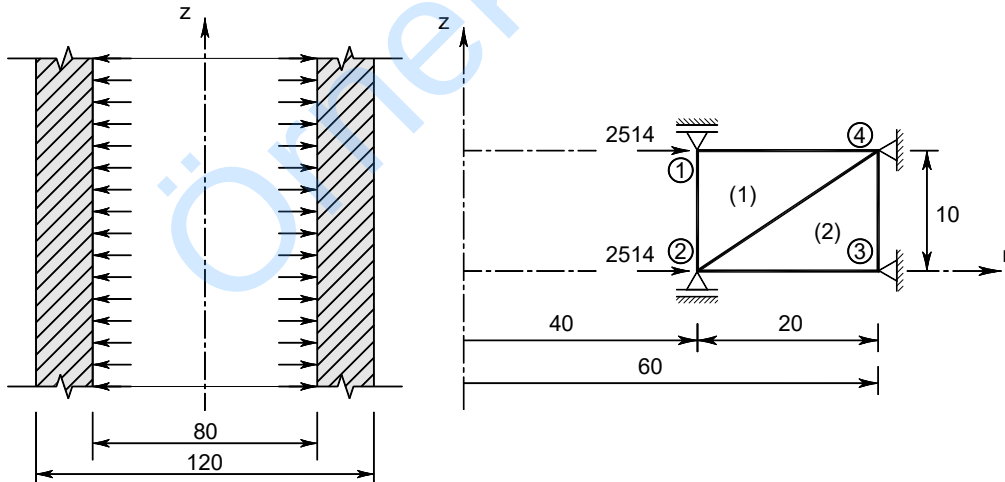
şeklinde olacaktır.

Örnek 7-1



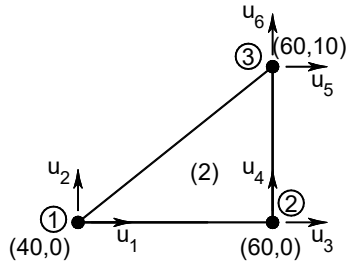
İç çapı 80 mm ve dış çapı 120 mm olan uzun bir silindir, tüm uzunluğu boyunca bir deliğe tam olarak oturtulmuştur. Silindir 2 MPa'lık bir iç basınç etkisindedir. Gösterilen 10 mm uzunlukta iki dönele simetrik sonlu eleman kullanarak, iç yarıçaptaki yer değiştirmeleri bulunuz.

Çözüm: Düğüm noktası ve eleman numaralandırması aşağıdaki şekilde yapılacaktır.

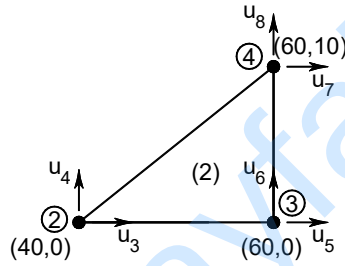


$$[k^{(1)}] = \begin{bmatrix} 40276829 & -25777170 & -23360561 & 14499658 & -19332878 & 11277512 \\ -25777170 & 84581341 & 13694122 & -78942585 & 19332878 & -5638756 \\ -23360561 & 13694122 & 22957792 & -2416610 & 1611073 & -11277512 \\ 14499658 & -78942585 & -2416610 & 78942585 & -19332878 & 0 \\ -19332878 & 19332878 & 1611073 & -19332878 & 22555024 & 0 \\ 11277512 & -5638756 & -11277512 & 0 & 0 & 5638756 \end{bmatrix}$$

2 Nolu eleman



a) Eleman yerel numaralandırılması



b) Sistem numaralandırılması

$$r_1=40 \quad r_2=60 \quad r_3=60 \quad z_1=0 \quad z_2=0 \quad z_3=10$$

$$a_1=r_2z_3-r_3z_2=600 \quad b_1=z_2-z_3=-10 \quad c_1=r_3-r_2=0$$

$$a_2=r_3z_1-r_1z_3=-400 \quad b_2=z_3-z_1=10 \quad c_2=r_1-r_3=-20$$

$$a_3=r_1z_2-r_2z_1=0 \quad b_3=z_1-z_2=0 \quad c_3=r_2-r_1=20$$

$$A = 100$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.05 & -0.1 & 0.05 & 0.1 & 0 \\ 0.00625 & 0 & 0.00625 & 0 & 0.00625 & 0 \end{bmatrix}$$

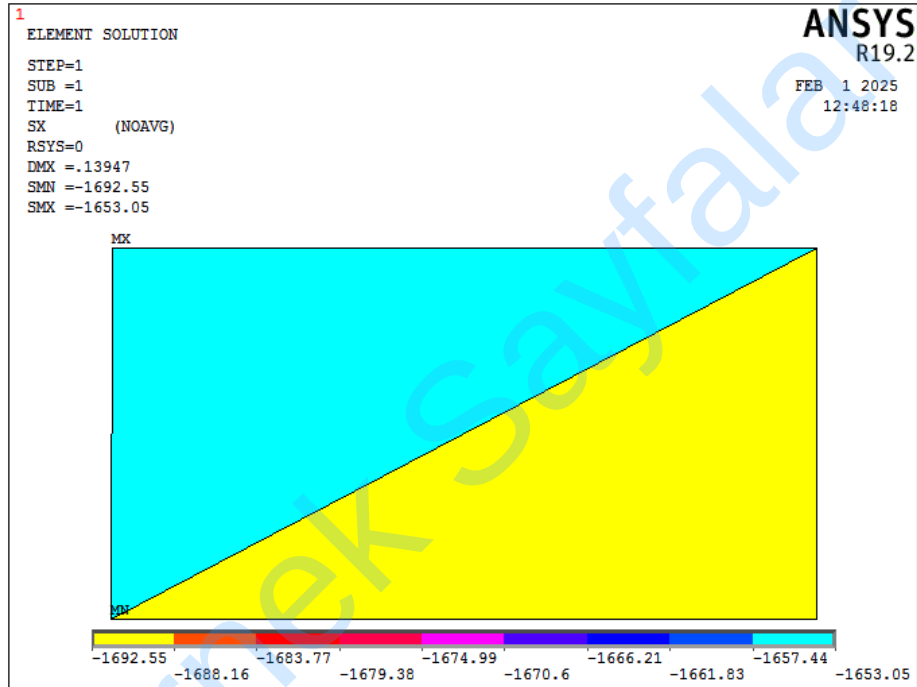
Burada çözüm için izlenecek adımları açıklamak amacıyla az sayıda eleman ile problem çözülmüştür. Problemin mühendislik bakımından kabul edilebilir yaklaşıklıkta çözümü için sonlu eleman ağının daha fazla sayıda eleman ile oluşturulması gerektiği hatırlanmalıdır.



