EMAG - Ödev 3 (2015-2016)

1) $\vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$ $\quad \vec{n} = \vec{e}_z$ (yüzey normali)

$$\vec{e}_z \times \vec{E}_1 = 10\vec{e}_y + 20\vec{e}_x$$

$$\vec{e}_z \times \vec{E}_2 = \vec{e}_z \times (E_{2x}\vec{e}_x + E_{2y}\vec{e}_y + E_{2z}\vec{e}_z) = E_{2x}\vec{e}_y - E_{2y}\vec{e}_x$$

$$\Rightarrow E_{2x} = 10 \quad \text{ve} \quad E_{2y} = -20$$

Dolayısıyla $\vec{E}_2$'nin teğet bileşeni $\vec{E}_{2t} = 10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y$ (Teğet bileşen sürekli)

Benzer şekilde $\vec{E}_{3t} = 10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y$

2. sınır koşulu $\vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s$ (ortamlar dielektrik olduğundan $\rho_s = 0$)

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_1 = \vec{e}_z \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} \vec{E}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E_{1z} = \varepsilon_0 30$$

$$\vec{n} \cdot \vec{D}_2 = \vec{e}_z \cdot \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} (E_{2x}\vec{e}_x + E_{2y}\vec{e}_y + E_{2z}\vec{e}_z) = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_2} E_{2z} = \varepsilon_0 5 E_{2z}$$

$$\Rightarrow E_{2z} = 6$$

Dolayısıyla $\vec{E}_2$'nin teğet bileşeni $\vec{E}_{2n} = 6\vec{e}_z$

Benzer şekilde $\vec{E}_{3n} = 15\vec{e}_z$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = 10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y + 6\vec{e}_z \quad \text{ve} \quad \vec{E}_3 = 10\vec{e}_x - 20\vec{e}_y + 15\vec{e}_z$$

2) a) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \Rightarrow \rho_v = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \sin\theta \left(-\frac{1}{3\varepsilon_0} r \right) \right] \right\}$

$$\Rightarrow \rho_v = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3) \right] = -1$$

$$\Rightarrow \rho_v = -1 \ [C/m^3]$$

Toplam yük $Q = \int_V \rho_v \, dv = \rho_v \cdot \text{kürenin hacmi} = (-1) \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = -\frac{4}{3}\pi a^3 \ [C]$

b) $\vec{E} = -\nabla V$ Kürenin içinde $-\frac{1}{3\varepsilon_0} r \vec{e}_r = -\frac{\partial V_{iç}}{\partial r} \vec{e}_r$

$$\Rightarrow \int \partial V_{iç} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \int r\,dr \Rightarrow V_{iç} = \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{r^2}{2} + C \quad C: \text{integral sabiti} \quad r<a$$

Kürenin dışında $V_{dış} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r}$ $r>a$

C sabitini belirlemek için $r=a$ sınır yüzeyinde potansiyelin sürekliliğinden faydalanılır:

$$V_{iç}(a) = V_{dış}(a) \Rightarrow \frac{1}{3\varepsilon_0} \frac{a^2}{2} + C = -\frac{a^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{a} \Rightarrow C = -\frac{a^2}{2\varepsilon_0}$$

3) Gauss yasasına göre $Q = \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds}$ S: kapalı Gauss yüzeyi

Küresel simetriden dolayı $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

r_1 yarıçaplı küresel Gauss yüzeyi için $\vec{ds} = r_1^2 \sin\theta \, d\theta d\phi \, \vec{e}_r$

$$\Rightarrow Q = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \varepsilon_0 E(r_1) \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \, r_1^2 \sin\theta \, d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \vec{e}_r$$ Q: Gauss yüzeyi içinde kalan yük miktarı

Her üç bölge için Q değerleri hesaplanarak elektrik alan belirlenebilir.

I bölgesinde $(r_1 < a)$ içeride yük olmadığından $Q=0 \Rightarrow \vec{E}_1 = 0$

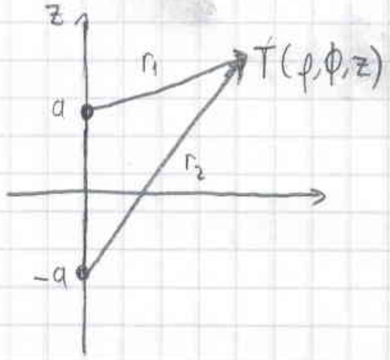
II bölgesinde $(a < r_2 < b)$ r_2 yarıçaplı Gauss yüzeyi yüklerin bir kısmını içerir. Yükler homojen dağıldığı için toplam yük, yük yoğunluğu ve hacim çarpılarak hesaplanabilir. Buna göre içeride kalan toplam yük:

$$Q = \frac{4\pi}{3}(r_2^3 - a^3) \cdot \rho_v \Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{\rho_v}{3\varepsilon_0} \frac{(r_2^3 - a^3)}{r_2^3} \vec{e}_r$$

