

BÖLÜM 3

SIKIŞTIRILAMAZ POTANSİYEL AKIM DENKLEMLERİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ

- 3.1 Problemin tanımlanması
- 3.2 Green idantitesine dayanan genel çözüm
- 3.3 Çözümün metodolojisi
- 3.4 Temel çözüm - Noktasal kaynak
- 3.5 Temel çözüm - Noktasal duble
- 3.6 Temel çözüm - Polinomlar
- 3.7 Temel çözümlerin iki-boyutlu halleri
- 3.8 Temel çözüm - Girdap
- 3.9 Süperpozisyon ilkesi:
- 3.10 Kaynakla serbest akımın süperpozisyonu – Rankine ovali
- 3.11 Duble ile serbest akımın süperpozisyonu – Dairesel silindir etrafında akım
- 3.12 Üç-boyutlu duble ile serbest akımın süperpozisyonu – Küre etrafında akım
- 3.13 Küre ve dairesel silindir etrafındaki akımlar için bazı uyarılar
- 3.14 Temel çözümlerin yüzey dağılımları

BÖLÜM 3

SIKIŞTIRILAMAZ POTANSİYEL AKIM DENKLEMLERİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ

Önceki iki bölümde akışkanlar dinamiğinin temel denklemleri formüle edilmiş, basitleştirilmiş viskoz-olmayan, sıkıştırılmaz ve çevresiz (irrotasyonel-potansiyel) akımı veren koşullar tartışılmıştır. Bu bölümde potansiyel akım probleminin basit çözümlerinin elde edilmesi için temel metodoloji geliştirilecektir.

Potansiyel akım probleminin lineer tabiatı nedeniyle diferansiyel denklemin farklı sınır geometrilerine sahip akım alanları için münferit olarak çözüme zorunluluğu yoktur. Bunun yerine geometrik sınır koşulları sağlanacak biçimde *elemanter çözümlerin dağılımı*ndan yararlanılacaktır.

Şiddeti bilinmeyen elemanter çözümlerin dağılımı şeklindeki bu yaklaşım gerek klasik gerekse nümerik yöntemlerde daha sistematik bir çözüm yöntemini ortaya koyar.

3.1 Problemin tanımlanması:

Çoğu mühendislik uygulamalarında problem Şekil 3.1 de görüldüğü gibi içerisinde bir katı cisim bulunan ve bir dış sınıra sahip olan bir v akışkan bölgesinde çözümü gerektirir (örneğin rüzgar tüneline bir kanat gibi).

Şayet akım *sıkıştırılmaz* ve *irrotasyonel* kabul edilirse süreklilik denklemi *Laplace* denklemine indirgenir:

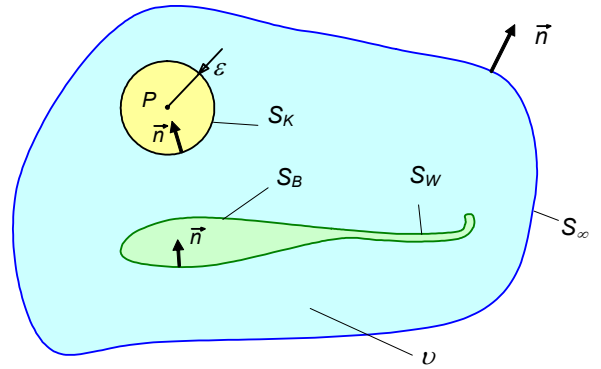
$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (3.1)$$

Akışkan içerisine gömülü bir cisim halinde cismin yüzeyi üzerindeki ve başka katı cidarlar üzerindeki dik hız bileşeni sıfır olmalıdır. Cisme bağlı eksen takımında bu sınır şartı

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada \vec{n} normal vektörü olup, $\nabla \Phi$ cisme bağlı eksen takımında hesaplanmaktadır. Ayrıca, hareketten oluşan bozuntular cisimden çok uzaklarda ($r \rightarrow \infty$) yok olacaktır.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\nabla \Phi - \vec{v}) = 0 \quad (3.3)$$

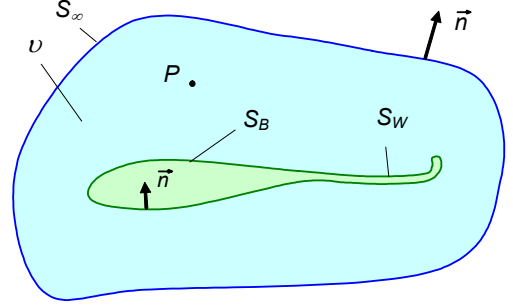


Şekil 3.1

Burada $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ olup \vec{v} de v hacmi içerisinde bozulmamış akım ile cisim arasındaki izafi hızı (veya cisimle hareket eden bir gözlemciye göre sonsuzdaki akım hızı) belirtmektedir.

3.2 Green idantitesine dayanan genel çözüm:

Şekil 3.1 'deki tipik potansiyel akım probleminde sınırları S_B ve iz sınırları S_W ile belirtilen bir katı cisim etrafında dış sınırı S_∞ ile belirtilen v akışkan hacmi içerisinde Laplace denkleminin çözümü söz konusudur. S_B ve S_∞ da (3.2) ve (3.3) sınır koşulları uygulanacaktır. Yüzeyin \vec{n} normali daima ilgilenilen v bölgesinden dışarıya doğru yönelmiş olacaktır.



Şekil 3.1

Herhangi bir \mathbf{A} vektörü için diverjans teoremi

$$\iint_S \vec{n} \cdot \vec{A} \cdot dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} \cdot dV$$

şeklinde ifade edilmişti. Şimdi \mathbf{A} vektörü yerine, Φ_1 ve Φ_2 konumun birer skaler fonksiyonu olmak üzere

$$(\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1)$$

şeklinde tanımlanan bir vektör alınırsa

$$\begin{aligned} \iint_S (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot \vec{n} \cdot dS &= \iiint_V \nabla \cdot (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot dV \\ &= \iiint_V (\nabla \Phi_1 \cdot \nabla \Phi_2 + \Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \nabla \Phi_2 \cdot \nabla \Phi_1 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) \cdot dV \end{aligned}$$

$$\boxed{\iint_S (\Phi_1 \nabla \Phi_2 - \Phi_2 \nabla \Phi_1) \cdot \vec{n} \cdot dS = \iiint_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1) \cdot dV} \quad (3.4)$$

elde edilir. Bu bağıntı Green özdeşliklerinden birisidir (Bkz: *Kellog OD, Foundations of potential theory, Dover, 1953, sayfa 215*). Buradaki yüzey integrali bir S_W iz modeli de (üzerinde hız potansiyeli veya hız için süreksizliğin söz konusu olduğu bir sınır) dahil olmak üzere bütün

$$S = S_B + S_W + S_\infty$$

sınırları boyunca alınmaktadır.

Φ ilgilenilen v hacmi içerisindeki potansiyel fonksiyonu ve r de Şekil 3.1 'de gösterilen $P(x, y, z)$ noktasından sınırlar üzerindeki noktalara olan uzaklık olmak üzere Φ_1 ve Φ_2 fonksiyonları için sırasıyla

$$\Phi_1 = \frac{1}{r}, \quad \Phi_2 = \Phi \quad (3.5)$$

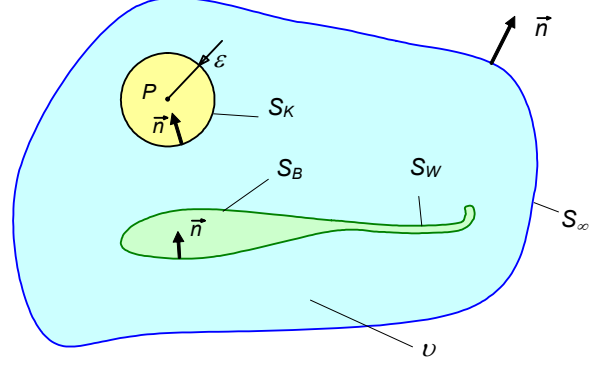
alınırsa, *P* noktasının v hacmi dışında olması halinde her iki fonksiyon da Laplace denklemini sağlayacağından (3.4) denkleminin sağ tarafı sıfır olur.

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \quad (3.6)$$

P noktasının v hacmi içerisinde olması hali özel ilgi çeker.

Bu durumda *P* noktası, şekilde görüldüğü gibi, ε yarıçaplı bir küre içerisine alınarak integrasyon bölgesinden izole edilir.

v hacminin içerisinde bu küre dışında kalan bütün noktalarda $\Phi_1 = 1/r$ fonksiyonu Laplace denklemini yine sağlar [$\nabla^2(1/r) = 0$]



Böylece

$$\iint_{S+küre} \left(\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \quad (3.6a)$$

Küre üzerindeki integral için küre merkezi başlangıç noktası olmak üzere bir küresel koordinat sistemi seçilirse, normal vektörü küre içine doğru yönelmiş olduğundan $\vec{n} = -\vec{e}_r$, ve ayrıca

$$\nabla \Phi \cdot \vec{n} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \nabla \frac{1}{r} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{r^2} \vec{e}_r \cdot \vec{n} = \frac{1}{r^2}$$

olup, bu integral sonuçta

$$-\iint_{S_K} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\Phi}{r^2} \right) \cdot dS + \iint_S \left(\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \quad (3.6b)$$

şekline getirilebilir. Çok küçük yarıçaplı ($\varepsilon \rightarrow 0$) bir küre içerisinde Φ 'nin fazla değişmeyeceği düşünülürse bu integraldeki ilk terim sıfır olduğu gibi ikinci terim içerisinde sabit olduğu kabul edilen Φ büyüklüğü integral dışına alınarak

$$I_K = -\frac{\Phi(P)}{\varepsilon^2} \iint_{S_K} dS = -\frac{\Phi(P)}{\varepsilon^2} \cdot 4\pi\varepsilon^2 = -4\pi \cdot \Phi(P)$$

elde edilir. Böylece (3.6b) eşitliği

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.7)$$

şekline gelir.

P noktasının S_B katı cidarı üzerinde olması halinde, noktayı izole etmek için bu defa P merkezli ve ε yarıçaplı bir yarım küre kullanılacağından (3.7) bağıntısı yerine

$$\Phi(P) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.7a)$$

bağıntısı elde edilir.

Bu son iki bağıntı v kontrol hacminin içinde ve katı cidar üzerinde yer alan noktalardaki potansiyel fonksiyonunun Φ değerini, sınırlar üzerindeki Φ ve $\partial\Phi/\partial n$ değerleri cinsinden vermektedir.

Şimdi S_B katı sınırının iç tarafında (v hacminin dışı) potansiyel fonksiyonu Φ_i ile gösterilen bir iç akımı göz önüne alalım. Bu akımda S_B nin dışında (v hacmi içinde) yer alan bir P noktası için (3.6) denklemini uygulanarak

$$0 = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left(\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi_i - \Phi_i \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.7b)$$

yazılabilir. Burada normal vektörü S_B katı sınırından dışarı doğru (v hacminin içine doğru) yönlendirilmiştir.