SAP2000 s2k veri dosyası

```
File F:\kutlu\fem\program_code\AxisSymmetric\sap2000\orneklv26.$2k was saved on m/d/yy at
h:mm:ss
TABLE: "PROGRAM CONTROL"
  ProgramName=SAP2000  Version=26.1.0  CurrUnits="KN, m, C"
TABLE: "ACTIVE DEGREES OF FREEDOM"
  UX=Yes  UY=Yes  UZ=Yes  RX=Yes  RY=Yes  RZ=Yes
TABLE: "ANALYSIS OPTIONS"
  Solver=Advanced  SolverProc=Auto  Force32Bit=No
TABLE: "AREA SECTION ASSIGNMENTS"
  Area=1  Section=ASEC1  MatProp=Default
  Area=2  Section=ASEC1  MatProp=Default
TABLE: "AREA SECTION PROPERTIES"
  Section=ASEC1  Material=MAT  MatAngle=0  AreaType=Asolid  Arc=360  InComp=No
CoordSys=GLOBAL
TABLE: "CASE - STATIC 1 - LOAD ASSIGNMENTS"
  Case=L1  LoadType="Load pattern"  LoadName=L1  LoadSF=1
TABLE: "CONNECTIVITY - AREA"
  Area=1  Joint1=1  Joint2=2  Joint3=4
  Area=2  Joint1=2  Joint2=3  Joint3=4
TABLE: "COORDINATE SYSTEMS"
  Name=GLOBAL  Type=Cartesian  X=0  Y=0  Z=0  AboutZ=0  AboutY=0  AboutX=0
```

```
FINISH  
/SOL  
/STATUS,SOLU  
SOLVE  
FINISH  
/POST1  
PLDISP,1  
PRNSOL,U,COMP  
PRESOL,S,COMP
```



Yüksek Dereceden Elemanlar

8

8.1 Giriş

Sonlu elemanlar yönteminde temel amaç, gerçek çözüme olabildiğince yakın bir sayısal çözüm elde etmektir. Yüksek dereceden elemanlar, alan değişkenlerinin daha karmaşık polinom fonksiyonlarıyla temsil edilmesini sağlayarak bu doğruluğu ve çözüm hassasiyetini önemli ölçüde artırır. Bu, özellikle eğrisel sınırlara veya karmaşık gerilme dağılımlarına sahip problemlerde önemlidir.

Daha yüksek dereceden elemanlar kullanıldığında, aynı doğruluk seviyesine ulaşmak için daha az sayıda elemana ihtiyaç duyulur. Yüksek dereceden elemanlar, gerilme ve şekildeğiştirme gibi türev hesaplamalarında daha doğru sonuçlar verir.

Yukarıdaki olumlu özelliklere karşın yüksek dereceden elemanlarda, eleman matrislerinin oluşturulması ve integrasyon işlemleri daha karmaşıktır. Yüksek dereceden elemanlar, daha fazla düğüm noktası içerir. Bu, sistem denklemlerinin boyutunu artırabilir ve çözüm süresini uzatabilir.

Bir problemin çözümünde çok sayıda doğrusal eleman mı yoksa az sayıda yüksek dereceden eleman mı kullanmanın daha iyi olduğu, çeşitli faktörlere bağlıdır ve kesin bir "doğru" cevap yoktur. Her iki yaklaşımın da avantajları ve dezavantajları vardır. İdeal yaklaşım, problemin özelliklerine, istenen doğruluğa ve mevcut hesaplama kaynaklarına bağlıdır.

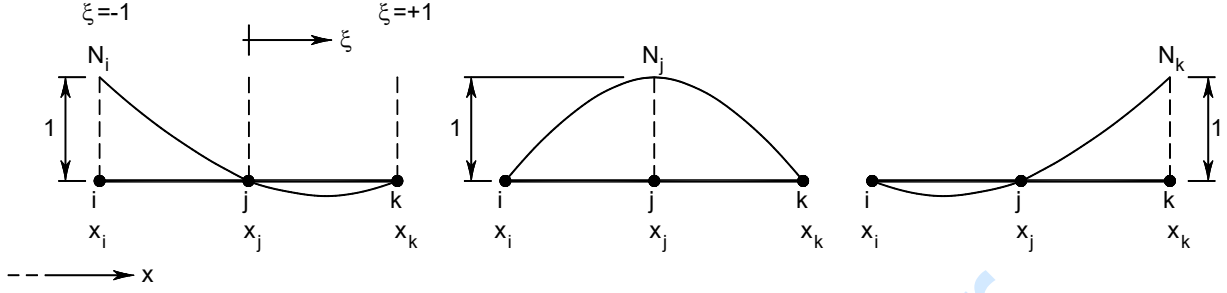
Genellikle, karmaşık problemler için yüksek dereceden elemanlar daha uygun olmakla birlikte, ancak doğrusal elemanlar da basit ve hızlı çözümler için hala geçerli bir seçenektir.

8.2 İkinci Dereceden Tek Boyutlu Çubuk Eleman

Bölüm 3.1'de geliştirilen basit çubuk elemanda alan değişkeninin değişimi doğrusal seçilmişti. Alan değişkeninin değişimi ikinci dereceden seçilerek daha yüksek dereceden bir çubuk sonlu eleman oluşturulabilir.

