

BÖLÜM 10

SONLU KANATLAR İÇİN

LANCHESTER-PRANDTL TAŞIYICI ÇİZGİ TEORİSİ

10.1. Giriş

10.2. Kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı. Uç girdabı. Kaçma girdabı

10.3. Taşıyıcı çizgi modeli

10.3.1. Bir girdapla yer değiştirmiş kanat

10.3.2. Girdap hareketi için Helmholtz teoremleri

10.3.3. Lanchester-Prandtl taşıyıcı çizgi modeli

10.3.4. Biot-Savart kanunu

10.3.5. Akımın aşağı sapması

10.3.6. Akımın aşağı sapmasının sonucu: Girdap sürüklemesi

10.3.7. Kanadın taşıma kuvvetinin ve indüklenmiş sürüklemenin hesaplanması

10.4. Verilmiş yük dağılımı için kanat performansı

10.4.1. Basit simetrik yük dağılımları – Eliptik yük dağılımı

10.4.2. Değiştirilmiş eliptik yük dağılımı

10.4.3. Taşıma için en genel yük dağılımı hali

10.4.4. Genel yük dağılımı halinde kanadın karakteristikleri

10.4.5. Simetrik olmayan yük dağılımı halinde yalpa ve sapma momentleri

10.5. Geometri – Yük dağılımı ilişkisi

10.5.1 Genel teori - İzole kanat için denklem

10.5.2 Tek kanat denkleminin çözümü

10.5.3 Minimum sürüklenme için yük dağılımı, Eliptik üst-görünümlü kanat

10.5.4 Eliptik üst-görünümlü olmayan herhangi bir kanat için uygun yük dağılımı

10.5.5 Açıklık oranının önemi

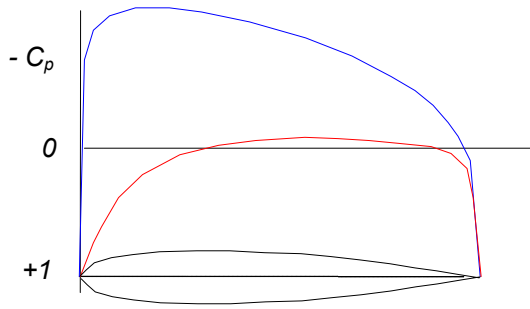
10.1. Giriş:

Kanat profilleri için teorik veya deneysel yöntemlerle elde edilen bilgileri çeşitli yaklaşımlarla birleştirerek sonlu açıklığa sahip gerçek üç-boyutlu bir kanadın aerodinamik karakteristikleri hakkında bilgi sahibi olmak mümkündür. Bu alandaki ilk yaklaşım Lanchester tarafından "taşıyıcı kanatlar için girdap teorisi" ile atılmış, teori daha sonraları Prandtl tarafından geliştirilmiştir.

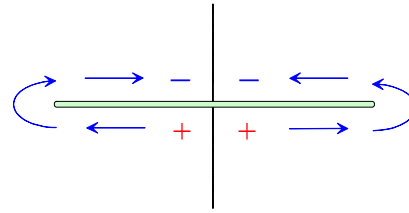
Bu bölümde taşıyıcı çizgi teorisi incelenecek, ancak teoriye ve uygulamalarına geçmeden önce, üç boyutlu bir kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısına değinilecek, çizgisel girdapla ilgili bazı temel bilgilere yer verilecektir.

10.2. Kanat etrafındaki akım. Uç girdabı. Kaçma girdabı:

Bir kanadın üst yüzeyindeki basınç genel olarak serbest akım basıncından düşüktür. Alt yüzeyindeki basınç ise kısmen serbest akım basıncından düşük ve kısmen de büyük olmakla birlikte genel olarak üst yüzeydeki basınçtan büyüktür (Şekil 10.1). Bu nedenle kanadın iki ucunda alt yüzeyden üst yüzeye doğru bir akım kaçması oluşur. Uçlardaki bu akım kaçması, kanadın alt yüzeyinde simetri düzleminde kanat uçlarına doğru, üst yüzeyinde ise kanat uçlarından simetri düzlemine doğru bir ikincil akıma neden olur (Şekil 10.2).

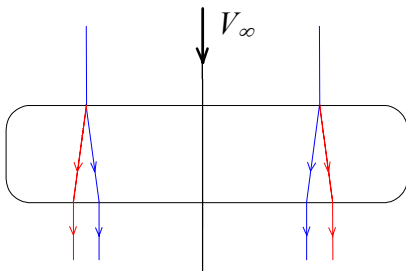


Şekil 10.1: Kanat yüzeyi boyunca basınç dağılımı

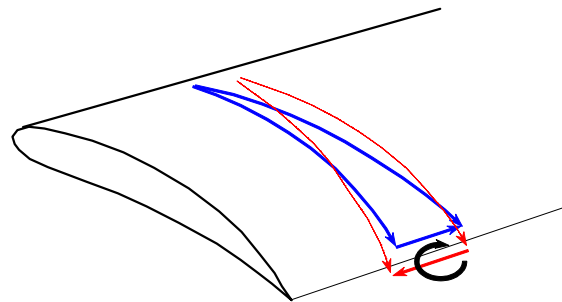


Şekil 10.2: Akım kaçması

Yanal doğrultuda oluşan ikincil akımlar, kanadın üst yüzeyinden geçen akımın simetri düzlemine doğru, alt yüzeyinden geçen akımın ise kanat uçlarına doğru bükülmesine neden olur (Şekil 10.3). Alt ve üst yüzeydeki hızların yanal bileşenlerinin bu şekilde birbirine zıt yönde olması nedeniyle firar kenarında, eksenleri serbest akım doğrultusunda olmak üzere birtakım girdaplar oluşur (Şekil 10.4). Bu girdaplara "kaçma girdabı" adı verilir.

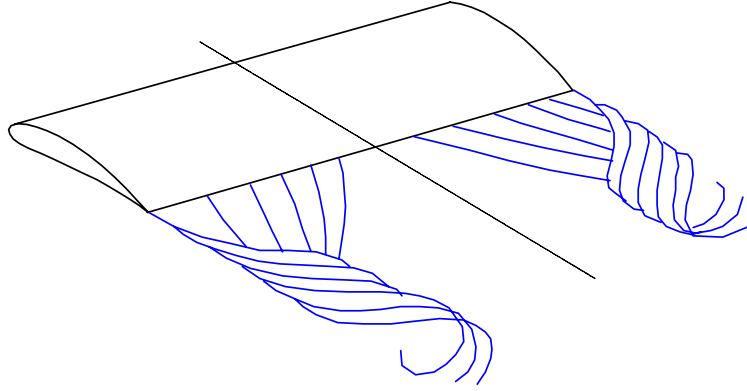


Şekil 10.3: Akımın sapması



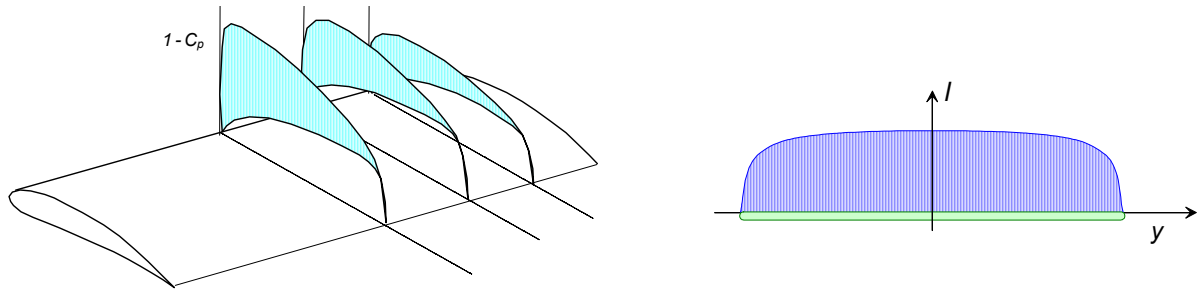
Şekil 10.4: Kaçma girdabı

Açıklık boyunca, yukarıda izah edildiği gibi oluşan çok sayıda kaçma girdabı, kanadın gerisinde belli bir uzaklıktan sonra birleşerek, kanat uçları hizasında geriye doğru uzanan iki büyük girdap oluşturur. Bu girdaplara da "kanat ucu girdabı" adı verilir (Şekil 10.5).



Şekil 10.5: Kanat uç girdapları

Kanat uçlarında alt ve üst yüzeyler arasındaki akım kaçması nedeniyle kanadın özellikle uç taraflarında taşımada önemli kayıplar oluşur. Kayıplar genellikle kanadın simetri düzlemi yakınlarında en alt seviyededir. Sonuç olarak üç-boyutlu bir kanadın açıklığı boyunca değişen bir yük (taşıma) dağılımı söz konusudur (Şekil 10.6).



Şekil 10.6: Kanat açıklığı boyunca yük dağılımı

10.3. Taşıyıcı çizgi modeli

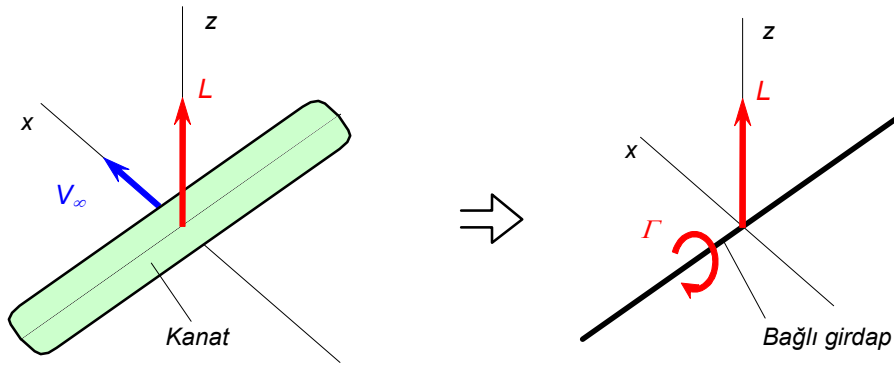
10.3.1. Bir girdapla yer değiştirmiş kanat:

Bir kanat profili etrafındaki akım, bir üniform akımla kanat profilinin varlığından ileri gelen bir bozuntu alanının süperpozisyonu şeklinde düşünülebilir. Bozuntulardan bir kısmı profilin kalınlığı ile ilgiliyken diğer bir kısmı ise profilin taşımalarını oluşturan kamburlukla ve serbest akımın doğrultusu (hücum açısı ile ilgilidir. Bilindiği gibi taşımaya ilgili bozuntu alanı profil etrafındaki bir girdap akımı ile temsil edilebilir.

Bir kanadın açıklığı boyunca taşıma kuvvetinin aynı olduğu farz edilir ve kanat kalınlığının etkisi göz önüne alınmazsa bu kanat yerine uygun şiddette bir çizgisel girdap alınabilir. Bu girdaba "bağlı girdap" adı verilir (Şekil 10.7).

Ancak kanadın bu şekilde sadece sonlu uzunluktaki bir girdap çizgisiyle temsili yeterli ve mümkün değildir. Şöyle ki; girdap çizgisinin merkezindeki basınç serbest akım basıncından küçüktür. Buna göre yukarıdaki gibi bir sistemde hava, çizgisel girdabın iki

ucundan içeri girerek girdap sistemini derhal dağıtacaktır. O halde bu sistemin varlığını koruyabilmesi için ya uçlarının birer katı levha ile kapatılması, ya da girdap sisteminin halka gibi kapalı bir yapıda olması gerekir.



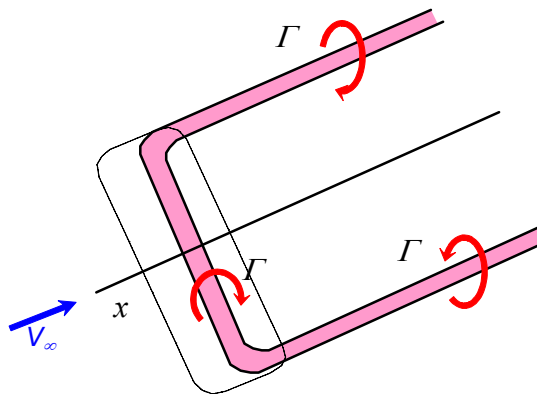
Şekil 10.7: Kanadın bir tek girdap çizgisiyle temsili

Girdap çizgisinin ucunun serbest olamayacağını basit bir deneyle görmek mümkündür. Şöyle ki; sigaradan çıkan halka şeklindeki duman aslında bir girdap sistemi olup, bu halka ince bir kağıtla kesildiğinde sistemin derhal bozularak dağıldığı görülür. Gerçek bir kanadın uçlarında katı levhalar bulunmadığına göre geriye tek seçenek olarak girdap sisteminin bir halka şeklinde kendi içinde kapanması kalmaktadır. Nitekim kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı da bu seçeneği doğrulamaktadır. Yani kanat yerine alınan çizgisel girdap kanat uçlarında akım gerisine doğru kaçma girdapları şeklinde dönerek sonsuza kadar uzanmaktadır. Her iki uçtan çıkan kaçma girdaplarının sonsuzda birleştikleri farz edilmektedir. Bu şekilde oluşan girdap sistemine "atnalı girdabı" adı verilmektedir (Şekil 10.8).

