

BÖLÜM 1

GİRİŞ

- 1.1 Akışkan hareketinin tanımı
- 1.2 Eksen takımının seçimi
- 1.3 Yörünge çizgisi, çıkış çizgisi, akım çizgisi
- 1.4 Akışkan içerisinde kuvvetler
- 1.5 Akışkanlar dinamiği denklemlerinin integral formu
- 1.6 Akışkanlar dinamiği denklemlerinin diferansiyel formu
- 1.7 Akışkanlar mekaniği denklemlerinin boyut analizi
- 1.8 Yüksek Reynolds sayısında akım

BÖLÜM 1

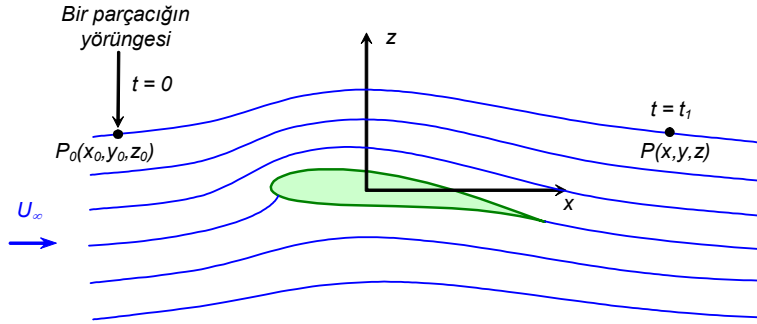
GİRİŞ

1.1 Akışkan Hareketinin Tanımı:

Akışkan *sürekli ortam* olarak modellenmekte ve akışkanın sonsuz küçük bir bölgesi (kütle sabit olmak üzere) *akışkan elemanı* veya *akışkan parçacığı* olarak adlandırılmaktadır.

Akışkanın hareketi iki farklı yöntemle tanımlanabilir:

1- *Lagrange yöntemi* her bir akışkan parçacığının hareketini ayrı ayrı izleme yöntemidir.



Cisme bağlı eksen takımında bir kanat profili etrafındaki akımda parçacık yörünge çizgileri

Herhangi bir P akışkan parçacığının (x, y, z) kartezyen koordinat sisteminde konumu:

$$\begin{aligned} x &= x_p(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= y_p(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= z_p(x_0, y_0, z_0, t) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Burada

(x_0, y_0, z_0) $t=0$ başlangıç anındaki konum

Bu parçacığın hız bileşenleri:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \quad v = \frac{\partial y}{\partial t} \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1.2)$$

ivmeleri

$$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Lagrange formülasyonu her bir akışkan parçacığının hareketinin tespitini gerektirir. Çoğu pratik uygulama için bu analiz yöntemi zor ve gereksizdir.

2- *Euler yöntemi* akım değişkenlerinin hareket boyunca her bir andaki uzaysal dağılımını verir. Örneğin kartezyen koordinat sisteminde hız bileşenleri

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z, t) \\ v &= v(x, y, z, t) \\ w &= w(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

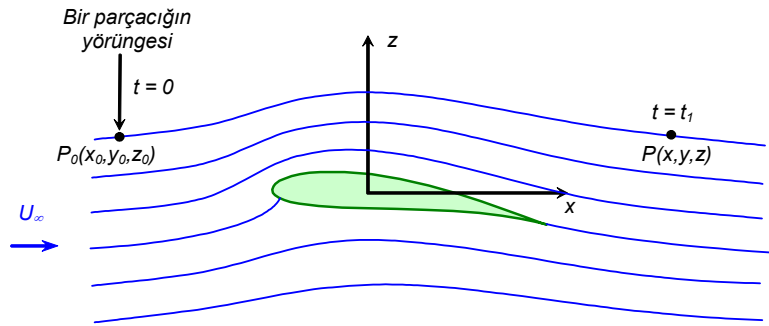
Euler yöntemi, çoğu deneysel tekniğin verdiği bilgilerle uygun bir biçimde akım değişkenleri hakkında bilgi vermekte olup, bu da çoğu pratik uygulama için uygun düşmektedir. Bu nedenle akışkan hareketinin tanımlanmasında en çok kullanılan yöntem Euler yöntemidir.

1.2 Eksen Takımının Seçimi:

Kartezyen, eğrisel, silindirik, küresel vb koordinat sistemleri sınır geometrilerine uygun seçilmelidir.