Şimdi de S_B katı sınırının dış tarafında ve iç tarafında akımlar olduğunu düşünerek her iki akımın v hacmi içerisindeki bir P noktasında yarattığı potansiyeli elde etmek için (3.7) ve (3.7b) bağıntılarını birleştirelim. Bu birleştirme sırasında (3.7b) bağıntısındaki normal vektörünün doğrultusu (3.7) bağıntısındaki ile zıt yönde olduğundan bir eksi işareti geleceği gözden kaçırılmamalıdır. Böylece

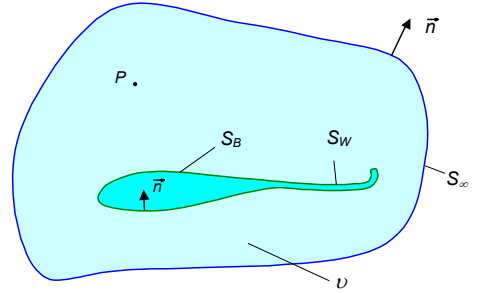
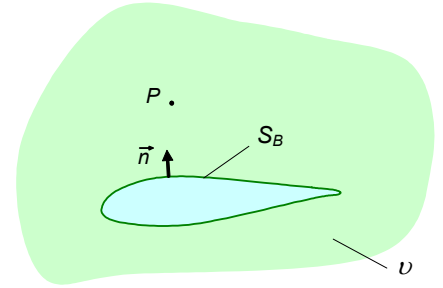
$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\frac{1}{r} \cdot \nabla (\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{n} \cdot dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W + S_\infty} \left[\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.8)$$

elde edilir. Buradaki S_∞ sınırının genellikle katı cidardan çok uzaklarda olduğu kabul edilerek bu cidar üzerindeki integralin katkısı kısaca

$$\Phi_\infty(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \left[\frac{1}{r} \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.9)$$

şeklinde belirtilir. Bu potansiyelin değeri seçilen eksen takımına bağlı olup, örneğin, hareketsiz bir akışkan içerisinde hareket eden bir cisme bağlı eksen takımında Φ_∞ değeri üniform-paralel akıma potansiyel fonksiyonunun değeri olacaktır.

Ayrıca iz yüzeyinin çok ince olduğu kabul edilerek, bu yüzeyi geçerken yüzeye dik doğrultuda Φ nin değişmediği ($\partial\Phi/\partial n=0$) kabul edilir. Böylece (3.8) bağıntısı



$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\frac{1}{r} \cdot \nabla(\Phi - \Phi_i) - (\Phi - \Phi_i) \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot \vec{n} \cdot dS - \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W} \Phi \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} \cdot dS + \Phi_\infty(P) \quad (3.10)$$

şekline gelir.

(3.10) denklemi ve daha önce çıkartılan (3.7) denklemi

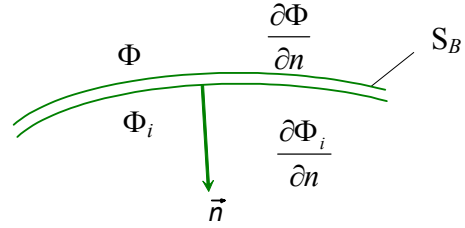
Φ potansiyel fonksiyonunun her hangi bir P noktasındaki değerini sınırlar üzerindeki Φ ve $\partial\Phi/\partial n$ değerleri cinsinden vermektedir.

Bu durumda problem sınırlar üzerinde bu büyüklüklerin hesaplanması problemine indirgenmiştir.

Katı cidarın Şekil 3.2 'de gösterildiği gibi bir parçasını göz önüne alarak dış ve iç potansiyel arasındaki farkı ve dış ve iç potansiyellerin normal doğrultusundaki türevleri arasındaki farkı sırasıyla

$$-\mu = \Phi - \Phi_i \quad (3.11)$$

$$-\sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_i}{\partial n} \quad (3.12)$$



Şekil 3.2

şeklinde gösterelim. Bu büyüklükler literatürde sırasıyla *duble* (μ) ve *kaynak* (σ) olarak adlandırılmakta olup, bu bağıntılardaki eksi işaretleri normal vektörünün S_B sınırından içeriye doğru yönelmiş olmasından kaynaklanmaktadır. Duple ve kaynak özellikleri ilerideki bölümlerde incelenecektir.

Bu tanımlarla (3.10) denklemi

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\sigma \cdot \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \cdot \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W} \left[\mu \cdot \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS + \Phi_\infty(P) \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki \vec{n} vektörü, yüzeyin duple yönünde yönelmiş normali olup, $\vec{n} \cdot \nabla$ yerine $\partial/\partial\vec{n}$ alınarak bu ifade

$$\Phi(P) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_B} \left[\sigma \cdot \left(\frac{1}{r} \right) - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_W} \left[\mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \cdot dS + \Phi_\infty(P) \quad (3.13a)$$

şekline gelir. Bu bağıntıdaki kaynak ve duple çözümlerinin $r \rightarrow \infty$ için sıfıra giderek (3.3) sınır şartını otomatik olarak sağladıkları görülmektedir.

v hacmi içerisinde bir P noktasındaki hız potansiyelini bulmak için yüzey üzerindeki *kaynak ve duple şiddetlerinin belirlenmesi* gereklidir. Ancak (3.13 veya 13a) denklemi genel bir denklem olup, bir tek kaynak ve duple kombinasyonunu ifade etmez. Özel bir problem için

problemin fiziğine bağlı olarak gerekli kaynak ve duble dağılımının (3.2) sınır şartı vasıtasıyla belirlenmesi gerekir.

Örneğin özel olarak S_B yüzeyi boyunca

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

alınabilir. Böylece S_B üzerindeki kaynak terimi yok olur ve sadece duble dağılımı kalır.

Veya S_B üzerindeki potansiyel

$$\Phi_i = \Phi$$

şeklinde tanımlanabilir, ki bu durumda da S_B üzerinde duble yok olur ve problem sadece bir kaynak dağılımı ile temsil edilir.

İki Boyutlu Hal:

İki-boyutlu halde kaynak fonksiyonu $\Phi = \ln r$ olup (3.5) ile gösterilen iki fonksiyon

$$\Phi_1 = \ln r, \quad \Phi_2 = \Phi \quad (3.14)$$

şekline gelir. Ayrıca P noktası bu defa ε yarıçaplı bir daire ile izole edilir. Bu durumda (3.6b) denklemindeki yüzey integralleri çizgisel integrallere dönüşür ve daire etrafında integral alınarak (3.6b) denklemi

$$- \int_{\varepsilon \text{ dairesi}} \left(\ln r \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi \cdot \frac{1}{r} \right) \cdot dS + \int_S [\ln r \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla (\ln r)] \cdot \vec{n} \cdot dS = 0 \quad (3.15)$$

şekline gelir. Üç boyutlu halde küre yüzey alanının $4\pi\varepsilon^2$ olmasına karşılık iki-boyutlu halde daire çevre uzunluğu $2\pi\varepsilon$ olduğundan üç-boyutlu haldeki (3.7) denklemi de

$$\Phi(P) = -\frac{1}{2\pi} \int_S [\ln r \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla (\ln r)] \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.16)$$

şeklini alır. P noktasının S_B sınırı üzerinde olması halinde integrasyon ε yarıçaplı bir yarım daire üzerinde alınacağından (3.16) denklemi

$$\Phi(P) = -\frac{1}{\pi} \int_S [\ln r \cdot \nabla \Phi - \Phi \cdot \nabla (\ln r)] \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.16a)$$

veya S_B sınırının içerisinde potansiyeli Φ_i ile belirtilen bir iç akım olması halinde

$$0 = -\frac{1}{2\pi} \int_S [\ln r \cdot \nabla \Phi_i - \Phi_i \cdot \nabla (\ln r)] \cdot \vec{n} \cdot dS \quad (3.16b)$$

olur. Sonsuzdaki sınır boyunca integral değeri Φ_∞ olmak üzere ve yine kaynak ve duble tanımları kullanılarak (3.13a) denkleminin iki-boyutlu halde karşılığı olan bir denklem

$$\Phi(P) = \frac{I}{2\pi} \int_{S_B} \left[\sigma \cdot \ln r - \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \right] \cdot dS - \frac{I}{2\pi} \int_{S_W} \mu \cdot \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) \cdot dS + \Phi_\infty(P) \quad (3.17)$$

şeklinde elde edilir.

3.3 Çözümün Metodolojisi:

(3.13) denklemini çerçevesinde (iki-boyutlu halde (3.17) denklemini) sıkıştırılmaz potansiyel akım problemlerinin çözümüne genel bir yaklaşım ortaya koymak mümkündür. Yukarıdaki en önemli gözlem *Laplace denkleminin çözümünün sınırlar üzerinde (S_B, S_W) yayılı elemanter çözümlerle (kaynak ve dubleler) elde edilebileceği* yönündedir. Bu elemanter çözümler, $r \rightarrow \infty$ da sıfıra giden hız alanları nedeniyle (3.3) sınır şartını otomatik olarak gerçeklemektedir. Ancak $r=0$ için hız alanı tekillik gösterdiğinden bu elemanlara "tekillik çözüm" adı da verilmektedir.

Genel çözüm elemanter çözümlerin, bizzat üzerinde buldukları yüzeyler boyunca integrasyonlarını gerektirmektedir.

Böylece bir akışkanlar dinamiği problemi, bilinen sınırlar boyunca uygun tekillik dağılımlarının (3.2) sınır şartı sağlanacak biçimde bulunması problemine indirgenmiştir. Bu formülasyonun esas avantajı nümerik yöntemlere doğrudan uygulanabilmesidir. *Sınırlarda potansiyel fonksiyonunun belirtilmesi halinde* matematiksel problem "Dirichlet problemi" olarak anılmakta olup (Kellog[1.3], sayfa 286) çoğu nümerik çözümde kullanılmaktadır.

Çözüme fiziksel bakımdan daha dolaysız bir yaklaşım, *sınır şartının katı cidarlar boyunca yüzeye dik hız bileşeninin sıfır olması şeklinde* uygulanmasıdır. Bu durumda problem "Neumann problemi" (Kellog[1.3], sayfa 286) olarak bilinir ve hız alanına geçmek için potansiyel fonksiyonu türetilerek

$$\nabla \Phi = -\frac{I}{4\pi} \iint_{S_B} \sigma \cdot \nabla \left(\frac{I}{r} \right) \cdot dS + \frac{I}{4\pi} \iint_{S_B+S_W} \mu \cdot \nabla \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{I}{r} \right) \right] \cdot dS + \nabla \Phi_\infty \quad (3.18)$$

bağıntısı elde edilir. Yine bu ifadedeki $\partial/\partial n$ türevi dublenin, Bölüm 3.5 de gösterilecek olan yönünü belirtmektedir. Bu denklemin (3.2) sınır şartında kullanılması suretiyle bilinmeyen tekillik dağılımının analitik veya nümerik çözümü için gerekli *denklem* elde edilir.

Verilen sınır şartları için yukarıdaki çözüm tekniği tek (unique) olmayıp, çoğu problem bir tek türde tekillik kullanarak veya iki tip tekilliğin lineer kombinasyonları alınarak çözülebilir. Bu bakımdan çoğu halde ilave şartlara ihtiyaç vardır (örneğin kanatların keskin firar kenarındaki Kutta şartı gibi). Ayrıca sınır şartlarının akım alanının çeşitli bölgelerinde karışık kullanımı olabilir (örneğin, bir sınırda Neumann tipi, diğerinde Dirichlet tipi gibi).

Çözümün bu genel metodolojisine geçmeden önce izleyen paragraflarda elemanter çözümler incelenecektir.

