

BÖLÜM 6

DAİMİ, İKİ-BOYUTLU, SIKIŞTIRILAMAZ POTANSİYEL AKIMLAR

6.1 Giriş

6.2 Hız Potansiyeli için formülasyon

6.3 Akım Fonksiyonu için formülasyon

6.4 Kompleks düzlemde formülasyon

6.5 Potansiyel Akımların Süperpozisyonu

6.6 Basit Akımlar

6.7 Dairesel silindir etrafındaki simetrik ve sirkülasyonlu akımlar

6.1. Giriş

Yüksek Reynolds sayılarında üniform paralel akım içinde çok yüksek olmayan hücum açılarında yer alan bir kanat profili etrafındaki akım örneğinde olduğu gibi, sınır tabaka ve iz etkilerinin küçük olduğu durumlarda ilk yaklaşımda akım alanının çevrisiz (irrotasyonel) olduğu yaklaşımıyla inceleme yapmak mümkündür. Bu durumda akım alanı genellikle "potansiyel" olarak nitelendirilir.

Bu yaklaşım, akımın daimi, sıkıştırılmaz kabul edilmesiyle de birlikte akımı yöneten denklemlerin hayli basit bir hale getirilmesini sağlar. Böylece nispeten kolay ve ucuz yöntemlerle çözümler elde etmek mümkün olur.

Potansiyel akım problemlerini reel düzlemde bir hız potansiyel fonksiyonu cinsinden veya iki-boyutlu halde akım fonksiyonu cinsinden modelleyerek bu fonksiyonlardan birisi için çözmek mümkün ve yeterlidir. Ancak bu iki fonksiyonu birleştirerek problemi kompleks düzlemde modellemek de mümkündür. Kompleks düzlem reel düzleme kıyasla bazı işlem kolaylıkları sağlar.

6.2. Hız Potansiyeli için formülasyon:

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$$

Daimi akım kabulü

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

\Rightarrow

\Downarrow

Sıkıştırılmaz akım

$$\rho = Sb$$

\Rightarrow

\Downarrow

$$\nabla \vec{V} = 0$$

Çevrisiz (irrotasyonel) akım

$$\nabla \times \vec{V} = 0$$

\Downarrow

Hız potansiyeli

$$\vec{V} = \nabla \phi$$

\Rightarrow

\Downarrow

$$\nabla(\nabla \phi) = 0$$

Laplace denklemi

$$\nabla^2 \phi = 0$$

Problem, akım alanı olarak tanımlanan bölge içerisinde Laplace denkleminin, uygun sınır şartlarıyla birlikte, ϕ potansiyel fonksiyonu için çözülmesinden ibarettir.

Bir potansiyel akım alanında potansiyel fonksiyonunun $\phi(x,y) = \phi_0$ şeklinde sabit değerler aldığı noktaları birleştiren eğrilere "*potansiyel eğrisi (potansiyel çizgisi)*" adı verilir. Bu eğrilerle hız vektörleri arasında özel bir ilişki vardır. Şöyle ki;

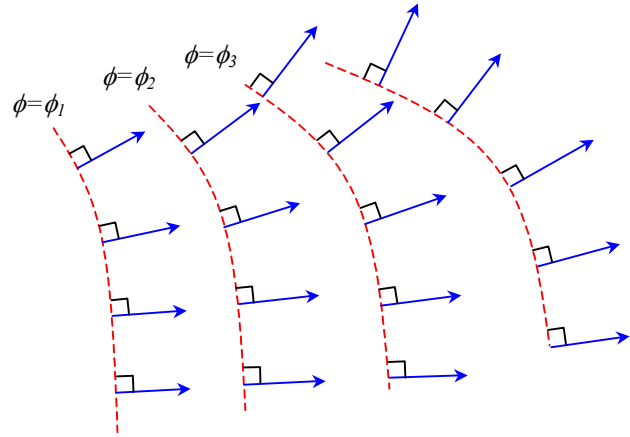
Hız vektörü potansiyel fonksiyonunun gradyantına eşit olduğu için potansiyel fonksiyonunun herhangi bir doğrultudaki türevi bu doğrultudaki hız bileşenine eşit olur.

Örneğin (x,y,z) kartezyen koordinat sisteminde hız bileşenleri u , v ve w olarak tanımlanırsa

$$\vec{V} = \nabla \phi \rightarrow u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k} \rightarrow \boxed{u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}}$$

olduğu görülür.

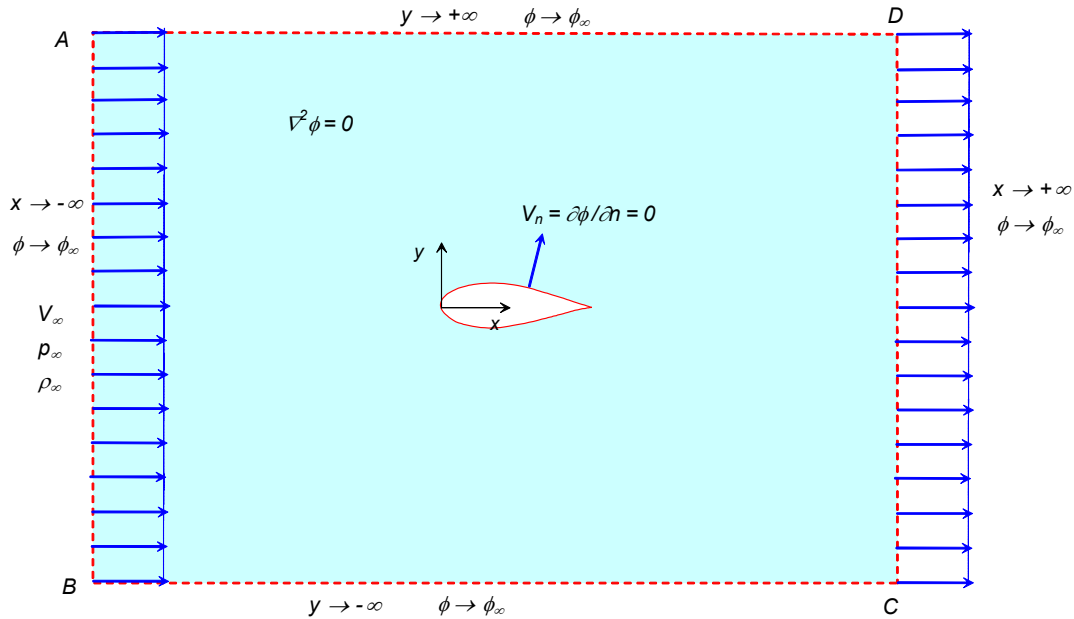
Buna göre, bir potansiyel eğrisi boyunca $\phi = Sb$ olduğu için potansiyel fonksiyonunun bu eğrinin herhangi bir noktasında teğeti doğrultusundaki türevi ve dolayısıyla teğet doğrultusundaki hız bileşeni sıfır olacak, bunun sonucu olarak da bu noktadaki hız bileşeni potansiyel eğrisine dik olacaktır.



Kanat profili için problem:

Özel bir durum söz konusu olmadıkça genel olarak bir kanat profilinin üniform paralel akım içerisinde yer aldığı varsayılır.

Akım bölgesi, kanat profilinin yüzeyi olarak tanımlanan bir iç sınır ile sonsuzda yer aldığı varsayılan bir dış sınır arasındaki geniş bölgedir. Problem, hız potansiyeli için yazılmış Laplace denkleminin bu bölge içerisinde, bölgenin belirtilen sınırları üzerinde tanımlanacak sınır şartlarıyla birlikte çözümünden ibarettir. Çözümünden kastedilen, akım alanının her bir noktasında potansiyel fonksiyonunun değerinin elde edilmesidir.



Dış sınırındaki sınır şartını üniform paralel akım büyüklükleri belirler. Kanat profilinin yüzeyi üzerindeki sınır şartı ise akımın yüzeye teğet olması şeklinde ifade edilebilir.

Dış sınır üzerindeki sınır şartı matematiksel olarak şimdilik

$$\boxed{\phi = \phi_\infty}$$

şeklinde belirtilebilir. İlerleyen paragraflarda üniform-paralel akıma ait potansiyel fonksiyonunun nasıl tanımlanacağı gösterilecektir.

Yüzey üzerindeki sınır şartını ise matematiksel olarak çeşitli şekillerde ifade etmek mümkündür: Örneğin akımın yüzeye teğet olması yüzeye dik hız bileşeninin sıfır olması şeklinde yorumlanarak:

$$\boxed{\vec{V} \cdot \vec{n} = 0} \quad \rightarrow \quad (\nabla \phi) \cdot \vec{n} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0}$$

yazılabilir.

Pratikte, elde edilecek çözümden nasıl yararlanılacağı da önemlidir:

- Laplace denkleminin çözümü akım alanının her bir noktasında $\phi(x,y)$ fonksiyonunun değerini verecektir.
- $\vec{V} = \nabla \phi$ bağıntısı yardımıyla her bir noktadaki hızı elde etmek mümkündür.
- Bernoulli denkleminin sonucu olan $C_p = 1 - (\vec{V}/V_\infty)^2$ bağıntısı yardımıyla her bir noktadaki basınç katsayısını elde etmek mümkündür.
- Yüzey üzerindeki basınç dağılımının integrasyonu yardımıyla taşıma ve yunuslama katsayılarını verecek bilgiler elde etmek mümkündür.

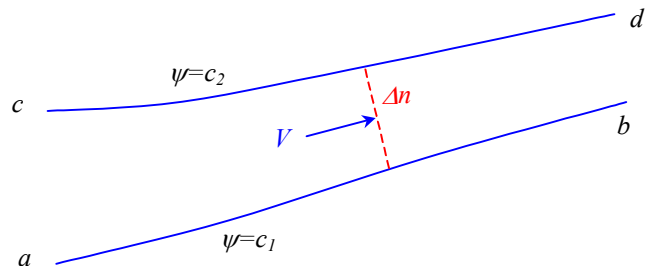
$$C_l \propto \oint C_p d\bar{x}, \quad C_m \propto \oint C_p \bar{x} d\bar{x}$$

6.3. Akım fonksiyonu için formülasyon:

Daimi akım halinde akışkan zerreciklerinin yörüngeleri *akım çizgisi* olarak adlandırılır. Nasıl ki potansiyel fonksiyonu bir takım potansiyel eğrilerini tanımlıyorsa iki-boyutlu halde akım çizgilerinin de benzeri şekilde bir akım fonksiyonu ile tanımlanmaları mümkündür.

Akım çizgileri katı cidar gibi akışkanın bir taraftan diğer tarafa geçmesine izin vermeyen çizgiler olduğundan iki akım çizgisi arasında ilerleyen akımın debisi akım boyunca sabit kalacaktır. Bu özellikten akım fonksiyonunun tanımlanmasında ve hız bileşenleriyle ilişkilendirilmesinde yararlanır.

Şekilde görüldüğü gibi birbirine çok yakın iki akım çizgisi boyunca akım fonksiyonunun c_1 ve c_2 gibi sabit değerler aldığı varsayalım. Akım fonksiyonunun değerleri arasındaki farkı $\Delta\psi$ ile gösterelim ve bu farkın akım çizgileri arasından geçen debiye eşit olduğunu farzedelim.



