

BÖLÜM 2

LAMİNER SINIR TABAKA

İNTEGRAL DENKLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

2.1- Giriş

2.2- İntegral momentum denklemi

2.3- İntegral momentum denkleminin çözümü

2.3.1- Pohlhausen yöntemi

2.3.2-Thwaites-Walz yöntemi

2.3.3-Emmeli ve enjeksiyonlu akımlar

2.4- İntegral enerji denklemi

2.5- İntegral enerji denkleminin çözümü

2.5.1- Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

BÖLÜM 2

LAMİNER SINIR TABAKA

İNTEGRAL DENKLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

2.1. Giriş

Bir sınır tabaka analizinden öncelikle beklenen bilgi yüzey sürtünme sürüklemesidir:

$$C_f(x) = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = ?$$

Bununla ilgili olarak herhangi bir noktada ayrılma olup olmadığı da araştırılır:

$$\tau_w = 0, \quad C_f(x) = 0 \quad ?$$

Şayet ısıtma veya soğutma varsa bununla ilgili olarak duvar üzerindeki ısı transferi hızının bilinmesi istenir:

$$q_w(x) = ?$$

Konsantrasyon gradyantının olduğu sınır tabakalarda duvar üzerinde kütle transfer hızı araştırılır:

$$\dot{m}_{iw}(x) = ?$$

Bütün bu öncelikli bilgiler yanında sınır tabakanın δ (ve δ_T ve/veya δ_c) kalınlığının bilinmesi yararlı olabilir.

Bazı tasarım çalışmalarında $u(x,y)$ hız dağılımının bilinmesine gerek olabilir.

Bu bölümde öncelikle $C_f(x)$ ve $\delta(x)$ büyüklüklerinin bulunmasına yönelik en basit yöntemler üzerinde durulurken incelemeler laminer halle sınırlı tutulacaktır. Bu şekilde ortaya konan bilgiler türbülanslı sınır tabakaların analizini kolaylaştıracaktır.

Yine başlangıçtaki incelemeleri kolaylaştırmak amacıyla daimi, sıkıştırılmaz (sabit yoğunluklu), sabit-özellikli akım hali ile sınırlı kalınacaktır.

Uygun analitik yaklaşımı formüle etmeye çalışırken öncelikle ilgilenilen bütün büyüklüklerin sadece akım doğrultusundaki x koordinatının bir fonksiyonu olduğu belirtilmelidir. Dik doğrultudaki koordinata olan bağımlılık daha az öneme sahip olup, bu husus incelemelerde bazı serbestiler sağlayacaktır.

2.2. İntegral momentum denklemi

Şekil 2.1 deki iki-boyutlu akım dikkate alınır, sınır tabaka nedeniyle duvar üzerinde hız sıfır olup, sınır tabakanın kenarında ($y=\delta$) dış (viskoz olmayan) akım hızına, $U_e(x)$ erişmektedir.

Şekilde görüldüğü gibi y doğrultusunda sonlu büyüklükte ($0 \leq y \leq H$) ve akım doğrultusunda diferansiyel büyüklükteki (dx) kontrol hacmini dikkate alalım. Burada x doğrultusu katı yüzeyi izlemekte olup, y doğrultusu duvara diktir.

Kontrol hacminin solundan giren kütle miktarı

$$\int_0^H \rho u dy$$

olup sağdan çıkan kütle miktarı da Taylor açılımının birinci terimi alınarak

$$\int_0^H \rho u dy + \frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u dy \right] dx$$

şeklinde yazılabilir. Akım daimi kabul edildiğine göre, şayet kontrol hacminden çıkan kütle miktarı ile giren kütle miktarı arasında bir fark varsa, kontrol hacmi içerisindeki kütle miktarının sabit kalabilmesi için bu farkın kontrol hacminin üst yüzeyinden geçmiş olması gerekir.

Duvarın geçirgen olması halinde, duvardan geçen debinin yukarıdaki debi farkından ayrıca çıkartılması gerekir.

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u dy \right] dx - \rho_w v_w dx$$

Burada v_w duvardan geçen akımın hızıdır.

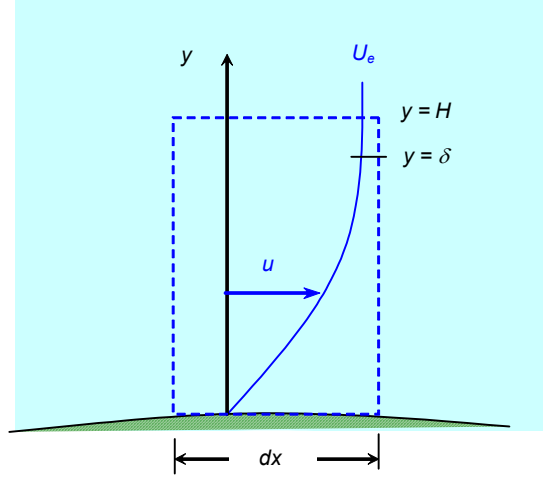
Kontrol hacminin sol tarafından giren momentum

$$\int_0^H \rho u^2 dy$$

ve sağından çıkan momentum da

$$\int_0^H \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u^2 dy \right] dx$$

şeklinde hesaplanabilir. Üst yüzeyden kontrol hacmine giren kütleler, dış akım hızıyla orantılı ve x doğrultusundaki bir momentumu da kontrol hacmine sokacaktır:



Şekil 2.1- İntegral momentum denklemi için kontrol hacmi

$$U_e(x) \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right]$$

Böylece kontrol hacmindeki net momentum değişimi

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u^2 dy \right] dx - U_e(x) \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right]$$

olur. Bu momentum değişimi kontrol hacmine x doğrultusunda etkiyen kuvvetlerle dengelenecektir.

Yer çekimi kuvvetleri ihmal edilebilir.

Sınır tabaka yaklaşımı gereği statik basınç y den bağımsızdır ($\partial p / \partial y \approx 0$). Kontrol hacminin sağ ve sol yüzleri vasıtasıyla etkiyen basınç kuvvetlerinin bileşkesi

$$-\left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) H + pH = -\left(\frac{dp}{dx} dx \right) H$$

olur.

Kontrol hacmini duvar üzerindeki yüzeyine akım yönüne zıt yönde bir yüzey sürtünmesi etkimekte olup, sınır tabaka laminer olduğundan bu kuvvet için

$$-\tau_w dx = -\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} dx$$

yazılabilir.