3.4 Temel Çözüm - Noktasal Kaynak:

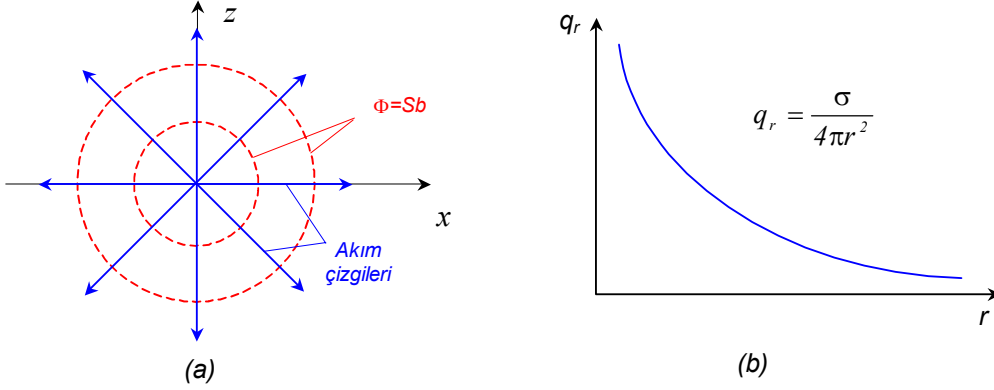
(3.13) denkleminde geçen iki temel çözümden birisi kaynak/kuyu çözümdür. Şekil 3.3a 'da görüldüğü gibi bir küresel koordinat sisteminin başlangıç noktasında yer alan σ şiddetindeki bir noktasal kaynak için potansiyel fonksiyonu

$$\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi r} \quad (3.19)$$

şeklindedir. ∇ operatörünün küresel koordinatlarda

$$\nabla = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}, \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \vec{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (1.39)$$

ile verilen şekli burada kullanılarak, sadece radyal doğrultudaki bileşenden ibaret olan hız alanı



Şekil 3.3: Noktasal kaynak

$$\vec{V} = -\frac{\sigma}{4\pi} \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\vec{e}_r}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (3.20)$$

veya

$$(v_r, v_\theta, v_\phi) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}, 0, 0 \right) = \left(\frac{\sigma}{4\pi r^2}, 0, 0 \right) \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilir. Şekil 3.3b 'de de görüldüğü gibi radyal hız $1/r^2$ ile orantılı olup $r = 0$ 'da tekillik göstermektedir. Başlangıç noktasında yer alan σ şiddetindeki kaynak elemanı nedeniyle r yarıçaplı küresel yüzeyden geçen hacimsel debi

$$v_r \cdot 4\pi r^2 = \left(\frac{\sigma}{4\pi r^2} \right) \cdot 4\pi r^2 = \sigma$$

olur. Buna göre pozitif bir σ değeri kaynaktan çıkan hacimsel debi, negatif bir σ ise kuyudan kaybolan hacimsel debi anlamına gelmektedir. Kaynaktan akışkan çıkması (veya kuyudan kaybolması) süreklilik denklemini ihlal etmekte olup, bu noktanın çözüm bölgesi dışında tutulması gerekmektedir.

Şayet noktasal kaynak/kuyu başlangıç noktasında değil de başka bir r_0 noktasında bulunursa potansiyel ve hız sırasıyla

$$\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (3.22)$$

$$\vec{V} = \frac{\sigma}{4\pi} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (3.23)$$

olur. Bu denklemlerin kartezyen formu, $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ olmak üzere, potansiyel için

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\sigma}{4\pi \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (3.24)$$

ve hız bileşenleri için

$$u(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sigma (x-x_0)}{4\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.25a)$$

$$v(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sigma (y-y_0)}{4\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.25b)$$

$$w(x, y, z) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sigma (z-z_0)}{4\pi [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.25c)$$

şeklindedir.

Noktasal kaynak/kuyu elemanı, panel yöntemlerini kurmak üzere bir l çizgisi veya S yüzeyi boyunca veya bir v hacmi içerisinde integre edilebilir:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_l \frac{\sigma(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dl \quad (3.26)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dS \quad (3.27)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{\sigma(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dV \quad (3.28)$$

Bu bağıntılardaki σ büyüklükleri birim uzunluk, birim alan veya birim hacim başına kaynak/kuyu şiddetini belirtmektedir. Bu dağılımların indükledikleri hız bileşenleri de potansiyelin

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

şeklinde türevi alınarak elde edilebilir.

3.5 Temel Çözüm - Noktasal Duple:

(3.13) denklemindeki ikinci temel çözüm

$$\Phi = \frac{\mu}{4\pi r} \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad (3.29)$$

şeklindeki noktasal duple'dir. Dikkatli bir inceleme yapılırsa

$$\Phi_{duble} = \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_{kaynak})$$

olduğu görülebilir. Yani duple elemanı kaynak elemanından elde edilebilir. Bu amaçla başlangıç noktasında yer alan σ şiddetindeki bir noktasal kuyu ile \vec{l} konumunda yer alan aynı şiddetteki bir noktasal kaynağı göz önüne alalım (Şekil 3.4) Bu iki elemanın bir P noktasında yarattığı potansiyel

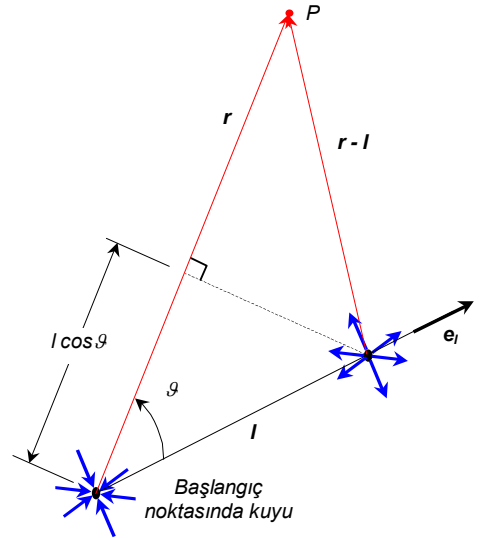
$$\Phi = -\frac{\sigma}{4\pi} \left(\frac{1}{|\vec{r}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{l}|} \right) \quad (3.30)$$

olur. Şimdi kaynakla kuyu $l \rightarrow 0$ olacak şekilde birbirine yaklaştırılırken $l\sigma = \mu = Sb$ olacak şekilde $\sigma \rightarrow \infty$ yapılarak limit alınır potansiyel fonksiyonu

$$\Phi = -\frac{\mu}{4\pi} \cdot \lim_{\substack{l \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{l} \cdot \frac{|\vec{r} - \vec{l}| - |\vec{r}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{r} - \vec{l}|} \right)$$

olur. l mesafesi sıfıra yaklaşırken

$$\begin{aligned} |\vec{r}| \cdot |\vec{r} - \vec{l}| &\rightarrow r^2 \\ |\vec{r} - \vec{l}| - |\vec{r}| &\rightarrow l \cos \vartheta \end{aligned}$$



Şekil 3.4: Kaynak ve kuyu kombinasyonu

olacağından potansiyel fonksiyonu sonuçta

$$\Phi = -\frac{\mu \cos \vartheta}{4\pi r^2} \quad (3.31)$$

şekline gelir. Buradaki ϑ açısı kuyudan kaynağa doğru yönelmiş olan \vec{e}_l birim vektörü (duble eksenini) ile \vec{r} vektörü arasındaki açıdır. $\vec{\mu} = \mu \cdot \vec{e}_l$ şeklinde vektörel bir duble şiddeti tanımlanarak bu son bağıntı

$$\Phi = -\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (3.32)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu duble elemanın \vec{e}_l doğrultusunun \vec{n} doğrultusu ile aynı olması halinde (3.13) denklemindeki ikinci terim ile eşdeğer olduğu belirtilmelidir. Buna göre

$$\Phi = -\frac{\vec{e}_l \cdot \vec{r}}{4\pi r^3} = -\vec{e}_l \cdot \nabla \left(-\frac{I}{4\pi r} \right) = -\frac{\partial}{\partial n} (\Phi_{kaynak}) \quad (3.33)$$

olur.

Örneğin, başlangıç noktasında yer alan ve şiddeti $(\mu, 0, 0)$ vektörüyle belirtilen dublenin eksenini x eksenine çakışık ($\vec{e}_l = \vec{e}_x$ ve $\vartheta = \theta$) olup, küresel koordinatlarda potansiyeli

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = -\frac{\mu \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (3.34)$$

olur. Ayrıca herhangi bir doğrultuda yönelmiş μ şiddetindeki duble, kartezyen koordinatlarda eksenler doğrultusunda yönelmiş olan ve sırasıyla

$$(\mu, 0, 0) ; (0, \mu, 0) ; (0, 0, \mu)$$

şeklinde belirtilen üç duble elemanın kombinasyonu yoluyla da ifade edilebilir.

Bu üç dublenin herbiri için (3.32) denklemini kullanılarak veya (3.29) denkleminde $\partial/\partial n$ eksen doğrultusunda türev olmak üzere alınarak çeşitli elemanlar türetilebilir. (x_0, y_0, z_0) başlangıç noktasında yer alan bu gibi dubleler için hız potansiyeli

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \vec{n} \cdot \nabla \left(\frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) \quad (3.35)$$

$\partial/\partial n$ türevi x, y, z doğrultularında alınarak

$$\Phi(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \frac{I}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \quad (3.36)$$

elde edilir. Bu bağıntı göstermektedir ki duble elemanı radyal bir simetriye sahip olmayıp doğrultusal özelliğe sahiptir. Bu yüzden, kartezyen koordinatlarda üç eleman, herbiri x, y ve z doğrultularında yönlenecek biçimde tanımlanır (Örneğin Şekil 3.5 de x doğrultusunda yönlendirilmiş eleman görülmektedir). (3.36) denkleminde x doğrultusunda türev alınarak hız potansiyeli için

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{x - x_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.37)$$

elde edilir. Benzeri biçimde y ve z doğrultusundaki türevlerden de

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{y - y_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.38)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{z - z_0}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.39)$$

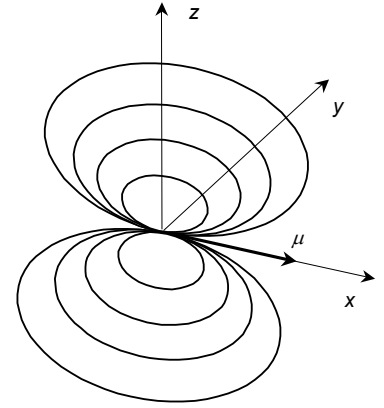
bulunur.

x doğrultusundaki noktasal dublenin (Şekil 3.5) küresel koordinatlardaki hız bileşenleri

$$q_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^3} \quad (3.40)$$

$$q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^3} \quad (3.41)$$

$$q_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0 \quad (3.42)$$



Şekil 3.5: x doğrultusundaki dublenin akım çizgileri

şeklinde hesaplanabilir. Bu duble için kartezyen koordinatlardaki hız bileşenleri de (3.37) bağıntısından türev alınarak

$$u = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - 2(x - x_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{5/2}} \quad (3.43)$$

$$v = \frac{3\mu}{4\pi} \frac{(x - x_0)(y - y_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{5/2}} \quad (3.44)$$

$$w = \frac{3\mu}{4\pi} \frac{(x - x_0)(z - z_0)}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{5/2}} \quad (3.45)$$

şeklinde bulunur.