Akım çizgileri birbirine çok yakın olduğu için Δn aralığının her noktasında hızın aynı olduğu kabul edilebilir. Buna göre:

$$c_2 - c_1 = \Delta\psi = \rho V \Delta n \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta\psi}{\Delta n} = \rho V$$

veya limit olarak

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta n} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{d\psi}{dn} = \rho V}$$

elde edilir.

Akım fonksiyonu için yazılan bu denklemi hız bileşenleri cinsinden daha kullanışlı bir biçime getirmek mümkündür.

Örneğin şekilde görüldüğü gibi (x,y) Kartezyen koordinat sisteminde iki akım çizgisi arasında dik üçgen şeklinde belirtilen kontrol hacmine giren ve çıkan debiler eşit olduğundan

$$\Delta\psi = \rho V \Delta n = \rho u \Delta y + \rho v (-\Delta x)$$

veya limit alınarak

$$d\psi = \rho u dy - \rho v dx$$

Diğer taraftan bir $\psi(x,y)$ fonksiyonun tam diferansiyeli kısmi türevleri cinsinden

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu iki bağıntı karşılaştırılarak

$$\boxed{\rho u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

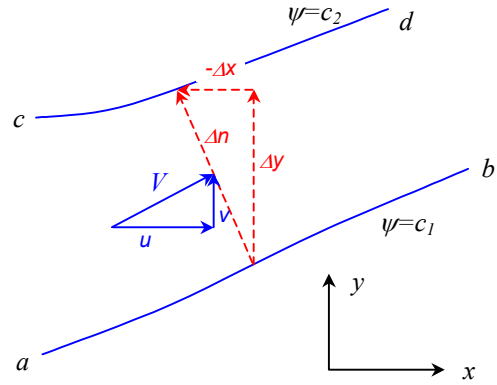
olduğu görülür. Sıkıştırılmaz akımlar halinde bu bağıntılar

$$\boxed{u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

şeklini alır. Bu son bağıntılar daha önce potansiyel fonksiyonunun türevleri için verilen bağıntılarla birleştirilirse

$$\boxed{u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}} \\ \boxed{v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikler **Cauchy-Riemann** bağıntıları olarak bilinir



Potansiyel çizgileri hız vektörlerine dik ve akım çizgileri de hız vektörlerine teğet olduğu için potansiyel ve akım çizgileri birbirlerini dikey olarak keserler.

Cauchy-Riemann bağıntıları da bunu doğrulayarak potansiyel ve akım fonksiyonlarının dik-kesişen (ortogonal) fonksiyonlar olduğunu göstermektedir.

Şimdi potansiyel akımın çevrisiz olma şartı yeniden hatırlanırsa, örneğin (x, y, z) kartezyen koordinat sisteminde matris formda bu şart

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} = 0$$

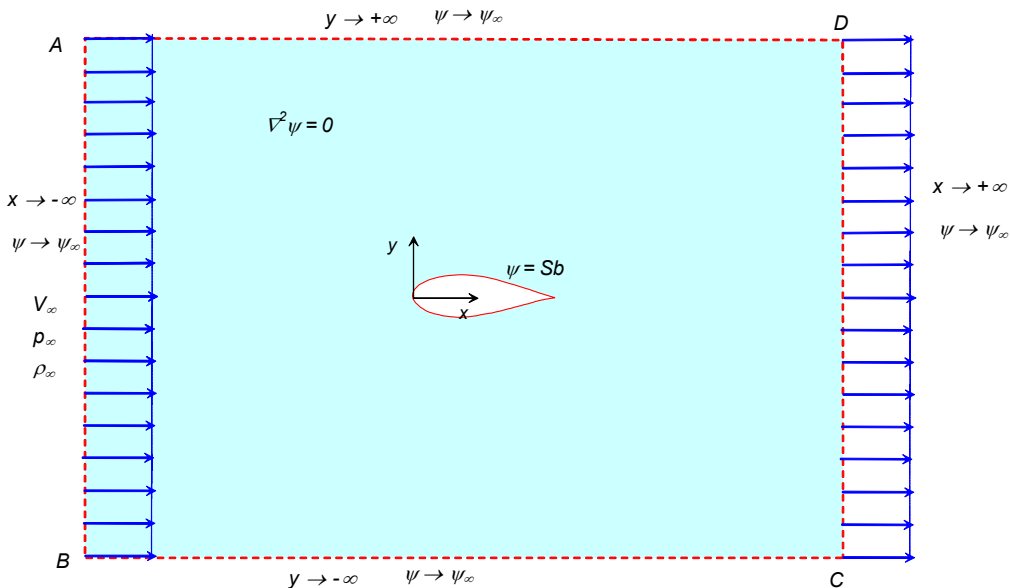
şeklinde yazılabilir. İki-boyutlu halde, hızlarla akım fonksiyonu arasında yukarıda bulunan ilişkiler de kullanılarak

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla^2 \psi = 0}$$

şeklinde yine Laplace denkleminin gelinir. Yani potansiyel akım problemi akım fonksiyonu için de Laplace denklemi ile temsil edilmektedir.

Kanat profili için problem:

Kanat profili için problem daha önce potansiyel fonksiyonu halinde belirtilen aynı sınırlar içerisinde, ama bu defa akım fonksiyonu için Laplace denkleminin çözümünden ibarettir. Bununla birlikte, sınır şartlarının da akım fonksiyonu cinsinden verileceği unutulmamalıdır.



Dış sınır üzerindeki sınır şartı matematiksel olarak şimdilik yine

$$\psi = \psi_{\infty}$$

şeklinde belirtilebilir. Yüzey üzerindeki sınır şartını ise, yüzeyin bir akım çizgisi olacağını dikkate alarak yüzey boyunca akım fonksiyonunun sabit olması şeklinde uygulamak mümkündür:

$$\psi = \psi_w = Sb$$

Laplace denklemi akım fonksiyonu için çözüldükten sonra türevler yardımıyla hızlara, daha sonra basınç katsayılarına geçilebilir. Yüzey boyunca basınç katsayılarının integrasyonundan taşıma ve yunuslama katsayıları elde edilir.

6.4. Kompleks düzlemde formülasyon:

Potansiyel akım problemlerini her ne kadar reel düzlemde potansiyel veya akım fonksiyonu cinsinden tanımlayarak çözmek mümkün ise de, kompleks düzlem kullanmanın birçok avantajı vardır.

Kompleks düzlemde bir sınıf fonksiyon vardır ki, "analitik" olarak nitelendirilen bu sürekli fonksiyonların reel ve imajiner kısımları Laplace denklemini ve Cauchy-Riemann şartlarını sağlarlar. Bu bakımdan bir potansiyel akıma ait potansiyel ve akım fonksiyonlarını

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

şeklinde "*kompleks potansiyel fonksiyonu*" adı verilen bir analitik fonksiyon içerisinde birleştirmek mümkündür.

Kompleks düzlemde akım hızı da

$$w = u + iv = Ve^{i\beta}$$

şeklinde "*kompleks hız*" adı verilen bir büyüklükle tanımlanabilir. Nasıl ki potansiyel ve akım fonksiyonlarının türevleri hız bileşenlerini tanımlıyorsa, kompleks potansiyel fonksiyonunun türevi de

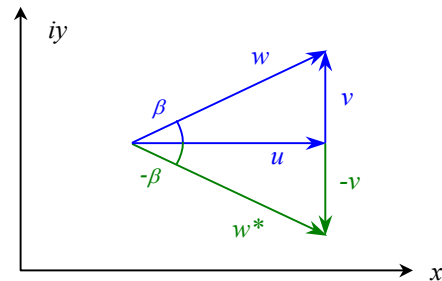
$$\frac{df}{dz} = u - iv = w^*$$

şeklinde kompleks hızın eşleniğini (*kompleks eşlenik hız*) verir.

Not:

Analitik fonksiyonlar sürekli fonksiyonlar olup bir nokta etrafındaki türevleri hangi doğrultuda alınır alınsın aynı değeri verirler. Buna göre türev örneğin x doğrultusunda alındığı takdirde

$$\frac{df}{dz} = \frac{df}{dx} = \frac{d(\phi + i\psi)}{dx} = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv = w^*$$



olduğu görülür. Türevin (iy) doğrultusunda alınmasıyla aynı sonucun elde edilebileceğinin gösterilmesi öğrenciye bırakılmıştır.

Örnek:

$f(z) = sh^{-1}(z/c)$, ($c = sb$) analitik fonksiyonunun temsil ettiği akım alanını analiz ediniz.

$f(z) = \phi + i\psi$, $z = x + iy$ konularak fonksiyon reel ve imajiner kısımlarına ayrılabilir.

$$\phi + i\psi = sh^{-1}\left(\frac{x + iy}{c}\right) \rightarrow x + iy = c sh(\phi + i\psi) = c [sh\phi \cdot ch(i\psi) + sh(i\psi) \cdot ch\phi]$$

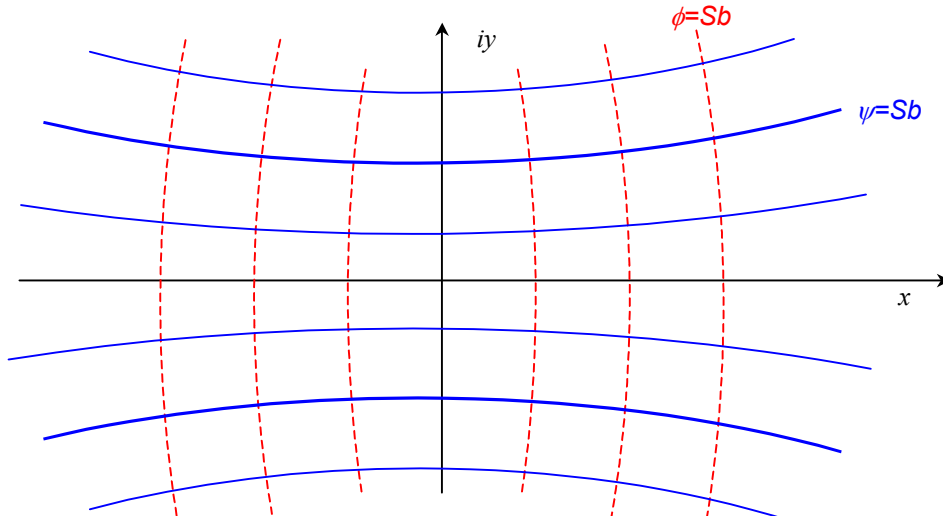
$$x + iy = c sh\phi \cdot \cos\psi + i c \sin\psi \cdot ch\phi \rightarrow \begin{aligned} x &= c sh\phi \cdot \cos\psi \\ y &= c \sin\psi \cdot ch\phi \end{aligned}$$

Bilinen trigonometrik bağıntılarla

$$ch^2\phi - sh^2\phi = 1 \rightarrow \frac{y^2}{c^2 \sin^2\psi} - \frac{x^2}{c^2 \cos^2\psi} = 1 \quad \text{hiperbol}$$

$$\cos^2\psi + \sin^2\psi = 1 \rightarrow \frac{y^2}{c^2 sh^2\phi} + \frac{x^2}{c^2 ch^2\phi} = 1 \quad \text{elips}$$

elde edilir. Bu bağıntılarda $\phi = sb$ ve $\psi = sb$ yazılarak ve sabitlerin değerleri değiştirilerek şekilde görüldüğü gibi çeşitli akım çizgileri ve potansiyel çizgileri çizilebilir.