Kontrol hacminin üst yüzeyi sınır tabakanın dışında olduğundan bu yüzeye x- doğrultusunda etkiyen herhangi bir teğetsel kuvvet yoktur.

Momentum değişimi ve dış kuvvetler için yukarıda bulunan bağıntılar momentumun korunumu prensibinde kullanılarak

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u^2 dy \right] dx - U_e(x) \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right] = -\left(\frac{dp}{dx} dx \right) H - \tau_w dx$$

veya soldaki ikinci terim

$$U_e(x) \frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx = \frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u U_e(x) dy \right] dx - \frac{dU_e}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx$$

olmak üzere düzenlenerek

$$-\tau_w - H \frac{dp}{dx} = -\rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^H (U_e - u) u dy \right] + \frac{dU_e}{dx} \rho \left(\int_0^H u dy \right) + \rho v_w U_e$$

elde edilir. Bu son düzenlemede yoğunluğun sabit olduğu da dikkate alınmıştır.

Bu son bağıntı, basıncın dikey doğrultuda sabit kalması nedeniyle kenar hızları ile basınç arasında

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U_e \frac{dU_e}{dx}$$

şeklinde bir ilişki olduğu hatırlanarak ve

$$H = \int_0^H dy$$

yazarak

$$-\tau_w + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \left(\int_0^H dy \right) = -\rho \frac{d}{dx} \left[U_e^2 \int_0^H \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) \frac{u}{U_e} dy \right] + \frac{dU_e}{dx} \rho \left(U_e \int_0^H \frac{u}{U_e} dy \right) - \rho_w v_w U_e$$

veya

$$-\tau_w + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy = -\rho \frac{d}{dx} \left[U_e^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) \frac{u}{U_e} dy \right] - \rho_w v_w U_e$$

şeklinde veya buradaki integraller için

$$\theta \equiv \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) \frac{u}{U_e} dy$$

$$\delta^* \equiv \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

tanımlamaları yapılarak

$$-\tau_w + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \delta^* = -\rho \frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + \rho_w v_w U_e$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntı düzenlenerek

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

şekline gelir. “*Integral momentum denklemi*” veya “*von Karman integral denklemi*” olarak bilinen bu adi diferansiyel denklemin bütün değişkenleri sadece x koordinatın fonksiyonudur. Öncelikle aranan C_f sürtünme katsayısı denklemin içinde doğrudan bağımlı bir değişken olarak yer almaktadır. Denklemin çözümü için $U_e(x)$ hız dağılımının önceden bilinmesi gerekir. v_w sıfırdan farklı ise sınır koşulu olarak verilmesi gerekmektedir.

Von Karman denklemi kolay çözülebilecek bir denklem gibi gözükmeyle birlikte birden fazla bilinmeyen (C_f , θ , δ^*) içermektedir. Dolayısıyla çözüm için ilave bilgilere ihtiyaç vardır.

θ ve δ^* büyüklüklerinin yukarıda belirtilen tanımlamaları incelenirse, δ sınır tabaka kalınlığına bağlı uzunluk boyutunda büyüklükler oldukları görülür.

$$\delta^* \text{ için verilen} \quad \delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U_e} \right) dy$$

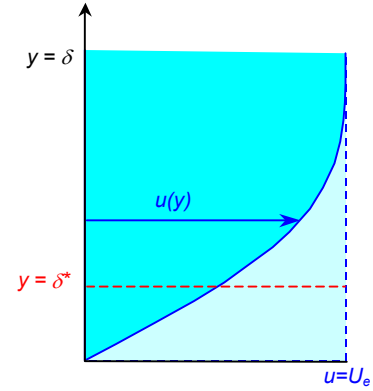
bağıntısı

$$\rho \delta^* U_e = \rho \int_0^{\delta} (U_e - u) dy = \rho U_e \int_0^{\delta} dy - \rho \int_0^{\delta} u dy$$

$$\rho \delta^* U_e = \rho U_e \delta - \rho \int_0^{\delta} u dy$$

şeklinde düzenlenirse bu eşitlikte

- soldaki terim δ^* kalınlığındaki bir tabaka içinde U_e dış akım hızıyla hareket eden akımın kütleli debisini,
- sağdaki ilk terim δ kalınlığındaki bir tabaka içinde U_e hızıyla hareket eden akımın kütleli debisini,
- sağdaki ikinci terim sınır tabaka içinde $u(y)$ hızıyla hareket eden akımın kütleli debisini belirtmektedir.



Şekil 2.2- Deplasman kalınlığı

belirtmektedir. Görüldüğü gibi sağdaki ikinci terim sınır tabaka içinden geçen akımın gerçek debisini belirtirken, sağdaki ilk terim sınır tabaka içerisinde dış akım hızında bir akım olması halindeki (viskoz olmayan akım hali) debiyi belirtmektedir. Soldaki terim ise bu iki debi arasındaki farkı göstermektedir.

Sonuç olarak δ^* büyüklüğü sürtünmenin akımı yavaşlatması nedeniyle sınır tabaka içerisinden geçemeyen debi ve dış akım hızı cinsinden tanımlanmış bir kalınlığı ifade etmektedir. Bu kalınlık "**öteleme (deplasman) kalınlığı**" olarak adlandırılır.

Sürtünme nedeniyle sınır tabaka içinden geçemeyen akışkan debisinin, süreklilik denklemi gereği sınır tabakanın dışından geçeceğini belirtmekte yarar vardır. Sınır tabakanın akım üzerindeki öteleme etkisi nedeniyle bir cismin etrafındaki gerçek basınç dağılımı potansiyel akım halindeki basınç dağılımından farklılık gösterir. Bu etki çoğu zaman sınır tabakanın deplasman etkisi olarak ifade edilir.

Benzeri bir inceleme θ büyüklüğü için yapılabilir. Nitekim

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy$$

bağıntısı

$$\rho \theta U_e^2 = \int_0^{\delta} \rho u U_e dy - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

şeklinde düzenlenirse:

- sağdaki ikinci terim sınır tabaka içerisinden geçen kütleli debinin taşıdığı momentumu,
- sağdaki ilk terim aynı kütleli debinin dış akım hızı ile geçmesi halinde taşıyacağı momentumu,
- soldaki terim ise θ kalınlığındaki bir tabaka içinden dış akım hızıyla geçen debinin taşıyacağı momentumu

belirtmektedir. Buna göre θ kalınlığı, sınır tabaka içerisinden geçen debinin dış akım hızı yerine viskoz akım hızıyla geçmesi sonucu ortaya çıkan momentum kaybı cinsinden

tanımlanmış bir kalınlığı temsil etmektedir. Bu kalınlık "*momentum kalınlığı*" olarak adlandırılmaktadır.