Yine panel yöntemleri kurgulama için bu noktasal duble bir çizgi, bir yüzey veya bir hacim üzerinde integre edilebilir:

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{I}{4\pi} \int_l \frac{\mu(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) dl}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.46)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{I}{4\pi} \iint_S \frac{\mu(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) dS}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.46)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{I}{4\pi} \iiint_V \frac{\mu(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) dV}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{3/2}} \quad (3.46)$$

3.6 Temel Çözüm - Polinomlar:

Laplace denklemi ikinci dereceden bir diferansiyel denklem olduğundan,

$$\Phi = Ax + By + Cz \quad (3.49)$$

şeklindeki lineer bir konum fonksiyonu da bu denklemin bir çözüm olabilir. Bu akım için hız alanı da

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = A \equiv U_\infty; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = B \equiv V_\infty; \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = C \equiv W_\infty \quad (3.50)$$

şeklinindedir. Burada U_∞ , V_∞ , W_∞ sırasıyla x , y ve z doğrultusundaki sabit hız bileşenleridir. Buna göre x doğrultusunda sabit hızlı bir akım için potansiyel fonksiyonu

$$\Phi = U_\infty x \quad (3.51)$$

şeklinindedir. Herhangi bir doğrultudaki akım için bu bağıntı

$$\Phi = U_\infty x + V_\infty y + W_\infty z \quad (3.52)$$

şeklinde genelleştirilebilir. Benzeri şekilde polinomik çözümler düşünülebilir. Örneğin A , B , C sabitler olmak üzere

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 \quad (3.53)$$

şeklinde ikinci-dereceden bir polinom dikkate alınırsa, süreklilik denkleminin sağlanması için

$$\nabla^2 \Phi = A + B + C = 0 \quad (3.54)$$

olmalıdır. Bu koşulu sağlayacak çok çeşitli kombinasyonlar bulunabilir. Bununla birlikte sabitlerden birinin sıfır olması (örneğin $B=0$) halinde ilginç bir akım elde edilir. Bu durumda potansiyel fonksiyonu

$$A = -C \quad \rightarrow \quad \Phi = A(x^2 - z^2) \quad (3.54)$$

ve x - z düzlemindeki bu akım için hız bileşenleri

$$u = 2Ax, \quad v = 0, \quad w = -2Az \quad (3.54)$$

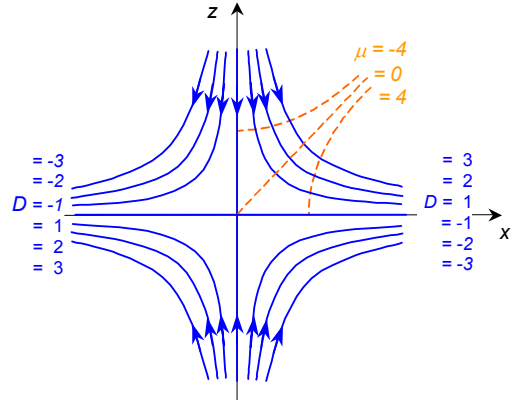
şeklinde bulunur. Akımı görüntülemek için (1.6a) akım çizgisi denkleminde hız bileşenleri yerleştirilerek ve integre edilerek

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w} \rightarrow \frac{dx}{2Ax} = -\frac{dz}{2Az}$$

$$xy = sb = D \quad (3.56)$$

çözümü elde edilir. $D=1,2,3,\dots$ gibi çeşitli sabit değerler için elde edilen akım çizgileri Şekil 3.6 da görülmektedir.

x - y düzleminin örneğin sadece sağ üst çeyreğindeki çözüm alınırsa bir dikey köşe içindeki potansiyel akım, sadece üst yarısı alınırsa düz duvara doğru gelen akımdaki durma noktası çözümü elde edilir. Çözümde $x=z=0$ için $u=w=0$ olup eksen takımının başlangıç noktası durma noktası, eksenler de durma akım çizgileridir.



Şekil 3.6: $xy=sb$ ile tanımlanan akım çizgileri

3.7 Temel çözümlerin iki-boyutlu halleri:

Kaynak:

Üç-boyutlu halde bir kaynak elemanın sadece radyal doğrultularda hız bileşeni olduğu görüldü. Bu nedenle iki-boyutlu halde de r - θ koordinat sisteminde teğetsel hız bileşeni $q_\theta = 0$ dır. Akımın çevrisiz (irrotasyonel) olması şartı

$$\omega_y = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rq_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta}(q_r) \right] = \frac{\partial}{\partial \theta}(q_r) = 0$$

verir. Buna göre r -doğrultusundaki hız bileşeni sadece r 'nin fonksiyonu olmalıdır: $q_r = q_r(r)$. Bu radyal hız bileşeni ayrıca (1.35) süreklilik denklemini sağlamalıdır.

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rv_r) = 0$$

Bu bağıntı da $rv_r = sb$ olacağını göstermektedir. Birim derinlikte ve r yarıçaplı daire çemberi üzerinden geçen hacimsel debi σ olmak üzere buradaki sabitin değeri $rv_r = sb = \sigma/2\pi$ olur.

Böylece başlangıç noktasında yer alan kaynağa ait hız bileşenleri için

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\pi r} \quad (3.57)$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0 \quad (3.58)$$

ve bu iki bağıntı integre edilerek hız potansiyeli için

$$\Phi = \frac{\sigma}{2\pi} \ln r + C \quad (3.59)$$

elde edilir. Buradaki C sabitinin değeri sıfır alınabilir.

Kaynağın şiddeti, kaynak tarafından sokulan akıyı temsil eden σ büyüklüğüdür. Bu husus, R yarıçaplı bir daire çemberini geçen akı dikkate alınarak gösterilebilir. Daire çemberi üzerindeki hız (3.57) denkleminde göre $\sigma/2\pi r$ olup, akı için de

$$v_r 2\pi R = \frac{\sigma}{2\pi R} 2\pi R = \sigma$$

elde edilir.

Böylece akım hızı, üç-boyutlu halde olduğu gibi sadece radyal doğrultudadır ve kaynak merkezinden olan uzaklıkla $1/r$ ile orantılı olarak azalır. $r=0$ da hız sonsuz olup, bu tekil nokta çözüm bölgesinin dışında tutulmalıdır.

Kartezyen koordinatlarda (x_0, y_0) noktasında yer alan bir kaynak için yukarıdaki bağıntılar

$$\Phi(x, y) = \frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (3.60)$$

$$u(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{x-x_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (3.61)$$

$$v(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{y-y_0}{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (3.62)$$

şeklinde elde edilebilir.

İki-boyutlu halde hız bileşenleri akım fonksiyonunun türevi alınarak da bulunabilir. Başlangıç noktasında yer alan kaynak için (2.80a,b) bağıntılarından

$$v_{\theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (3.63)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\sigma}{2\pi r} \quad (3.64)$$

yazılabilir. Bu bağıntılar integre edilerek ve yine integral sabiti sıfır alınarak akım fonksiyonu

$$\Psi = \frac{\sigma}{2\pi} \theta \quad (3.65)$$

şeklinde elde edilir.

İki boyutlu kaynak için (3.65) bağıntısından elde edilen akım çizgileri ve (3.59) bağıntısından elde edilen potansiyel çizgileri üç-boyutlu haldekinin benzeri olup biçimsel olarak Şekil 3.3a da gösterilmiştir.

Duble:

Şekil 3.7 de gösterilen iki-boyutlu duble, aynı şiddetteki bir kaynak ile bir kuyu, aralarındaki uzaklık ile şiddetleri çarpımı sabit kalacak biçimde birbirlerine yaklaştırılarak elde edilebilir. Üç-boyutlu duble halinde (3.32) bağıntısı ile verilen potansiyel fonksiyonu iki-boyutlu duble için

$$\Phi = -\frac{\vec{\mu} \vec{r}}{4\pi r^2} \quad (3.66)$$

şekline gelir. Bu bağıntı iki-boyutlu kaynağa ait yukarıda bulunan potansiyel fonksiyonu (3.33) bağıntısında yerleştirilip

$$\Phi(r) = -\frac{\partial}{\partial n} \frac{\sigma}{2\pi} \ln r \quad (3.67)$$

buradaki kaynak şiddeti yerine μ duble şiddeti yazılarak doğrudan da elde edilebilir.

Örnek olarak \mathbf{n} vektörü x doğrultusunda seçilerek, $\vec{\mu} = (\mu, 0)$, başlangıç noktasındaki duble için (3.66) bağıntısı

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{\mu \cos \theta}{2\pi r} \quad (3.68)$$

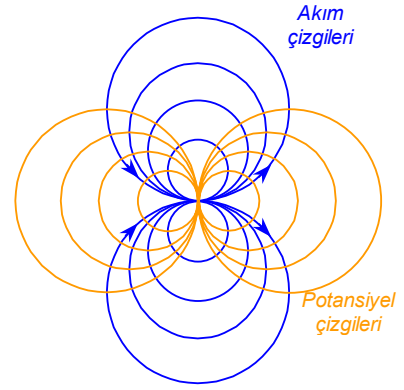
şekline gelir. Hız alanı da bu bağıntıdan türevler alınarak

$$q_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2} \quad (3.69)$$

$$q_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (3.70)$$

şeklinde bulunabilir. (x_0, y_0) Başlangıç noktasındaki bu duble için kartezyen koordinatlardaki bağıntılar

$$\Phi(x, z) = -\frac{\mu}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \quad (3.71)$$



Şekil 3.7: İki-boyutlu duble

$$u = \frac{\mu}{2\pi} \frac{(x-x_0)^2 - (z-z_0)^2}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^2} \quad (3.72)$$

$$w = \frac{\mu}{2\pi} \frac{2(x-x_0)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2 + (z-z_0)^2]^2} \quad (3.73)$$

şeklindedir.

Bu duble elemanına ait akım fonksiyonunu çıkartmak için yukarıdaki hız bileşenleri akım fonksiyonunun türevlerine eşitlenerek

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r^2} \quad (3.74)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\mu \cos \theta}{2\pi r^2} \quad (3.75)$$

ve bu denklemler integral sabiti sıfır seçilip integre edilerek

$$\Psi(r, \theta) = \frac{\mu \sin \theta}{2\pi r} \quad (3.76)$$

elde edilir.

$\vec{\mu} = (0, \mu)$, şeklindeki bir duble için benzeri bağıntılar (3.66) veya (3.67) bağıntılarından hareketle çıkartılabilir.

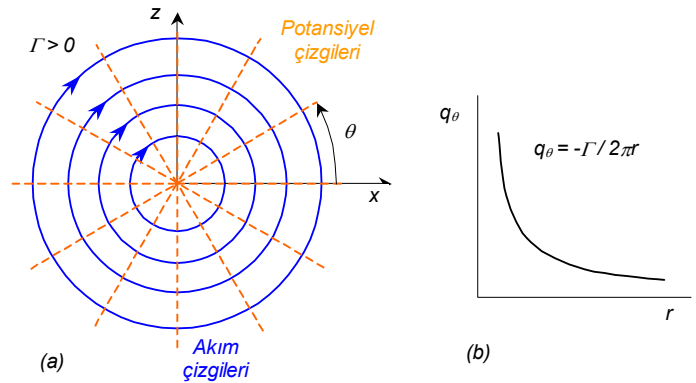
3.8 Temel Çözüm - Girdap:

(3.13) ve (3.17) denklemleriyle gösterildiği gibi Laplace denkleminin temel çözümleri sadece kaynak ve duble dağılımları içermektedir. Ancak, Bölüm 3.6 da ifade edildiği gibi Laplace denkleminin başka çözümleri mümkün olup ve Bölüm 2.10 da izah edilen girdap akımlarına dayanmaktadır (Üç-boyutlu hız alanı Bölüm 2.11 de Biot-Savart kanunu ile verilmiştir).