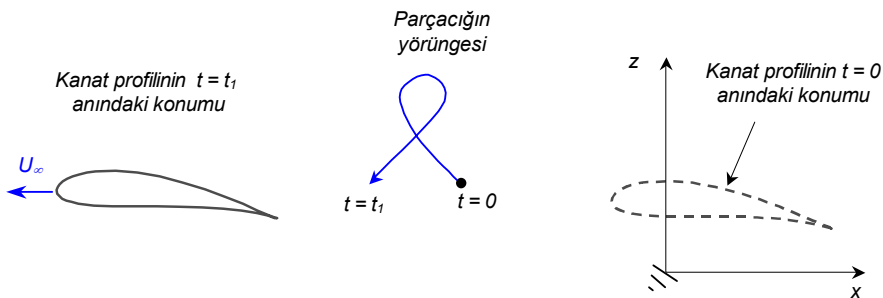
Kinematik bakış açısından da koordinat sisteminin dikkatli seçimi bir problemin çözümünü hayli kolaylaştırabilir.

Örneğin şekildeki gibi durağan bir akışkan içerisinde U_∞ sabit hızıyla ilerleyen kanat profilinin hareketi kanat profiline bağlı eksen takımında incelenirse bütün yörünge çizgileri zamandan bağımsız olur ve problemin çözümü kolaylaşır.



Şimdi aynı akımı bozulmamış akıma bağlı bir eksen takımında inceleyelim. Şekil 1.2 de gösterildiği gibi $t=0$ anında kanat profili şeklin sağında yer alsın. Sabit hızla ileri hareketinin sonucu olarak kanat profili $t=t_1$ anında şekilde belirtilen yeni konumuna gelecektir. Şekilde $t=0$ ve $t=t_1$ anları arasında tipik bir yörünge çizgisi de gösterilmiştir. Parçacığın hareketi şimdi zamana bağlıdır ve her bir parçacık için yeni bir yörünge tespit edilmelidir.

Bu basit örnek iyi bir koordinat sistemi seçiminin önemini ortaya koymuştur. Sabit hız ve sabit geometri (zamana göre) içeren çoğu problem için cisme bağlı eksen takımı kullanılması daimi (zamandan-bağımsız) bir inceleme yapma olanağı sağlar.



Şekil 1.1: Durağan ataletsel eksen takımında profil etrafındaki akımda parçacık yörünge çizgisi

1.3 Yörünge Çizgisi, Çıkış çizgisi, Akım Çizgisi:

Akışkan hareketinin görsel tanımlanması için önemli üç çizgi vardır: Yörünge çizgisi, çıkış çizgisi ve akım çizgisi.

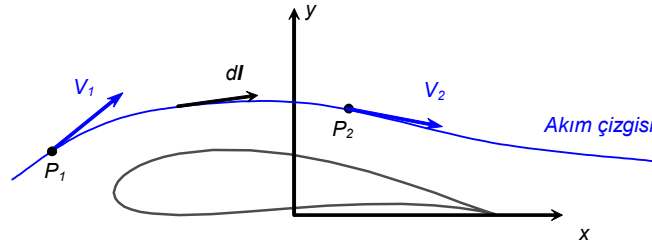
Yörünge çizgisi: Bir akışkan elemanının yörüngesini gösteren çizgiye *yörünge çizgisi* veya *parçacık yörüngesi* adı verilir. Yörünge çizgileri Lagrange yönteminde herbir akışkan parçacığı için dinamik denklemlerinin integrasyonu yoluyla elde edilir. Şayet bir akışkan hareketinin hız alanı cisme bağlı eksen takımında Euler yaklaşımının (1.4) denklemleriyle verilirse, Şekil 1.1 deki P_0 gibi bir parçacık için yörünge çizgisi hızın integrasyonu ile elde edilebilir. Daimi akımlar için cisme bağlı eksen takımında yörünge çizgileri zamandan bağımsız olur ve Şekil 1.1 deki kanat profili etrafındaki akımda olduğu gibi çizilebilir.

Çıkış çizgisi: Çoğu deneysel akım görüntüleme çalışmasında parçacıklar (boya veya duman gibi) uzayda sabit bir noktada akıma bırakılır. Zaman içinde bütün bu parçacıkları birleştiren çizgi çıkış çizgisi olarak adlandırılır. Lagrange yaklaşımı kullanarak çıkış çizgilerini oluşturmak için uzayda verilmiş bir noktadan geçen parçacıklar için bir seri yörünge çizgileri çizilir ve özel bir anda bu yörünge çizgilerinin bitim noktaları birleştirilir.