Sınır tabakanın δ kalınlığının doğru biçimde tespit edilmesi genellikle çok güçtür. Bu bakımdan sınır tabaka incelemelerinde çoğu zaman δ^* öteleme kalınlığının veya θ momentum kalınlığının kullanılması tercih edilir.

2.3. Momentum denkleminin çözümü

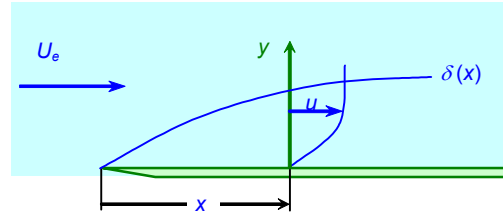
2.3.1. Pohlhausen yöntemi

Von Karman momentum denkleminin çözümüyle ilgili sorunun üç bilinmeyen (C_f , θ , δ^*) içermesi olduğu daha önce belirtilmişti. Ancak δ^* ve θ için yapılan

$$\theta \equiv \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy \quad \delta^* \equiv \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

şeklindeki tanımlamalar, bu büyüklüklerin sadece sınır tabaka içindeki $u(y)$ hız dağılımına bağlı olduğunu göstermektedir. Bu durumda, $u(y)$ hız dağılımının bir şekilde bilinmesi halinde integral momentum denkleminin çözümü için sorun kalmayacaktır.

Mümkün olabilecek en basit sınır tabaka problemi $U_e = sb$ hızındaki üniform serbest akıma paralel, geçirgen olmayan ($v_w = 0$) bir düz levha üzerindeki sınır tabaka problemidir. Bu problem için



$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

momentum denklemi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

şeklinde basitleşir.

Sınır tabaka içinde, duvar üzerindeki $u=0$ ve dış sınırdaki $u(\delta)=U_e$ koşullarını sağlayabilecek

en basit hız dağılımı *lineer dağılım*dır:

$$\frac{u}{U_e} = \zeta, \quad \zeta = \frac{y}{\delta}$$

Bu dağılım için

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{y}{\delta} dy = \left[\frac{y^2}{2\delta} - \frac{y^3}{3\delta} \right]_0^{\delta} = \frac{\delta}{6}$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{U_e}{\delta}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = \frac{\mu U_e}{\frac{1}{2}\rho U_e^2 \delta} = \frac{2\mu}{\rho U_e \delta}$$

olup, momentum denklemi

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{6\mu}{\rho U_e}$$

şekline gelir.

Bu denklemin sağ tarafındaki bütün büyüklükler sabit olup, $0-x$ aralığında integre edilerek, $\delta(0)=0$ olmak üzere

$$\frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U_e} x \quad \text{veya} \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{12(\mu/\rho)x}{U_e}}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenerek

$$\frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12\mu}{\rho U_e x}} \rightarrow \boxed{\frac{\delta}{x} = 3.46 \text{Re}_x^{-1/2}} \quad \boxed{\text{Re}_x = \frac{\rho U_e x}{\mu}}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda yüzey gerilmesi ve sürtünme katsayısı için de sırasıyla

$$\tau_w = \mu \frac{U_e}{\delta} = \frac{\mu U_e}{\sqrt{12(\mu/\rho)x/U_e}}$$

$$C_f = \frac{2\mu}{\rho U_e \delta} = \frac{2\mu}{\rho U_e x 3.46 \text{Re}_x^{-1/2}} \rightarrow \boxed{C_f = 0.577 \text{Re}_x^{-1/2}}$$

elde edilir.

Basitleştirici yaklaşımlarla elde edilen bu çözümün ne ölçüde doğru olduğunu değerlendirmek için daha yüksek mertebeden yaklaşımların sonuçlarıyla bir karşılaştırma yapmak uygun olur. İlerleyen bölümlerde de görülecektir ki, bu problemin daha kesin bir çözümü

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = 5 \text{Re}_x^{-1/2}} \quad \boxed{C_f = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}}$$

sonuçlarını vermektedir. Görüldüğü gibi buradaki basit çözüm sınır tabaka kalınlığının ve yüzey sürtünme katsayısının Re sayısına nasıl bağlı olduğunu tahmin ederken orantı katsayılarını pek doğru bulamamaktadır.

Pohlhausen hız profilleri:

Pohlhausen daha doğru bir çözüm için sınır tabaka hız dağılımını, yüksek mertebeden

$$\boxed{\frac{u}{U_e} = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3 + e\zeta^4, \quad \zeta = \frac{y}{\delta}}$$

şeklinde önermiştir. Buradaki katsayıların bulunması için sınır tabakaya ait sınır koşullarından yararlanılacaktır. Nitekim Pohlhausen bu koşulları da

$$\text{Duvar üzerinde} \quad \boxed{y = 0, \quad u = 0, \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx}}$$

$$\text{Sınır tabakanın dış sınırında} \quad \boxed{y = \delta, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$

olmak üzere önermiştir. Bu sınır koşulları uygulanarak sabitlerin değerleri

$$a = 0, \quad b = 2 + \frac{\lambda}{6}, \quad c = -\frac{\lambda}{2}, \quad d = -2 + \frac{\lambda}{2}, \quad e = 1 - \frac{\lambda}{6}$$

ve hız profili de

$$\frac{u}{U_e} = \left(2 + \frac{\lambda}{6}\right)\zeta - \frac{\lambda}{2}\zeta^2 + \left(-2 + \frac{\lambda}{2}\right)\zeta^3 + \left(1 - \frac{\lambda}{6}\right)\zeta^4$$

