Türk Bina Deprem Yönetmeliği Kapsamında Performansa Dayalı Tasarım, Sismik Taban Yalıtımı ve PERFORM-3D ile Mühendislik Uygulamaları

Gebze Teknik Üniversitesi, 2016

Yapı Dinamiği ve Deprem Yönetmeliğine Giriş: Çok Serbestlik Dereceli Sistemler

2. Bölüm

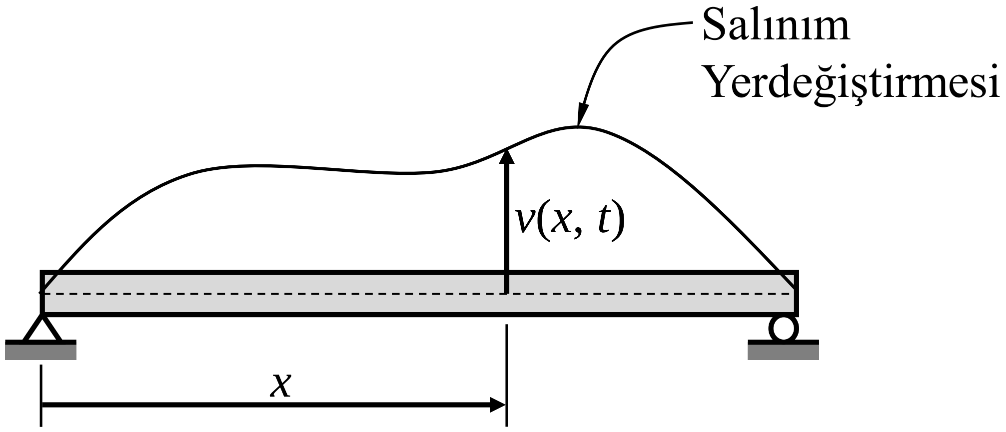
Dr. Barış Erkuş (İTÜ)

Çok Serbestlik Dereceli Sistemler: İçerik

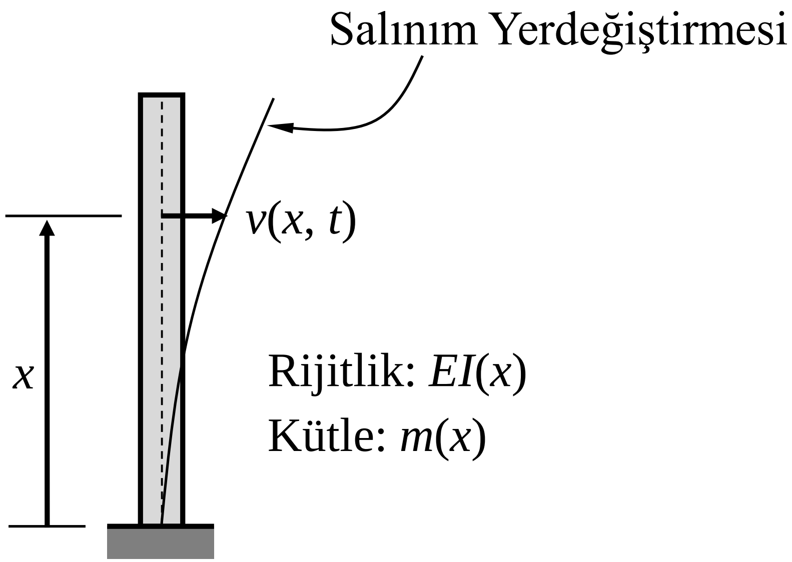
- Temel Matematik Bilgileri
  - Lineer Denklem Sistemleri (Ö)
  - Matrisler ve Temel Matris Operasyonları (Ö)
  - Özdeğer Problemi (Ö)
  - Matrislerin Bölünmesi (Ö)
- Yapıların Matematiksel Modellemesi
  - Sürekli Kütleli Sistemler
  - Toplu Kütleli Sistemler
  - Mekanik ve Yapısal Sistemler
- Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri
  - Yapı Serbestlik Dereceleri
  - Toplu ve Sürekli Kütle Matrisleri (Ö)
  - Rijitlik Matrisi (Ö)
  - Statik Yoğunlaştırma, Rijit Diyafram Kabulü
- Modal Analiz: Mod Şekilleri ve Periyotları
  - Genelleştirilmiş Serbestlik Dereceleri
  - Özdeğerler, Özvektörler ve Özmatris (Ö)
  - Rayleigh-Ritz Yöntemi
  - Yüklemeye Bağlı Rayleigh-Ritz Yöntemi
- Sönüm Matrisi
  - İçsel Enerji Sönümleme
  - Klasik Sönümleme Matrisi
    - Sabit Sönümleme Matrisi (Ö)
    - Rayleigh Sönümleme Matrisi (Ö)
  - Klasik Olmayan Sönümleme (Ö)
- Modal Analiz: Modal Denklemler (Ö)