Akım çizgisi: Herhangi bir anda yerel hız vektörüne paralel çizgilerle bir başka eğri takımı elde edilebilir. Herhangi bir anda akışkan içindeki bir P noktasında akım çizgisinin denklemini analitik olarak ifade etmek için \mathbf{V} hız vektörü $d\mathbf{l}$ akım çizgisi elemanına paralel olmalıdır (Şekil 1.3). Böylece bir akım çizgisi üzerinde:

$$\vec{V} \times d\vec{l} = 0 \quad (1.5)$$

olur. Şayet hız vektörü $\mathbf{V} = (u, v, w)$ şeklindeyse (1.5) vektör denklemi



Şekil 1.3: Akım çizgisi

$$\begin{aligned} wdy - vdz &= 0 \\ udz - wdx &= 0 \\ vdx - udy &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

skaler denklemlerine veya

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (1.6a)$$

diferansiyel denklemlerine dönüşür.

(1.6a) denkleminde (u, v, w) hızı koordinatların ve zamanın fonksiyonudur. Bununla birlikte daimi akımlar için akım çizgileri zamandan bağımsızdır ve akım çizgileri, yörünge çizgileri ve çıkış çizgileri özdeştir.

1.4- Akışkan İçerisindeki Kuvvetler:

Akışkan hareketinin dinamiğini tartışmadan önce bir akışkan elemanına etkiyen kuvvetlerin tiplerini incelemekte yarar bulunmaktadır. Burada, ele alınacak kuvvetler

bünye kuvvetleri ve yüzey kuvvetleridir. Bünye kuvvetleri, yerçekimi kuvveti veya manyetik kuvvet gibi akışkanın temasına bağlı olmayan kuvvetlerdir ve akışkan içerisindeki lokal yoğunlukla orantılıdır.

- *Bünye kuvvetleri* (yerçekimi, manyetik kuvvet) – yüzey temasıyla ilgili değildir
- lokal yoğunlukla orantılıdır
- *Yüzey kuvvetleri* (teğetsel ve normal yönde)

olarak belirtilebilir.

Akışkan içerisinde herhangi bir noktadaki \vec{t} gerilme vektörü, Şekil 1.4 'de görüldüğü gibi bir S düzlemsel alanına etkiyen \vec{F} kuvveti göz önüne alınarak

$$\vec{t} = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{F}}{S} \right)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Gerilme vektörünün bileşenlerini elde etmek için Şekil 1.5 'de görüldüğü gibi sonsuz küçük bir dörtyüzlü akışkan elemanı üzerindeki kuvvetler dengesi ele alınırsa x_1 , x_2 ve x_3 doğrultusundaki gerilme bileşenleri için

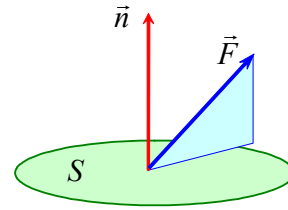
$$t_i = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.7)$$

yazılabilir (bkz. *Batchelor G.K., An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Pres, 1967, sayfa 10*).

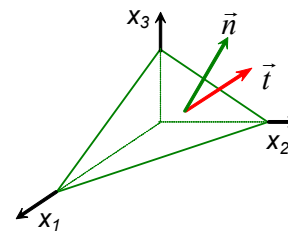
Buradaki 1,2 ve 3 indisleri üç koordinat doğrultusunu belirtmektedir. Benzeri bir inceleme moment dengesi için yapıldığı takdirde gerilme bileşenlerinin

$$\tau_{ji} = \tau_{ij}$$

şeklinde *simetrik* oldukları görülür.