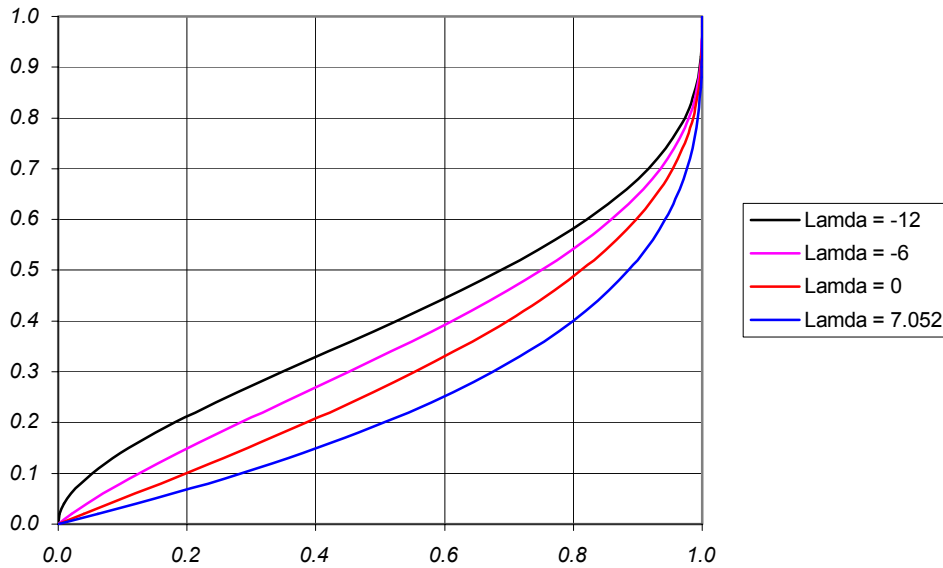
veya

$$\frac{u}{U_e} = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{\lambda}{6}(\zeta - 3\zeta^2 + 3\zeta^3 - \zeta^4)$$

$$\frac{u}{U_e} = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{\lambda}{6}\zeta(1 - \zeta)^3$$

şeklinde elde edilir. Burada $\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$ “*Pohlhausen basınç gradyanı parametresi*”

olarak bilinir. λ nın çeşitli değerleri için hız profilleri Şekil 2.3 de görülmektedir.



Şekil 2.3: Çeşitli basınç gradyanları için hız profilleri

Pohlhausen hız profili için gerekli hesaplar yapılarak

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120}; \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072}$$

$$\frac{C_f}{2} \frac{U_e \delta}{\nu} = 2 + \frac{\lambda}{6}$$

olduğu gösterilebilir. Fark edileceği gibi $\lambda = -12$ için $C_f = 0$ olup ayrılma oluşmaktadır.

2.3.2. Thwaites-Walz yöntemi

Integral momentum denklemi, yüzeyin geçirgen olmadığı halde sürtünme katsayısı yerine sürtünme gerilmesi cinsinden ifadesi tekrar yazılarak ve öteleme kalınlığının momentum kalınlığı ile oranı

$$\frac{\delta^*}{\theta} = H \quad \text{\textit{şekil parametresi}} \text{ ile belirtilerek} \quad \frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} (H + 2) = \frac{\tau_w \theta}{\mu U_e}$$

şeklinde düzenlenebilir. H şekil parametresi boyutsuz bir büyüklük olup, sadece sınır tabaka hız profinin şekline bağlıdır.

Denklemin sağındaki terim $S = \frac{\tau_w \theta}{\mu U_e}$ *kayma korelasyon fonksiyonu*

olarak adlandırılır. Ayrıca λ basınç gradyanti parametresi yerine yeni bir

$$\Lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad \text{\textit{Holstein-Bohlen basınç gradyanti parametresi}}$$

tanımlanarak momentum denklemi

$$\frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = S - \Lambda [H + 2]$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu denklemin sağındaki bütün büyüklüklerin sadece Λ basınç gradyanti parametresinin fonksiyonu olduğu görülebilir. Bu terimler

$$S(\Lambda) - \Lambda [H(\Lambda) + 2] = \frac{1}{2} F(\Lambda)$$

şeklinde bir tek $F(\Lambda)$ fonksiyonuyla ifade edilerek Λ 'nın pratikteki çeşitli değerleri için bu fonksiyonun değeri araştırılabilir. Nitekim Thwaites, çeşitli deneysel verileri, Pohlhausen hız profillerini ve başka kabul edilmiş hız profillerini ve bazı tam (exact) sınır tabaka çözümlerini kullanarak elde ettiği değerlere

$$F(\Lambda) = 0.45 - 6.0\Lambda$$

şeklinde bir doğru denklemi uydurmuştur. Fonksiyonun Thwaites tarafından önerilen bu değeriyle birlikte momentum deklemleri

$$2 \frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = 0.45 - 6.0\Lambda = 0.45 - 6 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad \rightarrow \quad 2U_e \theta \frac{d\theta}{dx} + 6\theta^2 \frac{dU_e}{dx} = 0.45\nu$$

şeklinde düzenlenerek ve her iki taraf U_e^5 ile çarpılarak

$$2U_e^6 \theta \frac{d\theta}{dx} + 6U_e^5 \theta^2 \frac{dU_e}{dx} = 0.45\nu U_e^5 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} (\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu U_e^5 \quad \rightarrow \quad d(\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu U_e^5 dx$$

ve bu eşitlik $0-x$ aralığında integre edilerek

$$(\theta^2 U_e^6)_x = (\theta^2 U_e^6)_{x=0} + 0.45v \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$$

veya düzenleme ile

$$\theta^2(x) = \theta^2(0) \left[\frac{U_e(0)}{U_e(x)} \right]^6 + \frac{0.45v}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$$

elde edilir. Düz levha hali için $\theta(0)=0$ ve küt cisimlerin de $U_e(0)=0$ olup bu eşitlikteki ilk terim ortadan kalkar.

$$\theta^2(x) = \frac{0.45v}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$$

Bu bağıntı küt bir cismin durma noktasında teklik göstermektedir. Ancak limit alınarak

$$\theta^2(0) = 0.45v \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}}{U_e^6(x)} = 0.45v \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U_e^5}{6U_e^5 (dU_e / dx)} = \frac{0.45v}{6(dU_e / dx)_{x=0}}$$

$$\theta^2(0) = \frac{0.075v}{(dU_e / dx)_0}$$

bulunur. Durma noktasındaki dış akım hız gradyanı, küt cismin hücum kenarındaki eğrilik yarıçapı R_0 ve serbest akım hızı U_∞ olmak üzere

$$\left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0 = 2 \frac{U_\infty}{R_0}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Dış akım hızının $U_e(x)$ dağılımı (örneğin bir potansiyel akım hesabıyla) verilen bir sınır tabakanın durma noktasından itibaren (duvar boyunca) istenilen bir x uzaklığındaki sınır tabaka özelliklerini hesabı için yapılacak işlemler aşağıdaki gibi sıralanabilir:

a) $\theta^2(x) = \frac{0.45v}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$ integrali ile $\theta(x)$ hesaplanır

b) $U_e(x)$ dağılımından dU_e/dx türevi hesaplanır.

