

BÖLÜM 9

İKİ BOYUTLU PANEL YÖNTEMLERİ

- 9.1. Giriş
- 9.2. Kompleks düzlemde potansiyel akım probleminin integral formülasyonu
- 9.3. Doğrusal paneller boyunca sabit tekillik dağılımı hali
- 9.4. Kaynak dağılımını esas alan panel yöntemi

BÖLÜM 9

İKİ BOYUTLU PANEL YÖNTEMLERİ

9.1. Giriş:

Bu bölümde kanat profilleri etrafındaki potansiyel akım probleminin panel yöntemleriyle incelenmesi ele alınacaktır. Formülasyon genel olarak kompleks düzlemde geliştirilecek, ancak reel düzlemde uygulamamın nasıl yapılabileceği hakkında da bilgi verilecektir.

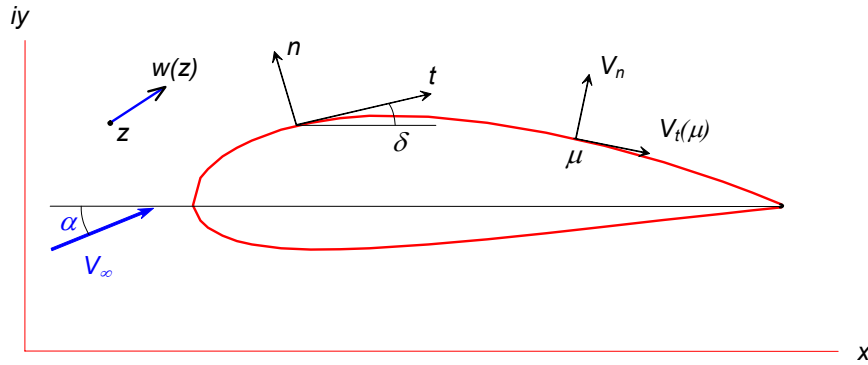
9.2. Kompleks düzlemde potansiyel akım probleminin integral formülasyonu:

Kompleks z düzleminde bir kanat profili etrafındaki sıkıştırılmaz potansiyel akımın

$$w_{\infty}^* = V_{\infty} e^{-i\alpha} \quad (9.1)$$

şeklinde tanımlanan üniform paralel akım ile, kanat profili cidarı boyunca

$$v(z_0) = \sigma(z_0) + i\gamma(z_0) \quad (9.2)$$



Şekil 9.1: Kompleks düzlemde akım alanı

şeklindeki bir kaynak-girdap dağılımı ile temsil edilmesi halinde (Şekil 9.1), akım alanının herhangi bir z noktasındaki kompleks hızın eşleniği

$$w^*(z) = w_{\infty}^* + \frac{I}{2\pi} \oint_C \frac{v(z_0) \cdot t^*(z_0)}{z - z_0} dz_0 \quad (9.3)$$

şeklindeki bir bağıntı ile belirtilebilir. Burada C eğrisi profil yüzeyini, z_0 da bu yüzey üzerindeki noktaları temsil etmektedir. $t^*(z_0)$ profil yüzeyinin z_0 noktasındaki eğimini belirten δ açısına

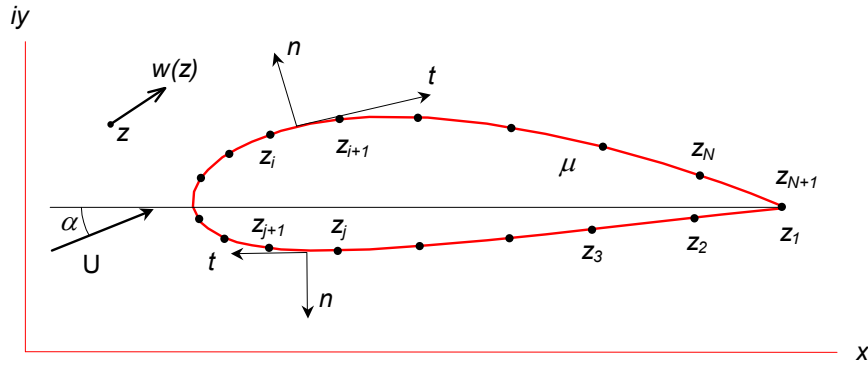
$$t(z_0) = e^{i\delta(z_0)} \quad (9.4)$$

şeklinde bağlanan kompleks bir fonksiyonun eşleniğidir.