(Ö): Örnekler

Yapıların Matematiksel Modellemesi: Sürekli Kütleli Sistemler



Rijitlik: $EI(x)$ Kütle: $m(x)$



- Kütlenin sürekli olması kabulü

  Kütle: $m(x)$

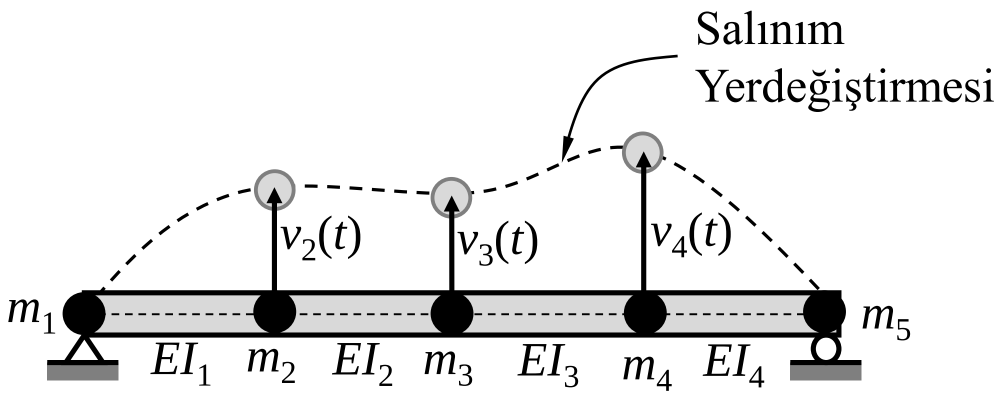
- Rijitliğin sürekli olması durumu

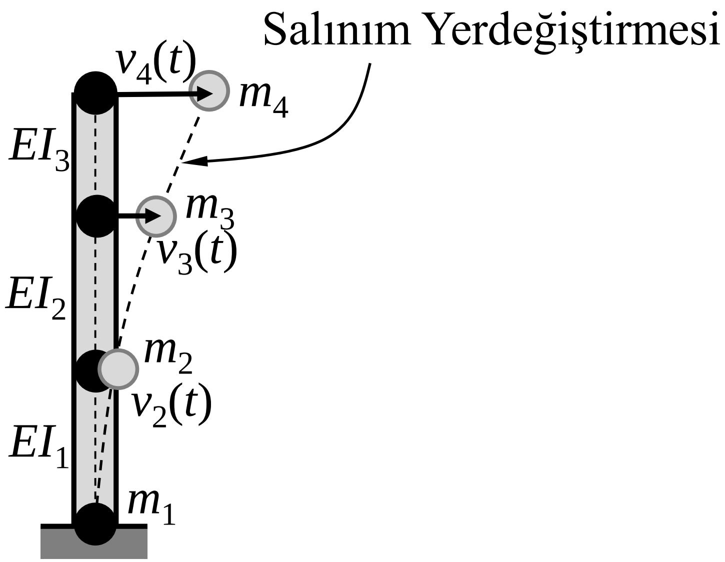
  Rijitlik: $EI(x)$

- Yerdeğiştirme koordinatlara ve zamana bağlı olarak ifade edilebilir

  Yerdeğiştirme: $v(x, t)$

Yapıların Matematiksel Modellemesi: Toplu Kütleli Sistemler

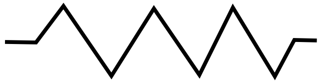




- Kütlenin toplu olması kabulü

  Kütle: m_i

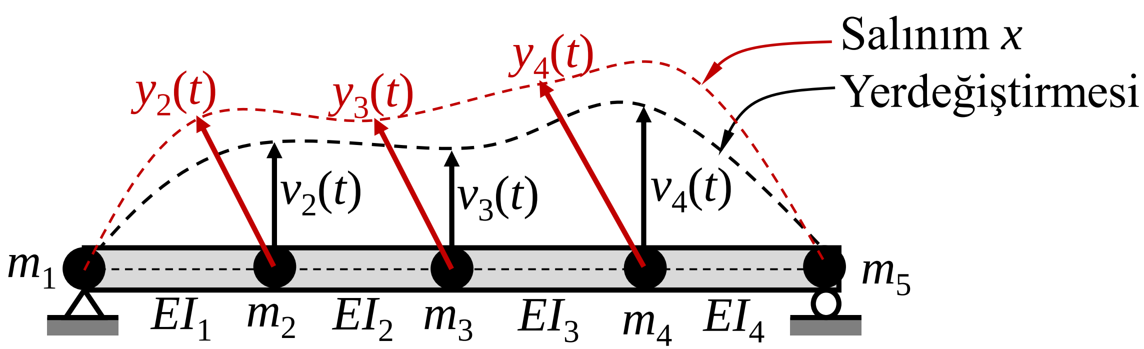
- Rijitliğin toplu olması durumu

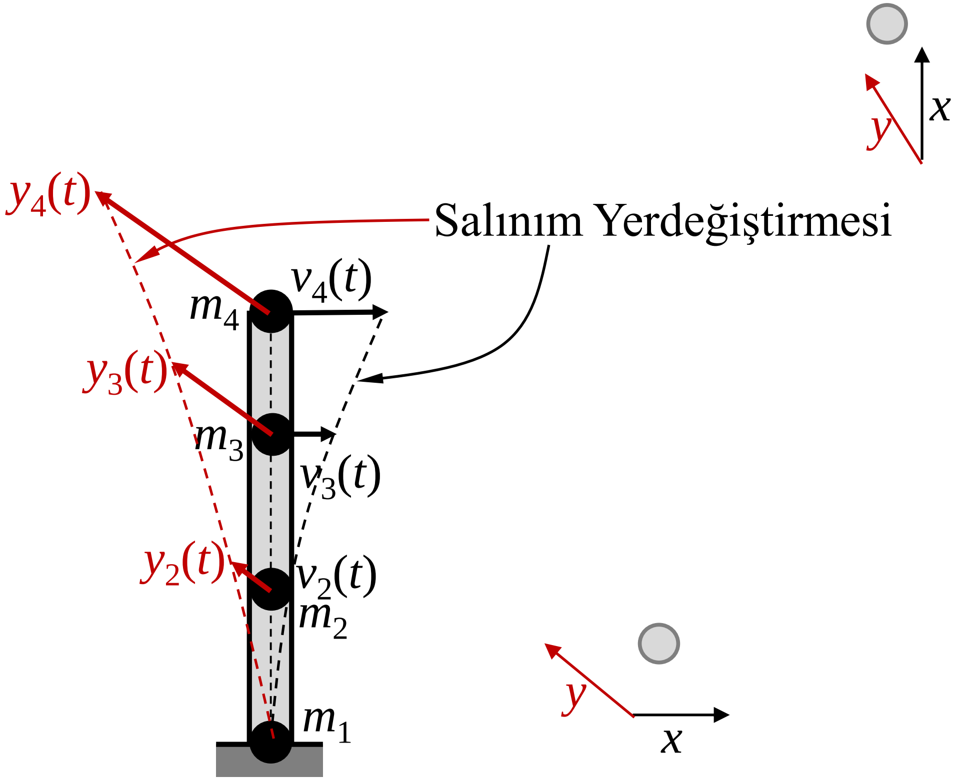
  Rijitlik: $EI_i = k_i$ 

- Yerdeğiştirme ~~koordinatlara ve~~ zamana bağlı olarak ifade edilebilir

  Yerdeğiştirme: $v_i\,(t)$

Yapıların Matematiksel Modellemesi: Toplu Kütleli Sistemler





• Kütlenin toplu olması kabulü

x yönü için kütle: $m_{x,i} = m_i$

y yönü için kütle: $m_{y,i} = m_i$

• Rijitliğin toplu olması durumu

x yönü için rijitlik: $EI_{x,i} = k_{x,i}$

y yönü için rijitlik: $EI_{y,i} = k_{y,i}$

Bağıl (etkileşimli) rijitlik: $k_{xy,i}$

• Yerdeğiştirme ~~koordinatlara ve~~ zamana bağlı olarak ifade edilebilir

Yerdeğiştirme: $v_i(t)$

Yerdeğiştirme: $y_i(t)$

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} v_1(t) \\ y_1(t) \\ v_2(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ v_2(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix}$$

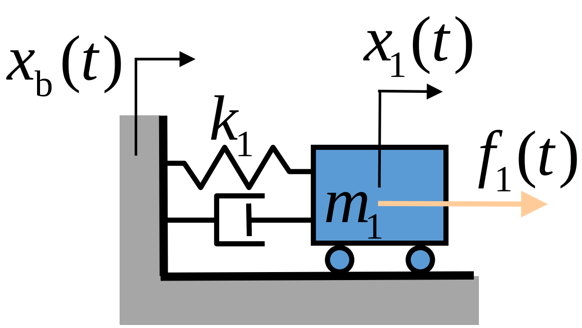
Yapıların Matematiksel Modellemesi: Mekanik ve Yapısal Sistemler

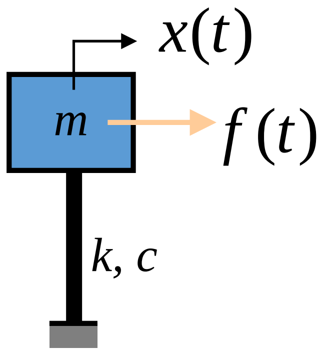
Mekanik Sistemler

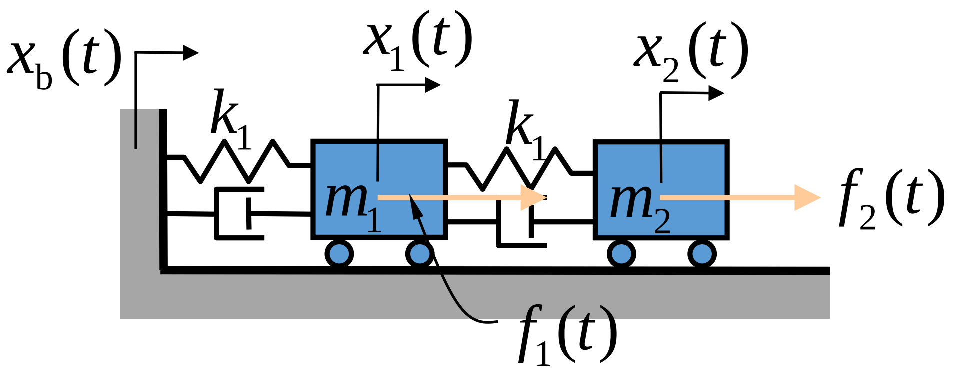
•Toplu kütle kullanılır.

•Tanımlanan bir toplu kütle için bir adet yerdeğiştirme vardır.

•Rijitlik genelde yaylarla gösterilir.







Yapısal Sistemler

•Toplu kütle kullanılır.

•Tanımlanan bir toplu kütle için birden fazla yerdeğiştirme vardır.

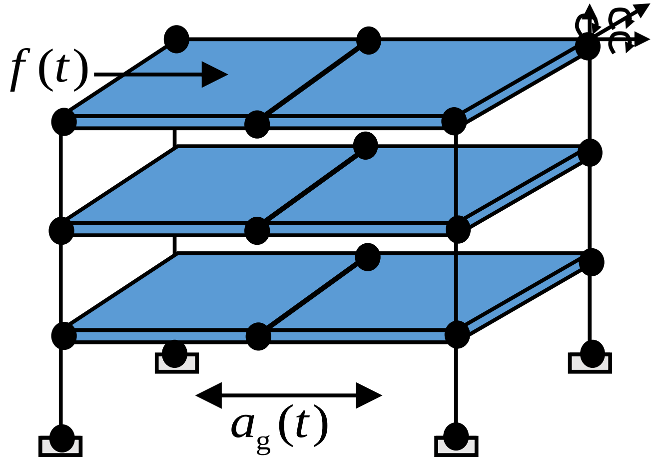
•Bağıl rijitlik mevcuttur

•Rijitlik genelde şu yöntemlerler ile elde edilir:

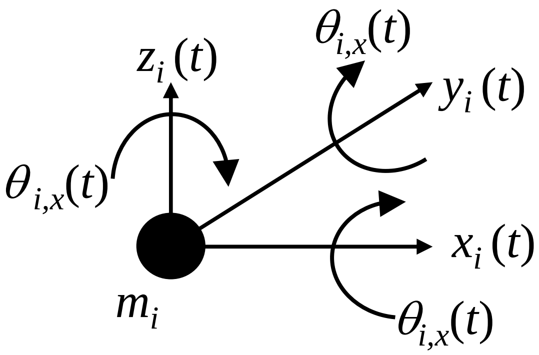
- •Yerdeğiştirme Yöntemleri
- •Sonlu Elemanlar Yöntemi

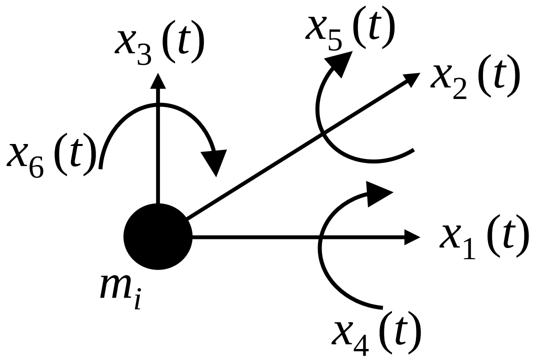
•Rijitlik "yapısal elemanlar" için tanımlanır:

- •Çubuk Eleman
- •Kabuk Eleman
- •…



Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Serbestlik Dereceleri

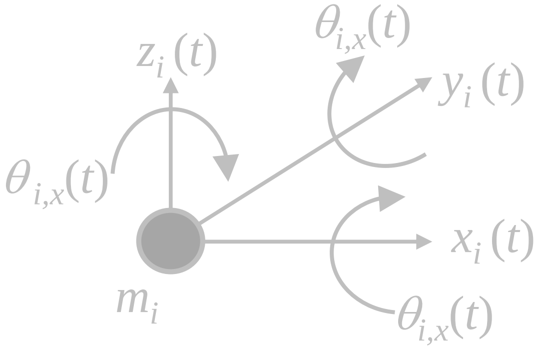


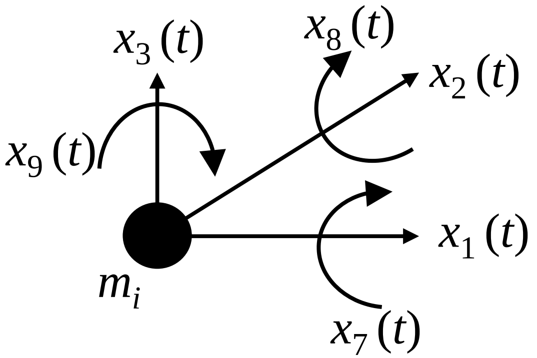


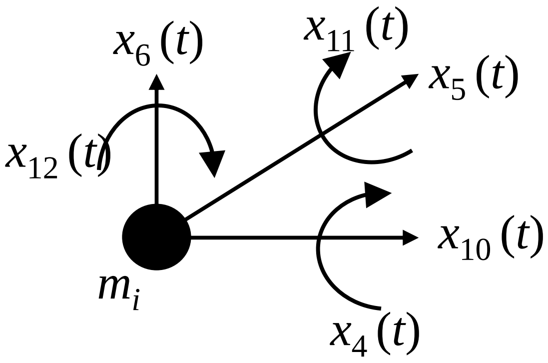
$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{matrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \\ \theta_{i,x}(t) \\ \theta_{i,y}(t) \\ \theta_{i,y}(t) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \rightarrow m_i \\ \rightarrow m_i \\ \rightarrow m_i \\ \rightarrow \sim 0 \\ \rightarrow \sim 0 \\ \rightarrow \sim 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \rightarrow m_i \\ \rightarrow m_i \\ \rightarrow m_i \\ \rightarrow \sim 0 \\ \rightarrow \sim 0 \\ \rightarrow \sim 0 \end{matrix}$$

Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Serbestlik Dereceleri







$$\mathbf{d}=\begin{Bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \\ \theta_{i,x}(t) \\ \theta_{i,y}(t) \\ \theta_{i,y}(t) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \to m_i \\ \to m_i \\ \to m_i \\ \to \sim 0 \\ \to \sim 0 \\ \to \sim 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{d}=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \\ \theta_{2,x}(t) \\ \vdots \\ \theta_{N,y}(t) \\ \theta_{N,z}(t) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_{10}(t) \\ x_{11}(t) \\ x_{12}(t) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \to m_i \\ \to m_i \\ \to m_i \\ \vdots \\ \to \sim 0 \\ \to \sim 0 \\ \to \sim 0 \end{matrix}$$

$$\mathbf{x}=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ \vdots \\ x_{6N-1}(t) \\ x_{6N}(t) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \to m_i \\ \to m_i \\ \to m_i \\ \to m_i \\ \to m_i \\ \vdots \\ \to \sim 0 \\ \to \sim 0 \end{matrix}$$

Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Hareket Denklemi

Mekanik Sistemler

Yapısal Sistemler

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$$

Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Kütle Matrisi

Toplu Kütle Matris

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Deprem yükleri altında analizlerde, dönme kütleleri sıfır (0) alınabilir

Sürekli (Uyumlu) Kütle Matrisi

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{n1} & & & m_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Rijitlik Matrisi

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ k_{n1} & & & k_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Hareket Denklemi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} & & & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n(t)} \end{bmatrix}_{n\times 1} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ k_{n1} & & & k_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

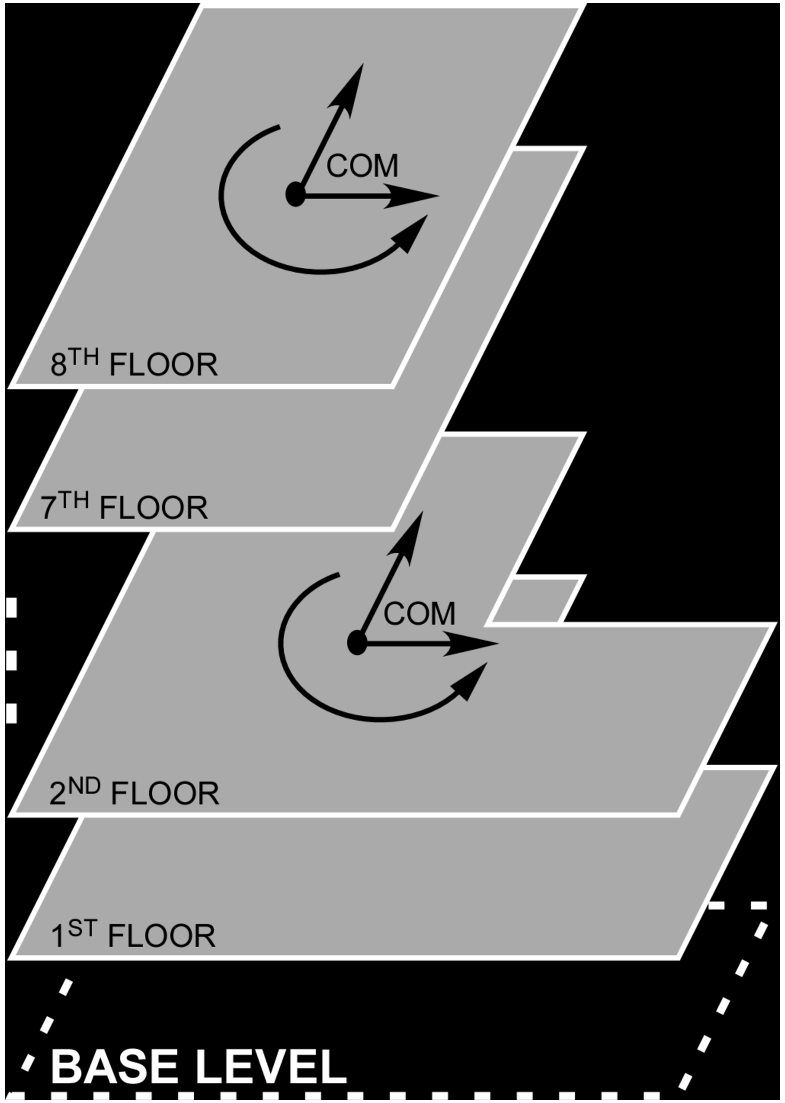
Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Statik Yoğunlaştırma

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

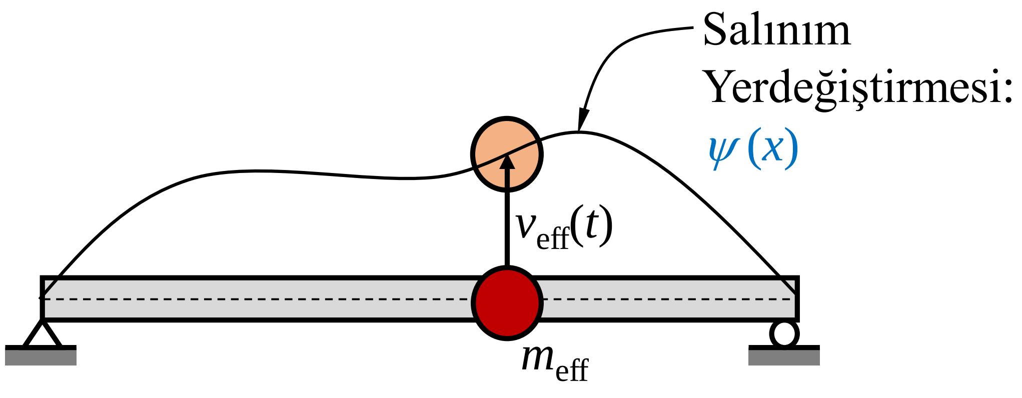
$$\begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1(t)\\ \ddot{x}_2(t)\\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} & & & c_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \vdots \\ \dot{x}_{n(t)}\end{bmatrix}_{n\times 1}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ k_{n1} & & & k_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \vdots \\ x_n(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ \vdots \\ f_n(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{m}_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\ddot{\mathbf{x}}_1(t)\\ \ddot{\mathbf{x}}_2(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}+\begin{bmatrix}\mathbf{c}_{11} & \mathbf{c}_{12}\\ \mathbf{c}_{21} & \mathbf{c}_{22}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1(t)\\ \dot{\mathbf{x}}_2(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}+\begin{bmatrix}\mathbf{k}_{11} & \mathbf{k}_{12}\\ \mathbf{k}_{21} & \mathbf{k}_{22}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1(t)\\ \mathbf{x}_2(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1(t)\\ \mathbf{f}_2(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}$$