c) $\Lambda = \frac{\theta^2}{v} \frac{dU_e}{dx}$ bağıntısıyla basınç gradyanı parametresinin $\Lambda(x)$ değeri hesaplanır

d) Λ 'nın çeşitli değerleri için $S(\Lambda)$ ve $H(\Lambda)$ fonksiyonlarının Thwaites tarafından hesaplanmış değerleri Tablo 2.1 de verilmiştir. Bulunan $\Lambda(x)$ değerine karşılık $S(x)$ ve $H(x)$ değerleri bu tablolar yardımıyla veya bu tablodaki değerlere uydurulan

$$0 \leq \Lambda \leq 0.1 \quad \text{aralığında} \quad \begin{aligned} S &= 0.22 + 1.57\Lambda - 1.80\Lambda^2 \\ H &= 2.61 - 3.75\Lambda + 5.24\Lambda^2 \end{aligned}$$

$$-0.1 \leq \Lambda \leq 0 \text{ aralığında} \quad S = 0.22 + 1.402\Lambda + \frac{0.018\Lambda}{\Lambda + 0.107}$$

$$H = 2.088 + \frac{0.0731}{\Lambda + 0.14}$$

formüller yardımıyla hesaplanır.

Tablo 2.1: Kayma ve şekil parametrelerinin basınç gradyanı ile değişimleri

Λ	$H(\Lambda)$	$S(\Lambda)$	δ/θ
0.100	2.28	0.359	8.5
0.080	2.34	0.333	8.2
0.064	2.39	0.313	8.2
0.048	2.44	0.291	8.1
0.032	2.49	0.268	8.1
0.016	2.55	0.244	8.0
0.000	2.61	0.220	8.0
-0.016	2.67	0.195	8.0
-0.032	2.75	0.168	8.0
-0.048	2.87	0.138	8.1
-0.064	3.04	0.104	8.1
-0.080	3.30	0.056	8.1
-0.084	3.39	0.038	8.2
-0.088	3.49	0.015	8.2
-0.090	3.55	0.000	8.2

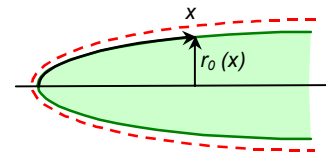
Bu tabloya δ/θ oranının yaklaşık değerleri de ilave edilmiştir.

e) $S = \frac{\tau_w \theta}{\mu U_e}$ ve $C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_e^2}$ bağıntılarından yüzey sürtünme katsayısı $C_f = 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{S}{U_e \theta}$ şeklinde hesaplanır.

Yukarıda izah edilen yöntem, bir çok deneysel ve teorik çalışmanın sonucuna dayanan bir $F(\Lambda)$ dağılımını dikkate alması nedeniyle Pohlhausen yöntemine kıyasla çok daha doğru sonuçlar vermektedir. Nitekim yöntemin olumlu basınç gradyanlarındaki hatası %10 un altındadır. Ancak olumsuz (ters) basınç gradyanlarında bu hata %20-30 mertebelerini bulabilmektedir.

Not: Eksenel simetrik sınır tabaka hali

Thwaites-Walz yöntemi Rott ve Crabtree tarafından eksenel simetrik cisimler etrafındaki eksenel sınır tabakalar için uyarlanmış olup, eksenel simetrik cismin yarıçapı $r_0(x)$ olmak üzere



$$\theta^2(x) = \frac{0.45\nu}{r_0^2(x)U_e^6(x)} \int_0^x r_0^2(\bar{x})U_e^5(\bar{x})d\bar{x}$$

şeklinde bir bağıntı elde etmişlerdir. Bu halde durma noktasındaki momentum kalınlığı

$$\theta^2(\theta) = \frac{0.0563 \nu}{(dU_e / dx)_0}$$

olarak bulunabilir. Durma noktasındaki hız gradyanı da

$$\left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0 = \frac{3 U_\infty}{2 R_0}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Örnek 2.1- Integral momentum denkleminin uygulaması

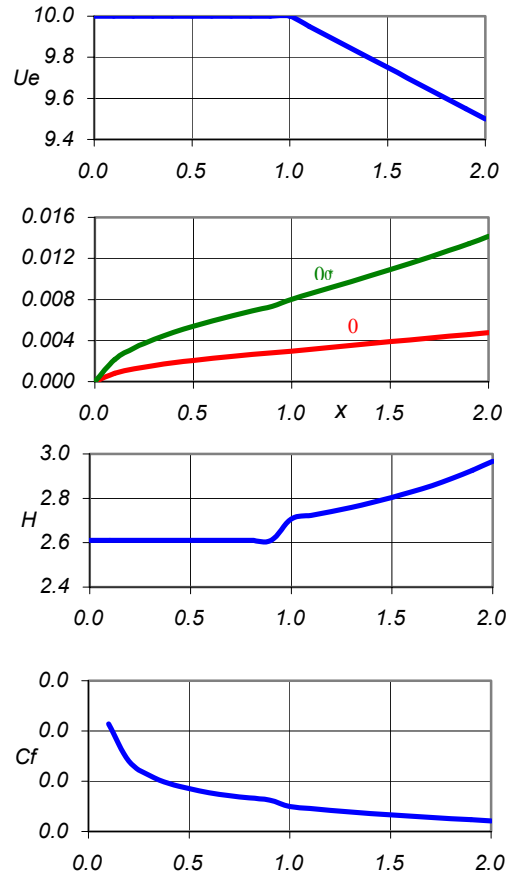
Kinematik viskozitesi $\nu = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir akışkanın 100 m/s hızdaki akımı içerisinde akıma paralel bir düz levhanın yer aldığı, levha hücum kenarının 10 m gerisinden itibaren bir rampa olduğunu ve bu rampa boyunca akım hızının $U_e(x) = 10.5 - x/2$ şeklinde değiştiğini varsayınız.

Bu levha üzerindeki sınır tabakayı $x = 2.0$ noktasına kadar hesaplayınız. Sınır tabaka ters basınç gradyanı etkisiyle ayrılır mı, tespit ediniz.