Doğrusal bir fonksiyon yerine ikinci dereceden bir fonksiyon kullanılması ikinci dereceden fonksiyonu tanımlamak için üç noktaya gereksinim olacağından çubuk elemanın, Şekil 8-1'de gösterildiği gibi üç noktalı çubuk eleman olmasını gerektirecektir.

Eleman yerdeğiştirmesi $u(x)$ olarak adlandırılırsa ve L eleman uzunluğu boyunca değişiminin ikinci dereceden olduğu varsayılırsa yerdeğiştirme fonksiyonu a_1 , a_2 ve a_3 sabitler olmak üzere Denk.(8.1)'deki gibi yazılabilir.



Şekil 8-1 Şekil fonksiyonları

Bu durumda şekildeğiştirme, $dx = Jd\xi$ olduğu hatırd tutularak Denk.(3.27)'de gösterildiği şekilde elde edilir.

$$\varepsilon(\xi) = \frac{du(\xi)}{dx} = \frac{1}{J} \frac{du(\xi)}{d\xi} = \frac{2}{L} \frac{d(N_i(\xi)u_i + N_j(\xi)u_j + N_k(\xi)u_k)}{d\xi} \quad (8.10)$$

Denk.(8.10) matris düzeninde

$$\varepsilon = [B]\{u_i\} \quad (8.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $[B]$ matrisi 1×2 boyutunda şekildeğiştirme-yerdeğiştirme matrisi olarak adlandırılır ve Denk.(8.12) ile tanımlanır.

$$[B] = \frac{d\xi}{dx} \left[\frac{dN_1(\xi)}{d\xi} \quad \frac{dN_2(\xi)}{d\xi} \quad \frac{dN_3(\xi)}{d\xi} \right] = \frac{2}{L} \left[\xi - \frac{1}{2} \quad -2\xi \quad \xi + \frac{1}{2} \right] \quad (8.12)$$

Hooke yasasından gerilmeler elde edilerek çubuk eleman için şekildeğiştirme enerjisi ifadesine yerine yazılırsa

$$\Lambda_e = \frac{1}{2} \int_L \{u_i\}^T [B]^T E [B] \{u_i\} A dx \quad (8.13)$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı

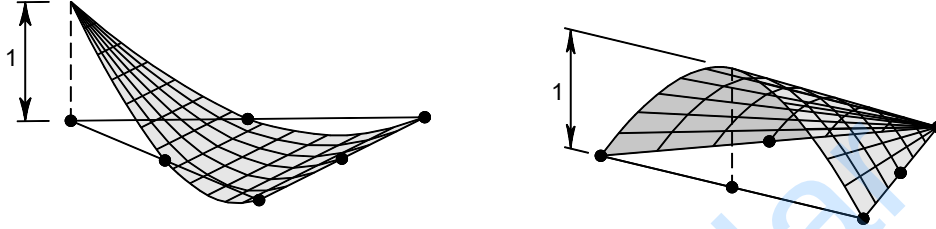
$$\Lambda_e = \frac{1}{2} \{u_i\}^T \left(EA \frac{L}{2} \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi \right) \{u_i\} \quad (8.14)$$

olarak da yazılabilir. Burada

$$[k] = EA \frac{L}{2} \int_{-1}^1 [B]^T [B] d\xi \quad (8.15)$$

$$N_6 = 4\xi\zeta = 4\xi(1-\xi-\eta)$$

olarak elde edilir. Şekil fonksiyonlarındaki ξ^2, η^2, ζ^2 terimleri nedeniyle bu eleman ikinci dereceden üçgen eleman olarak da adlandırılır.



Şekil 8-3 Köşe nokta ve kenar orta nokta için tipik şekil fonksiyonları

Alan değişkeni ile düğüm noktası yerdeğiştirmeleri arasında Denk.(8.19), eleman içerisindeki koordinatlar ile düğüm noktası koordinatları arasında Denk.(8.20) yazılabilir.

$$\{u\} = [N]\{u_i\} \quad (8.19)$$

$$x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i \quad (8.20)$$

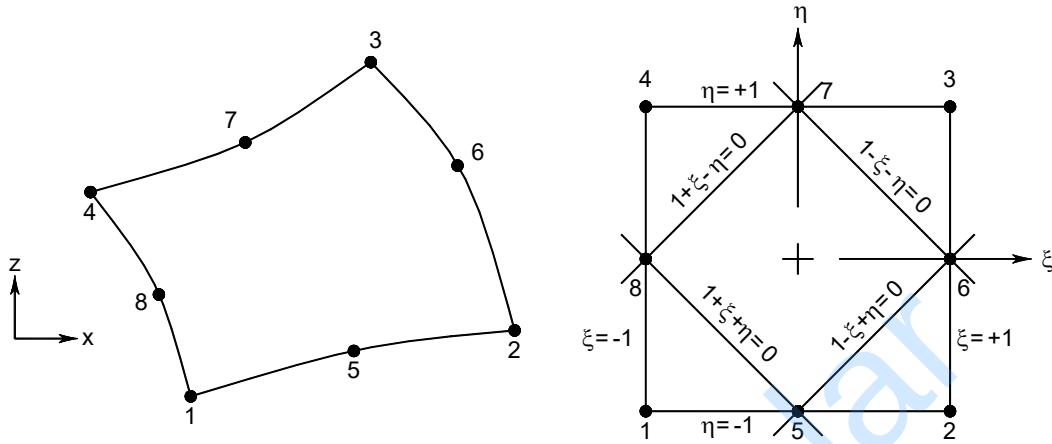
Eleman rijitlik matrisi sayısal integral kullanılarak

$$[k] = t_e \iint_A [B]^T [D][B] |J| d\xi d\eta \quad (8.21)$$

ile hesaplanır.

8.4 Sekiz Düğüm Noktalı Dörtgen Eleman

Eleman, tümü kenarlar üzerinde bulunan sekiz düğüm noktalı bir elemandır. Şekil fonksiyonlarını tanımlamada Şekil 8-4'de gösterilen ana eleman kullanılabilir.