10.3.2. Girdap hareketi için Helmholtz teoremleri:

Girdap hareketinin dört temel teoremi "Helmholtz teoremleri" olarak bilinir.

Helmholtz'un birinci teoremi akışkanın genel hareketiyle ilgilidir ve bu hareketin lineer hız, çevri ve distorsiyon olaylarından bazılarını veya hepsini birden içerebileceğini belirtir.



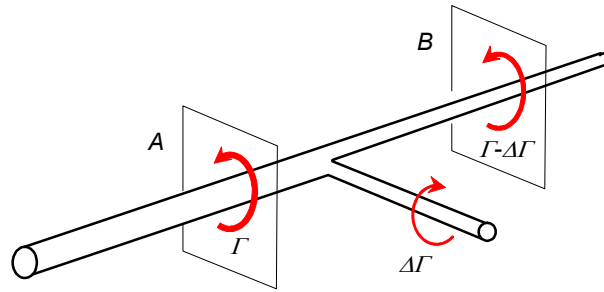
Şekil 10.8: Atnalı girdabı

İkinci teorem; bir girdabın eksenini boyunca şiddetinin sabit olduğunu belirtir. Bu durum, bazen, girdabın "süreklilik denklemi" olarak anılır. Bir girdabın şiddeti etrafındaki sirkülasyonun büyüklüğüne eşit olup, bu da girdabın s dik kesit alanı ile vortisitenin çarpımına eşittir.

$$\Gamma = \zeta \cdot S \quad (10.1)$$

Girdabın şiddeti eksenini boyunca sabit kalacağına göre girdabın kesit alanı azaldığında vortisite artacaktır. Sonsuz şiddette vortisite olamayacağı için girdabın dik kesit alanı hiçbir zaman sıfır olamaz. Diğer bir deyişle girdap akışkanın içinde son bulamaz. Ya kapalı bir halka oluşturmak, ya da bir katı yüzeyi ile son bulmak zorundadır.

İkinci teoremden çıkartılacak bir sonuç da şu şekilde ifade edilebilir: Bir girdabın iki kesitindeki şiddetleri, bu iki kesit arasındaki bir bölgede girdabın dallanması (Şekil 9) veya girdaba bazı girdap filamanlarının katılması haricinde daima birbirine eşittir.



Şekil 10.9: Girdabın dallanması

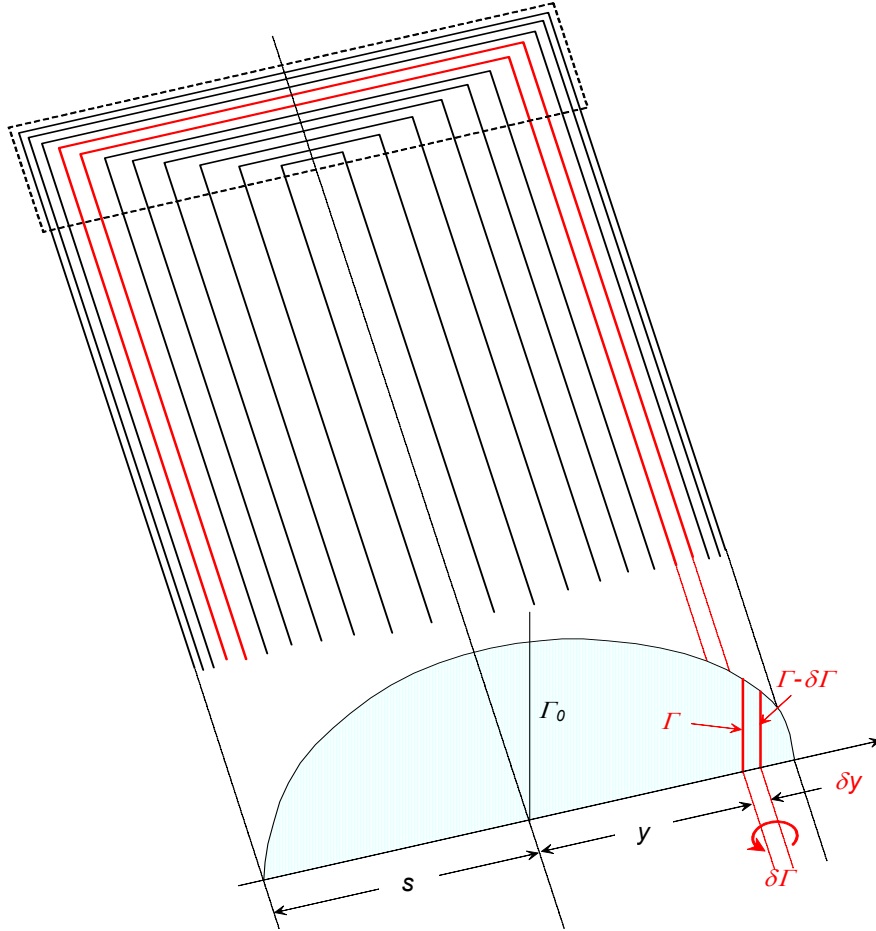
Üçüncü ve dördüncü Helmholtz teoremleri sırasıyla: a) Bir girdap tüpünün daima aynı akışkan zerrelerini ihtiva ettiğini, yani girdap tüpü ile çevresi arasında bir akışkan alışverişi olmadığını, b) akışkan içerisinde hareketi sırasında girdabın şiddetinin daima sabit kaldığını belirtir.

10.3.3. Lanchester-Prandtl taşıyıcı çizgi modeli:

Daha önce de belirtildiği gibi taşıma kuvveti veren bir kanat etrafındaki akımı, üniform akım içerisinde kanat yerine alınan bir girdapla kanat uçlarından akım gerisine doğru sonsuza uzanan iki uç girdabı ile en basit bir şekilde modellemek mümkündür. Ancak Helmholtz'un ikinci teoremi gereğince girdabın şiddeti eksenini boyunca bütün noktalarda aynı kalacağı göz önüne alınır ve ayrıca girdabın şiddeti ile kanat üzerindeki taşıma kuvvetinin ilişkisi hatırlanırsa bu basit modelin geçerli olabilmesi için kanat açıklığı boyunca taşıma dağılımının sabit olması gerektiği ortaya çıkar. Oysa üç boyutlu kanat etrafındaki akımın fiziksel yapısı bunun doğru olmadığını ve açıklık boyunca yük dağılımının değiştiğini göstermektedir. Yükleme kanadın orta kesitinde en büyük değerini almakta iken kanat uçlarına doğru giderek azalmakta, ve tam kanat uçlarında sıfır olmaktadır. Buna göre kanadı temsil eden girdabın şiddetinin de taşıma dağılımıyla orantılı olarak kanat orta kesitinde en büyük değere sahip olması ve kanat uçlarına doğru giderek azalması gerekir. Bu da tabii ki kanadın bir tek girdap yerine açıklığı boyunca uzanan birçok girdap filamanı ile temsil edilmesi suretiyle mümkün olur. Kanat açıklığı boyunca açıklık doğrultusuna dik herhangi bir dik kesit düzlemini kesen girdap filamanlarının şiddetleri toplamı bu kesitte kanat etrafındaki sirkülasyonun şiddetine eşit olacağına göre girdap filamanı sayısının açıklık boyunca kanat uçlarına doğru giderek azalması gerektiği görülür. Buna göre bu modelde Şekil 10.10'da görüldüğü gibi, kanat orta kesitinde, bu kesitteki taşıma ile orantılı sayıda girdap filamanı göz önüne alınacak,

açıklık boyunca gidildikçe bu filamanlardan uygun sayıda bazıları geriye doğru kaçma girdabı şeklinde döneceklerdir. Bu şekilde hem açıklık boyunca her bir dik kesitteki toplan girdap filamanı şiddetinin kanadın o kesitinin etrafındaki sirkülasyon şiddetine eşit olması sağlanacak, hem de Helmholtz teoreminin gereği olan girdapların sürekliliği şartı gerçekleştirilmiş olacaktır.

Şekil 10.10'da dikdörtgen üst-görünümlü bir kanat üzerindeki bağlı girdaplar ve kaçma girdapları görülmektedir. Aynı şekil üzerinde ayrıca açıklık boyunca sirkülasyon şiddetinin dağılımı da belirtilmiştir.



Şekil 10.10: Taşıyıcı çizgi modeli

Şimdi kanat orta kesitinden açıklık boyunca y kadar uzaklıktaki bir kesitteki sirkülasyonun Γ değerinde ve bu kesitten dy kadar dıştaki bir diğer kesitteki sirkülasyonun da $(\Gamma - \delta\Gamma)$ değerinde olduğunu farzedelim. Bu iki kesitin gerisinde sonsuza uzanan kaçma girdabının şiddeti iki kesit etrafındaki sirkülasyonlar arasındaki farka, yani $\delta\Gamma$ değerine eşit olacaktır. Sirkülasyonun açıklık boyunca değişimi $f(y)$ gibi bir fonksiyonla temsil edilirse

$$\delta\Gamma = -\frac{df}{dy}\delta y = -f'(y)\delta y \quad (10.2)$$

bağıntısı yazılabilir. Diğer taraftan birim açıklıktaki bir kanat parçası için taşıma

$$l = \rho V_\infty \Gamma \quad (10.3)$$

şeklindedir. Burada ρ havanın yoğunluğu, V_∞ kanadın ilerleme hızı, ve Γ da ele alınan kanat kesiti etrafındaki sirkülasyondur.

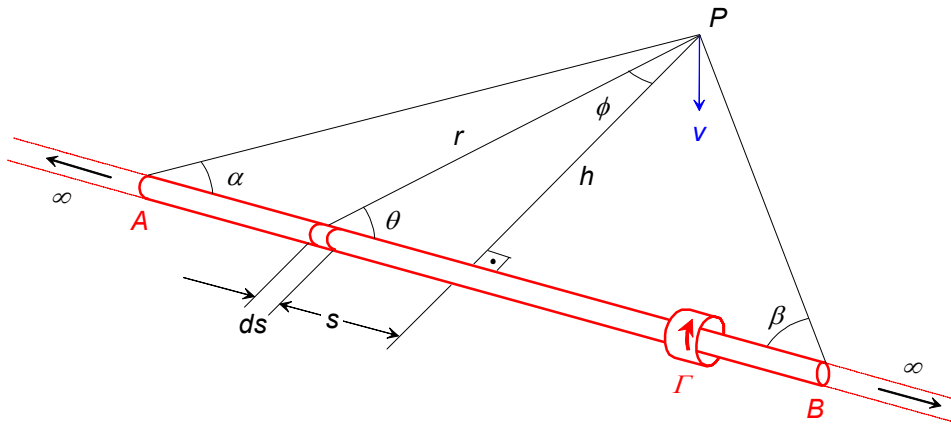
10.3.4. Biot-Savart kanunu:

Girdap hareketiyle ilgili bir diğer önemli kanun da Biot-Savart kanunudur. Bu kanun aslında elektrik akımlarıyla ilgili olup, içinden elektrik akımı geçmekte olan bir iletkenin civarındaki manyetik alanla geçen akımın şiddeti arasındaki ilişkiyi verir. Ancak bu elektriksel olay matematiksel olarak bir girdap tüpünün şiddeti ile girdap tüpü etrafındaki akım hızları arasındaki ilişkiyle özdeştir. Bu nedenle, girdap hareketinde de aynı kanunlardan yararlanmak mümkündür.

Biot-Savart kanunu, Γ şiddetindeki bir çizgisel girdabın ds boyundaki bir kısmının, bundan r kadar uzaklıkta bulunan bir noktada indüklediği $d\vec{v}$ hızı için (Şekil 10.11)

$$\delta \vec{v} = -\frac{\Gamma}{4\pi r^3} \delta \vec{s} \wedge \vec{r} \quad (10.4)$$

bağıntısını verir.



Şekil 10.11: Girdap çizgisinin indüklemesi

Şekil 10.11 'de görüldüğü gibi doğrusal bir girdap çizgisinin A-B aralığındaki bir kısmı ele alınırsa, girdabın bu kısmının bir P noktasında indükleyeceği v akım hızı, girdabı ve P noktasını içine alan düzleme dik olup değeri, (10.4) bağıntısı A-B aralığında integre edilerek

$$v = \int_A^B \frac{\Gamma}{4\pi r^2} \sin \theta \cdot ds \quad (10.5)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu integralin hesabı için

$$\sin \theta = \cos \phi$$

$$r = h / \cos \phi$$

$$s = h \cdot \tan \phi \rightarrow ds = (h / \cos^2 \phi) \cdot d\phi$$

değişken dönüşümleri yapılırsa,

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \int_{\phi_A}^{\phi_B} \cos \phi \cdot d\phi = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\sin \phi_B - \sin \phi_A) \quad (10.6)$$

veya

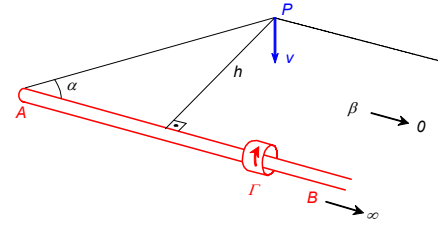
$$\phi_A = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \quad \phi_B = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

olmak üzere

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \beta + \cos \alpha) \quad (10.7)$$

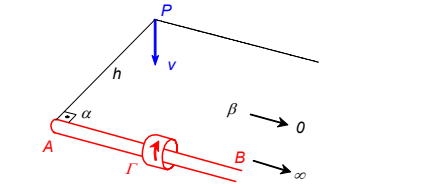
elde edilir.