Düz levhanın hücum kenarında sınır tabakanın kalınlığı sıfır olacaktır. Yukarıda izah edilen yöntem kullanılarak ve x koordinatı $\Delta x = 0.05$ adım uzunluklarıyla değiştirilerek yapılan hesaplama sonuçları aşağıdaki tabloda ve grafikte görülmektedir.

$0 < x < 2$ aralığındaki bütün noktalarda $C_f > 0$ olup sınır tabakada ayrılma görülmemiştir.

n	x	U_e	θ	H	θ^*	C_f
0	0.00	10.00	0.00000	2.610	0.00000	-
1	0.10	10.00	0.00082	2.610	0.00214	0.01071
2	0.20	10.00	0.00125	2.610	0.00328	0.00701
3	0.30	10.00	0.00157	2.610	0.00411	0.00559
4	0.40	10.00	0.00184	2.610	0.00479	0.00479
5	0.50	10.00	0.00207	2.610	0.00540	0.00426
6	0.60	10.00	0.00227	2.610	0.00594	0.00387
7	0.70	10.00	0.00246	2.610	0.00643	0.00357
8	0.80	10.00	0.00264	2.610	0.00689	0.00333
9	0.90	10.00	0.00281	2.610	0.00732	0.00314
10	1.00	10.00	0.00296	2.707	0.00802	0.00249
11	1.10	9.95	0.00316	2.723	0.00859	0.00229
12	1.20	9.90	0.00334	2.740	0.00917	0.00211
13	1.30	9.85	0.00353	2.759	0.00974	0.00194
14	1.40	9.80	0.00371	2.780	0.01032	0.00179
15	1.50	9.75	0.00389	2.804	0.01091	0.00166
16	1.60	9.70	0.00407	2.829	0.01151	0.00153
17	1.70	9.65	0.00424	2.858	0.01213	0.00140
18	1.80	9.60	0.00442	2.890	0.01277	0.00129
19	1.90	9.55	0.00459	2.926	0.01345	0.00117
20	2.00	9.50	0.00477	2.967	0.01415	0.00106



2.3.3. Emmeli veya enjeksiyonlu akımlar

Gözenekli duvarlar üzerindeki emmeli veya üflemlerli akımlar, soğuk bir akışkanın enjekte edilmesiyle soğutma ve akımın emilmesi yoluyla türbülansa geçişin geciktirilmesi ve ters basınç gradyanında akım ayrılmasının önlenmesi gibi uygulamalarıyla pratik bir öneme sahiptir. Genel olarak integral momentum denklemi bu gibi akımların (özellikle enjeksiyon halinde) incelenmesinde yeterince güvenilir değildir. Bununla birlikte *ayrılmanın emme yoluyla önlenmesi* için Prandtl tarafından gerçekleştirilen basit inceleme ilginçtir. Prandtl bu incelemesinde Pohlhausen hız profilinin ayrılmaya karşılık gelen $\lambda = -12$ halini dikkate almıştır.

$$\lambda = -12 \text{ halinde} \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta^*}{\delta} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072} \quad \rightarrow \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{4}{35}$$

$$\frac{C_f}{2} \frac{U_e \delta}{\nu} = 2 + \frac{\lambda}{6} \quad \rightarrow \quad C_f = 0$$

Bunun yanında, *hız profili emme yoluyla sabit tutulduğundan*, $\frac{d\delta}{dx} = \frac{d\delta^*}{dx} = \frac{d\theta}{dx} = 0$

kabulleri yapılabilir. Böylece

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

integral momentum denkleminde,

ayrılmayı engelleyecek emme hızı için

$$v_w = \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) = \frac{dU_e}{dx} \left(2 \frac{4}{35} + \frac{2}{5} \right) \delta$$

veya

$$v_w = \frac{22}{35} \delta \frac{dU_e}{dx}$$

elde edilir.

Ayrıca duvar üzerinde

$$\frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = -\frac{U_e}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

ve $\lambda = -12$ halindeki hız profili için

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = 12 \frac{U_e}{\delta^2}$$

olup

$$12 \frac{U_e}{\delta^2} = -\frac{U_e}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad \rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{12\nu}{-dU_e/dx}}$$

bulunur. Bu değer momentum denkleminde kullanılarak

$$v_w = 2.18 \sqrt{-\nu \frac{dU_e}{dx}}$$

elde edilir.

2.4. İntegral enerji denklemi

Düzlemsel, daimi, sabit-yoğunluklu, sabit-özellikli akım şartlarında bazı hallerde önemli ısı enerji (veya ısı) transferi olayları görülebilir.

Örneğin 50°C sıcaklıktaki havanın 30°C sıcaklıktaki bir yüzey üzerinden geçtiği akım göz önüne alınırsa bu halde önemli bir ısı transferi meydana gelecektir.

Akımdaki söz konusu sıcaklıklarda havanın yoğunluğunda, viskozitesinde ve ısı özelliklerinde dikkate değer bir değişim olmayacaktır.

Yüzey üzerinde bir ısı sınır tabaka oluşacak ve bu tabakadaki sıcaklıklar $y=0$ da $T=T_w(x)$ ile $y=\delta_T(x)$ de $T=T_e(x)$ arasında değişecektir. Isıl sınır tabakanın δ_T kalınlığı, akışkanın fiziksel özelliklerine ve ilgilenilen probleme bağlı olarak, viskoz sınır tabakanın kalınlığından daha büyük veya küçük olabilir.

Isıl sınır tabakalar için önemli bir boyutsuz parametre olan $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$ *Prandtl sayısı*

momentum yayılımı katsayısı ile ısı yayılım katsayısının oranlarını temsil etmektedir.

Çoğu gazlar için $Pr \approx 0.7$ olup, bu rakam gazlar içinde ısının momentumdan daha hızlı yayındığını göstermektedir. Bu bir bakıma ısı sınır tabakanın viskoz sınır tabakaya kıyasla $1 / 0.7$ oranında daha kalın olacağı anlamına gelir.

Su, yağ vb bilinen sıvılar için Prandtl sayısı 10 ile 10^6 gibi yüksek mertebeler arasında değişir. Diğer uç noktada ise Prandtl sayısının 10^{-2} mertebesinde olduğu sıvı metaller yer alır.

Isı transferinin söz konusu olduğu sınır tabakalarda akışkanın Prandtl sayısının çok önemli olduğu açıktır.