Şekil 1.4: Bir yüzeye etkiyen kuvvet

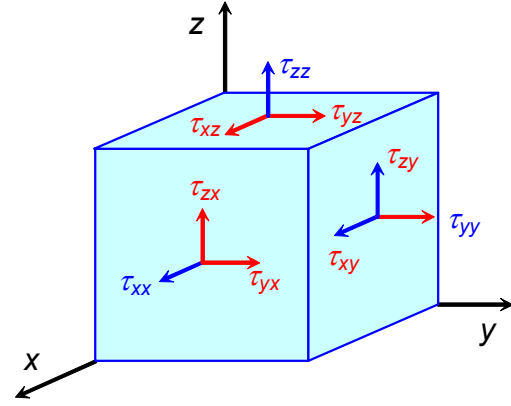


Şekil 1.5: Dörtyüzlü akışkan elemanı

Gerilme vektörünün bileşenleri Şekil 1.6 'da kübik bir akışkan elemanı üzerinde sistematik olarak gösterilmiştir. Burada

- τ_{ij} büyüklüğü
- doğrultusu x_j olan yüzeye
- x_i doğrultusunda etkiyen

bileşeni belirtmektedir. İndissel notasyon denklemlerin daha basit bir biçimde gösterilmesini sağlamakta olup, 1,2 ve 3 indisleri sırasıyla x, y ve z gibi doğrultulardaki koordinatları belirtmektedir.



Şekil 1.6: Kübik akışkan elemanı üzerinde gerilme bileşenleri

Örneğin:

$$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = z$$

Kübik akışkan elemanı üzerindeki gerilme bileşenleri matris formda veya indissel formda

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \tau_{ij} \quad (1.8)$$

veya herhangi bir indis üzerinde toplam şeklinde de belirtilebilir:

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j = \tau_{ij} n_j \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

Newtonien akışkanlar için τ_{ij} gerilme bileşenleri $\partial q_i / \partial x_j$ türevleriyle doğrusal orantılı olup hız alanına

$$\tau_{ij} = \left(-p - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial q_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} + \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.10)$$

şeklinde bağlıdır (bkz *Batchelor [1.1], sayfa 147*). Burada

μ mutlak viskozite katsayısı,

P basınç

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ Kronecker delta fonksiyonudur.

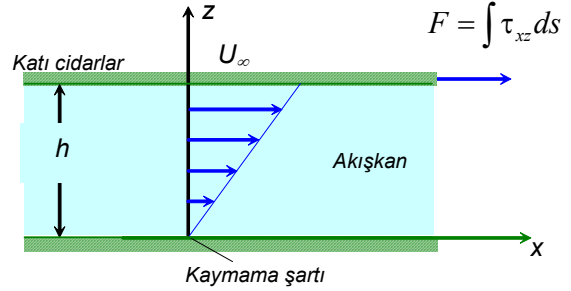
Hareketsiz akışkanda teğetsel gerilmeler yok olur. Normal bileşenler basınca eşit olur:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Couette akımı (Yuan [1.2],sayfa 260)

(1.10) eşitliğinin ilginç bir diğer durumu da biri sabit, diğeri U_∞ hızıyla hareket eden sonsuz geniş iki levha arasındaki basınç gradyantsız, tek-serbestili akım halidir (Şekil 1.7). Couette akımı (bakınız Yuan [1.2],sayfa 260) olarak bilinen bu akım için kayma gerilmesi

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\mu U_\infty}{h} \quad (1.12)$$



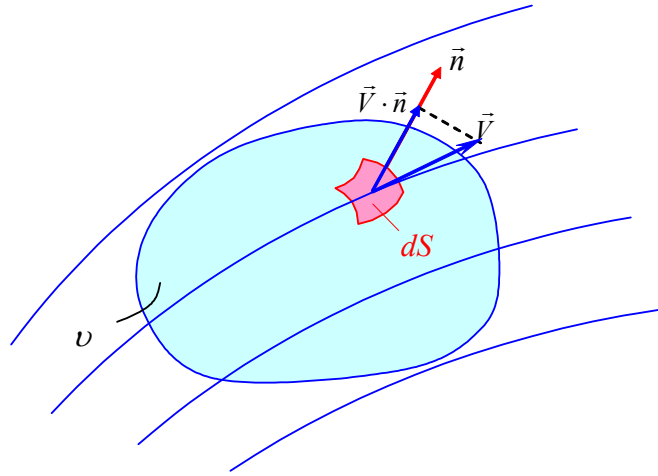
Şekil 1.7: Biri hareketsiz iki düz levha arasındaki akış

şekindedir. Akımda basınç gradyanı bulunmadığından x doğrultusundaki hareket tamamen viskoz kuvvetlerden kaynaklanmaktadır. Levhaya etkiyen F kuvvetini τ_{xz} yi hareketli üst levha üzerinde integre ederek hesaplamak mümkündür

1.5 Akışkanlar Dinamiği Denklemlerinin İntegral Formu:

Akışkan hareketini temsil eden integral ve diferansiyel denklemlerin çıkartılması için akışkanın, yoğunluk, momentum, enerji gibi muhtelif özellikleri Şekil 1.8'deki gibi seçilen durağan bir kontrol hacmi içerisinde incelenir.