III bölgesinde tüm yükler $r_3 > b$ yarıçaplı kürenin içinde yer alır.

$$\Rightarrow Q = \frac{4\pi}{3}(b^3 - a^3)\rho_v \Rightarrow \vec{E}_3 = \frac{\rho_v (b^3 - a^3)}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r_3^2} \vec{e}_r$$

4)

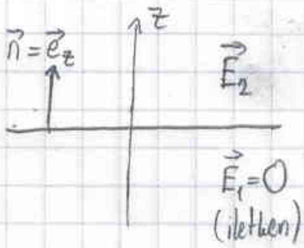


Bu geometride doğrudan vektörel elektrik alanı hesaplamak yerine skaler potansiyel fonksiyonunu kullanmak daha uygundur.

T noktasındaki potansiyel $V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$

Burada $r_1 = \sqrt{(z-a)^2 + \rho^2}$ ve $r_2 = \sqrt{(z+a)^2 + \rho^2}$ (Bunlar vektör değil mesafe)

Düzlem üzerindeki yük yoğunluğunu bulmak için $z=0$ düzleminde sınır koşulu kullanılabilir.



$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \Rightarrow \vec{e}_z \cdot \varepsilon_0 \vec{E}_2 = \rho_s$$

Burada $\vec{e}_z$ ile skaler çarpım sonucu E_{2x} ve E_{2y} bileşenleri elenir.

$$\vec{e}_z \cdot \varepsilon_0 \vec{E}_2 = \vec{e}_z\ \varepsilon_0 (E_{2z} \vec{e}_z) = \varepsilon_0 E_{2z} = \rho_s \quad (z=0 \text{ yüzeyinde})$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla V \Rightarrow E_{2z} = \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z+a}{[(z+a)^2+\rho^2]^{3/2}} - \frac{z-a}{[(z-a)^2+\rho^2]^{3/2}}\right]$$

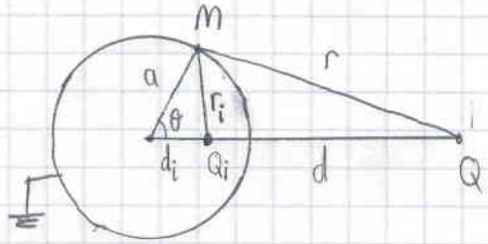
Yüzey yük yoğunluğu $\rho_s = \varepsilon_0 E_{2z}(z=0) = \dfrac{q\cdot a}{2\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}}$ $[C/m^2]$

b) Noktasal yüke düzlemin etki ettirdiği kuvveti doğrudan hesaplamak yerine eşdeğer problemdeki görüntü yükünün etki ettirdiği kuvvet hesaplanabilir.

$-q$ yükünün $z=a$ noktasında oluşturduğu elektrik alan:

$\vec{E}_{-q} = \dfrac{-q}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\vec{e}_z$. Buna göre kuvvet $\vec{F} = qE_{-q} = \dfrac{-q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\vec{e}_z$

5) Kürenin içine yüzeyindeki potansiyeli sıfır yapacak bir görüntü yükü Q_i merkezden d_i kadar uzaklığa yerleştirilir.



M noktası küre yüzeyinde olduğundan potansiyeli sıfır olmalı

$$\Rightarrow V_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r} + \frac{Q_i}{r_i}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{Q}{r} = -\frac{Q_i}{r_i} \Rightarrow \frac{r_i}{r} = -\frac{Q_i}{Q} = \text{sbt}$$

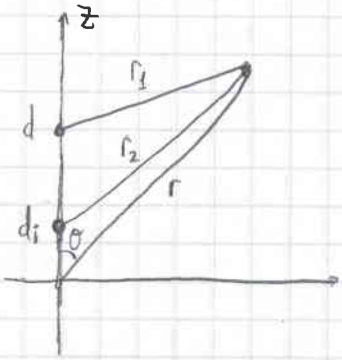
$\frac{r_i}{r} = \text{sbt}$ ise cosinüs teoremine göre $\dfrac{r_i}{r} = \sqrt{\dfrac{a^2+d_i^2-2ad_i\cos\theta}{a^2+d^2-2ad\cos\theta}}$ θ'dan bağımsız olarak sabit olmalı. Bu ifade düzenlenirse:

$$\frac{r_i}{r} = \sqrt{\frac{\frac{d_i}{d}\left(\frac{a^2 d}{d_i} + d\cdot d_i - 2ad\cos\theta\right)}{a^2+d^2-2ad\cos\theta}} = \text{sbt}$$

Bunu sağlayan d_i değeri $d_i = \dfrac{a^2}{d}$ olarak bulunur. Bu d_i değeri için $\dfrac{r_i}{r} = \sqrt{\dfrac{d_i}{d}} = \dfrac{a}{d} \Rightarrow \dfrac{Q_i}{Q} = -\dfrac{r_i}{r} = -\dfrac{a}{d}$

Sonuç olarak $d_i = \frac{a^2}{d}$ $\quad Q_i = -\frac{a}{d} Q$

Buna göre kürenin dışında potansiyel fonksiyonu:



$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{r_1} - \frac{a}{d}\frac{Q}{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{a}{d}\frac{1}{r_2}\right)$$

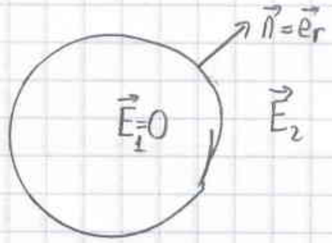
Buradaki r_1, r_2 mesafeleri r, θ cinsinden ifade edilmeli.