Şekil 8-4 Dörtgen eleman

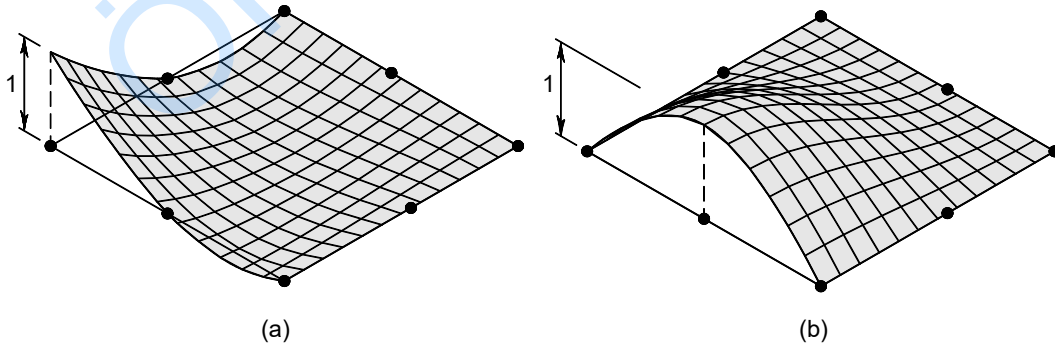
Eleman ikinci dereceden (kuadratik) şekil fonksiyonlarına sahiptir. Şekil fonksiyonları köşe noktalar için

$$\begin{aligned} N_1 &= -\frac{(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta)}{4} & N_2 &= -\frac{(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta)}{4} \\ N_3 &= -\frac{(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta)}{4} & N_4 &= -\frac{(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta)}{4} \end{aligned} \quad (8.22)$$

orta noktalar için

$$\begin{aligned} N_5 &= \frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2} & N_6 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta^2)}{2} \\ N_7 &= \frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2} & N_8 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta^2)}{2} \end{aligned} \quad (8.23)$$

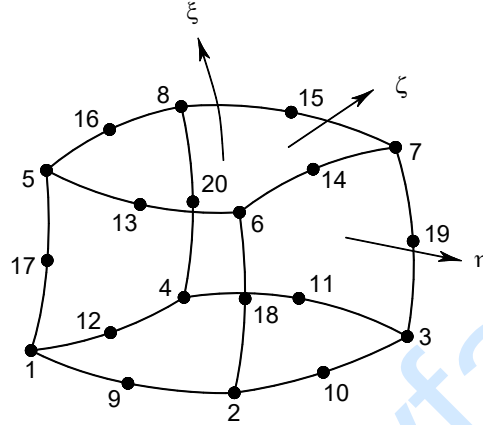
olarak elde edilir.



Şekil 8-5 Köşe ve orta nokta için tipik şekil fonksiyonları

8.5 20 Düğüm Noktalı Eleman

20 düğüm noktalı üç boyutlu eleman Şekil 8-6'da gösterilmektedir.



Şekil 8-6 20 noktalı üç boyutlu eleman

Bu elemana ait şekil fonksiyonları köşe noktalar için

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2) \quad N_2 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2)$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2) \quad N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2)$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta-\zeta-2) \quad N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2)$$

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2) \quad N_8 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta+\zeta-2)$$

Kenar orta noktaları için

$$N_9 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) \quad N_{10} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{11} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta) \quad N_{12} = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$$

$$N_{13} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta) \quad N_{14} = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$$

Matris İşlemleri ve Lineer Cebir

9

9.1 Giriş

Sonlu elemanlar yönteminde matris işlemlerinin yoğun biçimde kullanılmasından dolayı bu bölümde temel tanımlar yapılacak ve sık olarak kullanılan matris işlemlerine değinilecektir.

9.2 Matrisler

Bir takım sayılabilir büyüklüğün m satır ve n sütun üzerine

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

şeklinde yerleştirilmiş durumuna matris denir. A matrisi, $[A]$ olarak da gösterilebilmektedir. Matrisin elemanları a_{ij} biçiminde gösterilir. Bir matrisin a_{ij} elemanındaki indislerden birincisi (i) elemanın bulunduğu satır numarasını, ikincisi (j) ise sütun numarasını gösterir.

m satır ve n sütundan oluşan matris $m \times n$ boyutundadır.

Önek: Aşağıdaki $[A]$ matrisi 2×3 boyutundadır.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 4 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Bu matris 2 satırdan, 3 sütundan oluşmaktadır. İlk satır (2,7,1), ikinci satır (4,9,5), ilk sütun (2,4) elemanlarından oluşmaktadır. Diğer sütunlar da benzer biçimde gösterilebilir.

9.3 Vektörler

Bir satır ($m=1$) veya bir sütundan ($n=1$) oluşan matrislere vektör adı verilmektedir. Satır vektörler ($1 \times n$), sütun vektörler ($m \times 1$) boyutundadır.

Öneğin

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

9.4.5 Antimetrik Matris

Bir kare matrisin elemanları $a_{ij} = -a_{ji}$ koşulunu sağlıyorsa bu matrise antimetrik matris denir. Antimetrik matrisin asal köşegen elemanları sıfırdır.

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & 4 & 1 \\ -5 & -4 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

9.4.6 Üst Üçgen Matris

Asal köşegenin altındaki elemanları sıfır olan matrise üst üçgen matris denir.

$$[U] = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9.4.7 Alt Üçgen Matris

Asal köşegenin üstündeki elemanları sıfır olan matrise alt üçgen matris denir.

$$[L] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9.4.8 Bant Matris

Bant matris, çoğunlukla sıfır olan elemanlara sahip, yalnızca belirli bir bant genişliği içinde yer alan elemanların sıfır olmayan değerler aldığı özel bir matris türüdür. Yarı bant genişliği m_A , matrisin ana köşegenine göre belirlenir ve bu genişlik, köşegenin her iki tarafında kaç tane sıfır olmayan eleman bulunduğunu ifade eder, ($j > i + m_A$ $a_{ij} = 0$). Aşağıda yarı bant genişliği 2 olan simetrik bir bant matris örneği gösterilmektedir.


```

        ts = 0.0
        for k in range(n):
            ts += A[i][k] * B[k][j]
        C[i][j] = ts
    return C