Burada, Şekil 3.8a da gösterildiği gibi sadece teğetsel hız bileşeni bulunan ve bu hızı iki-boyutlu kaynağın radyal hızına benzer şekilde merkezden uzaklaştıkça azalan (yani $1/r$ ile değişen) bir noktasal girdap elemanına ait potansiyel fonksiyonu elde edilecektir.

$$v_r = 0$$

$$v_\theta = v_\theta(r, \theta)$$



Şekil 3.8: Noktasal girdap

Bu hız bileşenleri (1.35) süreklilik denkleminde kullanılarak

$$v_{\theta} = v_{\theta}(r)$$

ve irrotasyonel akım için girdaplılık bağıntısında kullanılarak

$$\omega_y = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r}(rv_{\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta}(v_r) \right] = \frac{\partial}{\partial r}(rv_{\theta}) = 0$$

bulunur. Bu eşitlik r ye göre integre edilerek

$$rv_{\theta} = sb = A$$

elde edilir. Görüldüğü gibi hızın şiddeti kaynak halindeki radyal hızda olduğu gibi $1/r$ ile değişmektedir. Buradaki A sabitinin değeri, sirkülasyonun tanımı için verilen (2.36) bağıntısı yardımıyla hesaplanabilir.

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{2\pi}^0 v_{\theta} \cdot r d\theta = -2\pi A$$

Γ sirkülasyonu sağ-el kuralına göre saat ibreleri yönünde pozitif işaretli kabul edilmektedir. Bu nedenle Şekil 3.8 deki x - z düzleminde çizgisel integral θ nın artış yönüne zıt yönde hesaplanmıştır. Sonuç olarak A sabitinin değeri

$$A = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

ve hız alanı

$$v_r = 0 \quad (3.77)$$

$$v_{\theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.78)$$

Beklendiği gibi teğetsel hızlar Şekil 3.8b de gösterildiği gibi $1/r$ ile orantılı olarak azalmaktadır.

Başlangıç noktasındaki girdap elemanı için hız potansiyeli de (3.77) ve (3.78) denklemlerini integrasyonu ile elde edilir:

$$\Phi = \int v_{\theta} \cdot r d\theta + C = -\frac{\Gamma}{2\pi} \theta + C \quad (3.79)$$

Burada C keyfi bir sabit olup değeri sıfır alınabilir. (3.79) denklemini göstermektedir ki girdap elemanının hız potansiyeli çok-değerlidir, ve değeri girdap noktası etrafında kaç tur atıldığına bağlıdır.

q-dl Büyüklüğü bir girdap etrafında girdap merkezini içine alan bir kapalı eğri boyunca integre edilirse sirkülasyonun sonlu büyüklükte olduğu görülür. Girdaplılık girdap merkezinde sıfır alana sahip bir noktada yoğunlaşmıştır. Bu noktayı içine almayan herhangi bir kapalı eğri boyunca alınan integrasyonun sonucu sıfırdır (Bölüm 2.10 da ve Şekil 2.11a da gösterildiği gibi). Dolayısıyla girdap Laplace denkleminin bir çözümüdür ve girdap akımı girdap merkezi hariç irrotasyonel bir akımdır.

Kartezyen koordinatlarda (x_0, y_0) başlangıç noktasında yer alan bir girdabın potansiyeli ve hız bileşenleri

$$\Phi(x, z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z - z_0}{x - x_0} \quad (3.80)$$

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{z - z_0}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (3.81)$$

$$w = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (3.82)$$

şeklindedir.

$(x-z)$ eksen takımında başlangıç noktasında yer alan iki-boyutlu girdabın akım fonksiyonunu elde etmek için hız bileşenleri akım fonksiyonunun türevlerine eşitlenerek

$$v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.83)$$

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = 0 \quad (3.84)$$

ve bu ifadeler integral sabiti sıfır olmak üzere integre edilerek

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (3.85)$$

bulunur. Akım çizgileri Şekil 3.8 de biçimsel olarak gösterilmiştir.

3.9 Süperpozisyon ilkesi:

Şayet $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ lineer bir denklem olan (3.1) Laplace denkleminin çözümleri ise

$$\Phi = \sum_{k=1}^n c_k \Phi_k \quad (3.86)$$

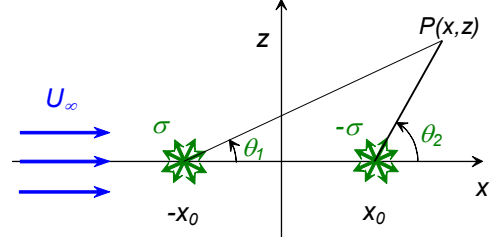
fonksiyonu da aynı bölge içinde Laplace denkleminin bir çözümüdür. Burada c_1, c_2, \dots, c_n keyfi sabitler olup;

$$\nabla^2 \Phi = \sum_{k=1}^n c_k \nabla^2 \Phi_k = 0$$

dır. Bu husus Laplace denkleminin çok önemli bir özelliğidir. Zira, bir takımı elemanter çözümler elde ettikten sonra, verilen sınır koşullarının sağlanması problemi, bu elemanter çözümlerin doğru kombinasyonlarının cebirsel olarak araştırılması problemine indirgenmektedir.

3.10 Kaynakla serbest akımın süperpozisyonu – Rankine ovali

Süperpozisyon ilkesinin kullanımına ilk örnek olarak Şekil 3.9 da gösterildiği gibi x ekseninde $x = -x_0$ noktasında yer alan σ şiddetindeki bir kaynak, $x = x_0$ noktasında yer alan $-\sigma$ şiddetindeki bir kuyu ve x ekseninde doğrultusunda akmakta olan U_∞ hızındaki serbest akımın süperpozisyonunu göz önüne alalım. Bu akım için hız potansiyeli



Şekil 3.9: Serbest akımla kaynak ve kuyunun süperpozisyonu

$$\Phi(x, z) = U_\infty x + \frac{\sigma}{2\pi} \ln r_1 - \frac{\sigma}{2\pi} \ln r_2 \quad (3.87)$$

şeklindedir. Burada $r_1 = \sqrt{(x + x_0)^2 + z^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2}$ dir. Akım fonksiyonu da

$$\Psi(x, z) = U_\infty x + \frac{\sigma}{2\pi} \theta_1 - \frac{\sigma}{2\pi} \theta_2 \quad (3.88)$$

şeklinde yazılabilir. Burada da

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{z}{x + x_0} \quad \text{ve} \quad \theta_2 = \tan^{-1} \frac{z}{x - x_0}$$

dır. Bu büyüklükler kullanılarak hız potansiyeli ve akım fonksiyonu ifadeleri

$$\Phi(x, z) = U_\infty x + \frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{(x + x_0)^2 + z^2} - \frac{\sigma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2} \quad (3.87a)$$

$$\Psi(x, z) = U_\infty x + \frac{\sigma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z}{x + x_0} - \frac{\sigma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z}{x - x_0} \quad (3.88a)$$

şekline gelir. Hız alanı potansiyel veya akım fonksiyonundan türev alınarak elde edilebilir:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = U_\infty + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{x + x_0}{(x + x_0)^2 + z^2} - \frac{\sigma}{2\pi} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + z^2} \quad (3.89)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\pi} \frac{z}{(x+x_0)^2 + z^2} - \frac{\sigma}{2\pi} \frac{z}{(x-x_0)^2 + z^2} \quad (3.90)$$

x eksenine göre simetriden dolayı durma noktaları x ekseninde kaynak ve kuyu konumlarına göre daha dış konumlarda, örneğin $x = \pm a$ noktalarındadır. Bu noktalarda w hız bileşeni de otomatik olarak sıfırdır. Hızın u bileşeni sıfıra eşitlenerek bu a uzaklığı bulunabilir:

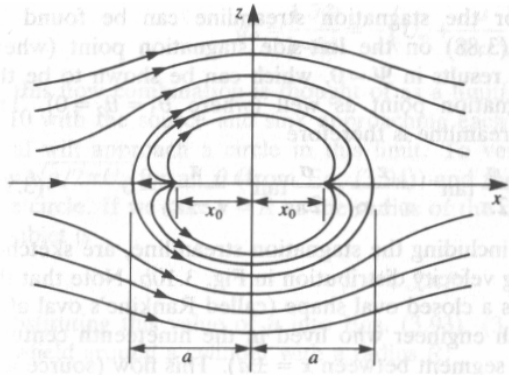
$$u(\pm a, 0) = U_\infty + \frac{\sigma}{2\pi} \frac{l}{\pm a + x_0} - \frac{\sigma}{2\pi} \frac{l}{\pm a - x_0} = U_\infty - \frac{\sigma}{\pi} \frac{x_0}{(a^2 - x_0^2)} = 0$$

$$a = \sqrt{\frac{\sigma x_0}{\pi U_\infty} + x_0^2} \quad (3.91)$$

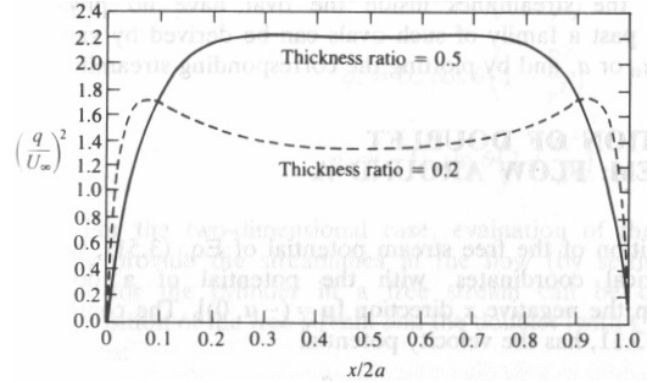
Durma akım çizgisi üzerinde akım fonksiyonunun değeri, (3.88) denklemi soldaki durma noktasında ($\theta_1 = \theta_2 = \pi$ ve $z=0$) değerlendirilerek $\Psi=0$ olmak üzere elde edilebilir. Bu değer sağdaki durma noktasında da ($\theta_1 = \theta_2 = 0$ ve $z=0$) aynı olduğu gösterilebilir. Böylece durma akım çizgisinin denklemi

$$\Psi(x, z) = U_\infty x + \frac{\sigma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z}{x+x_0} - \frac{\sigma}{2\pi} \tan^{-1} \frac{z}{x-x_0} = 0 \quad (3.92)$$

olur. Durma akım çizgisi kapalı bir oval şeklini de içermekte olup bu eğri literatürde Rankine ovali olarak adlandırılmaktadır (W.J.M. Rankine ondokuzuncu yüzyılda yaşamış bir İskoç mühendistir). Bu akıma ait akım çizgileri, durma akım çizgileri de dahil olmak üzere Şekil 3.10a da, Rankine ovali üzerindeki hız dağılımı ise Şekil 3.10b de gösterilmiştir.



a) Akım çizgileri



b) Oval üzerinde hız dağılımı

Şekil 3.10: Rankine ovali etrafındaki akım

Sonuç olarak serbest akım-kaynak-kuyu akımı $2a$ uzunluğundaki bir Rankine ovali etrafındaki akımı modellemektedir. Bu uygulama için ovalin içindeki akım çizgilerinin fiziksel bir önemi yoktur. Parametrelerin değerleri değiştirilerek farklı ovaler için çözümler elde edilebilir.