Kompleks potansiyel fonksiyonu $\frac{z}{c} = shf \rightarrow z = c shf$

Diferansiyel alınarak $dz = c chf df = c \sqrt{1 + sh^2 f} df$

Düzenlenerek $dz = c \sqrt{1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2} df = c \sqrt{1 + \left(\frac{z}{c}\right)^2} df = \sqrt{c^2 + z^2} df$

Kompleks hız tanımı gereği $w^* = \frac{df}{dz} \rightarrow w^* = \frac{I}{\sqrt{c^2 + z^2}}$

elde edilir. Bu bağıntı yardımıyla istenilen noktadaki hız bileşenlerini kolaylıkla hesaplamak mümkündür.

6.5. Potansiyel Akımların Süperpozisyonu

Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz potansiyel akımları potansiyel ve akım fonksiyonu ile temsil eden Laplace denklemi lineer bir adi-diferansiyel denklem olup, bu özelliği süperpozisyon olanağı verir. Bu da potansiyel akım problemlerinin çözülmesinde büyük kolaylık sağlar.

Laplace denklemlerinin aynı (x, y) kartezyen koordinat sisteminde potansiyel fonksiyonu için $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$ gibi çeşitli çözümlerini göz önüne alalım. Bunlar için sırasıyla

$$\nabla^2 \phi_1 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\nabla^2 \phi_2 = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} = 0$$

....

yazmak mümkündür. Bu denklemler karşılıklı olarak toplandığı takdirde

$$\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} + \dots = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\phi_1 + \phi_2 + \dots) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\phi_1 + \phi_2 + \dots) = 0$$

veya $\phi_1 + \phi_2 + \dots = \phi$ yazılarak $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$

elde edilir.

Görüldüğü gibi Laplace denkleminin çözümleri toplandığı takdirde elde edilen fonksiyon da Laplace denkleminin yeni ve farklı bir çözümü olmaktadır. Buna göre Laplace denkleminin basit bazı çözümleri bilindiği takdirde daha karmaşık hallere ait çözümleri, basit çözümleri toplayarak elde etmek mümkün gözükmemektedir. Yapılan bu toplama işlemine literatürde süperpozisyon adı verilmektedir.

Süperpozisyonun benzeri şekilde akım fonksiyonları, kompleks potansiyel fonksiyonları ve kompleks hızlar için de yapılması mümkündür.

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 + \dots = \phi & \rightarrow (\phi_1 + i\psi_1) + (\phi_2 + i\psi_2) + \dots = \phi + i\psi & \rightarrow \boxed{f_1 + f_2 + \dots = f} \\ \psi_1 + \psi_2 + \dots = \psi & \end{aligned}$$

$$\frac{df_1}{dz} + \frac{df_2}{dz} + \dots = \frac{df}{dz} \rightarrow \boxed{w_1^* + w_2^* + \dots = w^*} \rightarrow \boxed{w_1 + w_2 + \dots = w}$$

6.6. Basit Akımlar

Literatürde basit akımlar olarak tanımlanan ve potansiyel akım problemlerinin çözümlerinde kullanılan akımları:

- Üniorm-paralel akım
- Kaynak (kuyu) akımı
- Girdap akımı
- Duple akımı

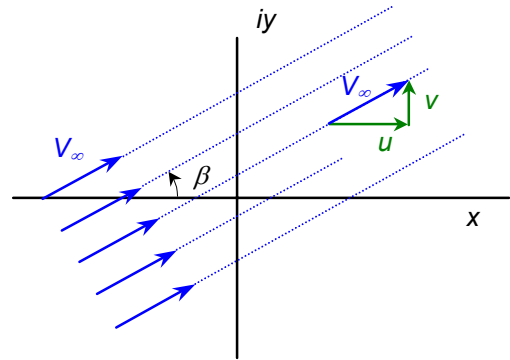
olarak sıralamak mümkündür.

Üniorm-Paralel Akım:

Şekilde görüldüğü gibi x eksenine ile β açısı yapan V_∞ hızındaki üniorm paralel akım göz önüne alınırsa potansiyel fonksiyonu ϕ , hız bileşenleri u ve v olmak üzere

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = V_\infty \cos \beta$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = V_\infty \sin \beta$$



bağıntıları yazılabilir. Bu bağıntılar integre edilerek

$$\begin{aligned} \phi &= V_\infty \cos \beta \cdot x + A(y) \\ \phi &= V_\infty \sin \beta \cdot y + B(x) \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \phi = V_\infty (x \cdot \cos \beta + y \cdot \sin \beta) + C$$

Akım fonksiyonu için de benzeri işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_\infty \cos \beta \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V_\infty \sin \beta \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \psi = V_\infty (y \cdot \cos \beta - x \cdot \sin \beta) + D$$

Buradaki C ve D sabitleri ne x ve ne de y 'ye bağlı olmayıp, değerleri keyfi olarak sıfır alınabilir.

Potansiyel ve akım fonksiyonları bir kompleks analitik fonksiyon şeklinde birleştirilerek

$$f(z) = \phi + i\psi = V_\infty [(x \cdot \cos \beta + y \cdot \sin \beta) + i(y \cdot \cos \beta - x \cdot \sin \beta)]$$

$$f(z) = V_\infty [(x + iy) \cos \beta + (y - ix) \sin \beta] = V_\infty [z \cos \beta - i(iy + x) \sin \beta]$$

$$f(z) = V_\infty [z \cos \beta - iz \sin \beta] = V_\infty z [\cos \beta - i \sin \beta]$$

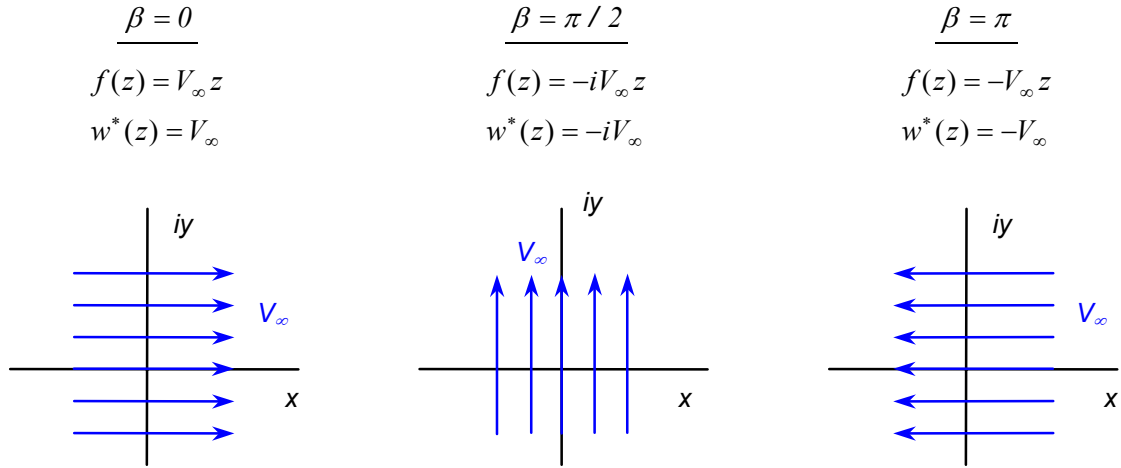
sonuç olarak Kompleks potansiyel fonksiyonu için

$$f(z) = V_{\infty} z e^{-i\beta}$$

ve buradan türev alınarak kompleks eşlenik hız için

$$w^*(z) = V_{\infty} e^{-i\beta}$$

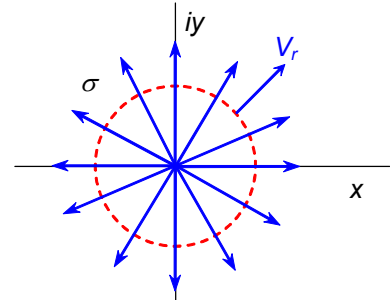
elde edilir. β 'nın çeşitli değerleri için özel olarak reel veya imajiner eksene paralel akım tipleri elde edilebilir



Kaynak (kuyu) Akımı:

Kaynak akımı bir noktadan radyal doğrultuda çıkan akım çizgilerinin oluşturduğu hayali bir akım şeklidir. Kaynak akımının debisi sabit olup, kaynak merkezli bir daire çemberi üzerindeki bütün noktalarda hız aynı şiddettedir.

Şekildeki gibi merkezi başlangıç noktasında yer alan ve hacimsal debisi σ olan bir kaynak için r yarıçaplı bir daire üzerinden geçen akım debisi yazılarak radyal hız



$$V_r 2\pi r = \sigma = Sb \quad \rightarrow \quad V_r = \sigma / 2\pi r$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan polar koordinatlarda hız bileşenleri için potansiyel ve akım fonksiyonları cinsinden

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

bağıntıları mevcuttur. Bu bağıntılar, V_r 'nin yukarıdaki değeri yanında $V_{\theta} = 0$ kullanılarak integre edilirse akım ve potansiyel fonksiyonları için sırasıyla

$$\phi = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{\sigma}{2\pi} \theta$$

elde edilir. Potansiyel ve akım fonksiyonları birleştirilerek kompleks potansiyel fonksiyonu için

$$f(z) = \phi + i\psi = \frac{\sigma}{2\pi} (\ln r + i\theta) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r e^{i\theta} \quad \rightarrow \quad \boxed{f(z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln z}$$

bulunur. Kompleks eşlenik hız da bu bağıntıdan türev alınarak

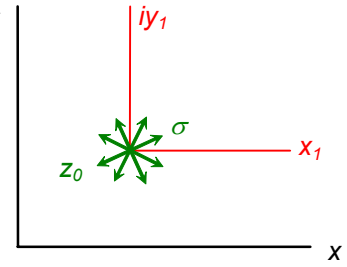
$$\boxed{w^*(z) = \frac{\sigma}{2\pi z}}$$

şeklinde elde edilir.

$\sigma > 0$ halinde z kompleks düzleminin başlangıç noktasındaki bir kaynağın yarattığı akım alanını temsil eden bu bağıntılar $\sigma < 0$ halinde bir kuyuyu temsil ederler.

z düzleminin başlangıç noktası dışındaki herhangi bir z_0 iy noktasında yer alan bir kaynak veya bir kuyunun yarattığı akıma ait kompleks potansiyel fonksiyonu ve kompleks eşlenik hız ise yukarıdaki bağıntılardan basit bir eksen kaydırması yoluyla

$$f(z) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln(z - z_0) \quad w^*(z) = \frac{\sigma}{2\pi(z - z_0)}$$

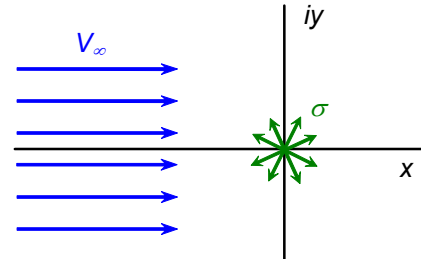


şeklinde elde edilebilir.