```

Genel olarak matrislerin çarpım işleminde değistirebilirlik özelliği yoktur ($[A][B] \neq [B][A]$), hatta $[B][A]$ matris çarpımı B matrisinin sütun sayısı ile A matrisinin satır sayısının farklı olma olasılığından dolayı gerçekleştirilemeyebilir.

$$k[A][B] = [kA][B] = [A][kB]$$

$$[[A][B]][C] = [A][[B][C]]$$

$$[A][[B]+[C]] = [A][B] + [A][C]$$

$$[[B]+[C]][A] = [B][A] + [C][A]$$

$[I]$ birim matris olmak üzere $[A][I] = [I][A]$

9.5.4 Matrisin Devriği (Tranpozesi)

Boyutu $(m \times n)$ olan $[A]$ matrisinin devriği (transpozesi) bu matrisin aynı numaralı satırlarla sütunlarının yer değiştirmesiyle elde edilen ve boyutu $(n \times m)$ olan bir başka matristir ve $[A]^T$ biçiminde gösterilir.

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \quad [A]^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

```

def matris_transpoze(A, m, n):
    B = [[0 for _ in range(m)] for _ in range(n)]
    for i in range(m):
        for j in range(n):
            B[j][i] = A[i][j]
    return B

```

$$[A^T]^T = [A]$$

$$[[A]+[B]]^T = [A]^T + [B]^T$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.122 & -0.4512 & 0.1402 \\ 0 & 1 & 0 & -0.0488 & -0.2195 & 0.2439 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0.5 & -0.25 \end{array} \right]$$

Sol tarafta birim matris elde edildiğinden işlem adımları tamamlanmış olacaktır.

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.122 & -0.4512 & 0.1402 \\ -0.0488 & -0.2195 & 0.2439 \\ 0 & 0.5 & -0.25 \end{bmatrix} \text{ olarak hesaplanır.}$$

Adjoint (Ek) Matris Yöntemi ile Matris Tersi

$[A]$ Kare matrisin a_{ij} terimleri yerine c_{ij} eşçarpanlarının yazılmasıyla oluşturulan matrisin devriğine (transpozesi) $[A]$ matrisinin Adjoint (Ek) matrisi adı verilir ve $\text{Adj}(A)$ ile gösterilir. $[A]$ Kare matrisin a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktör) c_{ij}

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (9.4)$$

bağıntısıyla hesaplanır. Burada M_{ij} $[A]$ matrisinin i . satır ve j . sütunu çıkarıldığında elde edilen alt matrisin determinantıdır.

$[A]$ matrisinin determinantı ve Adjoint (Ek) matrisi belirlendikten sonra tersi

$$[A]^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A) \quad (9.5)$$

bağıntısıyla hesaplanır.

Örnek:

$$[A] = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 13 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 10 & 8 \end{bmatrix} \text{ matrisinin tersini Adjoint (Ek) matris yöntemi ile hesaplayınız.}$$

Çözüm:

$[A]$ matrisinin determinantı, determinant hesaplama yöntemlerinden bir tanesi kullanılarak

$$|A| = \begin{vmatrix} 11 & 7 & 13 \\ 2 & 5 & 6 \\ 4 & 10 & 8 \end{vmatrix} = -164 \text{ olarak hesaplanır.}$$

$$[A]\{x\} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1p}x_p + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2p}x_p + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{np}x_p + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılırsa denklem $[A]\{x\}$ çarpımının x_p değişkenine göre türevinin $[A]$ matrisinin p. sütunu olduğu kolaylıkla görülebilir.

9.6 Sonlu elemanlar yönteminde matris kullanımı

Sonlu elemanlar yönteminde matris işlemlerinin çoğunluğu aşağıdakine benzer denklem takımlarının çözümünde kullanılmaktadır.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 &= 8 \\ -5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= -1 \end{aligned}$$

Burada x_1, x_2, x_3 ve x_4 bilinmeyenlerdir. Bu denklem takımı matris düzeninde yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Benzer denklem takımı $[A]\{x\}=\{b\}$ biçiminde de yazılabilir. Burada $[A]$, (4×4) boyutunda bir kare matris, $\{x\}$ ve $\{b\}$, $(n \times 1)$ boyutunda vektörlerdir.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \{x\} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \{b\} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

9.7 Matris ve determinantların özellikleri

Kare şeklindeki bir $[A]$ matrisinin determinantı tek bir değerdir ve kare matrisin elemanlarının belirli bir fonksiyonudur.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Adım $\left(R_3 \rightarrow R_3 - \frac{2}{3}R_1 \right)$ 1. Satır $(2/3)$ ile çarpılıp 3. Satırdan çıkarılır

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4. Adım $\left(R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{5}R_2 \right)$ 2. Satır $(1/5)$ ile çarpılıp 3. satırdan çıkarılırsa üst üçgen matris elde edilmiş olur.

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -\left(3 \times \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} \right) = -2 \text{ olarak hesaplanır.}$$

Not: İlk adımda satır değiştirme işlemi yapıldığı için $(-)$ ile çarpılmıştır.

9.8 Gauss İndirgeme Yöntemi

Gauss indirgeme yöntemi, doğrusal denklem sistemlerini çözmek için kullanılan etkili bir yöntemdir. Bu yöntemde, matrisler satır işlemleriyle basitleştirilerek, üst üçgen matris formuna dönüştürülür. Satır işlemleri matrisin her satırını, diğer satırlarla belirli işlemler yaparak basitleştirilmesidir. Bu işlemler; bir satırı bir sayı ile çarpmak, bir satıra, başka bir satırın katını eklemek veya çıkarmak veya iki satırın yerini değiştirmek şeklinde olabilmektedir.

Satır işlemleri sonucunda, matris alt üçgen elemanları sıfır olacak şekilde üst üçgen matris formuna dönüştürülür. Bu formda, matrisin köşegen altındaki tüm elemanlar sıfır olur. Üst üçgen matris elde edildikten sonra, geri yerine koyma yöntemiyle çözüm bulunur. Bu adımda, en son satırdan başlayarak, bilinmeyenler teker teker çözülür.