Cosinüs teoreminden $r_1 = \left(r^2 + d^2 - 2rd\cos\theta\right)^{1/2}$

$$r_2 = \left[r^2 + \left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2r\left(\frac{a^2}{d}\right)\cos\theta\right]^{1/2}$$

Bu şekilde potansiyel fonksiyonu küresel koordinatlarda elde edilmiş olur. Elektrik alana küresel koordinatlarda $\vec{E} = -\nabla V$ ile geçilebilir.

b) Yük yoğunluğu için sınır koşulu $r=a$ yüzeyinde uygulanabilir.



$$\vec{n}\cdot(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s \Rightarrow \vec{e}_r\cdot\varepsilon_0\vec{E}_2 = \rho_s$$

$\vec{e}_r$ ile skaler çarpım sonucu sadece E_{2r} bileşeni kalır:

$$\vec{e}_r\cdot\varepsilon_0\vec{E}_{2r}\Big|_{r=a} = \rho_s \Rightarrow \varepsilon_0 E_{2r}\Big|_{r=a} = \rho_s$$

$$E_{2r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r - d\cos\theta}{(r^2+d^2-2rd\cos\theta)^{3/2}} - \frac{a\left[r^2 - \left(\frac{a^2}{d}\right)\cos\theta\right]}{d\left[r^2+\left(\frac{a^2}{d}\right)^2 - 2\left(\frac{a^2}{d}\right)^2\cos\theta\right]^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \rho_s = \varepsilon_0 E_{2r}(r=a) = \frac{Q(d^2-a^2)}{4\pi a(a^2+d^2-2ad\cos\theta)^{3/2}} \quad [C/m^2]$$

6) İçteki R_2 yarıçaplı silindirik yüzeyin üzerindeki toplam yüke Q dersek Gauss yasasından

$$Q = \int_S \vec{D} \cdot \vec{ds}$$

Burada S ρ yarıçaplı silindir yüzeyi $(R_0 < \rho < R_2)$
$\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$ olduğundan tabanlardan akı geçmez. Sadece yan yüzey için integral formüle edilirse:

$$\vec{D} = \varepsilon_2 \vec{E}_2(\rho)\vec{e}_\rho \quad (R_1 < \rho < R_2 \text{ için})$$
$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E}_1(\rho)\vec{e}_\rho \quad (R_0 \leq \rho < R_1 \text{ için})$$

$$\vec{ds} = \rho d\phi dz \, \vec{e}_\rho$$

Buna göre $R_1 < \rho < R_2$ için $Q = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{L} \varepsilon_2 \vec{E}_2(\rho)\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_\rho \, \rho \cdot d\phi dz = \varepsilon_2 E_2(\rho) \rho \, 2\pi L$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 L\rho}\vec{e}_\rho$$

Benzer şekilde $\vec{E}_1 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L\rho}\vec{e}_\rho$

$R_0 - R_1$ arasındaki bölgede potansiyel fonksiyonu $\vec{E}_1 = -\nabla V_1$ bağıntısı ile belirlenebilir.

$$\vec{E}_1 = -\nabla V_1 \Rightarrow E(\rho)\vec{e}_\rho = -\frac{\partial V_1}{\partial \rho}\vec{e}_\rho \Rightarrow V_1 = -\int \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L\rho} d\rho$$

$$\Rightarrow V_1 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L}\ln(\rho) + C \qquad C: \text{integral sabiti}$$

$R_0 - R_1$ arası potansiyel farkı: $V_{10} = V(R_1) - V(R_0)$

$$\Rightarrow V_{10} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L}\ln(R_1) + C + \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L}\ln(R_0) - C = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_1 L}\ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right)$$

Benzer şekilde $R_2 - R_1$ arası potansiyel farkı: $V_{21} = V(R_2) - V(R_1)$

$$V_{21} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_2 L} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Dolayısıyla R_2-R_0 arası toplam potansiyel farkı $V_{20} = V(R_2) - V(R_0)$ elde edilmiş olur.

$$V_{20} = V_{10} + V_{21}$$

Kapasite $C = \dfrac{Q}{V_{20}} = \dfrac{2\pi L}{\frac{1}{\varepsilon_1}\ln\left(\frac{R_0}{R_1}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$