Kontrol hacminden geçen akışkanın bu özelliklerinden herhangi birinde meydana gelecek bir değişme, bu özelliğin kontrol hacmi içerisinde biriktiği miktar ile akışkan özelliğinin kontrol hacmi sınırlarından dışarıya taşınan miktarının toplamına eşit olacaktır.



Şekil 1.8: Kontrol hacmi

Süreklilik denklemi

Örneğin kütle korunumu, kontrol hacmi içerisinde akışkanın yoğunluğu gözlenerek analiz edilebilir. Buna göre, kontrol hacmi içerisindeki akışkan kütlesi

$$m = \iiint_V \rho dV \quad (1.13)$$

olup, bu kütle miktarının zamanla değişimi

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV \quad (1.13a)$$

şeklinde belirtilebilir.

Kontrol hacmi yüzeyinden birim zamanda dışarı çıkan ve içeri giren kütle miktarları arasındaki fark:

$$m_o - m_i = \iint_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (1.14)$$

olarak hesaplanabilir. Burada

$\vec{V}(u, v, w)$	hız vektörü
dS	yüzey elemanı
\vec{n}	yüzey elemanının kontrol hacminden dışarı doğru yönelmiş normal vektörü
$\rho(\vec{V} \cdot \vec{n})$	kontrol hacminin dS yüzey elemanından birim zamanda dışarı çıkan akışkan kütle miktarı

Kütlenin korunumu gereği(1.13a) ve (1.14) eşitliklerinin toplamı sıfıra eşit olacaktır:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV + \iint_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (\text{Süreklilik denklemi}) \quad (1.15)$$

Bu denklem kütlenin korunumunun integral ifadesi olup, kısaca, kontrol hacmi içerisindeki kütle miktarında birim zamanda meydana gelen değişimin kontrol hacmi sınırlarından birim zamanda dışarı çıkan net kütle miktarına eşit olduğunu belirtmektedir.

Momentum denklemi

Benzeri şekilde momentumun korunumu ele alınırsa,

$$\begin{array}{l} \text{kontrol hacminden geçen} \\ \text{momentumun birim} \\ \text{zamandaki değişimi} \end{array} = \begin{array}{l} \text{kontrol hacminde birim} \\ \text{zamanda biriken} \\ \text{momentum miktarı} \end{array} + \begin{array}{l} \text{kontrol hacmi sınırlarından} \\ \text{birim zamanda dışarı çıkan} \\ \text{momentum miktarı} \end{array}$$

olacaktır:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \vec{V} dV + \iint_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (1.16)$$

Momentumdaki bu değişim, Newton'un ikinci kanunu gereği kontrol hacmi içerisindeki akışkan kütlelerine etkileyen kuvvetler toplamına eşit olmalıdır.

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F} \quad (1.17)$$

Kontrol hacmi içerisindeki akışkan kütesine etkiyen kuvvetlere gelince, şayet örnek olarak bu kuvvetlerin bir x_i doğrultusundaki bileşenleri göz önüne alınırsa, birim hacim başına bünye kuvvetleri ρf_i ve birim alan başına yüzey kuvvetleri de $n_j \tau_{ij}$ olmak üzere

$$\left(\sum \vec{F}\right)_i = \iiint_V \rho f_i dV + \iint_S n_j \tau_{ij} dS \quad (1.18)$$

yazılabilir. Burada \vec{n} , yüzeyin dışarı doğru yönelmiş birim normal vektörüdür.

Newton'un ikinci kanununu uygulamak için (1.16) ve (1.18) eşitlikleri (1.17) de kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho v_i dv + \iint_S \rho v_i (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \rho f_i dv + \iint_S n_j \tau_{ij} dS \quad (1.19)$$

elde edilir. Bu bağıntı x_i doğrultusunda **Momentum denklemi**dir.

Bu yaklaşım enerji denklemi gibi başka genel denklemlerin çıkartılmasında da kullanılabilir. Ancak **düşük-hız aerodinamiği**ndeki problemlerde akışkan hareketinin temsili için kütle ve momentum denklemleri yeterli olacaktır.