Isıl sınır tabakalar için de viskoz sınır tabakadakine benzer mertebede yaklaşık çözümler, uygun bir kontrol hacmine enerjinin korunumu ilkesi uygulanarak elde edilebilir. Bu amaçla Şekil 2.5 deki kontrol hacmi için enerjinin korunumu ilkesini

$$\boxed{\text{Sisteme giren ısı enerji} + \text{Sürtünmeyle ısınma} + \text{Yüzey üzerinde ısı transferi} = \text{Sistemden çıkan ısı enerji}}$$

şeklinde uygulamaya çalışalım.

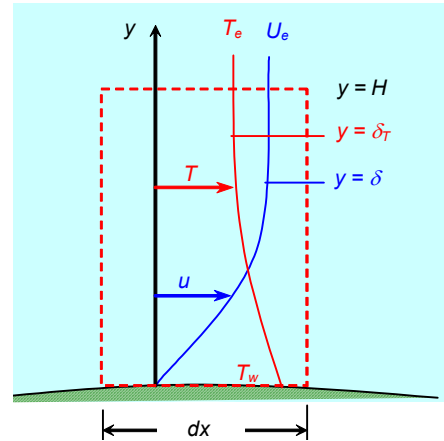
Kontrol hacminin sol tarafından giren ısı enerji

$$\rho c_p \int_0^H u T dy$$

sağ tarafından çıkan ısı enerji

$$\rho c_p \int_0^H u T dy + \frac{d}{dx} \left[\rho c_p \int_0^H u T dy \right] dx$$

ve üst yüzeyinden giren kütleli debinin soktuğu ısı enerji



Şekil 2.5- Enerji denklemi için kontrol hacmi

$$c_p T_e \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right] \text{ olacaktır.}$$

Viskoz tabaka içerisindeki kayma gerilmesinden kaynaklanan sürtünme ısınması

$$\int_0^H \mu (\partial u / \partial y)^2 dy \text{ dir.}$$

Ayrıca, yüzey üzerinde $-k(\partial T / \partial y)_{y=0}$ kadarlık bir ısı transferi vardır, ve yüzeyden emme veya enjeksiyon yoluyla geçen akışkan da... $\rho_w v_w c_p T_w dx$ kadar bir ısı enerji taşımaktadır.

Bütün bu büyüklükler enerjinin korunumu için yukarıda yazılan bağıntıda kullanılarak:

$$\rho c_p \int_0^H u T dy + c_p T_e \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right] + \int_0^H \mu (\partial u / \partial y)^2 dy - k(\partial T / \partial y)_{y=0} dx + \rho_w v_w c_p T_w dx = \rho c_p \int_0^H u T dy + \frac{d}{dx} \left[\rho c_p \int_0^H u T dy \right] dx$$

ve bu eşitlik düzenlenerek

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H (T_e - T) u dy \right] + \frac{v}{c_p} \int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy - v_w (T_e - T_w) = \frac{k(\partial T / \partial y)_{y=0}}{\rho c_p} \text{ "integral enerji denklemi"}$$

elde edilir. Burada da yoğunluğun sabit olduğu kabul edilmiştir.

İntegral momentum denkleminde olduğu gibi integral enerji denkleminde de çok sayıda bilinmeyen yer almaktadır. Hız ve sıcaklık profillerinin bilinmesi halinde bilinmeyen sayısının azaltılması mümkündür.

2.5. İntegral enerji denkleminin çözümü

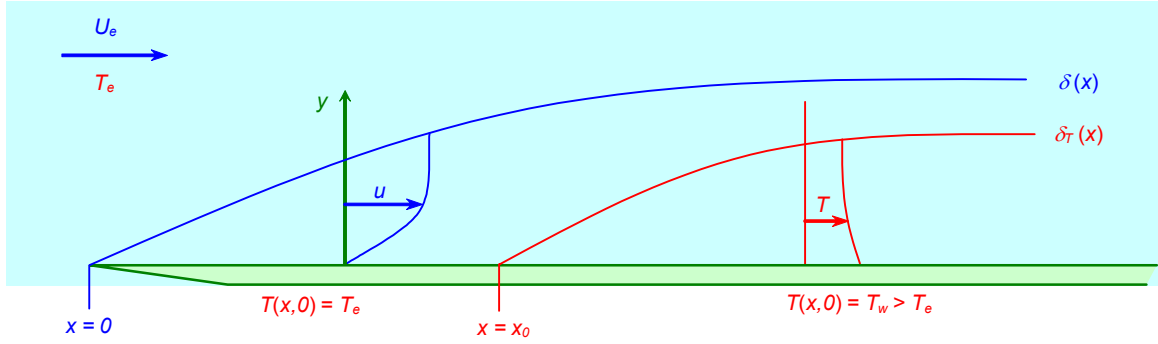
İntegral enerji denkleminin çözümüne yönelik birçok çalışmada da Pohlhausen yöntemine benzer bir yaklaşım vardır. Nitekim, hız profiline benzer şekilde sıcaklık profili için de polinomsal bir tanımlama yapılmaktadır.

2.5.1. Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

İntegral enerji denkleminin çözüm yöntemini izah ve aynı zamanda faydalı bazı sonuçlar elde etmek için özel bir problemle ilgilenmek faydalı olacaktır. "Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi" olarak bilinen bu akım Şekil 2.6 da gösterilmiştir.

Bu problemde geçirgen olmayan ($v_w = 0$) düz bir levha U_∞ hızındaki serbest akıma paralel olarak yerleştirilmiş olup, levhanın hücum kenarından itibaren $0 \leq x \leq x_0$ aralığındaki kısmı serbest akımın statik sıcaklığı ile ($T_w = T_e$) aynı, x_0 noktasından sonraki kısmı ise serbest akımdan farklı sıcaklıktadır ($T_w \neq T_e$).

Viskoz sınır tabaka levhanın hücum kenarında başlarken ısı sınır tabaka $x = x_0$ noktasından itibaren başlayacaktır. Ayrıca akım hızının viskoz kaynaklı sürtünme ısınmasının ihmal edilebileceği kadar küçük olduğu varsayılmaktadır. Böylece integral momentum denklemindeki ikinci terim ihmal edilmektedir.



Şekil 2.6- Başlangıç kısmı ısıtılmamış düz levha problemi

Eckert ve Drake (1959) bu problemin çözümü için *hız ve sıcaklık profillerini kübik fonksiyonlarla* temsil etmişlerdir.