Süperpozisyon örneği: Ünitiform akımda kaynak

Şekilde görüldüğü gibi V_∞ hızındaki üniform-paralel akım ile başlangıç noktasında yer alan σ şiddetindeki kaynak akımına ait kompleks potansiyel fonksiyonları süperpoze edilerek

$$f(z) = V_\infty z + \frac{\sigma}{2\pi} \ln z$$



yazılabilir. Bu yeni kompleks potansiyel fonksiyonunun nasıl bir akımı temsil ettiğini görmek için akım çizgilerinin ve hız alanının birlikte incelenmesi yararlı olur. Bunun için fonksiyonun türevi alınarak ve ayrıca reel ve imajiner kısımları ayrılarak:

$$\boxed{\frac{df}{dz} = w^* = V_\infty + \frac{\sigma}{2\pi z}}$$

$$\phi + i\psi = V_\infty(x + iy) + \frac{\sigma}{2\pi} \ln r e^{i\theta} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi &= V_\infty x + \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \\ \psi &= V_\infty y + \frac{\sigma}{2\pi} \theta \end{aligned}}$$

elde edilir. Kompleks hız sıfıra eşitlenerek akım alanında durma noktası olup olmadığı araştırılır:

$$w^* = V_\infty + \frac{\sigma}{2\pi z} = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{z_d = -\frac{\sigma}{2\pi V_\infty}} \quad \rightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} r_d &= \frac{\sigma}{2\pi V_\infty} \\ \theta_d &= \pi \end{aligned} \right\} \quad \text{veya} \quad \left\{ \begin{aligned} x_d &= -\frac{\sigma}{2\pi V_\infty} \\ y_d &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Görüldüğü gibi bu akımda reel eksen üzerinde başlangıç noktasının sol tarafında bir durma noktası bulunmaktadır.

Durma noktasının koordinatları akım fonksiyonu için bulunan bağıntıda kullanılarak akım fonksiyonunun durma noktasından geçen akım çizgisi üzerindeki değeri, ve durma akım çizgisinin denklemi

$$\psi_d = \frac{\sigma}{2} = V_\infty y + \frac{\sigma}{2\pi} \theta \quad \rightarrow \quad \boxed{y = \frac{\sigma}{2\pi V_\infty} (\pi - \theta)} \quad \text{veya} \quad \boxed{r = \frac{\sigma}{2\pi V_\infty} \left(\frac{\pi - \theta}{\sin \theta} \right)}$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntılardan:

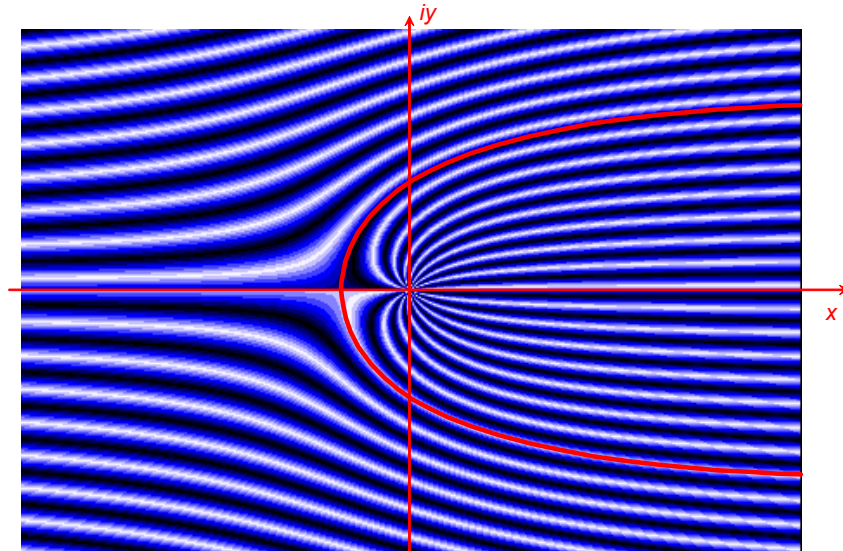
- $\theta = \pi$ için $y=0$ olduğu, yani reel eksenin sol yarısının bir akım çizgisi olduğu,

- $\theta = \pi/2$ için $y = r = \frac{\sigma}{4V_\infty}$ olduğu,

- $\theta \rightarrow 0$ için $y \rightarrow \frac{\sigma}{2V_\infty} = Sb$, yani reel eksenin sağ tarafında çok uzaklarda akım çizgisinin reel eksene paralel hale geldiği

görülmektedir. Bu akım çizgisini θ 'nın çeşitli değerlerine karşılık r 'nin değerlerini hesaplayarak çizmek mümkündür.

Akım fonksiyonun farklı değerleri için diğer akım çizgileri de çizilebilir. Akımın bir görüntüsü şekilde görülmekte olup, başlangıç noktası yakınlarında kaynak karakterine yakın, uzaklarda ise üniform-paralel akım karakterinde olduğu dikkati çekmektedir.



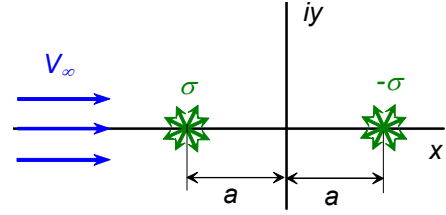
Burada kırmızı ile gösterilen, parabole benzer eğri akım alanını iki bölgeye ayırmakta olup, üniform-paralele akımdan gelen debi ile kaynaktan çıkan debi birbirine karışmamaktadır.

Süperpozisyon örneği: Üniform akımda kaynak ve kuyu

Şekildeki gibi soldan sağa doğru yönelmiş V_∞ hızındaki üniform-paralel akımda, reel eksen üzerinde ve başlangıç noktasından a uzaklıkta başlangıç noktasına göre simetrik konumlu olarak yer alan σ şiddetindeki bir kaynakla aynı şiddetteki bir kuyu için kompleks potansiyel fonksiyonu, ve kompleks eşlenik hız

$$f(z) = V_{\infty} z + \frac{\sigma}{2\pi} [\text{Ln}(z+a) - \text{Ln}(z-a)]$$

$$w^* = V_{\infty} + \frac{\sigma}{2\pi} \left(\frac{2a}{z^2 - a^2} \right)$$



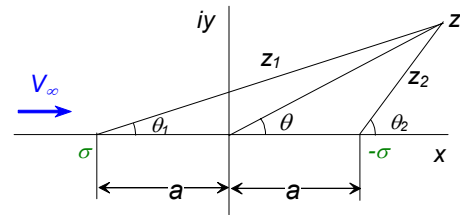
şeklinde yazılabilir. Kompleks eşlenik hız ifadesi sıfıra eşitlenerek

$$w^* = 0 \quad \rightarrow \quad z_d = \pm a \sqrt{1 + \frac{\sigma}{\pi a V_{\infty}}}$$

gibi iki durma noktası olduğu görülür. Kompleks potansiyel fonksiyonu

$$z + a = z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$$

$$z - a = z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$$



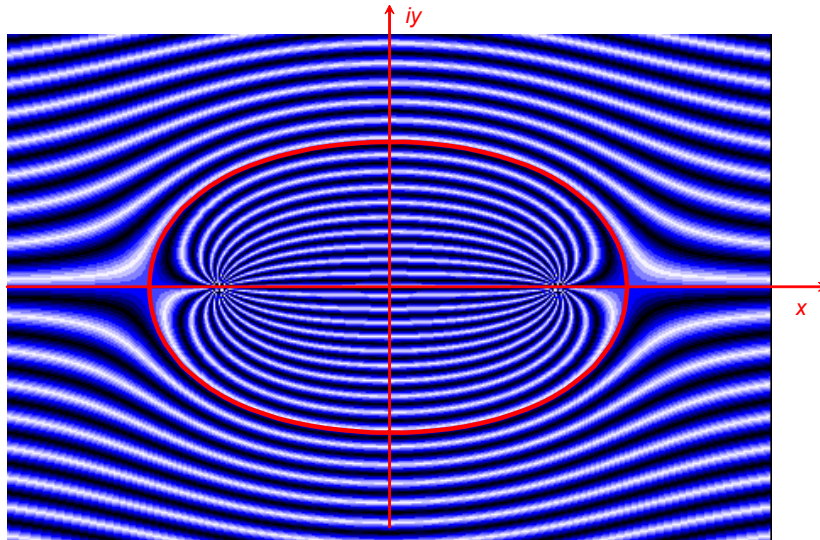
değişken dönüşümleri yardımıyla reel ve imajiner kısımlarına ayrılarak akım fonksiyonu için

$$\psi = V_{\infty} r \sin \theta - \frac{\sigma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$

elde edilebilir. Durma noktasında $\theta = 0$ ve $\theta_1 - \theta_2 = 0$ olup, durma noktasından geçen akım çizgisi üzerinde $\psi = 0$ olduğu görülür. Böylece durma noktasından geçen akım çizgisinin denklemi

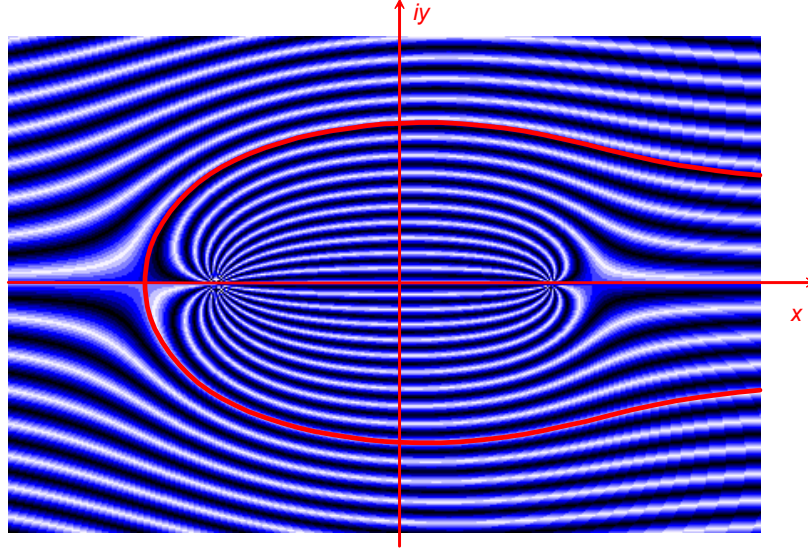
$$V_{\infty} r \sin \theta - \frac{\sigma}{2\pi} (\theta_2 - \theta_1) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu kapalı bir eğri olup literatürde Rankine ovali olarak adlandırılır. Kapalı eğrinin ve akım alanının bir görüntüsü şekilde yer almaktadır.