Cizgisel girdap için bazı özel haller:



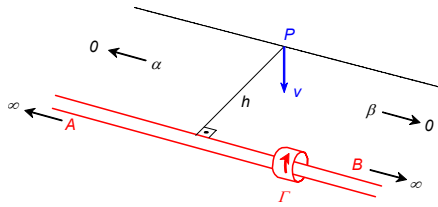
a) Yarı sonsuz girdap çizgisi

$$\alpha < 90^\circ, \beta \rightarrow 0 \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi h} (\cos \alpha + 1) \quad (10.8a)$$



b) Yarı sonsuz girdap çizgisi

$$\alpha = 90^\circ, \beta \rightarrow 0 \quad v = \frac{\Gamma}{4\pi h} \quad (10.8b)$$



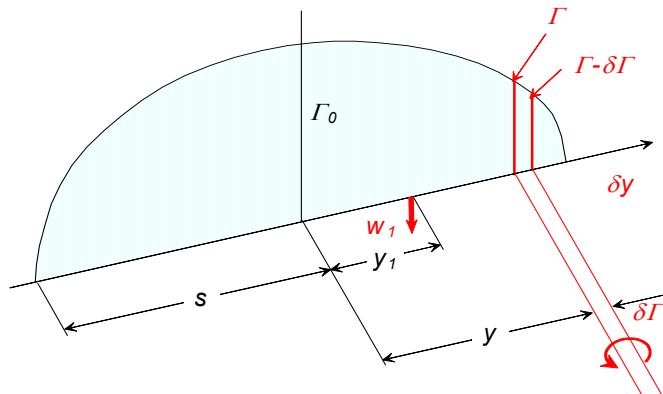
c) Sonsuz uzun girdap çizgisi

$$\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0 \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi h} \quad (10.8c)$$

10.3.5. Akımın aşağı sapması:

Kanadın orta kesitinden y kadar uzaklıktaki bir kesitin gerisinde oluşan $\delta\Gamma$ şiddetindeki kaçma girdabının, yine kanadın orta kesitinden y_1 uzaklığındaki bir başka kesiti üzerindeki etkisi Biot-Savart kanununun sonuçlarından biri olan (10.8b) bağıntısı yardımıyla

$$\delta w_{y_1} = \frac{-f'(y)}{4\pi(y-y_1)} \delta y$$



Şekil 10.12: Kaçma girdabının indüklemesi

şeklinde yazılabilir (Şekil 10.12).

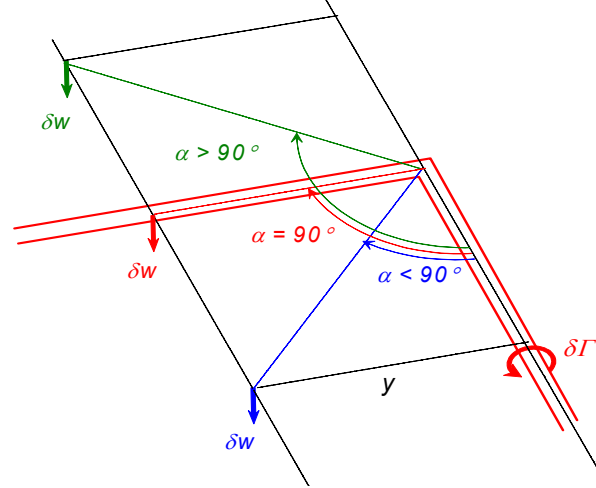
y_1 koordinatı ile belirtilen bu nokta üzerinde kanadın gerisindeki bütün kaçma girdaplarının toplam etkisi ise, son ifade kanat açıklığı boyunca integre edilerek

$$w_{y_1} = \frac{I}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{-f'(y)}{y-y_1} dy = -\frac{I}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma/dy}{y-y_1} dy \quad (10.9)$$

şeklinde elde edilir. w hızı aşağı yönde pozitif kabul edilmektedir.

10.3.6. Akımın aşağı sapmasının sonucu; Girdap sürüklemesi:

Kanadın gerisindeki kaçma girdaplarının yukarıda izah edildiği şekilde indükledikleri hızlar pozitif hücum açılarında ve pozitif kamburluklarda genel olarak aşağı doğru yönelmiş olup, çoğu zaman "aşağı sapma hızı" olarak adlandırılır. Aşağı sapma hızı kanat etrafındaki akım alanında önemli bir etkiye sahip olup şiddeti kanadın önündeki ve arkasındaki akım alanlarında farklı değerlerdedir. Bunu görmek için yine kanat orta kesitinde y uzaklıktaki $\delta\Gamma$ şiddetli kaçma girdabının kanat orta kesiti hizasında serbest akım doğrultusu boyunca çeşitli noktalarda indüklediği hızları incelemek yararlı olur (şekil 10.13).



Şekil 10.13: Kaçma girdabının kanat önünde ve arkasında indüklediği hızlar

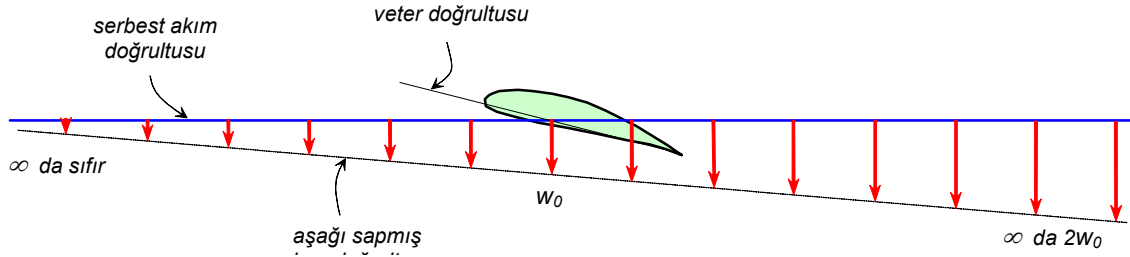
Bu haldeki indüklenmiş hızları (10.8a) bağıntısı yardımıyla:

- Kanadın önünde sonsuzda	$(\alpha = \pi)$	$\delta w = 0$
- Kanadın bulunduğu konumda	$(\alpha = \pi/2)$	$\delta w = \frac{\delta\Gamma}{4\pi y}$
- Kanadın gerisinde sonsuzda	$(\alpha = 0)$	$\delta w = 2 \frac{\delta\Gamma}{4\pi y}$

olur. Görüldüğü gibi kanat gerisindeki kaçma girdaplarının indükledikleri sapma hızları kanadın önünde sonsuzda sıfır iken, kanat gerisinde sonsuzda, kanat konumundaki değerinin iki katıdır. Buna göre kanat önünde ve gerisindeki sapma hızlarının dağılımı Şekil 10.14 'de görüldüğü gibi olacaktır.

Serbest akım hızlarına bu, aşağı sapma hızları ilave edilirse akımın kanat civarındaki genel doğrultusunun değiştiği sonucuna varılır. Serbest akım hızı V_∞ ve aşağı sapma hızları da w olmak üzere akımdaki genel sapma miktarı

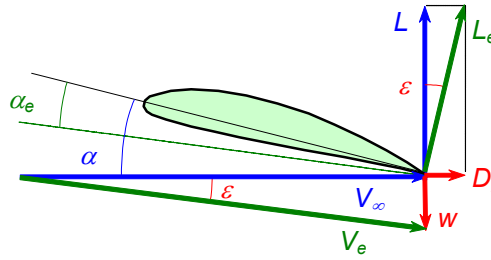
$$\varepsilon = \tan^{-1} \left(\frac{w}{V_\infty} \right) \cong \frac{w}{V_\infty} \quad (10.10)$$



Şekil 10.14: Aşağı sapma hızlarının akım boyunca değişimi

kadar olur.

Aşağı sapma hızının önemli bir sonucu taşıma ve sürüklenme üzerindeki etkisidir. Bir kanada etkiyen taşıma ve sürüklenme kuvvetleri bilindiği gibi sırasıyla serbest akım doğruğultusuna dik ve serbest akım doğruğultusundadır. Ancak aşağı sapma nedeniyle serbest akım doğruğultusunun etkin doğruğultusu değiştiğinden taşıma kuvvetinin etkin doğruğultusu da değişir. Bu durumda Şekil 10.15 'de görüldüğü gibi kanada etkiyen L_e kuvvetinin serbest akım doğruğultusuna dik bileşeni taşıma kuvvetini verirken, serbest akım doğruğultusundaki bileşeni de ilave bir sürüklenme kuvveti verecektir. Bu ilave sürüklenme kuvvetine "kaçma girdabı sürüklenmesi" veya "indüklenmiş sürüklenme" adı verilmektedir.



Şekil 10.15 : Aşağı sapmanın sonucu, indüklenmiş sürüklenme

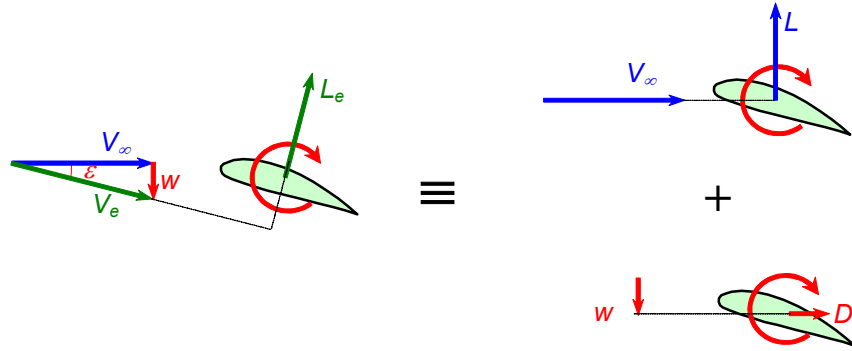
10.3.7. Kanadın taşıma kuvvetinin ve indüklenmiş sürüklenmenin hesaplanması

Joukowski teoremine göre bilindiği gibi, ρ yoğunluğundaki hava içerisinde V_∞ hızıyla düzgün hareket etmekte olan bir silindirik cisim etrafında Γ şiddetinde bir sirkülasyon oluşmuş ise bu cisme serbest akım doğruğultusuna dik doğruğultuda bir taşıma kuvveti etkir ve cismin birim açıklığa sahip bir kısmına etkiyen l taşıma kuvveti

$$l = \rho V_\infty \Gamma \quad (10.11)$$

büyüklüğündedir.

Şimdi, bir kanadın kaçma girdapları etkisiyle etkin hızın V_e olduğu bir dilimi etrafında Γ kadar bir sirkülasyonun oluştuğu varsayalım. Bu kanat dilimi etrafındaki akım alanı, aynı kanat diliminin V_∞ hızındaki bir yatay akıma ve w hızındaki bir düşey akıma maruz kalması hallerindeki akım alanlarının süperpozisyonu şeklinde düşünülürse (Şekil 10.17) Joukowski teoremi gereğince, V_∞ hızındaki akım bu kanat dilimine (10.18) ifadesiyle verilen l kadar bir taşıma kuvveti etkitirken w hızındaki düşey akım da bu hıza dik doğruğultuda



Şekil 10.17: Akımın süperpozisyonu

$$d_i = \rho w \Gamma \quad (10.12)$$

kadar bir sürüklenme kuvveti etkilecektir. Bu iki elemanter kuvvet kanat açıklığı boyunca integre edilerek kanada etkiyen toplam taşıma kuvveti indüklenmiş sürüklenme kuvveti sırasıyla

$$L = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy \quad (10.13)$$

$$D_i = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) dy \quad (10.10)$$

şeklinde hesaplanabilir. İndüklenmiş sürüklenme için bulunan son ifade kanadın gerisinde kaçma girdaplarının oluşmaması halinde (ki bu durumda aşağı sapma hızı, w , sıfır olacaktır) indüklenmiş sürüklenme olmayacağını göstermektedir. İndüklenmiş sürüklemenin bulunmadığı haller ise sonsuz açıklıklı kanat hali (iki-boyutlu hal, kanat profili) veya üç-boyutlu kanatta taşıma kuvvetinin sıfır olduğu haldir.

Sonlu bir kanadın taşıma kuvveti nedeniyle ortaya çıkan kaçma girdaplarının bir sonucu olarak kanadın iki-boyutlu haldeki (sonsuz açıklıklı hal) karakteristiklerinden bir miktar farklılık ortaya çıkar. Bu farklılık açıklık oranı azaldıkça daha da belirginleşir. Sonuç olarak aynı kesit şekline (profil) sahip kanatlardan açıklık oranı daha büyük olanlar daha iyi aerodinamik karakteristiğe sahip sayılırlar.

10.4. Verilmiş yük dağılımı için kanat performansı

10.4.1. Basit Simetrik Yük Dağılımları - Eliptik Yük Dağılımı:

Bir kanadın açıklığı boyunca en basit yük dağılımı "*eliptik yük dağılımı*" dır.