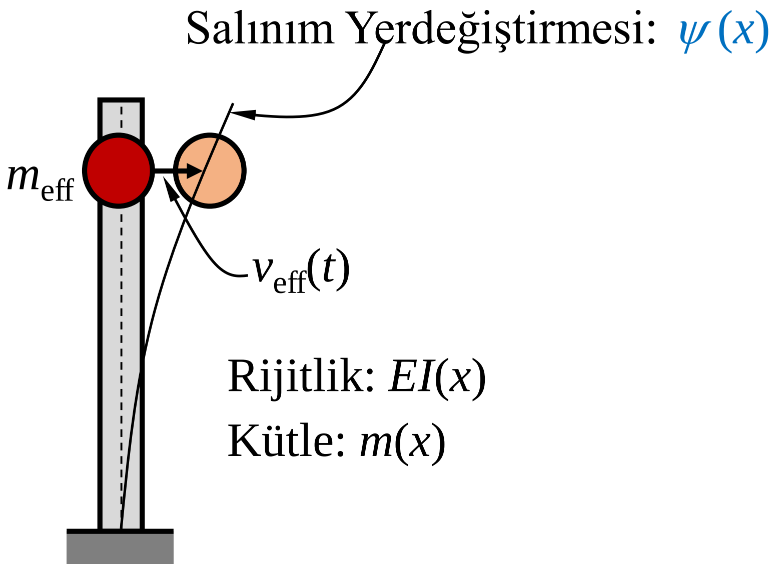
Serbestlik Dereceleri ve Sistem Matrisleri: Rijit Diyafram Kabulü



Modal Analiz: Genelleştirilmiş Serbestlik Dereceleri – Sürekli Kütle



Rijitlik: $EI(x)$ Kütle: $m(x)$



Rijitlik: $EI(x)$

Kütle: $m(x)$

- Tek serbestlik dereceli sistem çözüm yönemleri iyi bilindiğinden dolayı, bu yöntemler den faydalanmak isteriz.
- Ancak, burada yerdeğiştirme lokasyona da bağlı olduğudundan bazı basitleştirme yapmamız gerekir.

→Salınım sırasında yerdeğiştirme formunun hep korunduğu kabulü yapılır:

Salınım Yerdeğiştirme Formu: $\psi(x)$

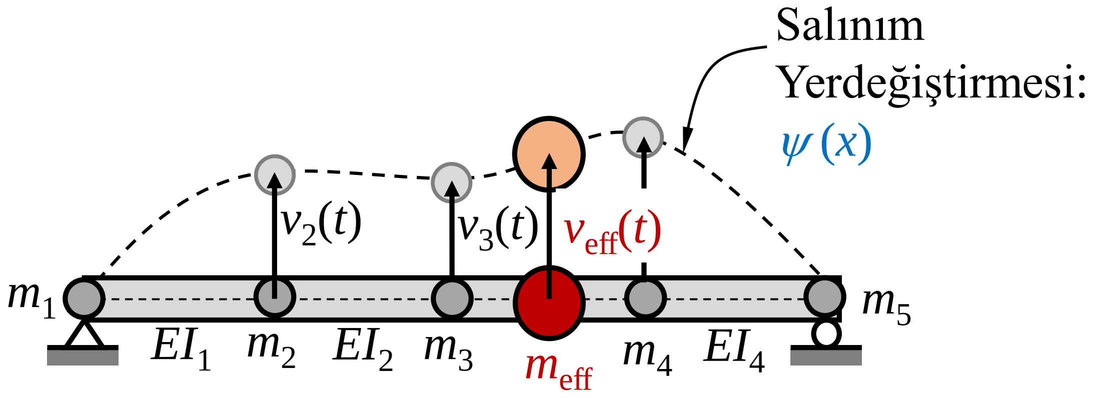
→Tüm kütlenin bir noktada toplantığı kabulü yapılır:

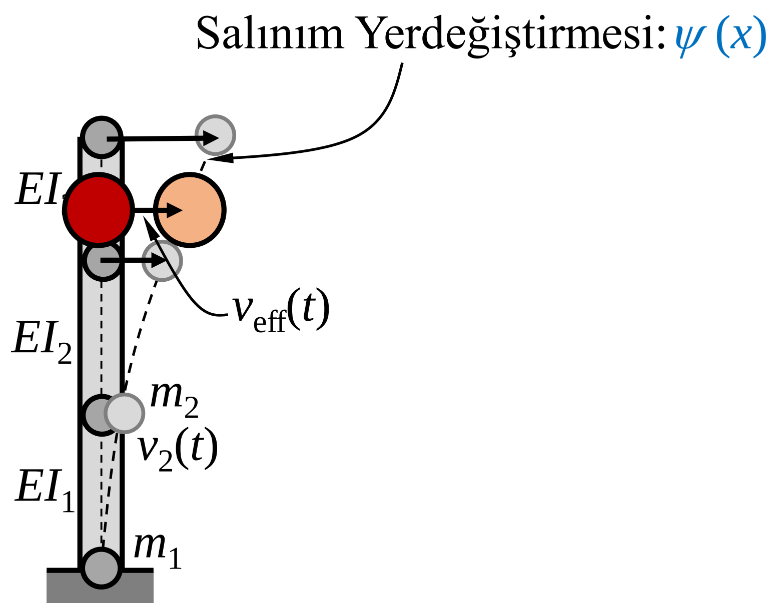
Eşdeğer (Etkin) Kütle : m_{eff}

→Sadece etkin kütlenin lokasyanunda yerdeğiştirme tanımlanır:

Etkin Kütle Yerdeğiştirmesi: $v_{eff}(t)$

Modal Analiz: Genelleştirilmiş Serbestlik Dereceleri – Toplu Kütle





- Tek serbestlik dereceli sistem çözüm yöntemleri iyi bilindiğinden dolayı, bu yöntemler den faydalanmak isteriz.
- Ancak, burada yerdeğiştirme lokasyona da bağlı olduğundan bazı basitleştirme yapmamız gerekir.

→Salınım sırasında yerdeğiştirme formunun hep korunduğu kabulü yapılır:

Salınım Yerdeğiştirme Formu: $\boldsymbol{\psi}_{5\times 1}$ (vektör)

→Tüm kütlenin bir noktada toplanığı kabulü yapılır:

Eşdeğer (Etkin) Kütle : m_{eff}

→Sadece etkin kütlenin lokasyanunda yerdeğiştirme tanımlanır:

Etkin Kütle Yerdeğiştirmesi: $v_{eff}(t)$

Modal Analiz: Genelleştirilmiş Serbestlik Dereceleri – Sürekli Kütle

•Bu şekilde sürekli ya da toplu bir sistem tek serbestlik dereceli bir sisteme indirgenebilir.

$$v(x,t) = v_{\text{eff}}(t)\psi(x)$$

$$m_{\text{eff}}\ddot{v}_{\text{eff}}(t) + c_{\text{eff}}\dot{v}_{\text{eff}}(t) + k_{\text{eff}}v_{\text{eff}}(t) = p_{\text{eff}}(t)$$

•Sistem daha genel bir hal aldığından bu işleme genelleştirme denir.

•Tüm parametreler genelleştirilmiş olarak adlandırılır ve ortak bir notasyon kullanılır:

$$v(x,t) = q(t)\psi(x)$$

$$\overline{m}\ddot{q}(t) + \overline{c}\dot{q}(t) + \overline{k}q(t) = \overline{p}(t)$$

Modal Analiz: Genelleştirilmiş Serbestlik Dereceleri – Toplu Kütle

•Bu şekilde sürekli ya da toplu bir sistem tek serbestlik dereceli bir sisteme indirgenebilir.

$$\mathbf{v}(t) = v_{\text{eff}}(t)\boldsymbol{\psi}$$

$$m_{\text{eff}}\ddot{v}_{\text{eff}}(t) + c_{\text{eff}}\dot{v}_{\text{eff}}(t) + k_{\text{eff}}v_{\text{eff}}(t) = p_{\text{eff}}(t)$$

•Sistem daha genel bir hal aldığından bu işleme genelleştirme denir.