(9.3) bağıntısı yardımıyla z noktasındaki hızın hesaplanabilmesi için bağıntıda yer alan integralin hesaplanması gerekir. Ancak bir kanat profili için analiz problemi söz konusu olduğunda, başlangıçta yüzey boyunca $v(z_0)$ fonksiyonunun nasıl dağıldığı bilinmez. Ayrıca $t(z_0)$ fonksiyonu da genel olarak analitik bir biçimde ifade edilemez. Bu bakımdan panel yöntemlerinde, söz konusu integralin hesabı için önce profil cidarı panel adı verilen küçük yüzey elemanlarına ayrılır (Şekil 9.2). Böylece (9.3) bağıntısı

$$w^*(z) = w_\infty^* + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{v(z_0) \cdot t^*(z_0) dz_0}{z - z_0} \right\} \quad (9.5)$$

şekline gelir. Burada N büyüklüğü panel sayısını belirtmektedir.



Şekil 9.2: Yüzey panelleri

(9.5) bağıntısındaki integralin hesabı, yukarıda belirtilen nedenlerle halen mümkün değildir. İntegrali hesaplayabilmek için, panellerin yeterince küçük boyda olduğu farzedilerek, $v(z_0)$ ve $t(z_0)$ dağılımları için çeşitli yaklaşımlar yapılır. Literatürde yer alan panel yöntemlerinde tercih edilen yaklaşımlar, panel eğrisinin doğrusal, dairesel veya parabolik kabul edilmesi, panel boyunca tekillik dağılımının sabit, lineer veya parabolik kabul edilmesi şeklinde belirtilebilir. Burada, basit olması bakımından paneller doğrusal ve paneller boyunca tekillik dağılımları da sabit kabul edilecektir.

9.3. Doğrusal paneller boyunca sabit tekillik dağılımı hali:

Panellerin doğrusal kabul edilmesi halinde herhangi bir j 'inci panel boyunca eğimler aynı olacağından

$$t^*(z_0) = t_j^* \quad (9.6)$$

ve ayrıca bu panel boyunca tekilliğin sabit şiddette dağıldığı kabul edilirse

$$v(z_0) = v_j \quad (9.7)$$

yazılabilir. Böylece (9.5) bağıntısı

$$w^*(z) = w_\infty^* + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{2\pi} t_j^* \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dz_0}{z - z_0} \right\} \cdot v_j \quad (9.8)$$

şekline gelir. Bu bağıntıyı

$$C_j(z) = \frac{1}{2\pi} t_j^* \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dz_0}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi} t_j^* \cdot \text{Ln} \frac{z - z_j}{z - z_{j+1}} \quad (9.9)$$

olmak üzere

$$w^*(z) = w_\infty^* + \sum_{j=1}^N \left\{ C_j(z) \cdot v_j \right\} \quad (9.10)$$

şeklinde de yazmak mümkündür.

(9.10) bağıntısı yardımıyla herhangi bir z noktasındaki hızı hesaplamak için profil geometrisi ve serbest akım şartları yanında, paneller üzerindeki v_j tekillik şiddetlerinin bilinmesi gerektiği unutulmamalıdır. Tekillik şiddetleri kanat profilinin yüzeyi boyunca sınır şartı ve ilave olarak Kutta şartı kullanılmak suretiyle elde edilecektir. Bu bakımdan profil yüzeyi üzerindeki herhangi bir μ noktasındaki hız için (9.10) bağıntısı tekrar yazılırsa

$$w^*(\mu) = w_\infty^* + \sum_{j=1}^N \left\{ C_j(\mu) \cdot v_j \right\} \quad (9.11)$$