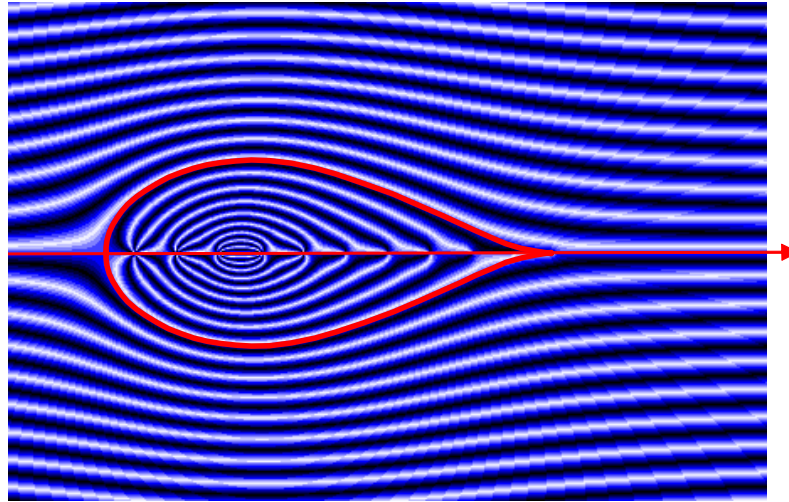


Durma noktasından geçen akım çizgisinin akım alanını iki kısma ayırdığı ve üniform akımla kaynaktan çıkan akımın birbirine karışmadığı dikkati çekmektedir.

Kuyuya giren debinin kaynaktan çıkan debiden az olması halinde kapalı bir akım çizgisi elde edilmez, şekilde görüldüğü gibi debinin bir kısmı üniform akıma karışır.



Üniform akım içinde birçok kaynak ve kuyuyu, şiddetleri toplamı sıfır olacak biçimde uygun kullanarak daha karmaşık geometriler etrafındaki potansiyel akım çözümlerini elde etmek mümkündür. Bir örnek şekilde görülmektedir.



NOT: Yukarıdaki bütün örneklerde üniform akımla birlikte sadece kaynak ve kuyu akımları kullanılmış olup, bunların toplam şiddetlerinin sıfır olması halinde kapalı akım çizgileri oluştuğu, ve bu akım çizgilerinin üniform akımla kaynak ve kuyuların akımlarını birbirine karıştırmadığı dikkati çekmektedir.

Bunun yanında bu örneklerin hiç birinde kapalı akım çizgileri etrafında herhangi bir sirkülasyon oluşmadığı da dikkati çekicidir.

Bu örneklere dayanarak kaynak ve kuyuların sirkülasyon etkisi değil ama kalınlık etkisi yaratan basit akımlar olduğunu belirtmek mümkündür.

Girdap Akımı:

Girdap, akım çizgileri eş merkezli daire çemberleri olan bir akım tipidir. Daire merkezleri girdap merkezi olarak adlandırılır. Bütün daireler üzerinde sirkülasyon aynı değere sahiptir. Bu sirkülasyon değeri girdabın şiddeti olarak tanımlanır.

Başlangıç noktasında yer alan bir girdabın yarattığı akım alanının bütün noktalarında radyal hız bileşenleri sıfır, herhangi bir akım çizgisi üzerindeki teğetsel hızlar ise sabittir.

Herhangi r yarıçaplı bir akım çizgisi üzerindeki teğetsel hız, sirkülasyon tanımı yardımıyla

$$\Gamma = V_{\theta} 2\pi r = \gamma \quad \rightarrow \quad V_{\theta} = \frac{\gamma}{2\pi r}$$

şeklinde elde edilir. Burada sirkülasyonun büyüklüğünü, γ ise girdabın şiddetini belirtmektedir.

Hız bileşenlerinin belirtilen değerleri potansiyel ve akım fonksiyonları için polar koordinatlarda daha öncede yazılan

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

bağıntılarında kullanılarak gerekli integraller alınır

$$\phi = \frac{\gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\gamma}{2\pi} \ln r$$

elde edilir. Bu iki fonksiyon birleştirilerek kompleks potansiyel fonksiyonu

$$f(z) = \phi + i\psi = \frac{\gamma}{2\pi} (\theta + i \ln r) = -\frac{i\gamma}{2\pi} \ln r e^{i\theta} \quad \rightarrow \quad f(z) = -\frac{i\gamma}{2\pi} \ln z$$

ve türev alınmak suretiyle kompleks eşlenik hız da

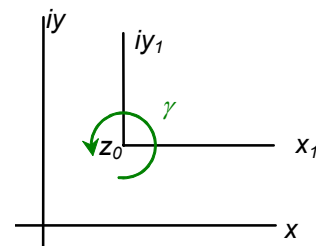
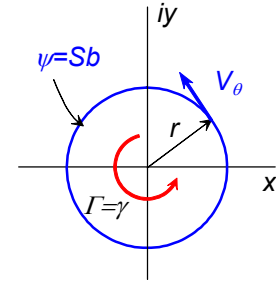
$$w^* = -\frac{i\gamma}{2\pi z}$$

şeklinde bulunur.

Herhangi bir z_0 noktasındaki girdap için kompleks potansiyel fonksiyonu, kaynak halinde olduğu gibi yine bir eksen kaydırmasıyla

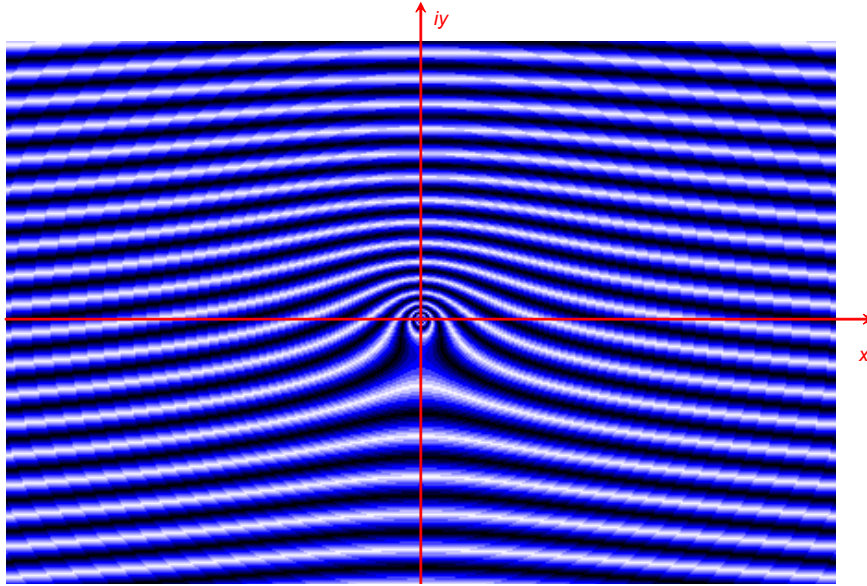
$$f(z) = -\frac{i\gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

şeklinde bulunabilir. $\gamma < 0$ hali saat ibreleri yönündeki bir girdabı ifade eder.



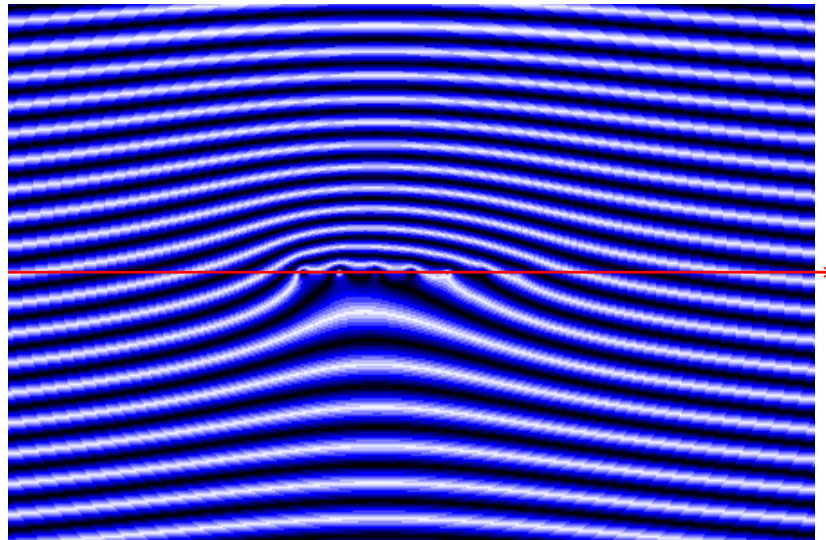
Süperpozisyon örneği: Ünitorm akımda girdap

Soldan sağa doğru üniform akım içerisinde başlangıç noktasında saat ibreleri yönünde bir girdap bulunması halindeki akım çizgileri şekilde görülmektedir.



Bu akımda girdap etkisiyle düzlemin üst yarısında hızların arttığı, alt yarısında ise azaldığı görülmektedir. Dolayısıyla başlangıç noktası etrafında saat ibreleri yönünde bir sirkülasyon oluştuğu anlaşılmaktadır.

Not: Bu akımda oluşan sirkülasyonun büyüklüğünün girdabın şiddetine eşit olduğunu göstermek mümkündür. Bu gösterim öğrencilere bırakılmıştır.

Süperpozisyon örneği: Ünitorm akımda sıralı girdaplar

Ünitorm akımda saat ibreleri yönünde farklı şiddetteki girdapların oluşturduğu akım alanı örnek olarak şekilde sunulmuştur. Akımda oluşan sirkülasyonun girdap şiddetlerinin toplamına eşit olacağı gösterilebilir.

Duble Akımı:

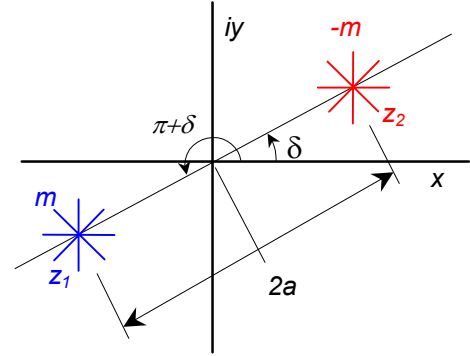
Duble, bir kaynakla aynı şiddetteki bir kuyunun, şiddetleri ile aralarındaki mesafenin çarpımı sabit kalmak üzere birbirlerine yaklaştırılmaları halinde limit durumda elde edilen bir özel basit akım tipidir.

Şekildeki gibi başlangıç noktasına eşit uzaklıkta ve simetrik konumlardaki eşit şiddetli bir kaynakla bir kuyunun oluşturduğu akım alanına ait kompleks potansiyel fonksiyonu

$$f(z) = \frac{m}{2\pi} [\text{Ln}(z + ae^{i\delta}) - \text{Ln}(z - ae^{i\delta})]$$

veya $\mu = 2a \cdot m$ olmak üzere

$$f(z) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\text{Ln}(z + ae^{i\delta}) - \text{Ln}(z - ae^{i\delta})}{a}$$



şeklinde yazılabilir. Duple tanımı gereği limit alındığı takdirde

$$f(z) = \frac{\mu}{4\pi} \lim_{2a \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(z + ae^{i\delta}) - \text{Ln}(z - ae^{i\delta})}{a} = \frac{0}{0}$$

belirsizliği gidermek için bu ifadenin pay ve paydasının ayrı ayrı a 'ya göre türevleri alınıp Hospital kuralı uygulanarak dublenin kompleks potansiyel fonksiyonu,

$$f(z) = \frac{\mu}{4\pi} \lim_{2a \rightarrow 0} \frac{\frac{e^{i\delta}}{z + ae^{i\delta}} - \frac{-e^{i\delta}}{z - ae^{i\delta}}}{1} \rightarrow \boxed{f(z) = \frac{\mu e^{i\delta}}{2\pi z}}$$

ve türev alınarak kompleks eşlenik hız

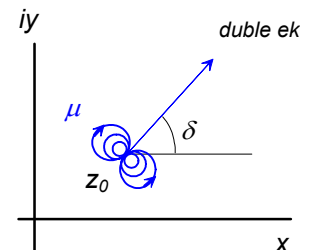
$$\boxed{w^*(z) = \frac{\mu e^{i\delta}}{2\pi z^2}}$$

şeklinde bulunur. Burada μ dublenin şiddetini, δ ise duple ekseninin açısını belirtmektedir. Dublenin merkezi başlangıç noktasında yer almaktadır.