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
 \vdots & \\
 a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}
 \end{aligned} \tag{9.14}$$

şeklini alır. Burada

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij} - m_{i2}a_{1j} \quad b_i^{(2)} = b_i - m_{i2}b_1 \quad i=2,3,\dots,n \tag{9.15}$$

dir.

İkinci adımda yine $a_{22}^{(2)} \neq 0$ ise, ikinci denklemden sonra gelen $(n-2)$ sayıdaki denklemde x_2 bilinmeyeni yok edilir. Bunun için de bu kez ikinci denklem

$$m_{i2} = \frac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} \quad i=3,4,\dots,n \tag{9.16}$$

sayıları ile çarpılıp i. denklemden çıkartılır ve (9.14) denklem takımı

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
 a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\
 \vdots & \\
 a_{n3}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)}
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

şeklini alır. Burada

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)} \quad b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} \quad i=3,4,\dots,n \tag{9.18}$$

dir.

a_{11} , $a_{22}^{(2)}$, $a_{33}^{(3)}$, ... elemanlarına pivot elemanlar denir ve bu elemanlar sıfırdan farklı olduğu sürece, benzer işlemlerle, $(n-1)$ adımın sonunda

$$\begin{aligned}
 a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \cdots + a_{1n}^{(1)}x_n &= b_1 \\
 a_{22}^{(2)}x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\
 a_{33}^{(3)}x_3 + \cdots + a_{3n}^{(3)}x_n &= b_3^{(3)} \\
 \vdots & \\
 a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

$$b_4^{(4)} = b_4^{(3)} - m_{43}b_3^{(3)} = -20 - (-8) \cdot 4 = 12$$

[A]				{b}
2*	4	-1	1	-8
1	-3	2	-2	21
3	2	1	-1	12
4	-2	-1	-2	14
$m_{21}=0.5$	-5*	2.5	-2.5	25
$m_{31}=1.5$	-4	2.5	-2.5	24
$m_{41}=2.0$	-10	1	-4	30
$m_{32}=0.8$	0.5*	-0.5	4	4
$m_{42}=2.0$	-4	1	-20	-20
$m_{43}=-8$	-3*		12	12

1. Adım

2. Adım

3. Adım

Bilinmeyenlerin hesabı

$$x_4 = \frac{b_4^{(4)}}{a_{44}^{(4)}} = \frac{12}{-3} = -4$$

$$x_3 = \frac{b_3^{(3)} - a_{34}^{(3)}x_4}{a_{33}^{(3)}} = \frac{4 - (-0.5) \cdot (-4)}{0.5} = 4$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(2)} - (a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4)}{a_{22}^{(2)}} = \frac{25 - (2.5 \cdot 4 + (-2.5) \cdot (-4))}{-5} = -1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{14}x_4 + a_{13}x_3 + a_{12}x_2)}{a_{11}} = \frac{-8 - ((1) \cdot (-4) + (-1)(4) + 4(-1))}{2} = 2$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -4 \end{Bmatrix} \text{ olarak belirlenir.}$$

```

#GAUSS İNDİRGEME
def Gauss_indirgeme(A,b,n):
    x = [0.0] * n
    for k in range(n):
        for i in range(k + 1, n):
            r = A[i][k] / A[k][k]
            b[i] = b[i] - r * b[k]
            for j in range(k, n):
                A[i][j] = A[i][j] - r * A[k][j]

    x[n-1] = b[n-1] / A[n-1][n-1]
    for k in range(n-2, -1, -1):
        x[k] = b[k]
        for j in range(k+1, n):
            x[k] = x[k] - A[k][j] * x[j]
        x[k] = x[k] / A[k][k]
    return x

# ANA PROGRAM
A = [[0.0 for _ in range(4)] for _ in range(4)]
b = [0.0] * 4
x = [0.0] * 4

A[0][0]=2; A[0][1]=4; A[0][2]=-1; A[0][3]=1
A[1][0]=1; A[1][1]=-3; A[1][2]=2; A[1][3]=-2
A[2][0]=3; A[2][1]=2; A[2][2]=1; A[2][3]=-1
A[3][0]=4; A[3][1]=-2; A[3][2]=-1; A[3][3]=-2

b[0]=-8; b[1]=21; b[2]=12; b[3]=14

x=Gauss_indirgeme(A,b,4)
print("Çözüm:", x)

```

Program çıktısı

Çözüm: [2.0, -1.0, 4.0, -4.0]

9.9 LU Yöntemi

$[A]\{x\}=\{b\}$ denklem takımını çözmek için $[A]$ matrisini $[L]$ ve $[U]$ gibi iki üçgen matrise ayırarak bilinmeyenleri belirlemek mümkündür. $[A]$ matrisi $[L]$ ve $[U]$ gibi iki üçgen matrise ayrılırsa

$$[A]=[L][U] \quad (9.23)$$

olarak ifade edilebilir. $[L]$ matrisinin köşegen elemanları 1'dir ve alt üçgen elemanları sıfır değildir.

$[U]$ matrisinin üst üçgen elemanları sıfır değildir ve alt üçgen elemanları sıfırdır.

$[A]\{x\}=\{b\}$ denklem takımında $[A]$ matrisi için Denk.(9.23) ifadesi kullanılırsa

$$[L][U]\{x\}=\{b\} \quad (9.24)$$

olur. Burada

$$[U]\{x\}=\{y\} \quad (9.25)$$

$$[L]\{y\}=\{b\} \quad (9.26)$$

olarak yazılabilir.

$[L]$ ve $[U]$ alt ve üst üçgen matrisleri bilindiğinde Denk.(9.26) ve Denk.(9.25)'den sırasıyla ileri yerine koyma işlemi ile $\{y\}$ ve geri yerine koyma işlemi ile $\{x\}$ bilinmeyenleri bulunabilir. LU ayrışımı, Gauss eliminasyonu yöntemine benzer, ancak daha verimli ve sayısal olarak daha karardır.