•Tüm parametreler genelleştirilmiş olarak adlandırılır ve ortak bir notasyon kullanılır:

$$\mathbf{x}(t) = q(t)\boldsymbol{\psi}$$

$$\overline{m}\ddot{q}(t) + \overline{c}\dot{q}(t) + \overline{k}q(t) = \overline{p}(t)$$

Modal Analiz: Genelleştirilmiş Serbestlik Dereceleri

- Salınım formu burada mühendisin seçimine bağlıdır. Ancak sınır koşulları sağlanmalıdır.
- Seçilen salınım formuna bağlı olarak
  - genelleştirilmiş yerdeğiştirme
  - genelleştirilmiş kütle
  - genelleştirilmiş sönümleme,
  - genelleştirilmiş rijitlik
  - genelleştirilmiş dış yük tanımlanmış olacaktır.
- Salınım formu iki türlü olabilir:
  - Tamamen mühendisin seçimi olabilir

    →Bu durumda form ψ ile gösterilebilir
  - Yapının kütle ve rijitlik özellikleri ile belirlenen doğal salınım formları (mod şekilleri, özvektörleri) olabilir.

    →Bu durumda form ϕ ile gösterilebilir
- Her nasıl seçilirse seçilsin, tüm olası salınım formları belli kriterleri sağlamak zorundadır.

Modal Analiz: Genelleştirilmiş Serbestlik Dereceleri

•Bu noktada sonuçların kabul edilebilir olması için bazı kriterlerin sağlanması istenir.

•Bu kriterler genelde **enerji korunumu** üzerinden tanımlanır.

•Eğer **enerji korunum şartları** sağlanırsa şu sonuçlar ortaya çıkmaktadır:

$$\mathbf{x}(t) = q(t)\boldsymbol{\psi}, \qquad \bar{m}\ddot{q}(t) + \bar{c}\dot{q}(t) + \bar{k}q(t) = \bar{p}(t)$$

$$\bar{m} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\psi_i)^2 = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}, \quad \bar{c} = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\boldsymbol{\psi}, \quad \bar{k} = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}, \quad \bar{p}(t) = \boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}}, \qquad \xi = \frac{\bar{c}}{2\bar{m}\omega}$$

•Burada ω, seçilen salınım şekline tekabül eden salınım frekansıdır.

Modal Analiz: Doğal Salınım Formu

- Her yapının “meyil verdiği” bir ya da birden fazla salınım formu vardır.
- Bu formun nasıl anlamak için hareket denklemine bakmak gerekmektedir.

$$\mathbf{x}(t) = q(t)\boldsymbol{\psi}, \qquad \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad \text{(serbest salınım)}$$

$$q(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{seçilirse}$$

$$\mathbf{M}\ddot{q}(t)\boldsymbol{\psi} + \mathbf{K}q(t)\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$$

$$-\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}\sin(\omega t + \varphi) + \mathbf{K}\boldsymbol{\psi}\sin(\omega t + \varphi) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\psi} = \omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi} \quad \text{veya} \quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\psi} = \omega^2\boldsymbol{\psi}$$

$$(\mathbf{A}\boldsymbol{\psi} = \lambda\mathbf{B}\boldsymbol{\psi} \quad \text{veya} \quad \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi} = \lambda\boldsymbol{\psi})$$

Modal Analiz: Doğal Salınım Formu – Nasıl Bulunabilir?

•Doğal Salınım formları **hareket denklemi**ni sağlar:

$$\mathbf{M}\ddot{q}(t)\boldsymbol{\psi}+\mathbf{K}q(t)\boldsymbol{\psi}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}q(t)\boldsymbol{\psi}=-\mathbf{M}\ddot{q}(t)\boldsymbol{\psi}$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}=\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}$$

$$\mathbf{F}_{\text{iç}}=\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}$$

$$\mathbf{F}_{\text{dis}}\propto\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}$$

•Bu durumda:

$$\boldsymbol{\psi}\rightarrow\boldsymbol{\phi}$$

$$\omega\rightarrow\omega_{\text{n}},\qquad (\text{n: natural})$$

•Doğal Salınım formları, **özdeğer problemi**nin çözümüdür:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}=\omega^2\mathbf{M}\boldsymbol{\psi}\quad \text{veya}\quad \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\boldsymbol{\psi}=\omega^2\boldsymbol{\psi}$$

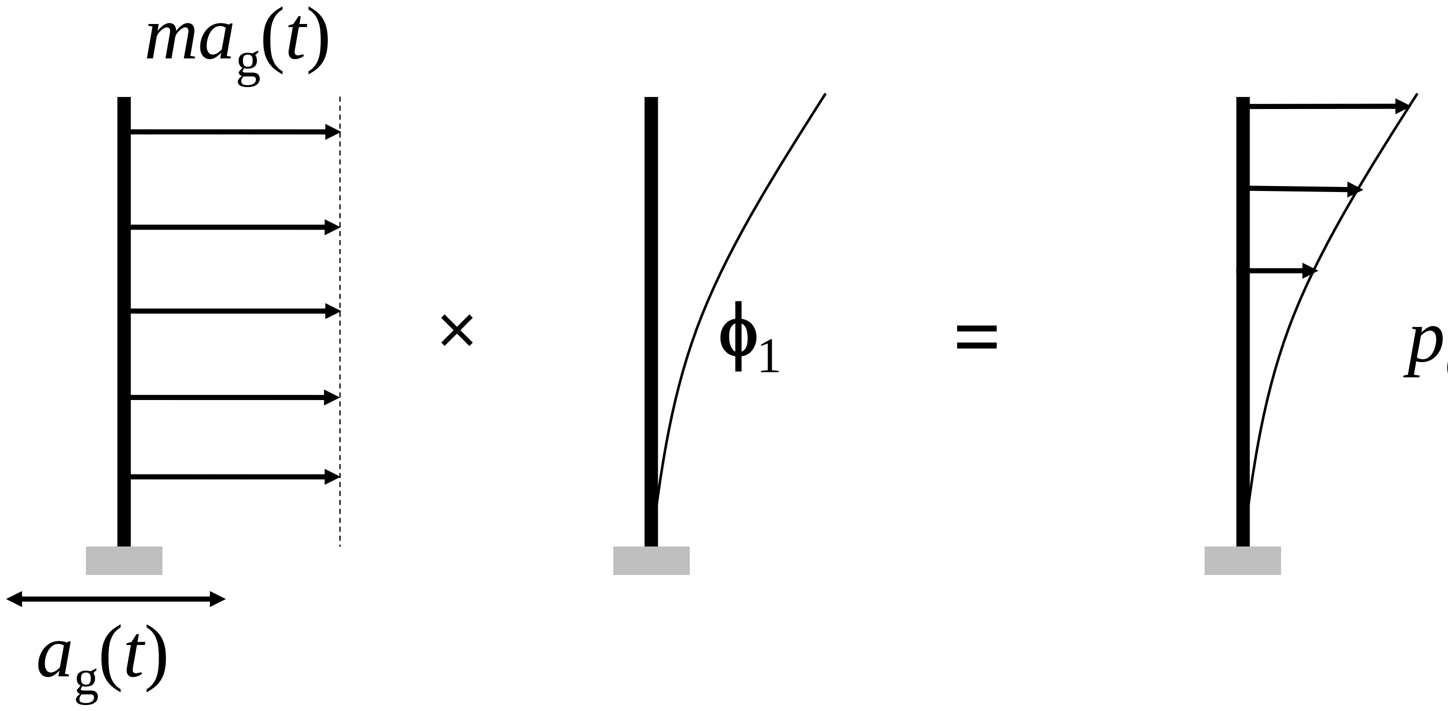
$$(\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}=\lambda\mathbf{B}\boldsymbol{\psi}\quad \text{veya}\quad \bar{\mathbf{A}}\boldsymbol{\psi}=\lambda\boldsymbol{\psi})$$

•Bu durumda:

$$\boldsymbol{\psi}\rightarrow\boldsymbol{\phi}$$

$$\omega\rightarrow\omega_{\text{n}},\qquad (\text{n: natural})$$

Modal Analiz: Dış Yükler – Deprem Durumu



$$p_{eff} = \phi_1 \, m a_g(t)$$

[Hatırlatma] Temel Matematik Bilgileri: Taban Vektörleri

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = a_1 \begin{Bmatrix} | \\ \mathbf{v}_1 \\ | \end{Bmatrix} + a_2 \begin{Bmatrix} | \\ \mathbf{v}_2 \\ | \end{Bmatrix} + a_3 \begin{Bmatrix} | \\ \mathbf{v}_3 \\ | \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} | \\ \mathbf{v}_1 \\ | \end{Bmatrix} a_1 + \begin{Bmatrix} | \\ \mathbf{v}_2 \\ | \end{Bmatrix} a_2 + \begin{Bmatrix} | \\ \mathbf{v}_3 \\ | \end{Bmatrix} a_3$$