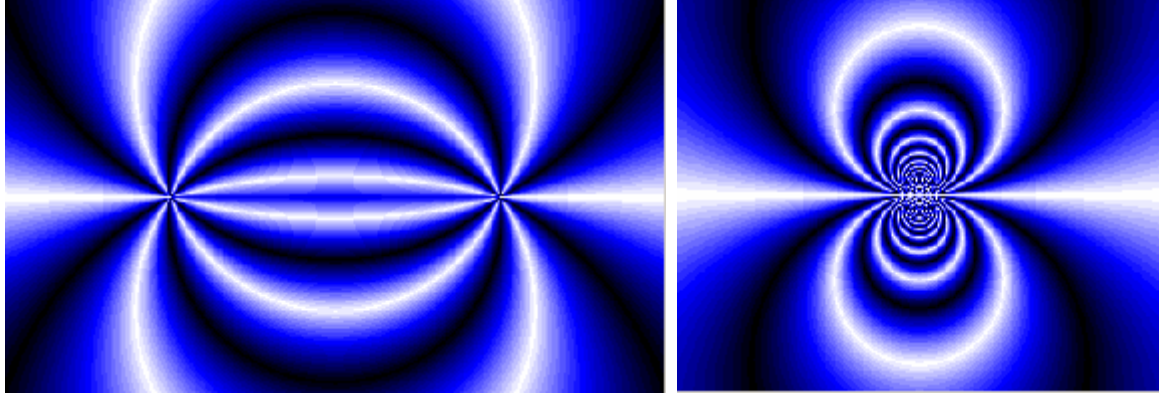
Herhangi bir z_0 noktasında yer alan dublenin kompleks potansiyeli, eksen kaydırma yoluyla

$$f(z) = \frac{\mu e^{i\delta}}{2\pi(z - z_0)}$$

şeklinde bulunabilir.



Şekilde solda reel eksen üzerinde yer alan aynı şiddetli bir kaynak ve bir kuyunun oluşturduğu akım alanı, sağda ise bir dublenin yarattığı akım alanı görülmektedir.



Not: Aynı şiddette, zıt yönlü iki girdabın şiddetleri ile aralarındaki uzaklık çarpımını aynı kalmak kaydıyla birbirlerine sonsuz yaklaştırılması halinde de duble akımı elde edilebilir. Bunun gösterilimi bir uygulama olarak öğrencilere bırakılmıştır.

6.7. Dairesel Silindir Etrafındaki Potansiyel Akım

Aerodinamikte en önemli süperpozisyon örneklerinden birisi dairesel silindir etrafındaki potansiyel akım çözümünün elde edilmesinde kullanılanıdır.

Üniform-paralel akım içerisine bir duble yerleştirilmesi halinde dairesel silindir etrafındaki simetrik (sirkülasyonsuz) potansiyel akım çözümünü elde etmek, aynı akımda daire merkezine bir girdap konulması halinde de dairesel silindir etrafındaki sirkülasyonlu potansiyel akım çözümünü elde etmek mümkün olur.

Dairesel silindir etrafında sirkülasyonsuz (simetrik) akım

z kompleks düzleminde reel eksene paralel olarak soldan-sağa doğru akan V_∞ hızındaki üniform-paralel akımla, başlangıç noktasında yer alan, eksenini reel eksenle aynı doğrultu ve yönde olan μ şiddetindeki bir dublenin kompleks potansiyel fonksiyonları süperpoze edildiği takdirde bu iki basit akımın oluşturduğu yeni akım alanına ait kompleks potansiyel fonksiyonu

$$f(z) = V_\infty z + \frac{\mu}{2\pi z}$$

veya

$$\frac{\mu}{2\pi V_\infty} = a^2$$

olmak üzere

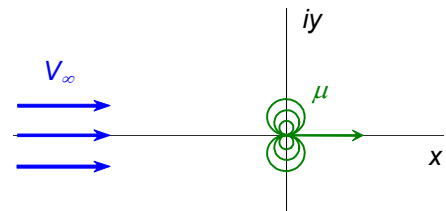
$$f(z) = V_\infty \left(z + \frac{a^2}{z} \right)$$

şeklinde elde edilir. Türev alınarak kompleks eşlenik hız

$$w^*(z) = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right)$$

ve $w^*(z) = 0$ yazılarak akımın durma noktaları

$$z_d = \pm a$$



olarak bulunur. Durma noktaları reel eksen üzerinde başlangıç noktasına göre simetrik konumludur.

Yukarıda yazılan kompleks potansiyel fonksiyonu reel ve imajiner kısımlarına ayrılarak akım fonksiyonu için

$$\psi = V_{\infty} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

bulunabilir. Durma noktasında $r = a$, $\theta = 0, \pi$ olup, durma noktasından geçen akım çizgisi üzerinde $\psi = 0$ olduğu görülür. Böylece durma akım çizgisinin denklemi

$$V_{\infty} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta = 0$$

olarak elde edilir. Bu denklem

$$\sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = 0, \pi$$

$$r - \frac{a^2}{r} = 0 \quad \rightarrow \quad r = a = Sb$$

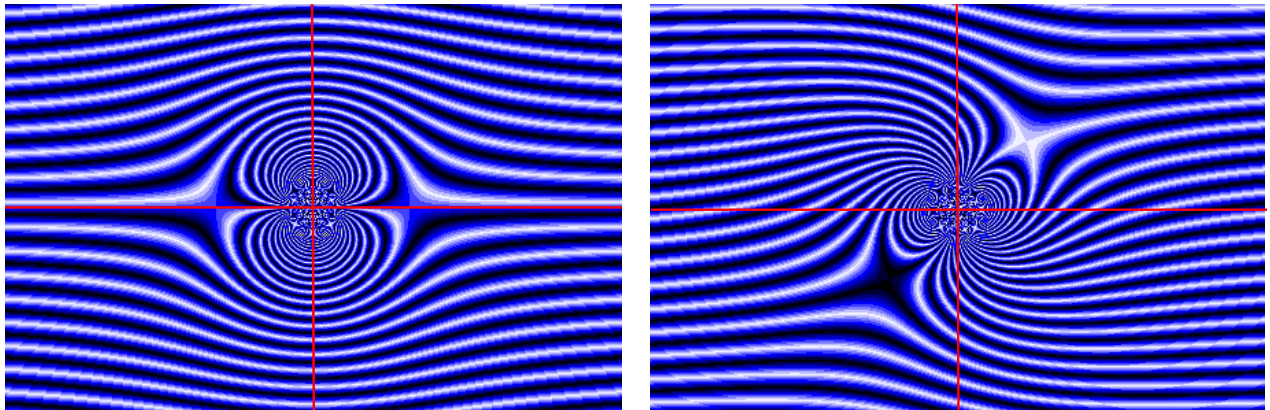
şeklinde iki çözüm vermekte olup, bu çözümlerden ilki reel eksen, ikincisi ise a yarıçaplı bir daireyi belirtmektedir.

Akım çizgisinin katılaştırılabilme prensibi gereği daireyi bir katı cidar gibi düşünerek sadece dışındaki akımla ilgilenmek mümkündür. Bu durumda, üniform akımla bir dublenin süperpozisyonu yoluyla ortaya çıkan kompleks potansiyel fonksiyonunun, merkezi başlangıç noktasında yer alan a yarıçaplı bir daire etrafındaki potansiyel akımı temsil ettiği görülür.

Bu akıma ait diğer akım çizgileri, akım fonksiyonu için elde edilen bağıntıda ψ yerine çeşitli $\psi_c = Sb$ değerleri yerleştirilerek bulunan

$$\psi_c = V_{\infty} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta$$

denkleminin çözümüyle elde edilebilir. Daire etrafındaki akım çizgilerinin bir görünümü aşağıdaki şekilde sunulmuştur.



Uyarı: Duple ekseninin üniform paralel akımla aynı doğrultu ve yönde olmaması halinde daire etrafındaki akım çözümünü elde etmek mümkün olamaz. Buna ilişkin bir örnek, duple ekseninin üniform paralel akım doğrultusuna dik olması hali için yine yukarıdaki şekilde görülmektedir.

Akım alanının herhangi bir noktasındaki hızın şiddet ve doğrultusu yukarıda kompleks eşlenik hızlar için bulunan bağıntı yardımıyla hesaplanabilir. Aynı bağıntıda $z = ae^{i\theta}$ yazılarak daire çemberi üzerindeki hızları elde etmek mümkündür:

$$w^*(z) = V_\infty \left(1 - \frac{a^2}{a^2 e^{i2\theta}} \right) = ie^{-i\theta} 2V_\infty \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right) = ie^{-i\theta} 2V_\infty \sin \theta$$

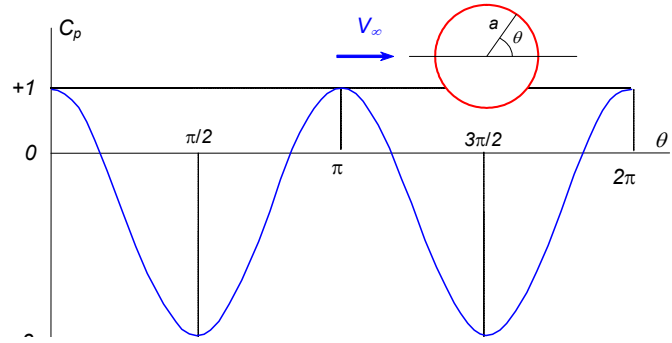
Akımın daire çemberine teğet olduğu bilindiğine göre burada hızın şiddetinin hesaplanması yeterlidir. Son ifadenin modülü alınarak daire çemberi üzerinde hızlar açılal konuma bağlı olarak

$$V(\theta) = 2V_\infty |\sin \theta|$$

şeklinde ve basınç katsayıları da Bernoulli denklemi yardımıyla

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

şeklinde elde edilir. Basınç katsayılarının değişimi şekilde görülmektedir.