Açıklığı $2s$ ve kanat kökündeki sirkülasyon şiddeti Γ_0 olan üç boyutlu bir kanat için eliptik yük dağılımı, büyük eksen ve küçük eksen de $2\Gamma_0$ uzunluğunda olan bir elipsin denkleminde yararlanılarak

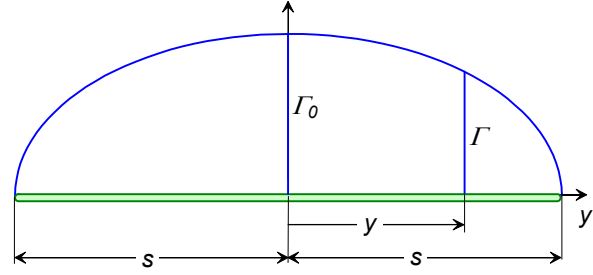
$$\frac{\Gamma^2}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1 \quad \rightarrow \quad \Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{s^2}}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda taşıma

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \rho V_{\infty} \int_{-s}^{+s} \Gamma_0 \sqrt{1 - y^2 / s^2} dy$$

olup, bu kareköklü integralin hesabı için

$$\boxed{y = -s \cos \theta} \quad \rightarrow \quad \boxed{dy = s \sin \theta d\theta}$$



değişken dönüşümü yapılarak

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma_0 s \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad \rightarrow \quad \boxed{L = \rho V_{\infty} \Gamma_0 s \frac{\pi}{2}}$$

elde edilir.

Diğer taraftan aşağı sapma hızları açısıl koordinat sisteminde

$$w_l = -\frac{l}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma / dy}{y - y_l} dy = \frac{l}{4\pi s} \int_0^{\pi} \frac{d\Gamma / d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_l} d\theta$$

şeklinde tanımlanabilir. Eliptik yük dağılımı da açısıl koordinat sisteminde yazılıp

$$\Gamma = \Gamma_0 \sin \theta \quad \rightarrow \quad \frac{d\Gamma}{d\theta} = \Gamma_0 \cos \theta$$

şeklinde türevi alınarak

$$w_l = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_l}$$

bulunur. Buradaki integral G_0 Glauert integrali olup değeri π ye eşittir. Böylece

$$w_l = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} G_0 = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \pi \quad \rightarrow \quad \boxed{w_l = \frac{\Gamma_0}{4s} = sb}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi eliptik yük dağılımı halinde aşağı sapma hızları kanat açıklığı boyunca sabit bir değere sahiptir.

Eliptik yük dağılımı halinde indüklenmiş sürükleme, aşağı sapma hızlarının sabit olması nedeniyle

$$D_i = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) dy = \frac{\Gamma_0}{4s} \frac{l}{V_{\infty}} \rho V_{\infty} \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \frac{\Gamma_0}{4s} \frac{L}{V_{\infty}}$$

şeklinde yazılabilir. Taşıma için bulunan bağıntıdan Γ_0 çekilerek

$$\Gamma_0 = \frac{2L}{\rho V_{\infty} \pi s} \quad \rightarrow \quad D_i = \frac{L^2}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 \pi 4s^2}$$

ve kuvvetler katsayıları cinsinden tanımlanarak

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S C_L \\ D_i &= \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S C_{D_i} \end{aligned} \rightarrow \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S C_{D_i} = \frac{\left(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2\right)^2 S^2 C_L^2}{\left(\frac{1}{2} \rho V_\infty^2\right) \pi 4 s^2} \rightarrow C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi (4 s^2 / S)}$$

bulunur. Burada

$$\frac{4 s^2}{S} = AR$$

açıklık oranı olup, böylece

$$\boxed{C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR}}$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi eliptik yük dağılımı halinde indüklenmiş sürükleme katsayısı taşıma katsayısının karesiyle doğru, açıklık oranı ile ters orantılıdır.

Taşıma olmadığı zaman indüklenmiş sürükleme yoktur. Bunun fiziksel nedeni, taşıma olmadığı zaman kanat alt yüzeyi ile üst yüzeyi arasında bir basınç farkı oluşmadığından ikincil akımlar ve dolayısıyla kaçma girdaplarının oluşmamasıdır.

Açıklık oranı arttıkça indüklenmiş sürükleme katsayısının azaldığı dikkati çekicidir. Açıklık oranı sonsuz olduğu taktirde (ki bunun anlamı kanadın iki-boyutlu bir kanada dönüşmesidir) indüklenmiş sürükleme sıfır olmaktadır.

10.4.2. Değiştirilmiş Eliptik Yük Dağılımı:

Eliptik dağılım çok özel bir yük dağılımı hali olup C_L , w , C_{D_i} için oldukça basit ifadeler vermektedir. Daha genel bir yük dağılımında kanat uçlarında yine sirkülasyon sıfır olacak ve uçuş simetrikse maksimum sirkülasyon yine kanat orta kesitinde elde edilecektir. Kanat karakteristikleri bu iki şartı sağlayan herhangi bir matematiksel dağılımı incelenebilir. Ancak, dikdörtgensel ve hafifçe trapezleştirilmiş bir kanat üzerindeki yük dağılımı eliptik dağılıma oldukça yakındır.. Bu dağılımı temsilen çoğu zaman değiştirilmiş bir eliptik dağılımı eliptik dağılıma benzer tarzda

$$\Gamma = \Gamma_0 \sqrt{1 - (y/s)^2} \cdot [1 + 4\lambda (y/s)^2] \quad (10.19)$$

şeklinde tanımlayarak incelemek uygun olur. Burada λ pozitif veya negatif küçük bir değere sahip olan bir parametredir.

$$y = -s \cos \theta$$

değişken dönüşümü ile

$$\Gamma = \Gamma_0 \sin \theta \cdot (1 + 4\lambda \cos^2 \theta) = \Gamma_0 [(1 + \lambda) \sin \theta + \lambda \sin 3\theta] \quad (10.20)$$

dir. Buna göre aerodinamik karakteristikleri hesaplayalım.

Taşıma Katsayısı:

$$L = \rho V_{\infty} \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \rho V_{\infty} \int_0^{\pi} \Gamma(\theta) s \sin \theta d\theta = \rho V_{\infty} s \int_0^{\pi} \Gamma_0 [(I + \lambda) \sin \theta + \lambda \sin 3\theta] \sin \theta d\theta$$

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma_0 s \left[(I + \lambda) \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta + 4\lambda \int_0^{\pi} \sin 3\theta \cdot \sin \theta d\theta \right]$$

Burada ikinci integral sıfır olup, birinci integralin değeri de $\pi/2$ dir. Böylece

$$L = \rho V_{\infty} \Gamma_0 s (I + \lambda) \pi / 2$$

veya taşıma katsayısı için

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S} \rightarrow \boxed{C_L = \frac{\pi s \Gamma_0}{V_{\infty} S} (I + \lambda)} \quad (10.21)$$

elde edilir.

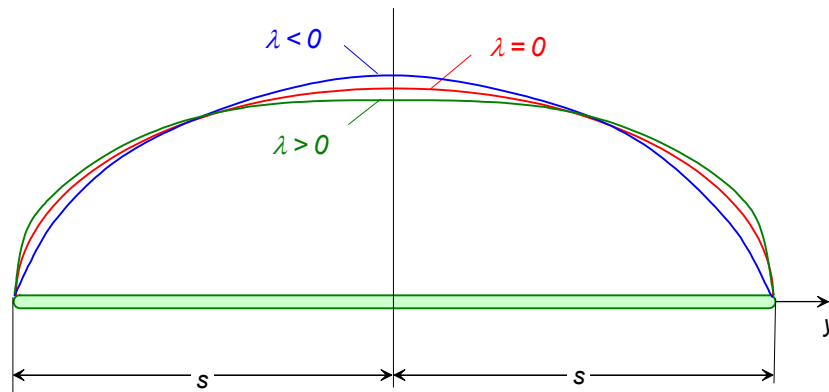
Bu son ifadedeki λ katsayısının etkisini daha iyi görebilmek için eliptik dağılım hali ile bir karşılaştırma yapmak yararlı olur. Bu amaçla aynı taşıma kuvvetini veren bir eliptik dağılımla bir değiştirilmiş eliptik dağılımı ele alalım. Kanat orta kesitindeki sirkülasyon şiddeti eliptik dağılım halinde Γ_E ve değiştirilmiş eliptik dağılım halinde de Γ_{DE} olsun. Her iki haldeki taşıma kuvvetleri eşitlenerek

$$L_E = L_{DE} \rightarrow \rho V_{\infty} \Gamma_E s \pi / 2 = \rho V_{\infty} \Gamma_{DE} s (I + \lambda) \pi / 2$$

yazılabilir. Buradan da

$$\Gamma_{DE} = \frac{\Gamma_E}{I + \lambda} \quad (10.22)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $\lambda > 0$ halinde $\Gamma_{DE} < \Gamma_E$ olup, bu durumda eliptik dağılımdan daha basık bir yük dağılımı söz konusudur. $\lambda < 0$ halinde ise kanat orta kesiti civarında daha fazla değişen bir yük dağılımı elde edilir (Şekil 10.18)



Şekil 10.18: Değiştirilmiş eliptik yük dağılımı

Aşağı Sapma Hızı:

Eliptik haldeki yük dağılımının türevi

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = \Gamma_0 \cdot [(1 + \lambda) \cos \theta + 3\lambda \cos 3\theta] \quad (10.23)$$

olup aşağı sapma hızları için

$$w_{y_1} = -\frac{1}{4\pi} \int_{-s}^{+s} \frac{d\Gamma/dy}{y - y_1} dy \quad \rightarrow \quad w_{\theta_1} = \frac{1}{4\pi s} \int_0^\pi \frac{d\Gamma/d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} d\theta$$

$$w_{\theta_1} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \left[(1 + \lambda) \int_0^\pi \frac{\cos \theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} d\theta + 3\lambda \int_0^\pi \frac{\cos 3\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1} d\theta \right]$$

Glauert integralleri hesaplanarak

$$w_{\theta_1} = \frac{\Gamma_0}{4\pi s} \left[(1 + \lambda)\pi + 3\lambda \frac{\sin 3\theta_1}{\sin \theta_1} \pi \right] \quad (10.25a)$$

veya

$$\frac{\sin 3\theta_1}{\sin \theta_1} = \frac{\sin(2\theta_1 + \theta_1)}{\sin \theta_1} = \frac{\sin 2\theta_1 \cdot \sin \theta_1 + \cos 2\theta_1 \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = 4 \cos^2 \theta_1 - 1$$

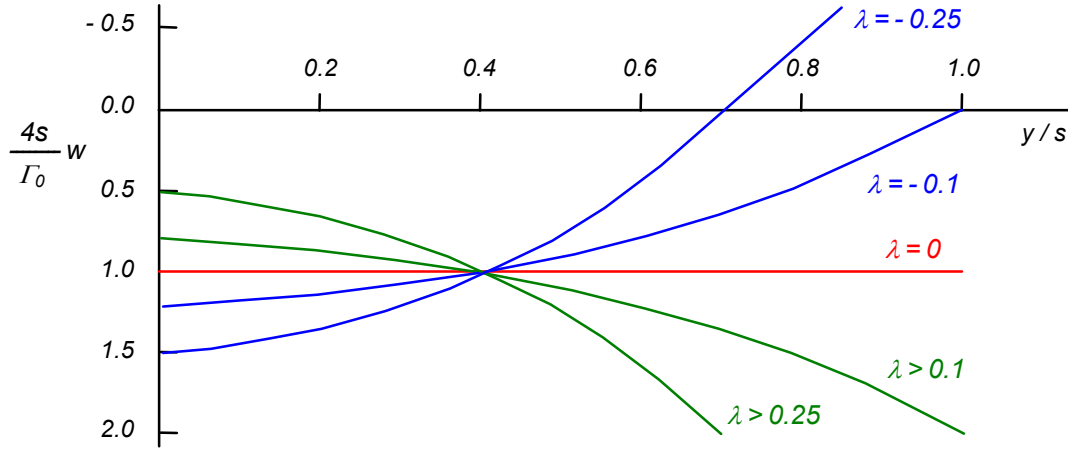
olup, açılma koordinat sisteminde

$$w_{\theta_1} = \frac{\Gamma_0}{4s} [(1 + \lambda) + 3\lambda(4 \cos^2 \theta_1 - 1)] \quad (10.25b)$$

ya da kanat açıklığı boyunca

$$\boxed{w_{y_1} = \frac{\Gamma_0}{4s} [1 - 2\lambda + 12\lambda (y_1/s)^2]} \quad (10.25c)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi eliptik yük dağılımı halinde aşağı sapma hızı açıklık boyunca sabit bir değere sahip iken, değiştirilmiş eliptik yük dağılımı halindeki sapma hızı açıklık boyunca değişmektedir (Şekil 10.19). Hatta $\lambda < 0.1$ halinde bu hız kanat uçlarına doğru negatif değerli, yani yukarı doğru bile olabilmekte, bu da indüklenmiş sürüklenme yerine kanadın hareketi yönünde bir kuvvet vermektedir. Ancak bu halde kanadın orta kesimindeki aşağı sapma hızlarının büyüklüğü kanat ucunda ortaya çıkan bu kazancı fazlasıyla götürmektedir.