3.11 Duple ile serbest akımın süperpozisyonu – Dairesel silindir etrafında akım

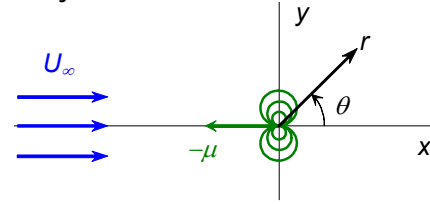
Serbest akım için kartezyen koordinatlarda (3.51) ile verilen hız potansiyelini silindirik koordinatlarda ($x = r \cos \theta$) dikkate alıp, bu akımı x eksenine zıt yönde yönlendirilmiş bir duple $[\mu = (-\mu, 0)]$ ile süperpoze edelim. Şekil 3.11 de gösterilen bu akıma ait hız potansiyeli

$$\Phi = U_{\infty} r \cos \theta + \frac{\mu}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r} \quad (3.93)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntıdan türev alınarak hız alanı için

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U_{\infty} - \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \cos \theta \quad (3.94)$$

$$v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \left(U_{\infty} + \frac{\mu}{2\pi r^2} \right) \sin \theta \quad (3.95)$$



Şekil 3.11: Üniiform akımla dublenin süperpozisyonu

elde edilir.

Bu akım bir önceki paragrafta incelenen Rankine ovalinin özel bir hali olarak dikkate alınır, kaynakla kuyu birbirine yaklaştırıldığı taktirde limit halde ovalin bir daireye yaklaşacağı beklenir.

(3.94) bağıntısından görüldüğü gibi bütün θ açılarında, $r = \sqrt{\mu / 2\pi U_{\infty}}$ için $q_r = 0$ olup, dairenin yarıçapı $r = R$ olarak alınır, dublenin şiddeti

$$\mu = U_{\infty} 2\pi R^2 \quad (3.96)$$

olarak elde edilir. Bu değer (3.93-95) bağıntılarında kullanılarak

$$\Phi = U_{\infty} \cos \theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \quad (3.97)$$

$$v_r = U_{\infty} \cos \theta \left(r - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (3.98)$$

$$v_{\theta} = -U_{\infty} \sin \theta \left(r + \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (3.99)$$

bulunur. Akım fonksiyonu için serbest akımla dubleye ait akım fonksiyonları süperpoze edilerek

$$\Psi = U_{\infty} r \sin \theta - \frac{\mu}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r} \quad (3.100)$$

elde edilir. (3.99) bağıntısında $q_\theta=0$ konularak durma noktaları $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ olmak üzere elde edilir. (3.100) denkleminde durma noktaları için bulunan θ değeri kullanılarak durma akım çizgisi üzerinde $\Psi=0$ elde edilir. Bu bağıntı $q_r(R, \theta)=0$ koşulu ile eşdeğer olup dublenin şiddeti yine (3.96) bağıntısındaki gibi elde edilebilir. Duple şiddeti kullanılarak (3.100) bağıntısı da

$$\Psi = U_\infty r \sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \quad (3.101)$$

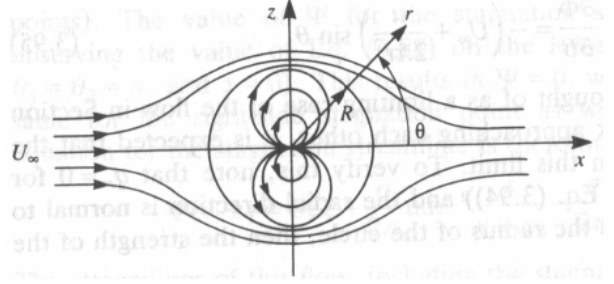
şekline gelir. Bu bağıntı R yarıçaplı daire etrafındaki akımın akım çizgilerini tanımlar (Şekil 3.12). Bu akım çizgileri (3.97) bağıntısıyla elde edilen potansiyel çizgilerine diktir.

Dairesel silindir etrafındaki basınç dağılımını elde etmek için hız bileşenleri $r=R$ de hesaplanarak

$$v_r = 0 \quad v_\theta = -2U_\infty \sin \theta \quad (3.102)$$

ve Bernoulli denkleminde

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} U_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} v_\theta^2$$



Şekil 3.12: Daire etrafında akım çizgileri

yazılarak ve nihayet q_θ nın $r=R$ deki değeri kullanılarak

$$p - p_\infty + \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (1 - 4 \sin^2 \theta) \quad (3.103)$$

veya basınç katsayıları için

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (3.104)$$

elde edilir. Buradan kolaylıkla görülmektedir ki $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ için (ki bu noktalarda $q=0$ dır) $C_p=1$ dir. Maksimum hızlar silindirin en üst ve en alt noktalarında ($\theta=\pi/2$ ve $\theta=3\pi/2$) oluşmakta olup bu noktalarda basınç katsayısının değeri -3 tür.

Silindire etkiyen akışkan kuvvetlerini elde etmek için yukarıdaki basınç dağılımının integre edilmesi gerekir. Birim ağırlık başına z doğrultusunda etkiyen kuvvet L taşıma kuvveti ve x doğrultusunda etkiyen kuvvet de D sürüklenme kuvvetidir. Yüzeyin ($R d\theta$) uzunluğundaki bir elemanı üzerindeki basınç kuvvetinin bileşenleri integre edilerek

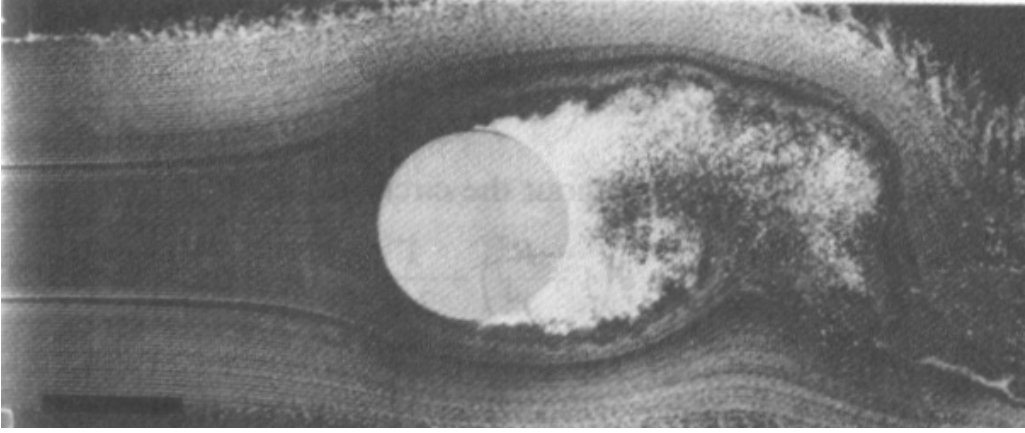
$$L = - \int_0^{2\pi} p R d\theta \sin \theta = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R d\theta \sin \theta = - \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) R \sin \theta d\theta = 0 \quad (3.105)$$

$$D = - \int_0^{2\pi} p R d\theta \cos \theta = - \int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R d\theta \cos \theta = - \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^{2\pi} (1 - 4 \sin^2 \theta) R \cos \theta d\theta = 0 \quad (3.106)$$

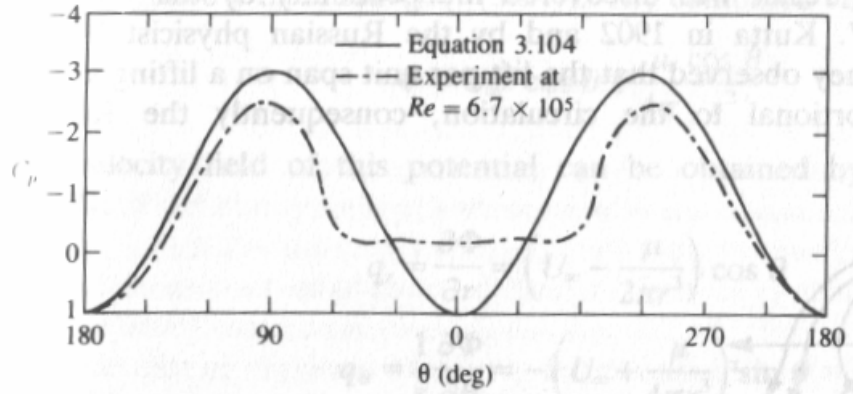
bulunur. Buradaki hesaplar sırasında basınç yerine $p-p_\infty$ alınmış olup sabit bir p_∞ basıncının kapalı bir eğri boyunca integrali sıfır olduğundan bu sonucu etkilememiştir.

Bu potansiyel akım hesabının çok ilginç bir sonucu ön ve arka kısımlar arasındaki simetri nedeniyle basınç yüklerinin birbirini yok etmesidir. Gerçekte durum farklı olup Şekil 3.13 de görüldüğü gibi akım yüzeyden ayrılır ve silindirin arka kısmında yüzeyi izlemez. Bu gerçek akım halindeki basınç dağılımı (3.104) bağıntısının sonuçlarıyla birlikte Şekil 3.14 de sunulmuştur. Buna göre, silindirin, akımın yapışık olduğu ön kısmında basınçlar bu modelle iyi tahmin edilebilmektedir. Buna karşılık silindirin gerisinde, akım ayrılması nedeniyle basınç dağılımı farklıdır.

Bu örnekte alt ve üst taraftaki akımların x eksenine göre simetrisi nedeniyle bir taşıma kuvveti oluşmamıştır. Taşıma kuvveti veren bir durum akıma başlangıç noktasında yer alan



Şekil 3.13: Silindir etrafındaki gerçek akımın hidrojen kabarcığı tekniğiyle görünümü ($Re=0.2$ Milyon)



Şekil 3.14: Silindir etrafında teorik ve deneysel ($Re=0.67$ Milyon) basınç dağılımları

saat ibreleri yönündeki bir girdapla asimetri sokularak oluşturulabilir. Bu haldeki hız potansiyeli, girdap şiddeti Γ olmak üzere

$$\Phi = U_\infty \cos \theta \left(r + \frac{R^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (3.107)$$

Buradan türev alınarak hız bileşenleri elde edilebilir:

$$v_r = U_\infty \cos \theta \left(r - \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (3.108)$$

$$v_\theta = -U_\infty \sin \theta \left(r + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (3.109)$$

Burada radyal hız bileşeninin sirkülasyonsuz haldekiyle aynı olduğu görülmektedir.

Verilen potansiyel fonksiyonunun halen bir daire etrafındaki akımı modellediğini $r=R$ için radyal hız bileşeninin sıfır olmasından anlamak mümkündür.

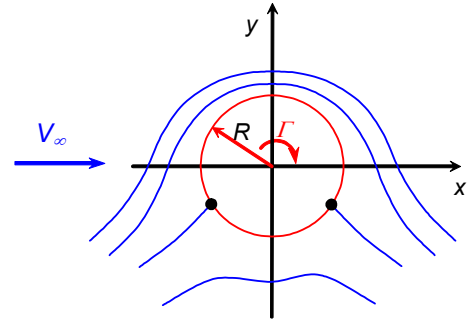
Akımın durma noktaları $r=R$ için teğetsel hızlar hesaplanıp

$$v_\theta = -2U_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \quad (3.110)$$

bu teğetsel hız sıfıra eşitlenerek

$$v_\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \sin \theta_s = -\frac{\Gamma}{4\pi R U_\infty} \quad (3.111)$$

elde edilir. θ_s açısız konumunda yer alan bu durma noktaları Şekil 3.15 de iki nokta ile gösterilmiş olup $\Gamma \leq 4\pi R U_\infty$ olduğu müddetçe bu noktalar daire üzerindedir.