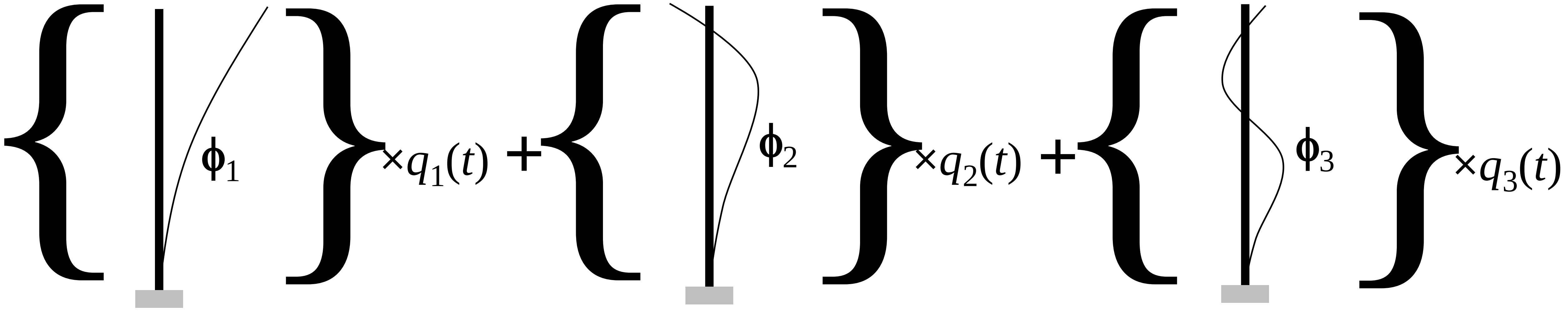
$$\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1 a_1 + \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_2 a_2 + \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_2 a_3$$

$$\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{v}_1 a_1 \quad , \quad \text{eger baz vektörleri dik ise}$$

$$\mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = (1) a_1 = a_1 \quad , \quad \text{eger baz vektörleri birim vektörler ise}$$

Modal Analiz: Yerdeğiştirmelerin Baz Vektöleri ile İfadesi

$$\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_1 \\ | \end{Bmatrix} q_1(t)+\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_2 \\ | \end{Bmatrix} q_2(t)+\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_3 \\ | \end{Bmatrix} q_3(t)$$



Modal Analiz: Yerdeğiştirmelerin Baz Vektöleri ile İfadesi

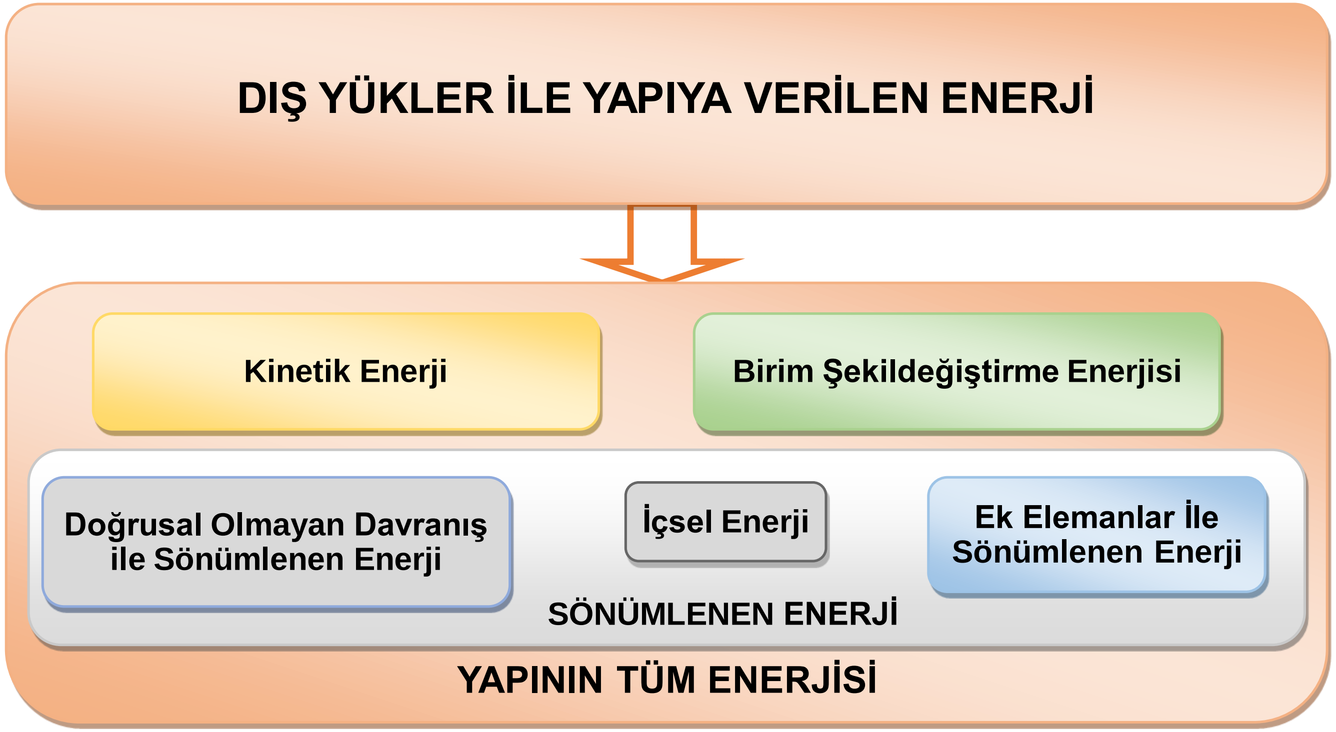
$$\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}=q_1(t)\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_1 \\ | \end{Bmatrix}+q_2(t)\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_2 \\ | \end{Bmatrix}+q_3(t)\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_3 \\ | \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_1 \\ | \end{Bmatrix}q_1(t)+\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_2 \\ | \end{Bmatrix}q_2(t)+\begin{Bmatrix} | \\ \boldsymbol{\phi}_3 \\ | \end{Bmatrix}q_3(t)$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{\phi}_1 & \boldsymbol{\phi}_2 & \boldsymbol{\phi}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}(t)$$

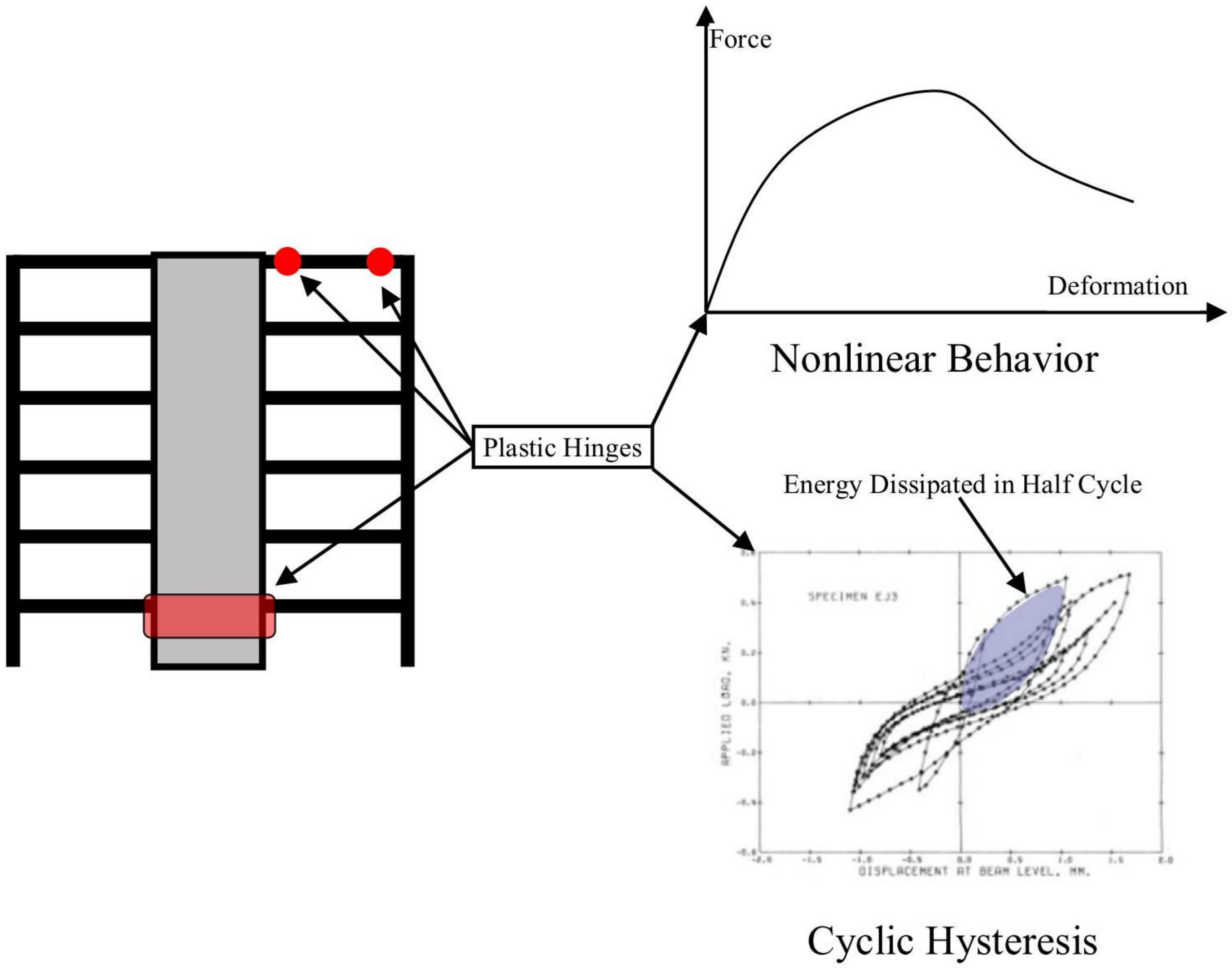
Sönümleme

- Dış Yükler → Yapıya Verilen Enerji
- Yapı Tarafından Sönümlenen Enerji:
  - Elemanların Doğrusal Olmayan Davranışı Üzerinden
  - İçsel (Doğal) Sönümleme
  - Eklenen Sönümleyiciler ile Sönümleme