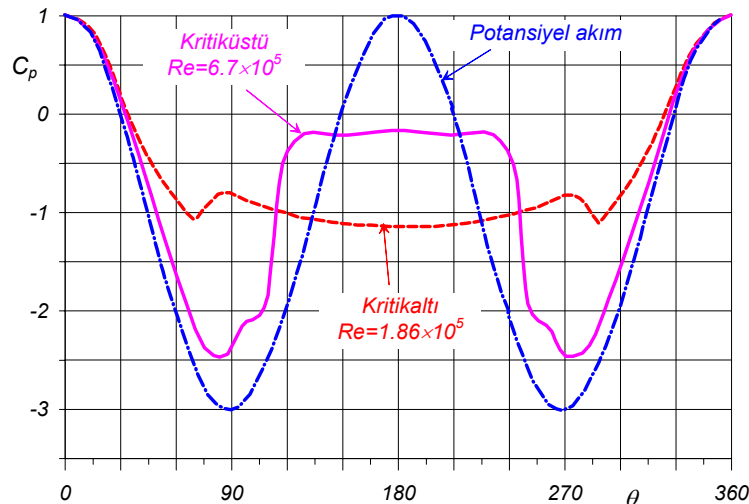
Daire etrafındaki potansiyel akımda daire çemberinin en üst ve en alt noktalarında ($\theta = \pm\pi/2$) akım hızı serbest akım hızının 2 katı olduğu gibi basınç katsayısının değeri de -3 olmaktadır. Ayrıca

$$C_p = 1 - 4 \sin^2 \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \sin \theta = \pm 1/2 \quad \rightarrow \quad \theta = \pm\pi/6, \pm(\pi - \pi/6)$$

noktalarında basınç katsayısı sıfır olmaktadır.

Basınç katsayılarının hem x eksenine ve hem de y eksenine göre simetri göstermesi nedeniyle dairesel silindire herhangi bir taşıma ve sürüklenme kuvveti etkimemektedir. Ayrıca daire etrafında bir sirkülasyon oluşmamaktadır.

Daire etrafındaki potansiyel akım çözümünün değerlendirilmesi açısından gerçek akımla yapılmış karşılaştırmalara aşağıdaki şekilde yer verilmiştir.



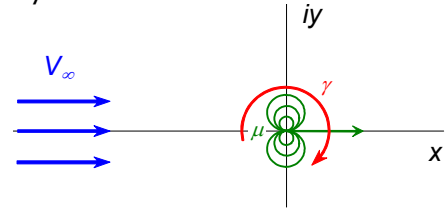
Görüldüğü gibi potansiyel akım çözümü ile elde edilen basınç dağılımı gerçek akımdaki basınç dağılımlarından hayli farklıdır. Buna rağmen bu çözümle ilgilenilmesinin nedeni, bilinen en basit çözümlerden birisi olması, bazı sayısal çalışmalar için test hali olarak değerlendirilmesi ve daire etrafındaki çözümden yararlanarak konform dönüşüm teknikleriyle kanat profilleri etrafındaki potansiyel akım çözümlerinin elde edilebilmesidir.

Dairesel silindir etrafında sirkülasyonlu akım

Önceki paragrafta üniform paralel akımla dublenin süperpozisyonu ile incelenen akıma, daire merkezinde yer alan, saat ibreleri yönünde γ şiddetindeki bir girdabın da ilave edilmesi halinde daire etrafındaki akımın sirkülasyonlu hale geldiği görülür.

Bu durumda akımı temsil eden kompleks potansiyel fonksiyonu

$$f(z) = V_{\infty} \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a}$$



şeklinde yazılabilir. Bu ifadenin reel ve imajiner kısımları ayrılarak akım fonksiyonu

$$\psi = V_{\infty} \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{a}$$

şeklinde elde edilebilir. Bu bağıntıdan $r=a$ için $\psi=0=Sb$ olduğu görülmektedir. Yani yine dairesel bir akım çizgisi mevcuttur.

Kompleks potansiyel fonksiyonunun türevi alınarak kompleks hızın eşleniği için

$$w^*(z) = V_{\infty} \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\gamma}{2\pi z}$$

elde edilir. Daire üzerindeki hızları elde etmek için $r = a$ olmak üzere bu ifade

$$w^*(z) = ie^{-i\theta} 2V_{\infty} \left(\sin \theta + \frac{\gamma}{4\pi a V_{\infty}} \right)$$

şeklinde düzenlenerek modülü alınırsa hızların şiddeti için

$$V(\theta) = 2V_{\infty} \left| \sin \theta + \frac{\gamma}{4\pi a V_{\infty}} \right|$$

bulunur. Bu hız dağılımı bütün daire etrafında integre edildiği takdirde daire etrafındaki sirkülasyonun

$$\Gamma = \oint V(\theta) a d\theta \quad \rightarrow \quad \boxed{\Gamma = \gamma}$$

şeklinde daire merkezine konulan girdabın şiddetine eşit olduğu görülebilir.

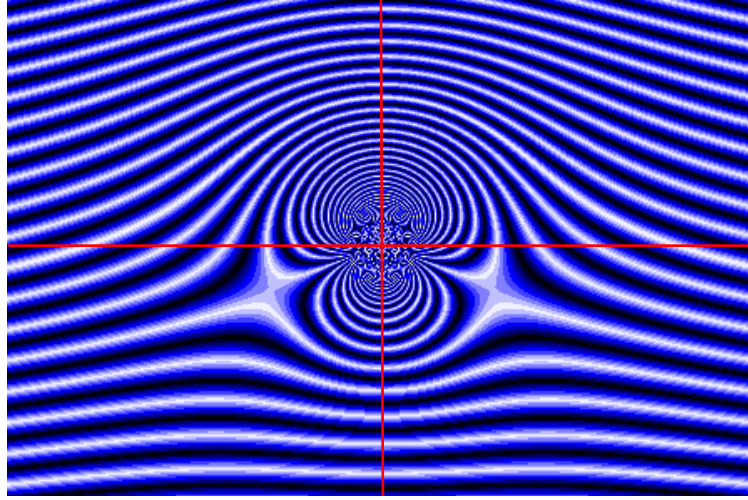
Durma noktasının yerini bulmak için yine $V(\theta)=0$ yazmak yeterlidir. Bu noktanın daire üzerindeki açisal konumu θ_0 ile belirtilirse

$$\sin \theta_0 = -\frac{\gamma}{4\pi a V_\infty} \rightarrow \theta_0 = \sin^{-1}\left(\frac{\gamma}{4\pi a V_\infty}\right) \text{ ve } \theta_0 = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{\gamma}{4\pi a V_\infty}\right)$$

olmak üzere iki durma noktası mevcut olduğu görülür.

Durma noktalarının konumları girdabın şiddetine bağlıdır. γ saat ibreleri yönünde ve pozitif bir büyüklük olarak seçilmişse durma noktalarının dairenin alt tarafında yer alacağı ve akımın sirkülasyonsuz halde olduğunun aksine reel eksene göre simetrik olmayacağı açıktır.

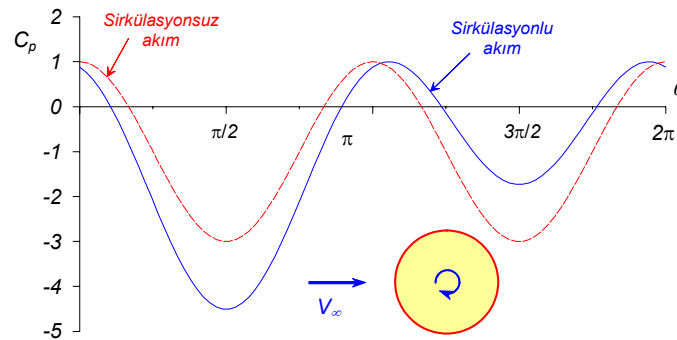
Daire etrafındaki sirkülasyonlu akıma ait akım çizgilerinin tipik bir görünümü şekilde verilmiştir.



Daire etrafındaki basınç katsayıları yine Bernoulli denklemi yardımıyla hızlara bağlanarak

$$C_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 = 1 - 4\left(\sin \theta + \frac{\gamma}{4\pi a V_\infty}\right)^2$$

şeklinde elde edilebilir. Sirkülasyonlu akım halinde tipik bir basınç dağılımı şekilde sirkülasyonsuz halle karşılaştırmalı olarak sunulmuştur. Görüldüğü gibi sirkülasyonun etkisiyle basınç dağılımının x eksenine etrafındaki simetrisi bozulmuştur. Ancak y eksenine etrafında halen bir simetri mevcuttur.



Bu durumda daireye x ve y doğrultusunda etkiyen kuvvetler de

$$C_x = \oint C_p d(y/2a), \quad C_y = \oint C_p d(x/2a)$$

integrallerinde C_p 'nin yukarıdaki değeri kullanılarak

$$C_x = 0, \quad C_y = \gamma / aV_\infty$$

olmak üzere elde edilir. Buna göre potansiyel akımda daireye hiçbir sürüklenme kuvveti etkilediği görülmektedir. y doğrultusundaki kuvvetin de aslında bir taşıma kuvveti olduğu göz önüne alınırsa, taşıma katsayısının tanımı da kullanılarak

$$L = \rho V_\infty \Gamma$$

olduğu görülür. Taşımanın doğrudan daire etrafındaki sirkülasyonla orantılı olduğunu belirten bu bağıntı literatürde Lanchester-Joukowsky taşıma kanunu olarak bilinir.

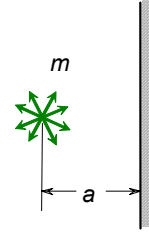
Örnek Sorular

- 1- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz, potansiyel akım probleminin potansiyel fonksiyonu için Laplace denklemi ile modellenebileceğini gösteriniz.
- 2- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz, potansiyel akım probleminin akım fonksiyonu için Laplace denklemi ile modellenebileceğini gösteriniz.
- 3- Üniiform-paralel akımda yer alan bir kanat profili etrafındaki daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz potansiyel akım problemini potansiyel ve akım fonksiyonu cinsinden tanımlayınız. Elde edilecek çözümden nasıl yararlanılabileceğini açıklayınız.
- 4- z kompleks düzleminde $f(z)$ kompleks potansiyel fonksiyonunun türevinin hangi doğrultuda alınırsa alsın daima $w^*(z)$ eşlenik hız fonksiyonuna eşit olacağını gösteriniz
- 5- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz potansiyel akımlar için süperpozisyon ilkesini ve bunun pratikte ne işe yarayacağını açıklayınız.
- 6- Üniiform-paralel akımlar için tanımlanan $f(z) = V_\infty e^{-i\beta} z$ kompleks fonksiyonunun analitik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.
- 7- Potansiyel kaynak için tanımlanan $f(z) = Q/(2\pi) \ln z$ kompleks fonksiyonunun analitik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.
- 8- Potansiyel girdap için tanımlanan $f(z) = -i\gamma/(2\pi) \ln z$ kompleks fonksiyonunun analitik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.
- 9- Duple için tanımlanan $f(z) = \mu e^{i\delta} / (2\pi z)$ kompleks fonksiyonunun analitik bir fonksiyon olduğunu gösteriniz.
- 10- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz üniiform-paralel akımda bir sirkülasyon olmayacağını gösteriniz.
- 11- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz, potansiyel kaynak akımında bir sirkülasyon olmayacağını gösteriniz.
- 12- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz, potansiyel duple akımında bir sirkülasyon olmayacağını gösteriniz.
- 13- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz, potansiyel girdap akımında girdap merkezinin etrafında bir sirkülasyon oluşacağını ve büyüklüğünün girdap şiddetine eşit olacağını gösteriniz.
- 14- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz, potansiyel akım halinde üniiform-paralel akım içinde bir kaynak bulunması halinde herhangi bir sirkülasyon olmayacağını gösteriniz.
- 15- Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz, potansiyel akım halinde üniiform-paralel akım içinde bir girdap bulunması halinde girdap merkezinin etrafında bir sirkülasyon oluşacağını ve büyüklüğünün girdap şiddetine eşit olacağını gösteriniz.
- 16- Bir duvarın yakınında bir kaynak bulunması halinde oluşan akım alanını, kaynağın duvara göre simetrik konumlanmış bir imajını alarak incelemek mümkündür. Buna göre;

a) sonsuz genişlikteki bir duvardan a uzaklıkta yer alan m şiddetindeki bir kaynak nedeniyle duvar üzerinde oluşan basınç dağılımını hesaplayınız.

b) Duvarın gerisindeki basıncı toplam basınca eşit kabul ederek duvara etkiyen bileşke basınç kuvvetinin şiddetini ve doğrultusunu hesaplayınız.