Şekil 10.19: Değiştirilmiş eliptik yük dağılımında aşağı sapma hızları

İndüklenmiş Sürüklenme:

$$D_i = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) dy = \rho s \int_0^{\pi} w(\theta) \Gamma(\theta) \sin \theta d\theta$$

olup değiştirilmiş eliptik yük dağılımı ve aşağı sapma hızı için bulunan bağıntılar kullanılarak

$$D_i = \frac{\rho \Gamma_0^2}{4} \int_0^{\pi} [(I + \lambda) + 3\lambda(4 \cos^2 \theta - 1)] \cdot [I + 4\lambda \cos^2 \theta] \sin^2 \theta d\theta$$

ve integral alınarak

$$D_i = \frac{\rho \Gamma_0^2}{8} \pi [I + 2\lambda + 4\lambda^2]$$

elde edilir. Böylece indüklenmiş sürüklenme katsayısı için

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S} = \frac{\pi \Gamma_0^2}{4 V_{\infty}^2 S} [I + 2\lambda + 4\lambda^2]$$

veya taşıma katsayısı için bulunan bağıntıdan Γ_0 değeri çekilerek

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2 S}{4\pi s^2} \frac{I + 2\lambda + 4\lambda^2}{(I + \lambda)^2} = \frac{C_L^2}{\pi(2s)^2 / S} \left[I + \frac{3\lambda^2}{(I + \lambda)^2} \right]$$

ve açıklık oranı tanımı kullanılarak yeni bir düzenleme ile

$$\boxed{C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} [I + \delta]} \quad \delta = 3 \left[\frac{\lambda}{I + \lambda} \right]^2 > 0 \quad (10.26)$$

şeklinde elde edilir.

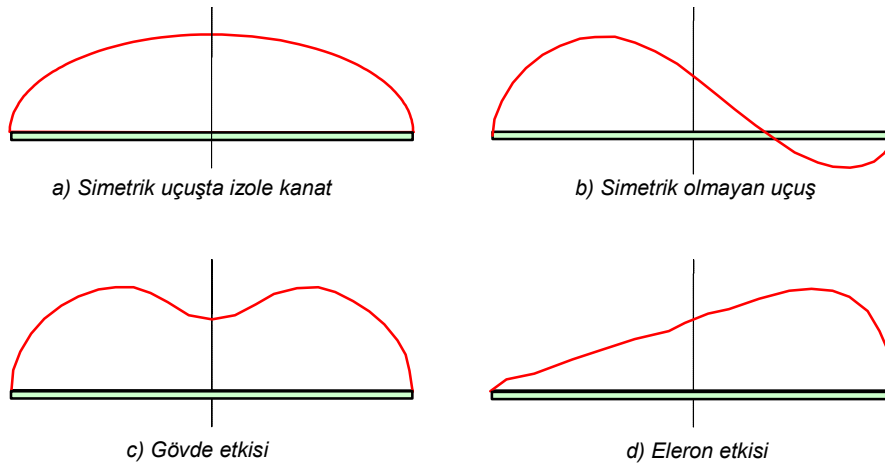
dir. $\lambda = 0$ halinde (10.26a) ifadesi eliptik yük dağılımı haşindeki indüklenmiş sürüklenme katsayısını vermektedir. Buna göre δ büyüklüğü değiştirilmiş eliptik yüklenme halindeki indüklenmiş sürüklenme katsayısının eliptik yüklenme halindeki olan farkını göstermektedir. δ daima pozitif değere sahip olduğuna göre, açıklık oranları ve taşıma katsayıları aynı olan iki kanattan eliptik olmayan yüklemeye sahip olanın indüklenmiş sürüklenmesi eliptik yük dağılımına sahip kanadın indüklenmiş sürüklenmesinden daima daha fazladır. Diğer bir deyişle:

"Aynı açıklık oranı ve aynı taşıma için en küçük indüklenmiş sürüklenme eliptik yük dağılımı halinde elde edilir."

10.4.3 Taşıma İçin En Genel Yük Dağılımı Hali:

Simetrik uçuş ve manevralarda eliptik yük dağılımı ve değiştirilmiş eliptik yük dağılımı çıplak kanat üzerinde (gövde ve benzeri etkiler olmaksızın) yapılan incelemeler için oldukça yeterlidir. Ancak bu yaklaşımlar sadece bu hallerle sınırlı olup simetrik olan veya olmayan daha genel uçuş ve manevra hallerinde daha genel bir dağılım gerekli olur.

Örneğin, simetrik uçuştaki izole kanat için genellikle eliptik dağılıma hayli yakın olan yük dağılımı gövde etkisi ile hayli değişir (Şekil 10.20). Yalpa hareketi gibi simetrik olmayan uçuşlarda, kanatçıkların kullanıldığı hallerde her iki kanat üzerindeki yük dağılımları birbirinden tamamiyle farklı olur. Benzerlikleri sadece kanat uçlarında yüklemenin sıfır olmasından ibaret görülen bütün bu hallerde kullanılacak genel bir formülasyon gereklidir.



Şekil 10.20: Çeşitli yük dağılımları

Bir kanadın herhangi bir kesiti etrafındaki sirkülasyonla bu kesitteki taşıma arasındaki

$$l = \rho V_{\infty} \Gamma$$

bağıntısı ve taşıma ile taşıma katsayısı arasındaki

$$l = C_l \frac{\rho}{2} V_{\infty}^2 c$$

bağıntısı birleştirilerek bu kesitteki sirkülasyonla taşıma katsayısı ve veter uzunluğu arasında

$$\Gamma = \frac{l}{2} C_l V_\infty c$$

şeklinde bir ilişki kurmak mümkündür. Bu son bağıntı, C_l ve c 'nin açıklık boyunca değişimleri

$$m(y) = \frac{l}{8} C_l(y) \cdot \frac{c(y)}{s}$$

şeklinde boyutsuz bir değişkenle ifade edilerek

$$\Gamma = 4sV_\infty m(y)$$

şekline getirilebilir. Bu bağıntıdaki s ve V_∞ büyüklükleri birer sabit olup sirkülasyonun açıklık boyunca değişimi sadece m büyüklüğünden ileri gelmektedir. Kanat açıklığı boyunca uzaklıkları belirten y değişkeni yerine eliptik ve değiştirilmiş eliptik yükleme hallerinde olduğu gibi

$$y = -s \cos \theta$$

değişken dönüşümü dikkate alınarak m büyüklüğü bir Fourier serisiyle ifade edilebilir. Böylece en genel halde kanat açıklığı boyunca yük dağılımı için

$$\Gamma = 4sV_\infty \left[\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos n\theta \right]$$

şeklinde çok genel bir ifadeye erişilebilir.

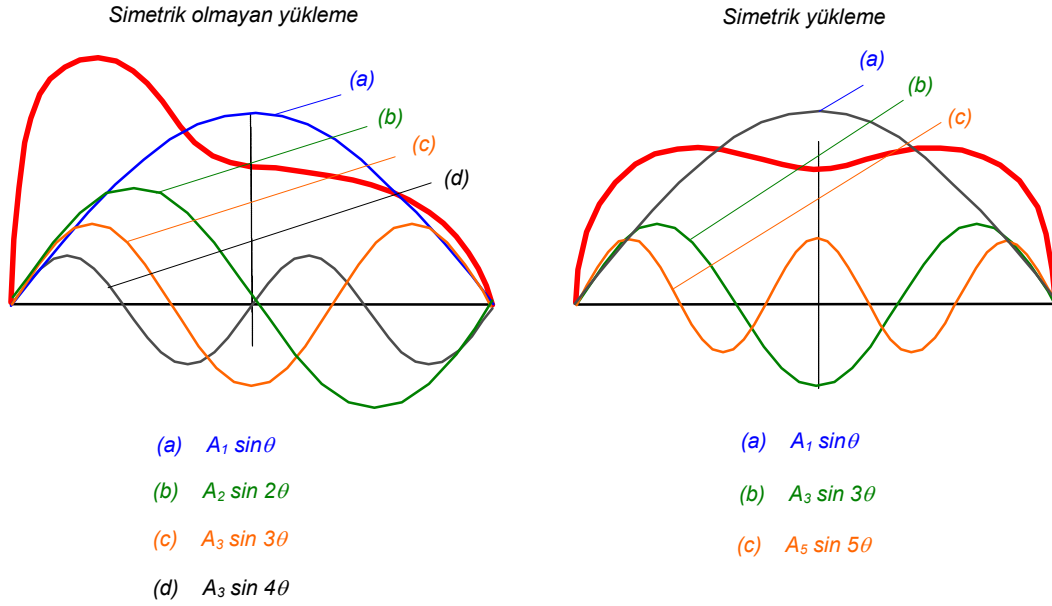
Kanat uçlarında taşımanın ve dolayısıyla sirkülasyonun sıfır olacağı göz önüne alınırsa, $y = \pm s$ ile belirtilen bu noktalar için $\theta = 0, \pi$ olup, bu açılar için de kosinüs fonksiyonunun değeri sıfırdan farklı olduğundan, sıfır taşıma şartının gerçekleşebilmesi için yukarıda önerilen Fourier serisindeki B_n katsayılarının tamamının sıfır olması gerektiği sonucu ortaya çıkar.

$$B_n \equiv 0 \quad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

Buna göre kanat açıklığı boyunca sirkülasyonun dağılımı için önerilecek genel bağıntı

$$\Gamma = 4sU_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta) \quad (10.27)$$

şeklinde olacaktır. Böyle bir bağıntının her türden yük dağılımını temsil edeceği açıktır. Buna örnek olmak üzere Şekil 10.21'de değişik iki yük dağılımı ve bunlara ait seri elemanlarının değişimleri verilmiştir. Örnekteki simetrik yükleme halinde sinüs fonksiyonunun sadece tek sayılı harmoniklerinin bulunması dikkati çekicidir. Bu hususa

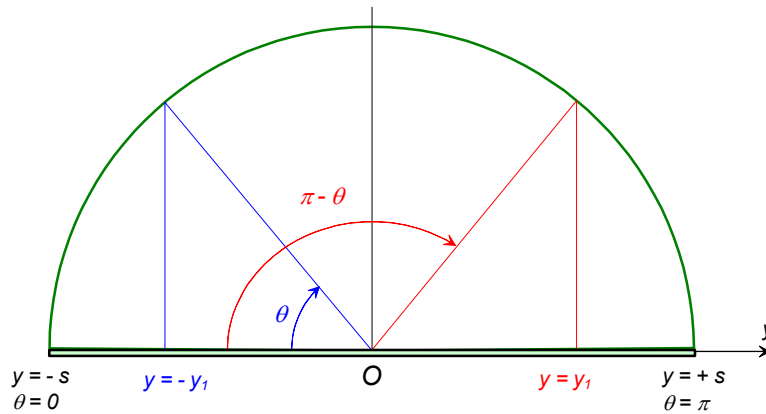


Şekil 10.21: Simetrik ve simetrik olmayan hallerde Fourier serileri

açıklık kazandırmak için simetrik bir yük dağılımı halinde kanat açıklığı boyunca simetrik yerleştirilmiş iki nokta göz önüne alalım (Şekil 10.22). Bu iki noktadaki yüklerin eşitliği için

$$\Gamma(-y_1) = \Gamma(y_1) \quad \rightarrow \quad \Gamma(\theta_1) = \Gamma(\pi - \theta_1)$$

$$4sV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = 4sV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n(\pi - \theta)$$



Şekil 10.22: Simetrik yükleme halinde açıklık boyunca simetrik konumlu iki nokta

veya daha açık bir şekilde yazılırsa

$$A_1 \sin(\theta) + A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta + \dots = A_1 \sin[\pi - \theta] + A_2 \sin[2(\pi - \theta)] + A_3 \sin[3(\pi - \theta)] + \dots$$

eşitliğinin gerçekleşmesi gerekir. Bu da sinüs harmoniklerinin karşılıklı eşit olmasına bağlıdır. Oysa

$$\begin{array}{ll}
\sin \theta = \sin[\pi - \theta] & \sin 2\theta \neq \sin[2(\pi - \theta)] \\
\sin 3\theta = \sin[3(\pi - \theta)] & \sin 4\theta \neq \sin[4(\pi - \theta)] \\
\sin 5\theta = \sin[5(\pi - \theta)] & \sin 6\theta \neq \sin[6(\pi - \theta)] \\
\vdots & \vdots \\
\sin[(2n+1)\theta] = \sin[(2n+1)(\pi - \theta)] & \sin 2n\theta \neq \sin[2n(\pi - \theta)]
\end{array}$$

olup, sözkonusu eşitliğin gerçekleşebilmesi için mutlaka

$$A_2 = A_4 = A_6 = \dots = A_{2n} \equiv 0$$

olması gerekir. Yani simetrik yük dağılımı halinde Fourier serisinde sadece tek indisli katsayılar yer alacak, çift indisli katsayılar ise sıfır olacaktır.