Alt üçgen matris $[L]=[m_{ik}]$ ($m_{ii}=1$) ve üst üçgen matris $[U]=[u_{ij}]$ dir. Yani $[A]=[L][U]=[a_{ik}]$ ise

$$[L]=[m_{ik}] \quad i \geq k \quad [L]=\begin{bmatrix} m_{11} & & & \\ m_{21} & m_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad m_{ii}=1 \quad m_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \quad (9.27)$$

$$[U]=[u_{ij}]=[a_{kj}^{(k)}] \quad k \leq j \quad [U]=\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

olarak belirlenir.

$$[L]\{y\}=\{b\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -0.333 & 1.125 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -2 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ -1 \\ 0.125 \end{bmatrix} \text{ olarak belirlenir.}$$

$$[U]\{x\}=\{y\}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & -1.5 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -9 \\ -1 \\ 0.125 \end{bmatrix}$$

Bilinmeyenler

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \\ -1.5 \end{bmatrix} \text{ olarak belirlenir.}$$

#LU Yöntemi ile denklem takımı çözümü

```
def lu_ayristirma(A):
    n = len(A)
    L = [[0.0] * n for _ in range(n)]
    U = [[0.0] * n for _ in range(n)]
    for i in range(n):
        L[i][i] = 1.0
        for j in range(i, n):
            U[i][j] = A[i][j] - sum(L[i][k] * U[k][j] for k in range(i))
        for j in range(i + 1, n):
            L[j][i] = (A[j][i] - sum(L[j][k] * U[k][i] for k in range(i))) / U[i][i]
    return L, U
```

Veri Dosyası Aktarımı

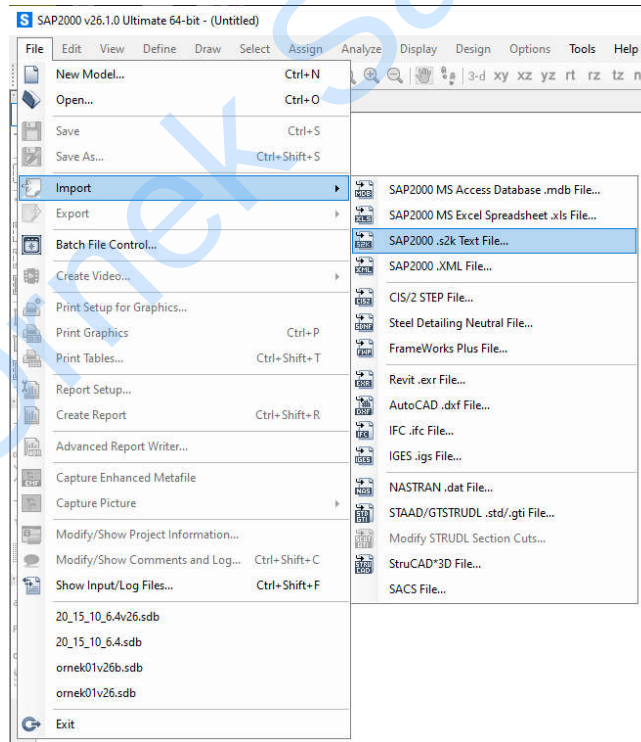
10

10.1 Giriş

Bu bölümde kitapta verilen SAP2000 ve ANSYS programlarına ait veri dosyalarının ilgili programa aktarılma aşamaları anlatılacaktır.

10.2 SAP2000 Programına aktarım

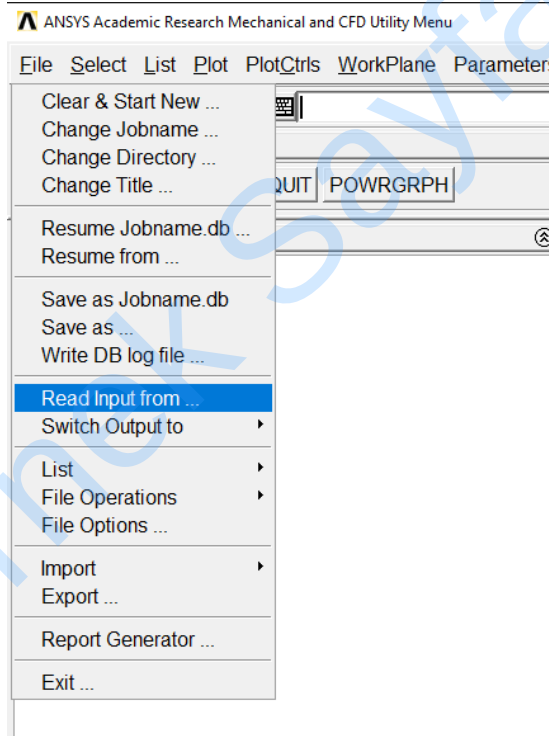
1. Kitapya verilen veri dosyası içeriğini notepad veya benzeri bir text editör programına yazınız.
2. Dosyaya bir isim vererek kaydediniz.
3. SAP2000 programını çalıştırınız.
4. Menüde File-Import-SAP2000 .s2k Text File seçeneğini seçiniz.



5. Ekranı gelen ileti kutusunda New Model seçeneğini seçiniz ve OK düğmesine basınız.
6. Ekranı gelen Import SAP2000 Text File penceresinde sağ altta bulunan dosya türü açılır listesinde dosya türü olarak Text files (*.txt) seçeneğini seçiniz.
7. 2. adımda kaydettiğiniz dosyayı açarak SAP2000 grafik arayüzüne verileri aktarınız.

10.3 ANSYS programına aktarım

1. Kitapya verilen veri dosyası içeriğini notepad veya benzeri bir text editör programına yazınız.
2. Dosyaya bir isim vererek kaydediniz.
3. ANSYS programını çalıştırınız.
4. Menüde File-Read Input from... seçeneğini seçiniz.