İntegral momentum denklemini için kullanılan sınır koşullarından $y = \delta, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

göz ardı edilmiş olup bu durumda hız profili için

$$\frac{u}{U_e} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

elde edilmiştir.

Sıcaklık profili için önerilen kübik fonksiyon $\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = a + b \left(\frac{y}{\delta_T} \right) + c \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^2 + d \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3$

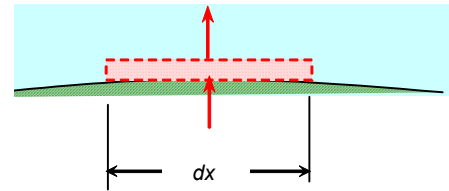
şeklinde olup sınır koşulları da

$$y = 0, \quad T = T_w, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$y = \delta_T, \quad T = T_e, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

şeklinde önerilmiştir.

Burada duvar üzerindeki ikinci koşul duvar üzerinde y doğrultusundaki taşınımın ihmal edildiğini göstermektedir. Nitekim duvara komşu bir kontrol hacmine duvar tarafından giren ve üst taraftan çıkan ısıların farkını dikkate alarak bu durumu görmek mümkündür:



$$\left\{ \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx + k \left[\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx \right\}_{y \approx 0} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{y \approx 0} dy dx \approx 0$$

Önerilen koşullarla sıcaklık profili için

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3$$

elde edilmektedir.

Hız ve sıcaklık profilleri integral enerji denkleminde kullanılarak $\zeta = \delta_T / \delta$ olmak üzere

$$U_e (T_e - T_w) \frac{d}{dx} \left[\delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right) \right] = \frac{3}{2} \frac{\nu (T_e - T_w)}{\delta \zeta Pr}$$

elde edilir. Burada Prandtl sayısının 1 civarında olduğu varsayılarak $\delta_T < \delta$ kabul edilebilir. Böylece ζ^4 terimi ζ^2 terimine kıyasla ihmal edilebilir. Böylece

$$\delta \zeta \frac{d}{dx} [\delta \zeta^2] = \frac{10\nu}{U_e Pr}$$

veya düzenlenerek

$$\delta \zeta \left[\frac{d\delta}{dx} \zeta^2 + \delta \frac{d\zeta^2}{dx} \right] = \zeta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 \zeta \frac{d\zeta^2}{dx} = \frac{10\nu}{U_e Pr} \quad \rightarrow \quad \zeta^3 \frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{dx} + \delta^2 \frac{2}{3} \frac{d\zeta^3}{dx} = \frac{10\nu}{U_e Pr}$$

elde edilir. Öte yandan düz levha üzerinde daha önce

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

şekline indirgenen integral momentum denklemi, kübik hız profili için

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_e}$$

şekline gelir. Buradan integrasyonla viskoz sınır tabaka kalınlığı

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e}$$

olarak bulunur. Bu değer integral enerji denkleminde kullanılarak

$$\zeta^3 \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e} \right) + \left(\frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e} \right) \frac{2}{3} \frac{d\zeta^3}{dx} = \frac{10\nu}{U_e Pr}$$

ve düzenlenerek

$$\frac{4}{3} x \frac{d\zeta^3}{dx} + \zeta^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr}$$

elde edilir. Bu eşitlik ζ^3 değişkeni için birinci dereceden bir adi diferansiyel denklem olup çözümü kolaylıkla

$$\zeta^3 = Cx^{-3/4} + \frac{13}{14} \frac{1}{Pr}$$

şeklinde elde edilebilir. Buradaki C sabitinin bulunması için gerekli sınır şartı $x=x_0$ da $\zeta=0$ (yani $\delta_T=0$) olup, bu şart da kullanılarak sonuçta ısı sınır tabakanın kalınlığı için

$$\zeta = \frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{1.026 Pr^{1/3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}$$

elde edilir. $x_0=0$ için (tüm levhanın ısıtılmış olması halinde)

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{1.026 Pr^{1/3}}$$

olacağı kolaylıkla görülmektedir.

Şüphesiz duvar üzerindeki ısı transfer hızı, ısıl sınır tabakanın kalınlığının değişiminin bilinmesinden daha çok pratik öneme sahiptir. Şimdi bulunan $\delta(x)$ dağılımını sıcaklık profili için tanımlanan bağıntıda kullanarak

Duvar üzerindeki ısı transferini bir "*h - film katsayısı*" cinsinden

$$q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = h(T_e - T_w)$$

şeklinde göstermek alışılmadığıdır. Ancak h katsayısını içeren ve "*Newton soğutma kanunu*" olarak bilinen bu bağıntı temel bir fiziksel model değildir. k katsayısının aksine h katsayısı akışkanın fiziksel bir özelliği değildir. Buna karşılık Fourier yasası ısı transferi analizlerinde daha ziyade kullanılan temel bir yasadır. Bu bakımdan daha ziyade Fourier yasası ile komple bir çözüm elde edildikten sonra, elde edilen cevap h film katsayısı cinsinden yeniden yazılır. h katsayısı Nusselt sayısı adı verilen boyutsuz bir büyüklük içinde

$$Nu \equiv \frac{hx}{k} \quad \text{şeklinde yer alır.}$$

Yukarıda incelenen ısıtılmış başlangıç-uzunluğu problemi için Nu sayısı

$$Nu = 0.332 Pr^{1/3} \left(\frac{\rho U_e x}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}$$

olarak elde edilir.

Film katsayısı ayrıca "Stanton sayısı" içerisinde de $St \equiv \frac{h}{\rho U_e c_p}$

şeklinde yer alır. Yukarıdaki ısıtılmış başlangıç-uzunluğu problemi için St sayısı da

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = 0.332 Pr^{-2/3} Re^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3}$$

olarak bulunur. $x_0=0$ için $St = 0.332 Pr^{-2/3} Re^{-1/2}$

olup, düz levha üzerindeki sürtünme katsayısı için daha önce bulunan $C_f = 0.664 Re_x^{-1/2}$ bağıntısı kullanılarak

$$St \cdot Pr^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$

olacağı görülür. Bu bağıntı yüzey sürtünmesi ile ısı transferi arasında "Reynolds analojisi" olarak adlandırılan direkt bir ilişki kurmayı sağlar. Bağıntı her ne kadar sınırlı belli bir akım tipi için çıkartılmış olsa da geniş bir akım yelpazesi için sık sık kullanılmaktadır.