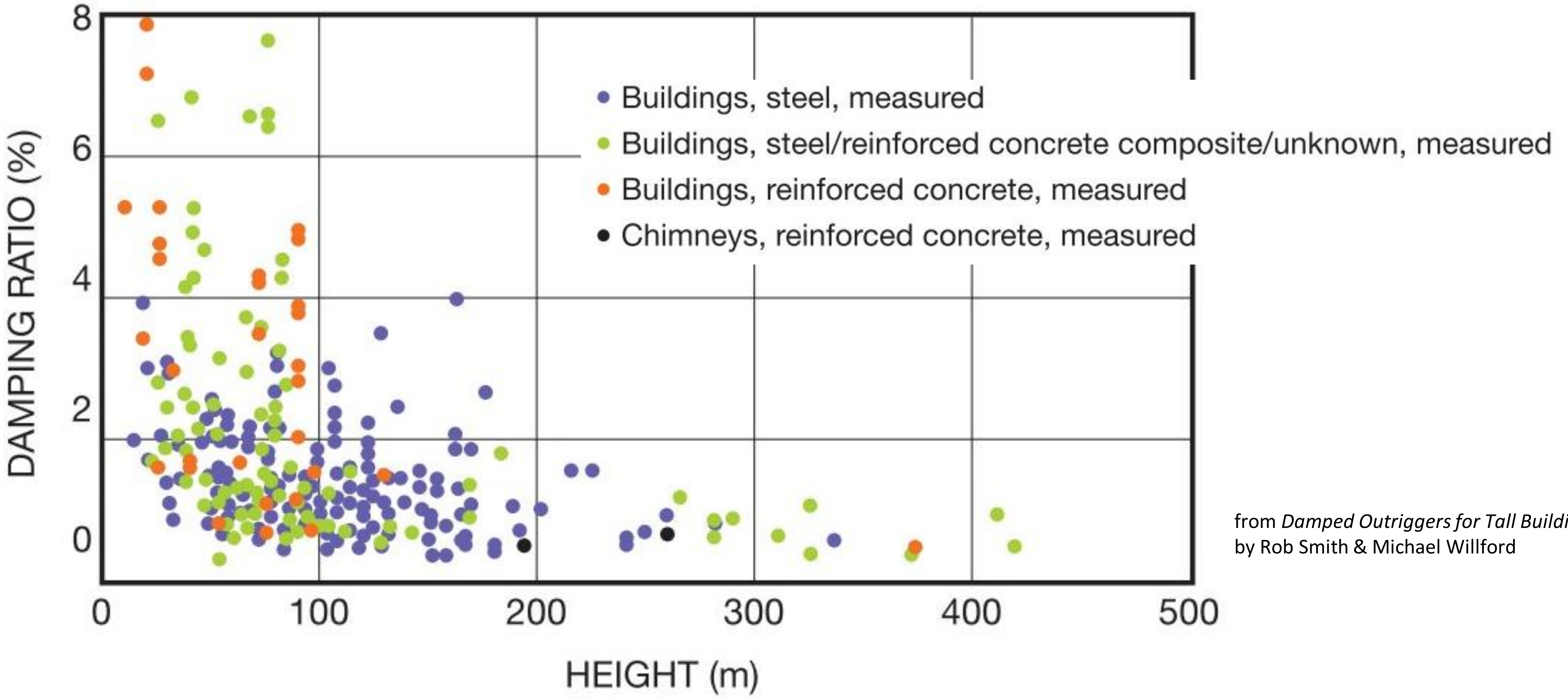
Sönümleme:

•Yapı doğrusal olmayan evreye geçerse oluşur



Sönümleme: İçsel Sönümleme

- Tüm yapılarda az da olsa sönümleme vardır
- Yapı lineer olsa bile oluşur
- Komplike bir davranıştır, ölçmesi ve hesaplaması zordur



from *Damped Outriggers for Tall Buildings* by Rob Smith & Michael Willford

Sönümleme Matrisi

Klasik Olmayan Sönümleme Matrisi

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \cdots & \bar{c}_{1n} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{c}_{n1} & & & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Klasik Sönümleme Matrisi

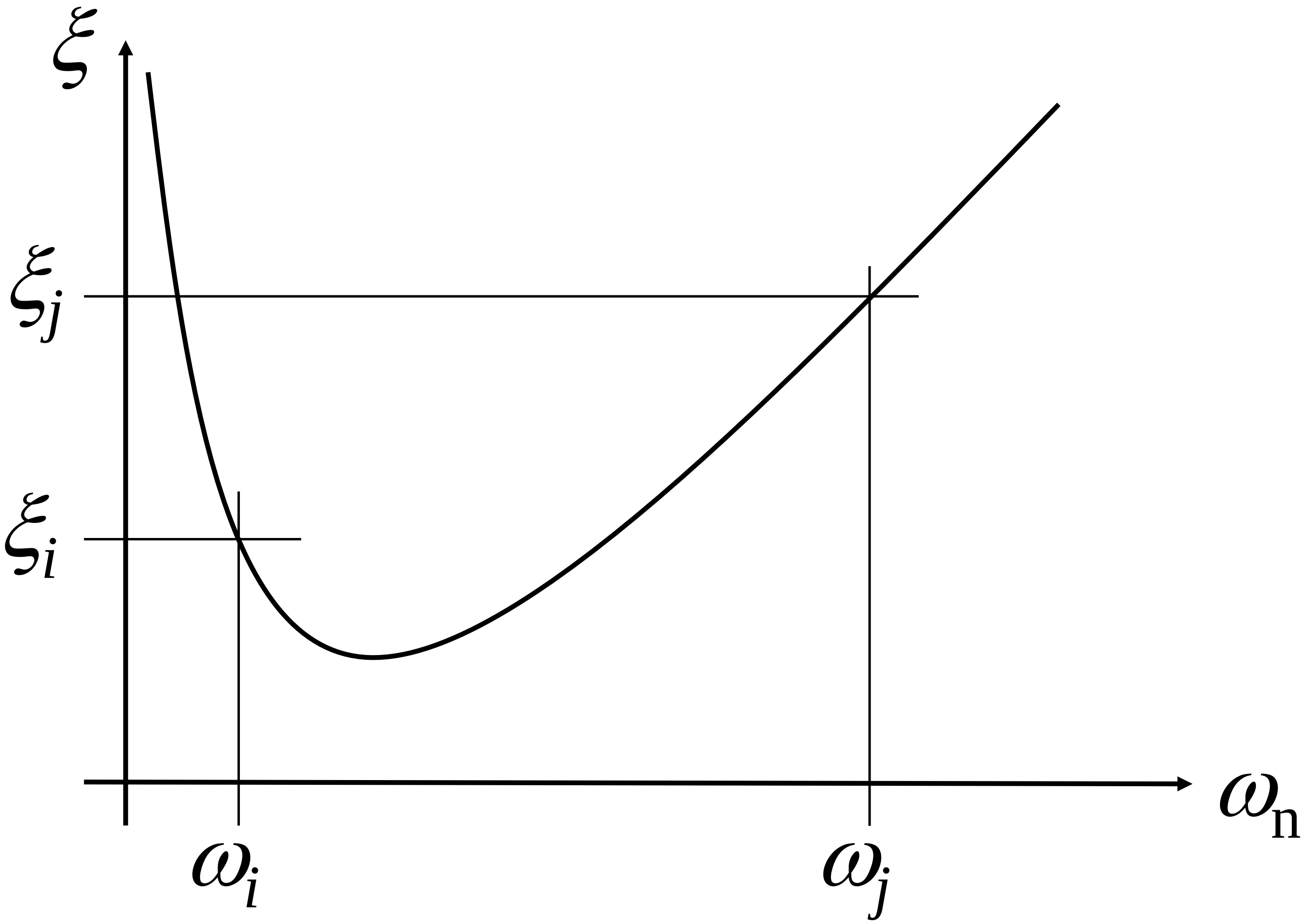
$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{c}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Sönümleme Matrisi: Klasik Sönümleme Matrisi – Sabit Sönümleme

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{c}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 2\bar{m}_1\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\bar{m}_1\xi_2\omega_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 2\bar{m}_1\xi_n\omega_n \end{bmatrix}_{n\times n}$$