10.4.4. Genel yük dağılımı halinde kanadın karakteristikleri:

Taşıma:

Genel yük dağılımı için tanımlanan Fourier serisi taşıma kuvveti için verilen bağıntıda açısal koordinatlarla kullanılarak

$$L = \rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) dy = \rho V_\infty \int_0^\pi \Gamma(\theta) s \sin \theta d\theta = 4s^2 \rho V_\infty^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \cdot \sin \theta d\theta$$

Buradaki integral ayrıca hesaplanırsa;

$$\int_0^\pi \sin n\theta \cdot \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\theta}{n+1} \right]_0^\pi$$

n parametresinin 1 den farklı bütün değerleri için bu integralin sıfır olduğu kolaylıkla görülmektedir. $n=1$ için ise ikinci terimin değeri yine sıfır olup birinci terimde bir belirsizlik söz konusudur. Bu terimin değeri limit alınarak bulunabilir:

$$\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{\sin(n-1)\theta}{n-1} \right]_0^\pi = \frac{1}{2} \left[\frac{\theta \cos(n-1)\theta}{1} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Bu durumda taşıma için

$$L = 2s^2 \rho V_\infty^2 A_1 \pi \quad (10.28)$$

ve taşıma katsayısı için de

$$C_L = \frac{2L}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 S} = \pi A_1 \frac{4s^2}{S} \rightarrow \boxed{C_L = \pi AR A_1} \quad (10.29)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi taşıma katsayısı Fourier serisinin sadece ilk terimine bağlıdır.

Aşağı Sapma Hızı:

Önerilen genel yük dağılımının türevi

$$\frac{d\Gamma}{d\theta} = 4sV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \cos n\theta$$

olup aşağı sapma hızları için verilen integral bağıntısında kullanılırsa

$$w_{\theta_1} = \frac{V_\infty}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\cos \theta - \cos \theta_1}$$

yazılabilir. Glauert integralleri hesaplanarak

$$w_{\theta_1} = \frac{V_\infty \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta_1}{\sin \theta_1} \quad (10.30)$$

bulunur. İndüklenmiş hız ifadesinde Fourier katsayılarının tamamının bulunması dikkati çekicidir. Yalnız simetrik yük dağılımı nedeniyle çift sayı indisli bütün katsayıların baştan sıfır olduğu hatırdan çıkartılmamalıdır.

İndüklenmiş sürüklenme:

Yük dağılımı için verilen genel ifade ve aşağı sapma hızı için bulunan (10.30) bağıntısı indüklenmiş sürüklenme için verilen integral bağıntısında kullanılarak

$$\begin{aligned} D_i &= \int_0^\pi \rho V_\infty^2 \frac{\sum nA_n \sin n\theta}{\sin \theta} \cdot (4sV_\infty \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta) \cdot s \sin \theta d\theta \\ &= 4s^2 \rho V_\infty^2 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta \right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) d\theta \end{aligned}$$

veya integral içerisindeki iki seri açık şekilde yazılıp, gerekli çarpımlardan sonra yeniden düzenlenerek

$$D_i = 4s^2 \rho V_\infty^2 \int_0^\pi (A_1 \sin \theta + 2A_2 \sin 2\theta + 3A_3 \sin 3\theta + \dots) \cdot (A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta + A_3 \sin 3\theta + \dots) d\theta$$

$$\begin{aligned} D_i &= 4s^2 \rho V_\infty^2 \left\{ \int_0^\pi (A_1^2 \sin^2 \theta + 2A_2^2 \sin^2 2\theta + 3A_3^2 \sin^2 3\theta + \dots) d\theta \right. \\ &\quad + \int_0^\pi (3A_1A_2 \sin \theta \sin 2\theta + 4A_1A_3 \sin \theta \sin 3\theta + \dots) d\theta \\ &\quad + \int_0^\pi (5A_2A_3 \sin 2\theta \sin 3\theta + 6A_2A_4 \sin 2\theta \sin 4\theta + \dots) d\theta \\ &\quad \left. + \dots \right\} \end{aligned}$$

$$D_i = 4s^2 \rho V_\infty^2 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} nA_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+2}^{\infty} (n+m)A_m A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta d\theta \right\}$$

yazılabilir. Bu ifadedeki ikinci seri içindeki integrallerin tamamı sıfırdır. Birinci serideki integraller hesaplanırsa:

$$\int_0^{\pi} \sin^2 n\theta d\theta = \frac{l}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2n\theta) d\theta = \frac{\pi}{2}$$

ve böylece indüklenmiş sürüklenme ve indüklenmiş sürüklenme katsayısı için sırasıyla

$$D_i = 2s^2 \rho V_{\infty}^2 \pi \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2$$

$$C_{D_i} = \frac{D_i}{\frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2 S} = \frac{4s^2}{S} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 = \pi AR \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2$$

elde edilir. Taşıma katsayısı için bulunan (10.29) bağıntısından A_1 katsayısının değeri çekilerek bu son bağıntıda kullanılırsa

$$\boxed{C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)} \quad (10.31)$$

elde edilir. Burada

$$\delta = \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 = 2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 + 3 \left(\frac{A_3}{A_1} \right)^2 + 4 \left(\frac{A_4}{A_1} \right)^2 + \dots \geq 0$$

olup, dikkat edilirse indüklenmiş sürüklenme katsayısının en küçük değeri $\delta = 0$ olması halinde elde edilmektedir.

Yük dağılımının simetrik olması halinde, taşıma katsayısı, aşağı sapma hızı ve indüklenmiş sürüklenme katsayısı için elde edilen ifadelerdeki çift indisli katsayıların tamamının sıfır olacağı hatırlanmalıdır.

10.4.5. Simetrik olmayan yük dağılımı halinde yalpa ve sapma momentleri

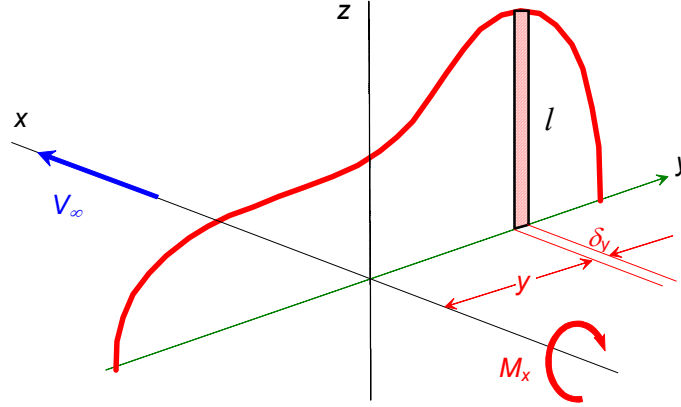
Kanat üzerinde yük dağılımının simetrik olmadığı hallerde kanadın bir tarafındaki taşıma diğer tarafındakinden büyük olur ve uçağın boylamasına eksenini etrafında bir *yalpa momenti* oluşur. Bunun yanında, açıklık boyunca indüklenmiş sürüklenme de simetrik dağılmadığından kanadın bir yarısının sürüklenmesi diğer yarısından büyük olur, ve bu da uçağın düşey eksenini etrafında bir *sapma momenti* oluşmasına yol açar.

Yalpa Momenti:

Simetrik olmayan yük dağılımı halinde kanadın bir yarısındaki taşıma kuvveti diğer yarısındakinden farklı olduğundan uçağın boylamasına eksenini etrafında bir yalpa momenti oluşur. Kanadın simetri ekseninden y kadar uzaklıkta δy genişliğindeki bir kısmına etkiyen taşıma kuvvetine l denilirse (Şekil 10.23) bu kuvvetin kanadın simetri eksenini etrafında oluşturacağı yalpa momenti için

$$\delta M_x = -l y \delta y$$

yazılabilir. Burada yalpa momenti için pozitif yön, uçağın sağ kanadını aşağı yönde döndürecek şekilde tanımlanmıştır.



Şekil 10.23: Yalpa momentinin oluşumu

Taşıma kuvvetinin $l = \rho V_\infty \Gamma$ şeklinde kesit etrafındaki sirkülasyon şiddetine bağlı olduğu hatırlanarak bu ifade kanat açıklığı boyunca integre edilirse

$$M_x = -\rho V_\infty \int_{-s}^{+s} \Gamma(y) y dy$$

bulunur. Daha önce de uygulanan açısal değişken dönüşü yapılır ve sirkülasyon dağılımı için verilen genel ifade kullanılırsa

$$M_x = 4\rho V_\infty^2 s^3 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) \cos \theta \sin \theta d\theta$$

veya düzenlenerek

$$M_x = 2\rho V_\infty^2 s^3 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin 2\theta d\theta$$

elde edilir. Bu ifadedeki integral hesaplanırsa

$$\int_0^\pi \sin n\theta \sin 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n-2)\theta - \cos(n+2)\theta] d\theta = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-2)\theta}{n-2} - \frac{\sin(n+2)\theta}{n+2} \right] = \frac{\pi}{2}$$

Bu integralin $n=2$ dışındaki bütün terimlerinin sıfır olduğunu hatırlatmakta yarar vardır. Sonuç olarak yalpa momenti ifadesi

$$M_x = \rho V_\infty^2 s^3 A_2 \pi$$

şekline gelir. Yalpa momenti katsayısı ise

$$C_{M_x} = \frac{M_x}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S \bar{c}} = \frac{2s^3}{S \bar{c}} \pi A_2 = \frac{4s^2}{S} \frac{2s}{\bar{c}} \frac{\pi}{4} A_2 \quad \rightarrow \quad \boxed{C_{M_x} = \frac{\pi}{4} (AR)^2 A_2} \quad (10.32)$$

şeklinde elde edilir.

Sapma Momenti:

Simetrik olmayan yük dağılımı halinde indüklenmiş hız ve indüklenmiş sürüklemenin açıklık boyunca dağılımı da simetrik olmadığından uçağın düşey eksenini etrafında bir sapma momenti oluşur. Kanat simetri ekseninden y uzaklıkta δy genişliğindeki bir kanat dilimine etkiyen d_i indüklenmiş sürüklenme kuvvetinin düşey eksen etrafında oluşturduğu moment, pozitif yön uçağın burnunu sağa döndüren moment yönü olmak üzere

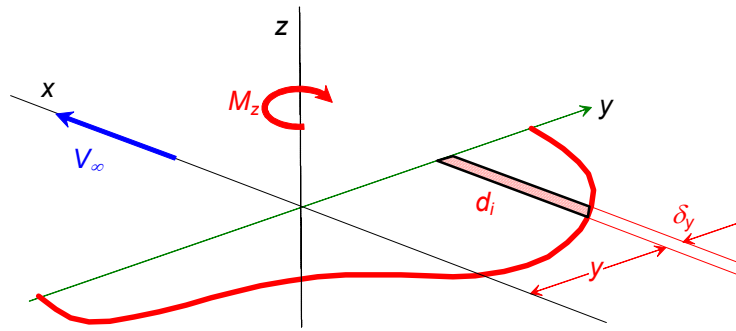
$$\delta M_z = d_i y \delta y$$

şeklinde yazılabilir. İndüklenmiş sürüklemenin kesit etrafındaki sirkülasyona $d_i = \rho w \Gamma$ şeklinde bağlı olduğu hatırlanarak bu ifade kanat açıklığı boyunca integre edilirse

$$M_z = \rho \int_{-s}^{+s} w(y) \Gamma(y) y dy$$

bulunur. Açısal koordinatlara geçerek ve w ile Γ 'nin bilinen değerleri kullanılarak bu ifade

$$M_z = -4\rho V_\infty^2 s^3 \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin m\theta \right) \cos \theta d\theta$$



Şekil 10.24: Sapma momentinin oluşumu

şekline veya integral içindeki seriler açılıp çarpımlarla gerekli düzenlemeler yapılarak

$$M_z = 4\rho V_\infty^2 s^3 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2 \int_0^\pi \sin^2 n\theta \cos \theta d\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n+1}^{\infty} (n+m) A_m A_n \int_0^\pi \sin n\theta \sin m\theta \cos \theta d\theta \right\}$$

şekline getirilebilir. Bu ifadedeki integraller ayrı ayrı hesaplanırsa:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2 n\theta \cos \theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2n\theta) \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2n\theta \cos \theta d\theta \\ &= 0 - \frac{1}{4} \int_0^\pi [\cos(2n-1)\theta + \cos(2n+1)\theta] d\theta = -\frac{1}{4} \left[\frac{\sin(2n-1)\theta}{2n-1} + \frac{\sin(2n+1)\theta}{n+1} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin n\theta \sin m\theta \cos \theta d\theta &= \int_0^{\pi} \frac{\cos(m-n)\theta - \cos(m+n)\theta}{2} \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \frac{\cos(m-n)\theta \cos \theta - \cos(m+n)\theta \cos \theta}{2} d\theta \\
&= \int_0^{\pi} \left[\frac{\cos(m-n-1)\theta + \cos(m-n+1)\theta}{4} - \frac{\cos(m+n-1)\theta + \cos(m+n+1)\theta}{4} \right] d\theta \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{\sin(m-n-1)\theta}{m-n-1} - \frac{\sin(m-n+1)\theta}{m-n+1} - \frac{\sin(m+n-1)\theta}{m+n-1} - \frac{\sin(m+n+1)\theta}{m+n+1} \right]_0^{\pi}
\end{aligned}$$

Bu integraller sadece $m = n+1$ için $\pi/4$ sonucunu verir, bunun dışındaki bütün terimler sıfırdır. Böylece sapma momenti ifadesi

$$M_z = \rho V_{\infty}^2 s^3 \pi \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) A_n A_{n+1}$$

şekline gelir. Sapma momenti katsayısı da

$$C_{M_z} = \frac{\pi}{4} (AR)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) A_n A_{n+1} \quad (10.33)$$

şeklinde elde edilir.