elde edilir. Bu bağıntıdan bulunacak olan kompleks eşlenik hız büyüklüğünün reel kısmı x eksenini doğrultusundaki hız bileşenini, imajiner kısmı ise y eksenini doğrultusundaki hız bileşenini verecektir. Oysa, yüzey üzerinde akımın yüzeye teğet olacağı hatırlanırsa yüzey üzerindeki kompleks hızın yüzey teğetine bağlı bir eksen takımında ifade edilmesinin daha uygun olacağı görülür. Nitekim (9.11) bağıntısının her iki yanını seçilen μ noktasındaki t eğimi ile çarpılarak

$$w_{TN}^*(\mu) = w_\infty^* \cdot t(\mu) = w_\infty^* + \sum_{j=1}^N \left\{ t(\mu) \cdot C_j(\mu) \cdot v_j \right\} \quad (9.12)$$

elde edilir. Panel yöntemlerinde genel olarak her bir i 'inci panel üzerinde bir μ_i kontrol noktası seçilerek hız sadece bu noktada hesaplanır. Bu kontrol noktası genellikle panel orta noktasıdır. Bu durumda (9.12) bağıntısı

$$C_{ij} = \frac{1}{2\pi} t_i t_j^* \int_{z_j}^{z_{j+1}} \frac{dz_0}{\mu_i - z_0} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} t_i t_j^* \cdot \text{Ln} \frac{\mu_i - z_j}{\mu_i - z_{j+1}} & i \neq j \\ -i/2 & i = j \end{cases} \quad (9.13)$$

olmak üzere

$$w_{TN_i}^* = w_{\infty}^* t_i + \sum_{j=1}^N \{ C_{ij} \cdot v_j \} \quad (9.14)$$

şeklinde yazılır. Burada i 'inci panelin kontrol noktasındaki teğetsel hız V_{T_i} ve normal hız V_{N_i} olmak üzere

$$w_{TN_i}^* = V_{T_i} - i V_{N_i} \quad (9.15)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$C_{ij} = a_{ij} + i b_{ij} \quad (9.16)$$

denilir ve bunun yanında

$$v_j = \sigma_j + i \gamma_j \quad (9.17)$$

olduğu hatırlanırsa teğetsel ve normal hızlar için sırasıyla

$$V_{T_i} = \text{Re} \{ w_{\infty}^* t_i \} + \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot \sigma_j - \sum_{j=1}^N b_{ij} \cdot \gamma_j \quad (9.18)$$

$$-V_{N_i} = \text{Im} \{ w_{\infty}^* t_i \} + \sum_{j=1}^N b_{ij} \cdot \sigma_j + \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot \gamma_j \quad (9.19)$$

elde edilir.

Akımın profil yüzeyine teğet olacağı şeklinde belirtilen sınır şartını, akımın yüzeye dik hız bileşeni olmayacağı şeklinde yorumlamak mümkündür. Bu durumda her bir panel üzerindeki kontrol noktasında normal hızlar sıfıra eşitlenerek

$$\sum_{j=1}^N b_{ij} \cdot \sigma_j + \sum_{j=1}^N a_{ij} \cdot \gamma_j = -\text{Im} \{ w_{\infty}^* t_i \} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.20)$$

şeklindeki bir lineer denklem takımı elde edilir. Ancak bu denklem takımında N adet denkleme karşılık $2N$ adet bilinmeyen $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N ; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ olduğuna dikkat edilmelidir.

(9.20) denklem sisteminin çözümü için bilinmeyen sayısının azaltılması gerekir. Ayrıca Kutta şartının da ilave bir denklem vereceği unutulmamalıdır. Literatürde yer alan klasikleşmiş bir yaklaşım, kaynak dağılımının esas alınması ve girdap dağılımı için bir takım kabuller yapılması şeklindedir. Girdap dağılımının esas alınması halinde ise bir takım sorunlar yaşanmaktadır.