8. Ekranı gelen Read File penceresinde 2. adımda kaydettiğiniz dosyayı açarak ANSYS grafik arayüzüne verileri aktarınız.

KAYNAKLAR

- [1] Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Robert D. Cook , David S. Malkus, et al. , Wiley, 2001
- [2] Introduction To Finite Element Method , J.N. Reddy , McGraw Hill, 2020
- [3] Introduction to Finite Elements in Engineering, Chandrupatla, Tirupathi R.; Chandrupatla, T. R.; Belegundu, Ashok D., Prentice Hall, 2002
- [4] Finite Element Analysis: Theory and Application With Ansys 3rd Edition, Saeed Moaveni, Pearson College , 2007
- [5] The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, O. C. Zienkiewicz , R. L. Taylor, S. Govindjee, Butterworth-Heinemann, 2024
- [6] Finite Element Procedures in Engineering Analysis, K.J. Bathe, Prentice-Hall , 1982
- [7] The Finite Element Method: A Practical Course 2nd Edition, G.R. Liu , S. S. Quek , Butterworth-Heinemann, 2013
- [8] Programming the Finite Element Method 5th Edition, I. M. Smith, D. V. Griffiths , L. Margetts Wiley, 2013
- [9] A Brief Introduction to the Finite Element Method , S. Tanvir Wasti, Mehmet Utku, ODTÜ Geliştirme Vakfı Yayıncılık, 2019, Ankara.
- [10] Yapı Statiğinde Özel Konular, M. Günhan Aksoylu, Konuralp Girgin, Yılmaz Yuva, Arda Karabulut, Birsen Yayınevi, 2013.
- [11] Çubuk Sonlu Elemanlar, M.H. Omurtag, Birsen Yayınevi, 2010.
- [12] Sonlu Elemanlar Analizi , Murat Yılmaz, Birsen Yayınevi, 2022.
- [13] Sonlu Elemanlar Metodu, Türkan Köksal, Yıldız Teknik Üniversitesi Matbaası, 1995.
- [14] Yapı Sistemlerinin Hesabı için Matris Metotları ve Elektronik Hesap Makinası Programları A. Çakıroğlu, E. Özden, G. Özmen, İTÜ İnşaat Fakültesi Matbaası, 1992.
- [15] A First Course in the Finite Element Method, Daryl Logan, Cengage Learning, 2016
- [16] Finite Element Analysis for Design Engineers, Second Edition 2nd Revised edition, Pawel M Kurowski , SAE International, 2016
- [17] Schaum's Outline of Finite Element Analysis , George R. Buchanan, McGraw Hill; 1994
- [18] Elementary Finite Element Method (Civil Engineering & Engineering Mechanics Series) C. S. Desai , Prentice Hall; 1979
- [19] An Introduction to the Finite Element Method J.N. Reddy, McGraw-Hill College, 1984
- [20] The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals , O. C. Zienkiewicz , R. L. Taylor, Butterworth-Heinemann; 2013

-
- [21] A First Course in Finite Elements, Jacob Fish , Ted Belytschko , Wiley , 2007
- [22] Introduction to Finite Element Analysis Using MATLAB and Abaqus, Amar Khennane , CRC Press; 2013.
- [23] Finite Element Structural Analysis , Henry T. Y. Yang ,Pearson College Div , 1985.
- [24] Textbook of Finite Element Analysis First Edition, P. Seshu , Prentice-Hall of India , 2004
- [25] Finite Element Analysis, Sarhan M. Musa , A.V. Kulkarni, V.K. Havanur,Mercury Learning and Information; 2013
- [26] The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Thomas J. R. Hughes , Dover Publications, 2000
- [27] Finite Element Analysis: Theory and Practice, Maurice J. Fagan ,Longman Pub Group , 1996
- [28] The Finite Element Method in Engineering 6th Edition, Kindle Edition, Singiresu S. Rao Butterworth-Heinemann, 2017
- [29] First Course in the Finite Element Method First Edition, William B. Bickford , Richard D. Irwin, 1990
- [30] Finite Elements for Analysis and Design, J. E. Akin, Academic Press, 1994.
- [31] Introduction to the Finite Element Method, Niels Ottosen , Pearson ,1992
- [32] Fundamentals of Finite Element Analysis Paperback , David V. Hutton , David Hutton , Tata McGraw Hill India, 2017

DİZİN

A	
Alan değişkeni	14
Altı yüzlü eleman	265
Antimetrik matris	314

B	
Bant matris	314
Birim matris	313

Ç	
Çubuk Eleman	7

D	
Direkt Yöntem	6
Doğal koordinatlar	18
Doğrudan Yöntem	6
Doğrultman kosinüs	55
Doğrusal elastik malzeme	30
Dört yüzlü eleman	239
Düzlem çubuk eleman	88
Düzlem gerilme	28
Düzlem kafes çubuk eleman	54
Düzlem kiriş eleman	78
Düzlem şekildeğiştirme	29

E	
Eğim	80
Eksenel simetrik eleman	292
Elemanter hacim	22

G	
Gauss kareleme	181
Gauss noktası	182
Gauss Quadrature	181
Genel koordinatlar	18
Gerilme	21, 26

H	
Hacim kuvvetleri	21
Hexahedral	265

İ	
İki boyutlu elemanlar	132
İnterpolasyon fonksiyonları	14
İzoparametrik	262
İzoparametrik eleman	19

J	
Jakobiyen	176, 177, 263

K	
Kare matris	313
Kirchoff	204
Kiriş eleman	78
Köşegen matris	313

M	
Matris	312
Mesnet reaksiyonu	64

Ö	
Örnekleme noktası	182

P	
Plak eleman	204
Potansiyel enerji	30
Pozitif yön	79

R	
Rayleigh-Ritz yöntemi	35
Rijitlik matrisi	5, 8, 13

S	U
Sayısal integral 181	Uzay çubuk eleman.....105
Sınır koşulu 23	Uzay kafes eleman 77
Sınır kuvvetleri..... 22	
Simetrik matris..... 313	Ü
Sonlu elemanlar yöntemi.....1	Üçgen eleman..... 132
Ş	V
Şekil fonksiyonları15, 18	Vektör 312
Şekildeğiştirme 24	
T	Y
Tekil yük 22	Yüzey kuvvetleri..... 22
Toplam potansiyel enerji.....30	