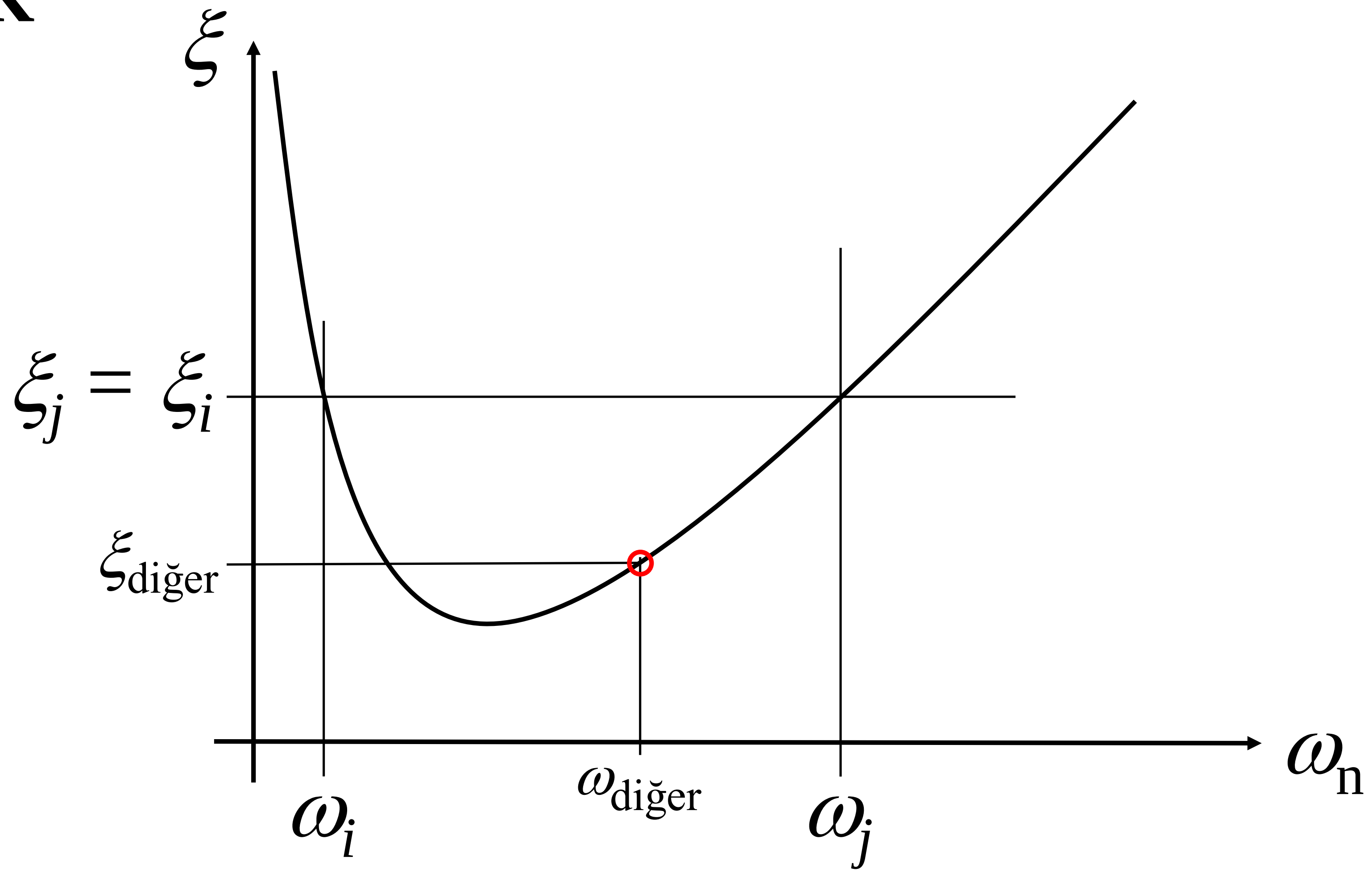
Sönümleme Matrisi: Klasik Sönümleme Matrisi – Rayleigh Sönümleme

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$$



Sönümleme Matrisi: Klasik Sönümleme Matrisi – Rayleigh Sönümleme

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$$



Sönümleme Matrisi: Klasik Sönümleme Matrisi – Rayleigh Sönümleme

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K}$$

$$a_0 = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j}\omega_i\omega_j$$

$$a_1 = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j}$$

$$\xi_{\text{diğer}} = \frac{a_0}{2\omega_{\text{diğer}}} + \frac{a_1\omega_{\text{diğer}}}{2}$$

Sönümleme Matrisi: Klasik Olmayan Sönümleme Matrisi

- Klasik olan bir sönümleme matrisine ek sönümleme sabitleri eklenirse, elde edilen yeni matris klasik olmayan bir matrisdir.
- Klasik olmayan sönümleme matrisi modal matrisleri ile çarpılarak elde edilen genelleştirilmiş sönümleme matrisi diyagonal olmaz.
- Bu durum, örnek olarak sönümleyici eklenmiş yapılarda karşımıza çıkabilir.

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} + c_{\mathrm{ek},1} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} + c_{\mathrm{ek},2} & & & c_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Modal Analiz: Hareket Denkleminin Çözümü

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t})_{n\times 1}=\mathbf{\Phi}_{n\times n}\mathbf{q}(\mathbf{t})_{n\times 1}$$

$$\mathbf{M\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{C\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{K\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(t)$$

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{K}}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\overline{\mathbf{F}}(t)$$

$\mathbf{\Phi}$ genelse:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_1 & & & \\ & \bar{m}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{m}_n \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \cdots & \bar{c}_{1n} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{c}_{n1} & & & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & \bar{k}_{12} & \cdots & \bar{k}_{1n} \\ \bar{k}_{21} & \bar{k}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{k}_{n1} & & & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Modal Analiz: Hareket Denkleminin Çözümü

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t})_{n\times 1}=\mathbf{\Phi}_{n\times n}\mathbf{q}(\mathbf{t})_{n\times 1}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(t)$$

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{K}}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\overline{\mathbf{F}}(t)$$

$\mathbf{\Phi}$ doğal Mod şekilleri ise:

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{m}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{m}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & \cdots & \bar{c}_{1n} \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \bar{c}_{n1} & & & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} \bar{k}_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{k}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{k}_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Modal Analiz: Hareket Denkleminin Çözümü

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t})_{n\times 1}=\mathbf{\Phi}_{n\times n}\mathbf{q}(\mathbf{t})_{n\times 1}$$

$$\mathbf{M\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{C\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{K\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(t)$$

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{K}}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\overline{\mathbf{F}}(t)$$

Φ doğal mod şekilleri ise ve **C** klasik sönümleme matrisi ise:

$$\begin{bmatrix}\bar{m}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{m}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{m}_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\\ \vdots\\ \ddot{q}_n\end{bmatrix}_{n\times 1}+\begin{bmatrix}\bar{c}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{c}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{c}_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}_{n\times 1}+\begin{bmatrix}\bar{k}_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \bar{k}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{k}_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ \vdots\\ q_n\end{bmatrix}_{n\times 1}=\begin{bmatrix}\bar{f}_1(t)\\ \bar{f}_2(t)\\ \vdots\\ \bar{f}_n(t)\end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Modal Analiz: Hareket Denkleminin Çözümü

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t)+\mathbf{K}\mathbf{x}(t)=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{t})_{n\times 1}=\mathbf{\Phi}_{n\times n}\mathbf{q}(\mathbf{t})_{n\times 1}$$

$$\mathbf{M\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{C\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{K\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{F}(t)$$

$$\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M\Phi}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{C\Phi}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K\Phi}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}(t)$$

$$\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(\mathbf{t})+\overline{\mathbf{K}}\mathbf{q}(\mathbf{t})=\overline{\mathbf{F}}(t)$$

$\mathbf{\Phi}$ kütle-normalize doğal mod şekilleri ise ve $\mathbf{C}$ klasik sönümleme matrisi ise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\xi_2\omega_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 2\xi_n\omega_n \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

Modal Analiz: Hareket Denkleminin Çözümü

$$\begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \bar{m}_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \bar{m}_n \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \vdots \\ \ddot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} c_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & c_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{n\times 1} + \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & k_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(t) \\ \bar{f}_2(t) \\ \vdots \\ \bar{f}_n(t) \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

$$\bar{m}_1\ddot{q}_1(t) + c_{11}\dot{q}_1(t) + k_{11}q_1(t) = \bar{f}_1(t)$$

$$\bar{m}_2\ddot{q}_2(t) + c_{22}\dot{q}_2(t) + k_{22}q_2(t) = \bar{f}_2(t) \quad \Longrightarrow \quad q_i \quad \text{için çözülür}$$

$$\vdots$$

$$\bar{m}_n\ddot{q}_n(t) + c_{nn}\dot{q}_n(t) + k_{nn}q_n(t) = \bar{f}_n(t)$$

$$\boxed{\text{Unutmayalım:} \qquad \mathbf{x(t)}_{n\times 1} = \mathbf{\Phi}_{n\times n}\mathbf{q(t)}_{n\times 1}}$$