10.5. Geometri – yük dağılımı ilişkisi:

Uçak üretimine yönelik dizayn çalışmalarında önemli aşamalardan birini ön proje hesapları teşkil eder. Bu çalışmalarda, uzun ve pahalı deneysel incelemelere geçmeden önce uçak için ve özellikle kanat için önerilen birtakım geometrik şekillerin aerodinamik performans üzerindeki etkileri incelenerek en iyi "ilk çözüm" aranır.

Verilen bir kanat şeklinden elde edilecek aerodinamik karakteristiklerin hesaplanmasına yönelik incelemelere kanat için "direkt problem" de denilmektedir. Bu incelemelerin amacı kanat üst-görünümü ile kesit (profil) karakteristiklerini kullanarak kanadın aerodinamik karakteristikleri için önceki bölümlerde çıkartılmış bulunan ifadelerdeki katsayıların elde edilmesinden ibarettir.

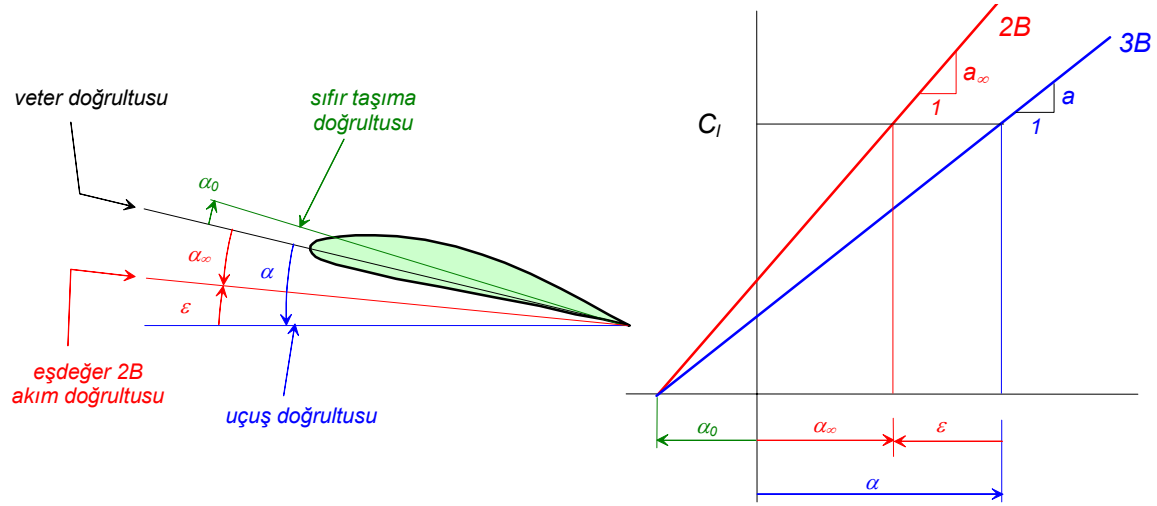
10.5.1. Genel teori - İzole kanat için denklem:

İncelemeye kanat simetri düzleminden y uzaklığında yer alan bir kesitteki taşıma üzerinde uç etkilerini inceleyerek başlayalım.

Bir kanat profilinin küçük hücum açılarındaki taşıma kuvvetinin hücum açısı ile lineer olarak değiştiğini kabul edebiliriz. Buna göre, sıfır taşıma hücum açısı α_0 ve taşıma katsayısı-hücum açısı eğrisi eğimi a_{∞} olan bir kanat profilinin herhangi bir küçük α_{∞} hücum açısındaki C_L taşıma katsayısı için

$$C_L = \frac{dC_L}{d\alpha_{\infty}} (\alpha_{\infty} - \alpha_0) = a_{\infty} (\alpha_{\infty} - \alpha_0)$$

yazılabilir (Şekil 10.25).



Şekil 10.25: Kanadın 2 ve 3-boyutlu karakteristikleri arasındaki ilişki

Aynı kesit profiline sahip üç-boyutlu kanadın sıfır taşıma hücum açısı da yine α_0 'dır. Ancak kanat orta kesitinden y uzaklığında yer alan kesitin taşıma katsayısı-hücum açısı eğrisi eğimi, uç etkileri nedeniyle a_∞ 'dan daha küçük bir " a " değerine sahip olacaktır. Sözü edilen bu kesitin iki boyutlu haldeki C_L katsayısını verebilmesi için hücum açısının daha büyük bir değere sahip olması gerekir. Bu taktirde bu kesitin üç boyutlu haldeki hücum açısı için

$$\alpha = \alpha_\infty + \varepsilon$$

yazılarak taşıma katsayısı için yukarıda verilen bağıntı

$$C_L = a_\infty (\alpha - \varepsilon - \alpha_0)$$

şekline getirilebilir. Ayrıca, ele alınan kanat kesitinin taşıma katsayısıyla etrafında oluşan sirkülasyon arasında

$$l = C_L \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 c = \rho V_\infty \Gamma \quad \rightarrow \quad C_L = \frac{2\Gamma}{V_\infty c}$$

şeklinde bir ilişki olup bu ifade bir önceki bağıntıyla karşılaştırılarak

$$\frac{2\Gamma}{V_\infty c} = a_\infty (\alpha - \varepsilon - \alpha_0) \quad \rightarrow \quad \frac{2\Gamma}{a_\infty c} = V_\infty (\alpha - \alpha_0) - V_\infty \varepsilon$$

ya da aşağı sapma hızı için $w = V_\infty \varepsilon$ olduğu hatırlanarak

$$\frac{2\Gamma(y)}{a_\infty c} = V_\infty (\alpha - \alpha_0) - w(y)$$

bulunur. Bu denklemde Γ yerine Fourier serisi şeklinde verilen genel dağılım alınır ve ayrıca genel dağılımın aşağı sapma hızları için verdiği (10.30) bağıntısı kullanılırsa

$$\frac{2}{a_\infty c} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta = V_\infty (\alpha - \alpha_0) - \frac{V_\infty \sum n A_n \sin n\theta}{\sin \theta}$$

veya bu eşitlik düzenlenerek

$$\mu(\alpha - \alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n\mu}{\sin \theta} \right) A_n \sin n\theta \quad (10.34)$$

elde edilir. Bu son ifadede geçen μ değişkeni

$$\mu = \frac{c(y) \cdot a_{\infty}(y)}{\delta s} \quad (10.35)$$

şeklinde tanımlanmakta olup, dikkat edilirse kanadın üst-görünüm geometrisine ve kesitin (profil) aerodinamik karakteristiklerine bağlı bir parametredir. A_n katsayıları ise açıklık boyunca yük dağılımı ile ilgili parametrelerdir. Yani bu ifade kanat geometrisiyle yük dağılımı arasındaki ilişkiyi veren bir denklemdir. Bu denklemin, verilen bir $\mu(y)$, $\alpha(y)$ dağılımı için A_n katsayıları elde edilecek şekilde çözülmesi istenir. Ancak, bu çözümün analitik yöntemlerle yapılması genellikle mümkün olmayıp nümerik yöntemlerle gerçekleştirilmektedir.

10.5.2. Tek kanat denkleminin çözümü:

Serbest akımda yer alan izole bir kanat için kanat üst-görünüm geometrisi ve kesit aerodinamik karakteristikleri ile yük dağılımı arasındaki ilişkiyi veren (10.34) denkleminin çözüm tekniğini izah için kanat açıklığı boyunca özel bir istasyonu ele alarak detaylı bir inceleme yapmak yararlı olacaktır. Bu amaçla örnek olarak kanat yarı açıklığının orta noktası olan

$$y = -0.5s \quad \rightarrow \quad \theta = \pi / 3$$

istasyonunu alalım. Ele alınan kesitte μ 'nün değeri μ_1 ve sıfır taşıma hattından itibaren ölçülmüş hücum açısı da $(\alpha - \alpha_0)$ ile gösterilirse (10.34) denklemini

$$\mu_1(\alpha_1 - \alpha_0) = \left(1 + \frac{\mu_1}{\sin \theta} \right) A_1 \sin \theta + \left(1 + \frac{2\mu_1}{\sin \theta} \right) A_2 \sin 2\theta + \left(1 + \frac{3\mu_1}{\sin \theta} \right) A_3 \sin 3\theta + \dots$$

şekline gelir. Bu son eşitlik A_1, A_2, A_3, \dots bilinmeyenleri için yazılmış bir denklemdir.

Şüphesiz bir tek denklemlerle bütün bilinmeyenlerin çözülmesi mümkün değildir. Bu bakımdan açıklık boyunca farklı istasyonlar seçilerek benzeri başka denklemler elde edilebilir. Tabii, seçilen her bir kesitte μ , α ve α_0 'ın değerleri farklı olabilir. Çözümün yapılabilmesi için yazılan denklemlerin sayısının bilinmeyen sayısına eşit olması gerekir. Yani, örneğin, Fourier serisinin sadece ilk dört terimi kullanılacaksa, kanat açıklığı boyunca dört farklı istasyon seçilerek dört denklem yazılması gerekir. Yalnız, kanat uç noktalarında taşıma olmadığından buralarda yazılacak denklemlerin çözüme bir katkısı olmayacaktır.

Simetrik yük dağılımı halinde genellikle dört katsayı yeterli olur. Yani, bu halde Fourier serisinin sadece tek indisli katsayıların kullanılacağı da düşünülürse, A_1, A_3, A_5, A_7 katsayılarının hesaplanması yeterli sayılabilir. Gerekli taktirde başka katsayılar da ilave edilebilir. Ayrıca simetri nedeniyle denklemlerin kanadın sadece bir yarısında (yani, $0 \div \pi/2$ aralığında) yazılması yeterli olur.

Şayet açıklık boyunca yük dağılımı yeterince düzenli değilse serinin daha çok sayıda terimini almak gerekir. Ancak bu durumda çok sayıda bilinmeyi bulan bir lineer denklem takımı ortaya çıkar ki çözümü ancak bilgisayar yardımıyla yapılır.

(10.34) denkleminde kanadın profil karakteristikleri μ parametresi içerisinde ve ayrıca sıfır taşıma hattına göre tanımlanan $(\alpha - \alpha_0)$ hücum açısı şeklinde yer almaktadır. (10.35) bağıntısından görüldüğü gibi μ parametresi kanadın açıklığı boyunca veter uzunluğunun değişimine ve ayrıca kesit profilinin 2-boyutlu taşıma-hücum açısı eğrisi eğiminin değişimine bağlı olarak açıklık boyunca değişebilen bir büyüklüktür. α lokal geometrik hücum açısı olup, kanatta açıklık boyunca bir burulma varsa değeri değişebilir. Sıfır taşıma hücum açısı α_0 'da yine profil şekline bağlı olup, şayet açıklık boyunca kullanılan profil şekli değişiyorsa bu büyüklük de değişebilir.

10.5.3. Minimum Sürüklenme İçin Yük Dağılımı, Eliptik Planformlu Kanat

En genel yük dağılımı halinde sürüklenme katsayısı için

$$C_{D_i} = \frac{C_L^2}{\pi AR} (1 + \delta)$$

şeklinde bir ifade bulunmuş ve bu ifadede geçen δ parametresi daima pozitif değerlere sahip olduğu için minimum sürüklenmenin $\delta = 0$ halinde elde edileceği belirtilmişti. Ayrıca δ 'nın

$$\delta = 2 \frac{A_2^2}{A_1^2} + 3 \frac{A_3^2}{A_1^2} + 4 \frac{A_4^2}{A_1^2} + \dots$$

şeklindeki tanımından görüldüğü gibi bütün terimleri pozitif değerlere sahip olduğu için $\delta = 0$ olması için

$$A_2 = A_3 = A_4 = \dots \equiv 0$$

olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. O halde minimum sürüklemeyi veren sirkülasyon dağılımı

$$\Gamma = 4sV_\infty A_1 \sin \theta = 4sV_\infty A_1 \sqrt{1 - (y/s)^2}$$

şeklinde bilinen eliptik yük dağılımı olacaktır. Eliptik yük dağılımı halinde ise, tek kanat üzerinde genel yük dağılımı için elde edilen (10.34) denkleminde

$$\mu(\alpha - \alpha_0) = \left(1 + \frac{\mu}{\sin \theta}\right) A_1 \sin \theta \quad \rightarrow \quad \boxed{A_1 = \frac{\mu}{\sin \theta + \mu} (\alpha - \alpha_0)} \quad (10.36)$$

bulunur.