Şekil 3.15: Silindir etrafında sirkülasyonlu akımda akım çizgileri

Taşıma ve sürüklenme Bernoulli denklemini yardımıyla hesaplanacaktır. Fakat, ön ve arka kısımlar arasındaki simetri nedeniyle bu hesaptan da sürüklenme beklenmemektedir. Taşıma için teğetsel hız bileşeni Bernoulli denkleminde kullanılarak

$$\begin{aligned} L &= -\int_0^{2\pi} (p - p_\infty) R d\theta \sin \theta = -\int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho U_\infty^2}{2} - \frac{\rho}{2} \left(2U_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right] R \sin \theta d\theta \\ &= -\frac{\rho U_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$L = \rho U_\infty \Gamma \quad (3.112)$$

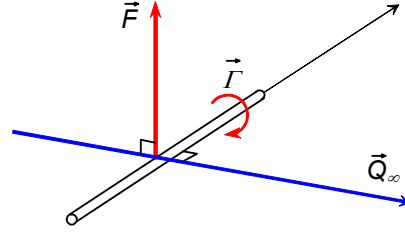
bulunur. Bu sonuç çok önemli olup, iki-boyutlu haldeki akışkan kuvvetinin doğrudan sirkülasyon şiddetiyle doğru orantılı olduğunu ve serbest akıma dik doğrultuda etkiğini göstermektedir. Bu sonucun bir genelleştirilmesi birbirinden bağımsız olarak 1902 de Alman matematikçi M.W. Kutta ve 1906 da Rus fizikçi N.E. Joukowski tarafından yapılmıştır. Bu araştırmacılar bir taşıyıcı profil veya silindirin birim açıklık başına taşıma kuvvetinin sirkülasyon şiddetiyle orantılı olduğunu gözlemlemişlerdir. Sonuç olarak Bölüm 6 da çıkartılacak olan Kutta-Joukowski teoremi şunu belirtmektedir:

Sınırsız bir akışkan içindeki sıkıştırılmaz, viskozitesiz, irrotasyonel akımda aerodinamik kuvvet birim genişlik başına $\rho Q_\infty \Gamma$ büyüklüğünde olup, serbest akım doğrultusuna dik doğrultuda etkir. (Not: Akımın x eksenine paralel olmayabileceği düşüncesiyle serbest akım hızı Q_∞ ile belirtilmiştir)

Vektör gösterimi kullanılarak bu bağıntı

$$\vec{F} = \rho \vec{Q}_\infty \times \vec{\Gamma} \quad (3.113)$$

şeklinde de yazılabilir. Buradaki \vec{F} birim ağırlık başına aerodinamik kuvvet olup, Şekil 3.16 da biçimsel olarak gösterildiği gibi vektörel çarpımın verdiği doğrultuda etkiyecektir. Γ nın pozitif yönü sağ-el kuralına göre belirlenmektedir.



Şekil 3.16: Genelleştirilmiş Kutta-Joukowski teoremi

3.12 Üç-boyutlu duble ile serbest akımın süperpozisyonu – Küre etrafında akım

Önceki bölümde izah edilen yöntem bir küre etrafındaki üç-boyutlu akım hali için genişletilebilir. Bu akıma ait hız potansiyeli (3.51) ve (3.34) bağıntıları yardımıyla, serbest akım ile x eksenine zıt yöndeki bir dublenin süperpozisyonu yoluyla elde edilir.

$$\Phi = U_\infty r \cos \theta + \frac{\mu \cos \theta}{4\pi r^2} \quad (3.114)$$

Bu denklemden türevler alınarak hız alanı da

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi r^3} \right) \cos \theta \quad (3.115)$$

$$v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = - \left(U_\infty + \frac{\mu}{2\pi r^3} \right) \sin \theta \quad (3.115)$$

$$v_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0 \quad (3.116)$$

şeklinde bulunur. Küre yüzeyi üzerinde $r=R$ olup, dik hız bileşeninin sıfır olması koşulu kullanılarak

$$v_r = \left(U_\infty - \frac{\mu}{2\pi R^3} \right) \cos \theta = 0 \quad (3.118)$$

yazılabilir. Bu koşul $\theta=\pi/2, 3\pi/2$ için ve ayrıca parantez içindeki büyüklük sıfıra eşit olduğunda sağlanmaktadır. İkinci durumda duble şiddeti için

$$\mu = 2\pi R^3 U_\infty \quad (3.119)$$

elde edilir. Duple şiddeti yukarıdaki bağıntılarda kullanılarak

$$\Phi = U_\infty \cos \theta \left(r + \frac{R^3}{2r^2} \right) \quad (3.120)$$

$$v_r = U_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \quad (3.121)$$

$$v_\theta = -U_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \quad (3.122)$$

Küre üzerindeki ($r=R$) hız bileşenleri

$$v_r = 0, \quad v_\theta = -\frac{3}{2} U_\infty \sin \theta \quad (3.124)$$

olup, durma noktaları $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ de, maksimum hız da $\theta=\pi/2$ ve $\theta=3\pi/2$ dedir. Maksimum hız $3U_\infty/2$ olup iki-boyutlu haldekinden daha küçüktür. Bernoulli denklemi yardımıyla basınç dağılımı:

$$p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right) \quad (3.124)$$

şeklinde ve basınç katsayısı da

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} = 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \quad (3.125)$$

şeklinde bulunur. $\theta=0$ ve $\theta=\pi$ durma noktalarında basınç katsayısı $C_p=1$, hızın maksimum olduğu $\theta=\pi/2$ ve $\theta=3\pi/2$ noktalarında da $C_p=-5/4$ olduğu görülmektedir.

Simetri nedeniyle dairesel silindirde olduğu gibi taşıma ve sürüklenme sıfırdır. Bununla birlikte yarı küre üzerindeki taşıma (sirkülasyon olmasa bile) sıfır olmayıp, bu hal kara araçlarının aerodinamiği bakımından ilginç olabilir. x eksenine katı bir cidar gibi alınarak kürenin üst yarısı yer üzerindeki bir yarı-küre olarak düşünülebilir.

Yarı-küre üzerindeki taşıma kuvveti

$$L = -\int (p - p_\infty) \sin \theta \sin \varphi \, dS \quad (3.126)$$

integraliyle hesaplanabilir. Küre üzerindeki yüzey elemanı $dS = (R \sin \theta \, d\varphi) R \, d\theta$ olup, basınç için bulunan (3.124) bağıntısı da kullanılarak integral alınırsa

$$\begin{aligned}
L &= -\int_0^\pi \int_0^\pi \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta\right) R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \\
&= -\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \int_0^\pi \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta\right) 2R^2 \sin^2 \theta \sin \varphi \, d\theta = -\rho R^2 U_\infty^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{27\pi}{32}\right) \\
L &= -\frac{11}{32} \pi \rho R^2 U_\infty^2 \quad (3.127)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece yarı-küre için taşıma ve sürüklenme katsayıları

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (\pi R^2 / 2)} = \frac{11}{8} \quad (3.128)$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (\pi R^2 / 2)} = 0 \quad (3.129)$$

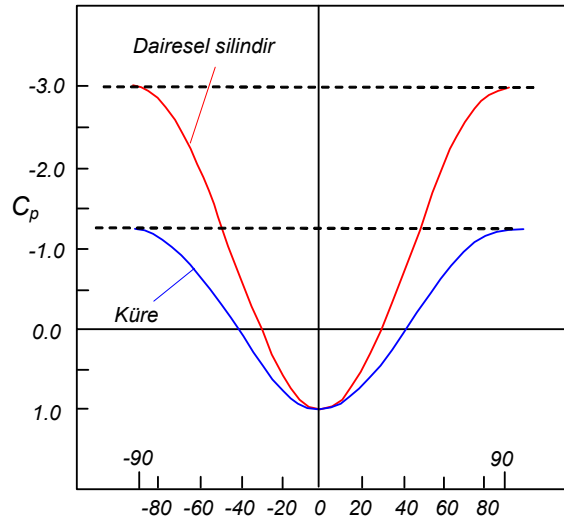
olur. Kara vasıtası modeli için ayrıca yarı-kürenin düzlemsel alt yüzeyine etkiyen kuvvetin de dikkate alınması gerektiği unutulmamalıdır.

3.13 Küre ve dairesel silindir etrafındaki akımlar için bazı uyarılar

Bir silindir etrafındaki ve bir küre etrafındaki akım örnekleri süperpozisyon ilkesinin Laplace denkleminin özel çözümlerini üretmek için uygun bir araç olduğunu açıkça göstermiştir.

Ancak bu iki akıma ait sonuçlar fiziksel açıdan potansiyel akım esaslı hesapların doğru olmadığı akım ayrılmalı bir hale karşılık gelmektedir. Silindir etrafında (3.104) bağıntısıyla elde edilen basınç dağılımı, tipik deneysel sonuçlarla birlikte Şekil 3.14 de gösterilmiştir. Ön durma noktası ($\theta = \pi$) civarında (3.104) denkleminin sonuçlarının deneysel verilere yakın olduğu gözükürken, arka bölgelerde fark hayli büyüktür. Bu durum, akım çizgilerinin yüzey eğriliğini izleyemeyerek Şekil 3.13 de gösterildiği gibi bu çizgiden ayrılması, yani akım ayrılmasının sonucudur.

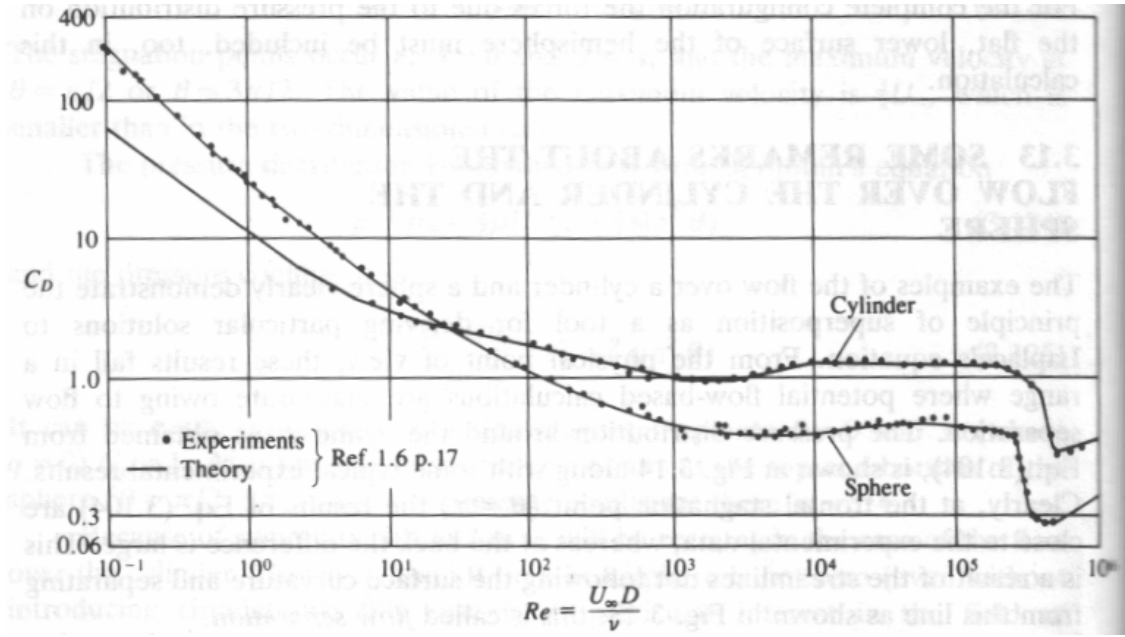
Küre için (3.125) bağıntısıyla elde edilen teorik basınç dağılımı, dairesel silindire ait sonuçlarla birlikte Şekil 3.17 de sunulmuştur.