(Not: Toplam basıncı p_T olarak alınız)

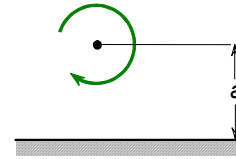


17- Bir duvarın yakınında yer alan bir girdabın oluşturduğu potansiyel akım alanını, bu girdapla duvara göre simetrik bir konumda yer alan zıt yönlü bir girdabı süperpoze ederek incelemek mümkündür. Buna göre;

a) Yatay bir duvarın a kadar yukarısında yer alan saat ibreleri yönünde Γ şiddetindeki bir girdabın oluşturduğu akımın kompleks potansiyel fonksiyonunu elde ediniz.

b) Duvar boyunca ve girdap hizasında duvara dik bir eksen boyunca hız dağılımlarını inceleyiniz.

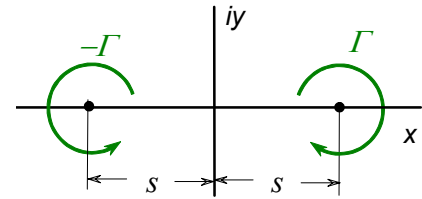
c) Aynı girdabın duvara paralel ve soldan sağa doğru yönlendirilmiş bir üniform-paralel akım içerisinde yer alması halini inceleyiniz.



18- z Kompleks düzleminde $z=s$ noktasında yer alan saat ibreleri yönünde Γ şiddetindeki bir girdapla, $z=-s$ noktasında yer alan, saat ibrelerine zıt yönde Γ şiddetine sahip diğer bir girdabın teşkil ettiği sıkıştırılmaz potansiyel akım alanında

a) Akım çizgilerinin denklemini elde ederek, akım çizgilerinin temsili şeklini çiziniz.

b) İmajiner eksen boyunca hızın değişimini inceleyiniz.



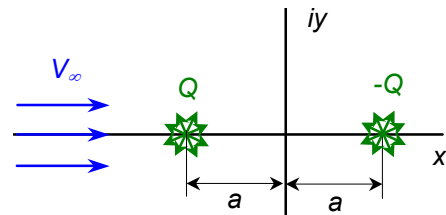
19- z kompleks düzleminde reel eksenle aynı doğrultu ve yönde akmakta olan V_∞ hızındaki üniform paralel akım ile reel eksen üzerinde $z=-a$ noktasında yer alan m şiddetindeki bir kaynak ve $z=a$ noktasında yer alan $-m$ şiddetindeki bir kuyu süperpoze edilerek bir **Rankine ovali** etrafındaki akım alanı elde edilebilir.

a) Bu akımın kompleks potansiyel ve kompleks eşlenik hız fonksiyonlarını yazınız.

b) Durma noktalarının yerlerini ve Rankin ovalinin boyunu yukarıdaki parametreler cinsinden bulunuz.

c) Potansiyel ve akım fonksiyonlarını bulunuz.

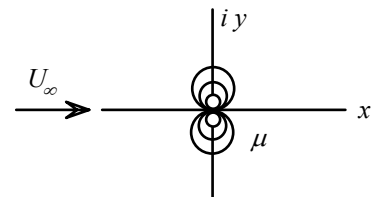
d) Reel eksen üzerinde başlangıç noktasından Rankin ovalinin boyunun iki katı uzaklıktaki bir noktada basınç katsayısının değerini bulunuz.



20- z Kompleks düzleminde başlangıç noktasında yer alan ve eksenini reel eksenle çakışık olan bir duble ile reel eksenle aynı doğrultu ve yönde bir üniform-paralel akım süperpoze edildiği taktirde:

a) Elde edilen akımda dairesel bir akım çizgisi olacağını gösteriniz.

b) Daire etrafındaki akımın irrotasyonel olacağını gösteriniz



c) Daire etrafındaki sirkülasyonun sıfır olacağını gösteriniz.

d) Akım alanının durma noktalarını ve daire üzerindeki basınç katsayılarını veren bağıntıları çıkartınız.

21- $a = 10 \text{ cm}$ çapındaki bir dairesel silindirin $V_\infty = 50 \text{ m/s}$ hızdaki üniform paralel akım içerisinde yer aldığı düşünülmektedir. Dairesel silindir etrafında daimi iki-boyutlu sıkıştırılmaz potansiyel akım alanı oluşturduğunu farz ederek C_p basınç katsayısının

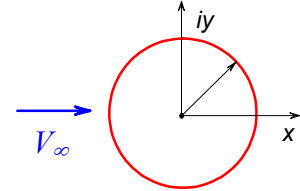
a) Dairesel silindirin yüzeyi boyunca

b) Dairesel silindirle aynı merkezli ve $4a$ yarıçaplı bir başka daire çemberi boyunca

c) x eksenini boyunca

d) y eksenini boyunca değişimlerini veren bağıntıları çıkartarak bu değişimleri grafik üzerinde gösteriniz.

e) Dairesel silindir yüzeyinden itibaren basınç katsayısının sıfır olduğu noktaların geometrik yerini veren bir bağıntı çıkartınız. Bu noktaları bir şekil üzerinde belirterek, dairesel silindir etrafında akımın serbest akıma nazaran daha hızlı ve daha yavaş olduğu bölgeleri belirtiniz.



22- z kompleks düzleminde reel eksene paralel ve zıt yönde, soldan sağa doğru akmakta olan üniform-paralel akımda başlangıç noktasında reel eksen doğrultusunda ve zıt yönde bir duble bulunması halinde bir dairesel silindir etrafındaki potansiyel akım probleminin modellenebileceğini gösteriniz.

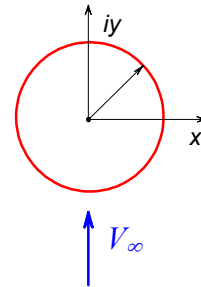
23- $z = x + iy$ kompleks düzleminde merkezi başlangıç noktasında yer alan $a = 5 \text{ cm}$ yarıçaplı bir daire şeklinde görüldüğü gibi y eksenine paralel ve aşağıdan yukarı doğru akmakta olan $U_\infty = 30 \text{ m/s}$ hızındaki bir üniform paralel akıma maruzdur. Daire etrafındaki akımın sirkülasyonsuz ve potansiyel olduğunu varsayarak:

a) Kompleks potansiyel fonksiyonunu ve kompleks eşlenik hızı yazınız.

b) x ve y eksenleri üzerinde daire merkezinden 20 cm uzaklıkta yer alan iki noktadaki hızları hesaplayınız.

c) Daire üzerinde hızın en küçük ve en büyük olduğu noktaları ve bu noktalardaki hızları tespit ediniz.

d) Basınç katsayısının sıfır olduğu noktaları tespit ederek, akımın serbest akım hızından daha küçük ve daha büyük olduğu bölgeleri bir şekil üzerinde belirtiniz.

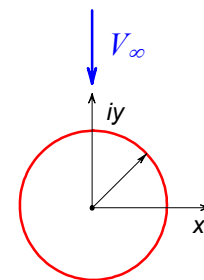


24- Şekildeki gibi yukarıdan aşağıya doğru üniform paralel akım içerisinde yer alan bir daire etrafındaki sıkıştırılmaz potansiyel akımı göz önüne alarak:

a) akım için kompleks potansiyel fonksiyonu yazınız. Akım fonksiyonunu bulunuz. Daire çemberinin bir akım çizgisi olduğunu gösteriniz.

b) Kompleks eşlenik hız fonksiyonunu yazınız. Durma noktalarının yerlerini belirleyiniz. $(2a, i4a)$ noktasındaki hızın şiddetini ve doğrultusunu belirleyiniz.

c) Daire çemberi üzerindeki basınç katsayılarının açılal konumla değişimini inceleyiniz. Bir şekil üzerinde gösteriniz. Aynı akım alanında $2a$ yarıçaplı bir daire çemberi üzerinde yer alan noktalardaki basınç katsayılarının açılal konumla değişimini inceleyiniz. İki basınç dağılımını karşılaştırıp daireden uzaklaşmanın etkisini yorumlayınız.



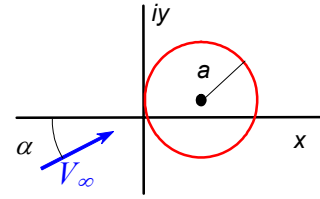
d) x ve y eksenleri boyunca basınç katsayılarının değişimlerini inceleyiniz. Grafiklerle gösterip yorumlayınız.

e) Serbest akım hızının ölçülmesi için bir pitot-statik tüpünün y eksenine konulduğunu düşünün. Serbest akım hızının ölçümündeki hatanın yüzde birden daha küçük olması için pitot-statik tüpü daire merkezinden en az ne kadar uzakta olmalıdır?

f) Önceki şıkki pitot-statik tüpünün x ekseninde olması hali için cevaplayınız. Sonucu önceki şıkla karşılaştırıp yorumlayınız.

25- z kompleks düzleminde reel eksenle 30° açı yapan 30 m/s hızındaki üniform paralel akımda, merkezi $z_0=2i+5$ (cm) noktasında olmak üzere yer alan 5 cm yarı çaplı daire etrafındaki potansiyel akımda:

- Kompleks potansiyel fonksiyonu yazınız.
- Kompleks eşlenik hız ifadesini bulunuz.
- Durma noktalarının yerlerini bulunuz.
- Daire etrafında hızın en büyük olduğu noktaları ve bu noktalardaki hızları bulunuz.



e) Bu iki noktadan birindeki hızın diğerinin iki katı olması için daire merkezine ne yönde ve hangi şiddetle bir girdap konulmalıdır?

26- Şekilde gösterilen daire etrafındaki sirkülasyonsuz akımı göz önüne alınız.

a) Akımı modellemek için daire merkezine yerleştirecek dublenin şiddeti ve ekseninin doğrultusu ne olmalıdır.

b) Daire merkezine bir girdap yerleştirildiğini farz ederek dairenin reel eksenine negatif tarafta kestiği A noktasının bir durma noktası olması için girdap şiddeti ve yönünün ne olacağını bulunuz.

c) Bu son durumda daireye etkiyecek aerodinamik kuvvetin yönünü ve şiddetini belirleyiniz. aynı durumda daire etrafındaki akım çizgilerini kabaca şekillendiriniz.