Şimdi, eliptik yükleme veren ve dolayısıyla sürüklenmesi minimum olan, bir kanat göz önüne alalım. Eliptik yükleme halinde aşağı sapma hızları sabit olduğundan eşdeğer hücum açıları açıklık boyunca aynı olacaktır.

$$\alpha_e = \alpha - \alpha_0 - \frac{w}{V_\infty} = Sb$$

Şayet kanat burulmasız ve açıklığı boyunca aynı kesit profiline sahip ise kesit taşıma katsayıları da açıklık boyunca aynı kalacaktır.

$$l = \rho V_\infty \Gamma = C_l \rho V_\infty^2 c = Sb \quad (10.37)$$

Sirkülasyon dağılımının eliptik olduğu unutulmamak kaydıyla buradan veter uzunluğu için

$$c = \frac{2\Gamma}{C_l V_\infty} \rightarrow \boxed{c = c_0 \sin \theta}, \quad \boxed{c_0 = \frac{2\Gamma_0}{C_l V_\infty}} \quad (10.38)$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi eliptik yük dağılımı veren burulmasız ve bütün kesit profilleri aynı olan kanadın veter boyunun açıklık boyunca dağılımı da (üst-görünüm) eliptik olmaktadır

10.5.4. Eliptik Planformlu Olmayan Herhangi Bir Kanat İçin Uygun Yük Dağılımı:

Kesit taşıması için verilen (10.37) bağıntısından sirkülasyon

$$\Gamma = C_l \frac{U_\infty}{2} c$$

şeklinde çekilip, ayrıca taşıma katsayısı hücum açısına

$$C_l = a_\infty [(\alpha - \alpha_0) - \varepsilon]$$

şeklinde bağlanırsa sirkülasyon için

$$\Gamma \propto a_\infty c [(\alpha - \alpha_0) - \varepsilon] \quad (10.39)$$

elde edilir. Bu bağıntıya göre sirkülasyon kanadın ele alınan kesitinin veter uzunluğu dışında kesit profilinin 2-boyutlu taşıma-hücum açısı eğrisi eğimine, sıfır taşıma hattından itibaren ölçülmüş hücum açısına ve aşağı sapma açısına bağlıdır. Üst-görünümü eliptik olmayan bir kanat için bu parametreler uygun şekilde seçilerek eliptik olmasa bile eliptik dağılıma çok yakın bir yük dağılımı elde etmek mümkün olur. Bu amaçla genellikle iki uygulamadan biri veya her ikisi birlikte gerçekleştirilir. Kanat açıklığı boyunca pervanelerdekine benzer şekilde, fakat daha az miktarda burularak kanadın hücum açısı açıklık boyunca geometrik olarak değiştirilir. Buna "*kanadın geometrik burulması*" denilir. Bazen buna ilave olarak açıklık boyunca kesit profili değiştirilerek 2- boyutlu taşıma eğrisi eğimi ve sıfır taşıma hücum açısı ayarlanır ki bu uygulamaya da çoğu zaman "*kanadın aerodinamik burulması*" adı verilmektedir.

10.5.5. Açıklık Oranının Önemi:

Eliptik üst-görünüm için yazılan (10.39) bağıntısı μ parametresi için verilen (10.35) bağıntısında kullanılarak

$$\mu = \frac{c_0 \sin \theta a_\infty}{\delta_S} \rightarrow \mu = \mu_0 \sin \theta, \quad \mu_0 = \frac{c_0 a_\infty}{\delta_S}$$

ve bu da (10.36) bağıntısında kullanılarak

$$A_l = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} (\alpha - \alpha_0)$$

elde edilir. Eliptik yük dağılımı halinde kanadın taşıma katsayısının

$$C_L = \pi AR A_l$$

şeklinde olduğu hatırlanır ve ayrıca aynı taşıma katsayısı 3-boyutlu taşıma eğrisi eğimi cinsinden

$$C_L = a(\alpha - \alpha_0), \quad a = \frac{dC_L}{d\alpha}$$

şeklinde tanımlanırsa bu üç bağıntıdan

$$\frac{C_L}{\alpha - \alpha_0} = a = \pi AR \frac{\mu_0}{1 + \mu_0}$$

yazılabilir. Diğer taraftan eliptik üst-görünüm halinde kanadın açıklık oranı ile kök veter uzunluğu arasında

$$AR = \frac{\delta s}{c_0 \pi}$$

şeklinde bir ilişki kurmak mümkündür (Bkz. Ek 10-1). Bu bağıntı μ_0 parametresinin tanımında kullanılarak

$$\mu_0 = \frac{c_0 a_\infty}{\delta s} = \frac{a_\infty}{\pi AR}$$

ve bu da en son eşitlikte kullanılarak

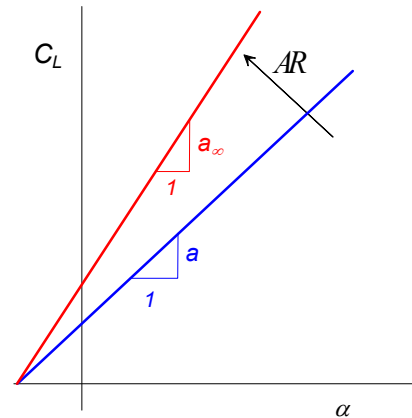
$$a = \frac{a_\infty}{1 + \frac{a_\infty}{\pi AR}}$$

(10.40)

elde edilir.

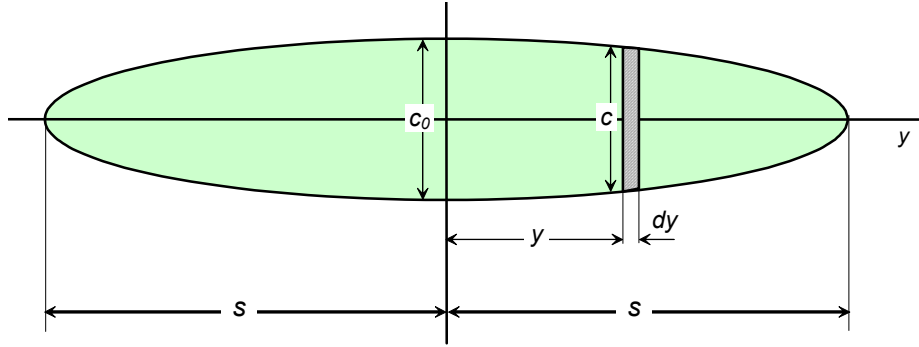
Bu son ifade eliptik üst-görünüm, burulmasız ve açıklık oranı AR olan bir kanadın 3-boyutlu taşıma eğrisi eğimini, bu kanadın açıklığı boyunca aynı olan kesit profilinin 2-boyutlu taşıma eğrisi eğimine bağlamaktadır. Görüldüğü gibi 3-boyutlu haldeki taşıma eğrisi eğimi daima 2-boyutlu taşıma eğrisi eğiminden küçük olup, açıklık oranı arttıkça değeri 2-boyutlu haldekine yaklaşmaktadır (Şekil 10.26).

Bu bağıntı eliptik üst-görünüm bir kanat için çıkartılmış olmakla birlikte pratikteki çoğu kanat için performans hesapları sırasında kullanılabilir.



Şekil 10.26: Açıklık oranının taşıma eğrisi eğimi üzerindeki etkisi

EK 10-1 : ELİPTİK ÜST-GÖRÜNÜM GEOMETRİSİ



Şekildeki gibi eliptik üst-görünümlü bir kanadın açıklığı boyunca herhangi bir y istasyonundaki veter uzunluğunu kök veter uzunluğuna elips denklemi vasıtasıyla

$$c = c_0 \sqrt{1 - (y/s)^2}$$

şeklinde bağlamak mümkündür. Şayet kanadın alanı hesaplanmak istenirse

$$S = \int_{-s}^{+s} c(y) dy = c_0 \int_{-s}^{+s} \sqrt{1 - (y/s)^2} dy$$

yazılarak

$$y = -s \cos \theta \quad \rightarrow \quad dy = s \sin \theta d\theta, \quad \sqrt{1 - (y/s)^2} = \sin \theta$$

değişken dönüşümüyle

$$S = c_0 s \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta \quad \rightarrow \quad \boxed{S = \frac{c_0 s}{2} \pi} \quad (\text{E.1})$$

Kanadın açıklık oranına gelince

$$AR = \frac{b}{\bar{c}} = \frac{(2s)^2}{S} \quad \rightarrow \quad \boxed{AR = \frac{8s}{c_0 \pi}} \quad (\text{E.2})$$

olarak bulunur.

ÖRNEK PROBLEMLER

1 - $75000 N$ ağırlığındaki bir uçak, $15 m$ açıklığında eliptik üst-görünümlü, burulmasız ve açıklığı boyunca bütün kesit profilleri aynı olan bir kanada sahiptir. Düşük irtifada standart atmosfer şartlarında $90 m/s$ hızla seyahat uçuşu sırasında gövde etkisini ihmal ederek indüklenmiş sürüklenme kuvvetini ve kanadın kök kesitindeki sirkülasyonu hesaplayınız.

2 - Açıklığı boyunca yük dağılımı

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot \sqrt{(1 - y^2/s^2)^3}$$

şeklinde verilen bir kanada etkiyen taşıma katsayısını, aşağı sapma hızlarının dağılımını ve indüklenmiş sürüklenme katsayısını hesaplayınız.

3 - Simetrik kesitli, eliptik üst-görünümlü bir kanat, kök kesitindeki hücum açısı 2° iken kanat kökünden y uzaklıkta sirkülasyon

$$\Gamma = \Gamma_0 \cdot \sqrt{(1 - y^2/s^2)^3}$$

olacak şekilde burulmuştur. Kanat açıklığı boyunca indüklenmiş hızlar için genel bir ifade bulunuz. Açıklık oranı 7 ve kesit profilinin iki-boyutlu taşıma eğrisi eğimi 5.8 olduğuna göre kanat ucundaki hücum açısını hesaplayınız.

4 - Eliptik üst-görünümlü bir kanadın açıklık oranı 12 ve alanı $24 m^2$ ' dir. Kanat burulmasız olup, açıklık boyunca bütün kesit profilleri benzerdir. Kesit profili simetrik olup taşıma katsayısı 12° hücum açısında 1.3 olarak verilmiştir.

a) Kanadın hücum açısı 5° iken taşıma katsayısını hesaplayınız

b) Kanadın sıfır taşımadaki sürüklenmesi 0.02 olarak verildiğine göre 5° ve 10° deki taşıma ve indüklenmiş sürüklenme katsayılarını hesaplayarak kanadın polerini elde ediniz.

c) Bu kanadın, ağırlığı $25000 N$ olan bir uçakta kullanılması halinde deniz seviyesinde elde edilebilecek minimum tutunma hızı ne olacaktır? (Not: kanadın maksimum taşımasının 10° hücum açısında elde edildiğini varsayınız)

5 - Alanı $25 m^2$, açıklık oranı 8 olan dikdörtgenel üst-görünümlü, burulmamış bir kanadın bütün kesit profilleri aynı olup, kullanılan profilin 0° ve 10° hücum açılarındaki taşıma katsayıları sırasıyla 0.1 ve 1.2 'dir. Bu kanadın, izafi yoğunluğun 0.7 olduğu bir irtifada $100 m/s$ hızla, düzgün-simetrik bir seyahat uçuşu yapacak $20000 N$ ağırlığındaki bir uçağı taşıyabilmesi için hücum açısı ne kadar olmalıdır. (Not hesap için Fourier katsayılarının sadece ilk üçünü alınız.)

6 - Alanı $30 m^2$ ve açıklık oranı 10 olan eliptik üst-görünümlü, burulmasız bir kanadın bütün kesitleri açıklık boyunca aynı olup, iki-boyutlu taşıma katsayısı 6° hücum açısında 0.7 olan simetrik bir profile sahiptir. Bu kanadın deniz seviyesindeki standart atmosfer şartlarında 4° hücum açısıyla $150 km/h$ hızdaki simetrik uçuşu sırasında sağlayacağı taşıma ve indüklenmiş sürüklenme kuvvetlerini hesaplayınız.

7 - Eliptik üst-görünümlü, burulmasız bir kanadın alanı $20 m^2$ ve açıklık oranı 8 olup, açıklığı boyunca değişmeyen simetrik kesit profilinin taşıma eğrisi eğimi $5.9 rad^{-1}$ 'dir. Bu kanadın $3000 m$ irtifada, standart atmosfer şartlarında, $288 km/h$ hızla simetrik uçuş sırasında 2.5° hücum açısında sağlayacağı taşıma kuvvetini, ve buna karşılık oluşacak indüklenmiş sürüklenme kuvvetini hesaplayınız.

8 - $17500 N$ ağırlığındaki bir uçağı, izafi yoğunluğun 0.742 olduğu $3000 m$ irtifada $180 km/h$ 'lik bir hızla düzgün simetrik seyahat uçuşu sırasında taşıyacak, $2 m$ veter uzunluğuna ve $10 m$ açıklığa sahip dikdörtgenel üst-görünümlü bir kanat tasarlanmıştır.

Kanat kesiti açıklık boyunca aynı NACA 4412 profiline sahip olup, bu profilin taşıma katsayısı 0° hücum açısında 0.4 ve 8° hücum açısında da 1.25 olarak verilmiştir. Seyahat uçuşu sırasında bu kanadın hücum açısının ne kadar olması gerektiğini hesaplayınız. (Not hesap için Fourier katsayılarının sadece ilk üçünü alınız.)

9 - Bütün kesitleri aynı olan 2 m veter uzunluğuna ve 10 m açıklığa sahip dikdörtgensel bir kanat, deniz seviyesinde standart atmosfer şartlarında, 18000 N ağırlığındaki bir uçağı 180 km/h hızla taşımak üzere tasarlanmıştır. Kesit profilinin sıfır taşıma hücum açısı -4° olup 8° hücum açısındaki taşıma katsayısı 1.25 olarak verilmiştir. Bu kanadın düzgün simetrik uçuştaki taşıma katsayısı ne kadar olacaktır? (Not hesap için Fourier katsayılarının sadece ilk üçünü alınız.)