Şekil 3.17: Silindir ve küre üzerinde basınç dağılımları

Üç-boyutlu haldeki emme basınçlarının daha küçük olduğu belirtilmelidir. Küreye ait deneysel sonuçlar akımın yine ayrıldığını ama arka bölgedeki düşük basınçların daha küçük olduğunu

göstermektedir. Bunun sonucu olarak kürenin sürüklenme katsayıları Şekil 3.18 de gösterildiği gibi eşdeğer bir dairesel silindirinkinden ($Re > 2000$ için) daha düşüktür. Sürüklemeye ilgili bu veriler yüzey sürtünmesi ve ayrılma bölgesinin bir sonucu olup, Reynolds sayısından kuvvetle etkilenmektedir. Sürüklenme laminer akımlar için ($Re < 2000$) cismin gerisindeki geniş ölçekli ayrılmaya bağlı olarak daha büyüktür. Türbülanslı akım halinde ($Re > 10^5$) artan momentum transferiyle iz ve sürüklenme küçülür. Viskoz olmayan akım sonuçları akım ayrılmasını ve cisim yüzeyi üzerindeki viskoz sürtünmeyi hesaba katmadığı için dairesel silindir ve kürenin her ikisi için de sürüklenme sıfırdır. Bu gerçek onyedinci yüzyılın ortalarında Fransız matematikçi d'Alembert'i rahatsız etmiştir. D'Alembert, deneysel sonuçlar sonlu bir sürüklenme vermesine karşın, iki-boyutlu viskoz olmayan sıkıştırılmaz akımda kapalı bir cismin sürüklenmesinin sıfır olduğu sonucuna varmıştır. Akışkanlar dinamiğinin bu başlangıç dönemlerinden beri bu durum d'Alembert ikilemi olarak bilinmektedir.



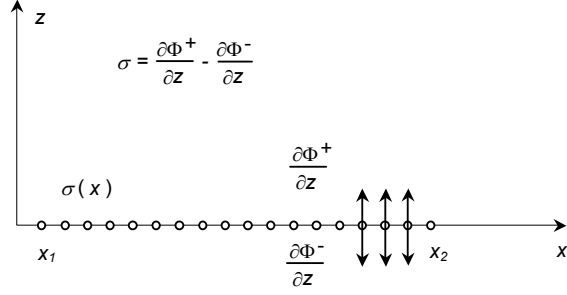
Şekil 3.18: Silindir ve kürenin sürüklenme katsayıları

3.14 Temel çözümlerin yüzey dağılımları

Bölüm 3.2 ve 3.3 deki sonuçlar göstermektedir ki herhangi bir cisim etrafındaki akıma ait çözüm cisim yüzeyi boyunca elemanter tekilliklerin dağılımı kullanılarak elde edilebilir. Bu yöntemi pratik problemlere uygulamadan önce elemanter çözümlerin herbirinin tabiatının incelenmesi faydalıdır. Burada kolaylık açısından x eksenini boyunca x_1 , x_2 noktaları arasında iki-boyutlu noktasal tekilliklerin dağılımı dikkate alınacaktır.

KAYNAK DAĞILIMI:

Şekil 3.19 da gösterildiği gibi x eksenini boyunca yer alan birim uzunluk başına $\sigma(x)$ şiddetindeki kaynak dağılımını göz önüne alalım. Bu dağılımın bir $P(x,z)$ noktasındaki etkisi, bütün noktasal kaynak elemanlarının etkilerinin integralidir.

Şekil 3.19: x eksenini boyunca kaynak dağılımı

$$\Phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x_0) \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.130)$$

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x_0) \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.131)$$

$$w(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \sigma(x_0) \frac{z}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.132)$$

Böyle bir dağılımın özelliklerini incelerken ilerideki modellemeler açısından yüzeydeki süreksizliğin tipine bakmak yararlıdır. Her bir kaynak bütün doğrultularda akışkan çıkardığından bileşke hız Şekil 3.19 da gösterildiği gibi yüzeyden dışarıya doğru olacaktır. Dolayısıyla $z = 0$ da w hız bileşeninde bir süreksizlik olduğu açıktır. (3.132) denkleminin integrandını $z \rightarrow 0$ için, $x_0 = x$ olması durumu hariç sıfır olduğunu belirtelim. Dolayısıyla bu integralin değeri sadece bu noktadan gelen katkıya bağlıdır. Bu durumda olarak, $\sigma(x_0)$ integral dışına çıkartılarak $\sigma(x)$ şeklinde yazılabilir. İntegral sınırları değerini etkilememekte olup, $\pm\infty$ olarak değiştirilebilir. Ayrıca (3.132) bağıntısındaki integrandın z ye olan bağımlılığı nedeniyle z büyüklüğü sıfıra x ekseninin yukarisından yaklaştığında hız bileşeninin w^+ ile ve aşağıdan yaklaştığında da w^- ile belirtilmesi uygun olur. Böylece w^+ için (3.132) bağıntısı

$$w(x, 0^+) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.133)$$

şekline gelir. Bu integrali hesaplayabilmek için

$$\lambda = \frac{x - x_0}{z} \quad d\lambda = -\frac{dx_0}{z}$$

şeklinde yeni bir değişken tanımlanarak

$$w(x, 0^+) = \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\sigma(x)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2} = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \tan^{-1}[\lambda]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\sigma(x)}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\sigma(x)}{2} \quad (3.134)$$

ve böylece x ekseninin üst ve alt tarafından yaklaşımlar halinde

$$w(x, 0^\pm) = \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, 0^\pm) = \pm \frac{\sigma(x)}{2} \quad (3.135)$$

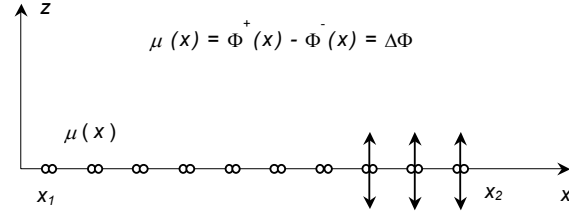
elde edilir. Bu eleman x eksenine göre simetrik ve tekillik dağılımı yüzeyine dik hız bileşenindeki atlamanın

$$w^+ - w^- = \sigma(x) \quad (3.136)$$

olduğu akımları modellemek için uygundur. Hızın u bileşeni x eksenini üzerinden geçerken süreklidir.

DUBLE DAĞILIMI:

Benzeri şekilde x eksenini boyunca x_1 ve x_2 noktaları arasında yer alan ve z doğrultusunda yönelmiş duble dağılımının $P(x, z)$ noktasındaki etkisi (Şekil 3.20) noktasal elemanların etkilerinin bir integrali şeklinde hesaplanabilir:



Şekil 3.20: x eksenini boyunca duble dağılımı

$$\Phi(x, z) = -\frac{I}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x_0) \frac{z}{(x-x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.137)$$

$$u(x, z) = \frac{I}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x_0) \frac{(x-x_0)z}{[(x-x_0)^2 + z^2]^2} dx_0 \quad (3.138)$$

$$w(x, z) = \frac{I}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \mu(x_0) \frac{(x-x_0)^2 - z^2}{[(x-x_0)^2 + z^2]^2} dx_0 \quad (3.139)$$

Duble dağılımı için (1.37) bağıntısıyla verilen hız potansiyelinin kaynak dağılımı halinde elde edilen w hız bileşeni ile özdeş olduğu dikkati çekmektedir.

$z \pm \rightarrow 0$ için hız potansiyelinde bir atlama olup, kaynak dağılımı ile analogi yapılarak

$$\Phi(x, 0^\pm) = \pm \frac{\mu(x)}{2} \quad (3.140)$$

elde edilir. Bu durumda teğetsel hız bileşeninde de

$$u(x, 0^\pm) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, 0^\pm) = \pm \frac{I}{2} \frac{d\mu(x)}{dx} \quad (3.141)$$

şeklinde bir süreksizlik vardır. Duble dağılımının başladığı x_1 noktası ile herhangi bir x noktası arasındaki doğru parçasını çevreleyen bir kapalı yörünge etrafındaki sirkülasyon için

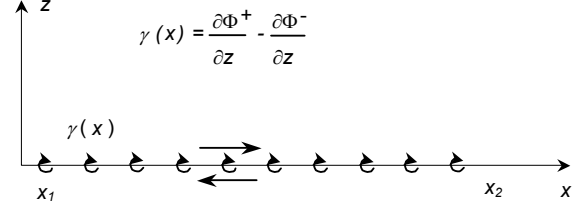
$$\Gamma(x) = \int_{x_1}^x u(x_0, 0^+) dx_0 + \int_x^{x_2} u(x_0, 0^-) dx_0 = -\mu(x) \quad (3.142)$$

veya potansiyeldeki süreksizlikle özdeşlik nedeniyle

$$\Gamma(x) = \Phi(x, 0^+) - \Phi(x, 0^-) = -\mu(x) = \Delta\Phi(x) \quad (3.143)$$

GİRDAP DAĞILIMI:

Yine benzeri şekilde x eksenini boyunca x_1 ve x_2 noktaları arasında yer alan girdap dağılımının $P(x, z)$ noktasındaki etkisi (Şekil 3.21) noktasal elemanların etkilerinin bir integrali şeklinde hesaplanabilir:



Şekil 3.21: x eksenini boyunca girdap dağılımı

$$\Phi(x, z) = \frac{I}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x_0) \tan^{-1} \left(\frac{z}{x - x_0} \right) dx_0 \quad (3.144)$$

$$u(x, z) = \frac{I}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x_0) \frac{z}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.145)$$

$$w(x, z) = \frac{I}{2\pi} \int_{x_1}^{x_2} \gamma(x_0) \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + z^2} dx_0 \quad (3.146)$$

Burada da u hız bileşeni için verilen (3.145) ifadesi kaynak dağılımı halinde w hız bileşeni için verilen (3.132) ifadesiyle ve duble dağılımı halinde hız potansiyeli için verilen (3.137) ifadesiyle özdeşdir.

$z \pm \rightarrow 0$ için u hız bileşeninde bir atlama olup, diğer dağılımlarla analogi yapılarak

$$u(x, 0^\pm) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x, 0^\pm) = \pm \frac{\gamma(x)}{2} \quad (3.147)$$

elde edilir. Hız potansiyelinde de bir süreksizlik olup, girdap dağılımının başlangıç noktasında $\Phi = 0$ kabul edilerek

$$\Delta\Phi(x, 0^\pm) = \Phi(x, 0^+) - \Phi(x, 0^-) = \int_{x_1}^x \frac{\gamma(x_0)}{2} dx_0 - \int_x^{x_2} \frac{\gamma(x_0)}{2} dx_0$$

elde edilir. Sirkülasyon $\int u(x, 0) dx$ büyüklüğünün kapalı bir integrali olup (3.142) bağıntısıyla özdeşdir. Böylece aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\Gamma(x) = \Phi(x, 0^+) - \Phi(x, 0^-) = \Delta\Phi(x) \quad (3.148)$$

Benzeri akım koşullarının bir girdap veya duble dağılımı ile modellenebileceği dikkati çekmektedir. İkisinin arasındaki ilişki

$$\Gamma = -\mu \quad (3.149)$$

şeklindedir. (3.141) ve (3.147) bağıntıları karşılaştırıldığında görülmektedir ki, bir girdap dağılımı

$$\gamma(x) = -\frac{d\mu(x)}{dx} \quad (3.150)$$

olmak üzere eşdeğer bir duble dağılımıyla yer değiştirebilir.