9.4. Kaynak dağılımını esas alan panel yöntemi:

Kaynak dağılımının esas alınması halinde profil etrafındaki girdap dağılımı

$$\gamma_j = d_j \cdot \gamma_c \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (9.21)$$

şeklinde bir tek bilinmeyene bağlanır. Böylece (9.20) denklem sistemi

$$\sum_{j=1}^{N+1} A_{ij} \cdot X_j = D_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.22)$$

ve teğetsel hızlar için yazılan (9.18) bağıntısı da

$$V_{T_i} = E_i + \sum_{j=1}^{N+1} B_{ij} \cdot X_j \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.23)$$

şekline gelir. Burada

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= b_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad A_{i, N+1} = \sum_{j=1}^N d_j \cdot a_{ij}, \quad D_i = -\text{Im}\{w_{\infty}^* t_i\} \\ B_{ij} &= a_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad B_{i, N+1} = -\sum_{j=1}^N d_j \cdot b_{ij}, \quad E_i = \text{Re}\{w_{\infty}^* t_i\} \\ X_j &= \sigma_j \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad X_{N+1} = \gamma_c \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, \dots, N) \quad (9.24)$$

Bu son bağıntılardaki d_j katsayılarını çeşitli şekillerde seçmek mümkündür. En basit bir yaklaşımla

$$d_j = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (9.25a)$$

olarak bütün profil çevresi boyunca girdap şiddetinin sabit olduğu kabul edilebilir. Ancak bu yaklaşımın kullanılması halinde firar kenarı civarında bir sorun olduğu bilinmektedir. Bu bakımdan girdap dağılımı için profil yüzeyi boyunca parabolik bir dağılım daha uygun düşmektedir. Bu tezdeki uygulamalarda dağılım her bir panelde sabit ancak profil yüzeyi boyunca parabolik olarak alınmıştır. Parabolik dağılım halinde yukarıdaki katsayılar panel kontrol noktalarının profil firar kenarından saat ibreleri yönünde uzaklıklarına (s)

$$d_j = 0.5 \left[\bar{s}_j (\bar{s}_j - 1) + \bar{s}_{j+1} (\bar{s}_{j+1} - 1) \right], \quad \bar{s}_j = s_j / s_T \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (9.25b)$$

şeklinde bağlanabilir.

(9.22) denklem sisteminde bilinmeyen sayısı halen denklem sayısından bir fazla olup ilave bir denklemi de Kutta şartından elde etmek mümkündür.

Kutta şartı akımın profili firar kenarından düzgün şekilde terk edeceğini belirtir. Bunu çeşitli şekillerde uygulamak mümkündür. Basit bir uygulama tekniği profilin alt ve üst yüzeylerinde firar kenarına komşu olan iki panel üzerindeki teğetsel hızların eşitlenmesi şeklindedir.

$$V_{T_i} = -V_{T_N} \quad (9.26)$$

Buradaki eksi işareti kompleks düzlemdeki integrallerin yönüyle ilgilidir. (9.23) bağıntısı (9.26) içerisinde kullanılarak

$$\sum_{j=1}^{N+1} (B_{1j} + B_{Nj}) \cdot X_j = -(E_1 + E_N) \quad (9.27)$$

elde edilir. Bu son denklemi (9.22) denklem sistemine (N+1) inci denklem olarak

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N+1} A_{N+1j} \cdot X_j = D_{N+1}} \quad (9.28)$$

şeklinde ilave etmek mümkündür. Burada

$$\boxed{A_{N+1j} = B_{1j} + B_{Nj} \quad (j = 1, 2, \dots, N+1), \quad D_{N+1} = -(E_1 + E_N)} \quad (9.29)$$

dir.

(9.22) denklem sistemi (9.28) denklemi ile birlikte çözüldükten sonra teğetsel hızlar (9.23) bağıntısıyla hesaplanır. Profil üzerindeki basınç katsayıları ise Bernoulli denkleminin sonucu olan

$$C_{p_i} = 1 - \left(\frac{V_{T_i}}{U_\infty} \right)^2 \quad (9.30)$$

bağıntısı yardımıyla elde edilir.