1.6 Akışkanlar Dinamiği Denklemlerinin Diferansiyel Formu:

Kütlenin ve momentumun korunumu için önceki paragrafta integral formda elde edilen (1.15) ve (1.19) denklemleri yerine çoğu zaman bu denklemlerin diferansiyel formlarının kullanılması daha uygun olmaktadır. Ancak bu denklemlerin diferansiyel formlarının elde edilebilmesi için içerilerinde geçen integrallerin hepsinin aynı boyutta olması, yani yüzey integrallerinin hacim integrallerine dönüştürülmesi gerekmektedir.

Bu amaçla, herhangi bir \vec{A} vektörü için

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dv \quad (\text{Vektörel form}) \quad (1.20)$$

$$\iint_S A_j \cdot n_j dS = \iiint_V \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dv \quad (\text{İndissel form}) \quad (1.20a)$$

şeklinde ifade edilen diverjans teoreminden yararlanılabilir (bkz. *Kellog O.D., Foundation of potential theory, Dover Publishing, 1953, sayfa 39*). Şayet \vec{A} büyüklüğü olarak \vec{V} hız vektörü alınırsa bu eşitliğin

$$\text{- sol tarafı kontrol hacminin yüzeyi üzerinden geçen hacimsel debiyi} \quad \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

$$\text{- sağ tarafı da kontrol hacmi içerisindeki akışkanın genişleme hızını} \quad \iiint_V \nabla \cdot \vec{V} dv$$

ifade eder.

Buradaki ∇ sembolü de gradyant operatörü olup, kartezyen koordinatlarda

$$\text{Vektörel formda} \quad \nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\text{Tansörel formda} \quad \nabla = \vec{e}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

şeklinde yazılabilir. Son bağıntıdaki \vec{e}_j birim vektör olup $j=1,2,3$ için sırasıyla $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ olur.

Süreklilik denklemi

Diverjans teoremi süreklilik denklemi için bulunan (1.15) bağıntısındaki yüzey integrali için uygulanarak

$$\iint_S \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \nabla(\rho \vec{V}) dV$$

elde edilir ve böylece kütle korunumu denklemi

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) \right] dV = 0$$

şekline gelir. Burada kontrol hacmi durağan (stationer) olduğu için zaman göre türev integral içerisine alınabilmektedir. Bu denklem akışkan içerisinde herhangi bir kontrol hacmi için geçerli olacağından integral içerisinde de sıfıra eşit olması gerekir. Böylece kütle korunumu (veya süreklilik) denkleminin

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) = 0} \quad (1.21)$$

şeklinde diferansiyel formu elde edilir. Bu denklem, ikinci terimi açılarak

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \vec{V} + \vec{V} \nabla \rho = 0 \quad (1.21a)$$

ve kartezyen koordinatlarda açık biçimde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (1.21b)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{D(\bullet)}{Dt} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \vec{V} \nabla(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + u \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} + v \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} + w \frac{\partial(\bullet)}{\partial z}$$

şeklinde tanımlanan materyal türev kullanılarak (1.21) denklemi

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{V} = 0 \quad (1.21c)$$

şekline de getirilebilir.

Sıkıştırılmaz akışkan

Sıkıştırılmaz akışkan, *elemanları hacim değişimine maruz kalmayan akışkan* olarak tanımlanır. Tanım gereği akışkan elemanının kütlesi sabit olduğundan, sıkıştırılmaz bir akışkanın yoğunluğu sabit olmalıdır (Buna göre homojen sıkıştırılmaz bir akışkan, sabit yoğunluklu akışkandır). Bu durumda sıkıştırılmaz bir akışkan için (1.21) süreklilik denklemi

$$\nabla \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.23)$$

şekline indirgenir.

Görüldüğü gibi sıkıştırılmaz süreklilik denkleminde zamana göre türev yer almamaktadır. (Ancak, zamana bağlı sınır şartları ortaya konularak zamana bağlılık yaratılabilir)

Momentum denklemi

Momentum denkleminin diferansiyel formunu elde etmek için yine diverjans teoremi (1.19) denklemindeki yüzey integrallerine uygulanırsa

$$\iint_S \rho v_i (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \nabla (\rho v_i \vec{V}) dV$$

$$\iint_S n_j \tau_{ij} dS = \iiint_V \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dV$$

ve böylece

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla (\rho v_i \vec{V}) - \rho f_i - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right] dV = 0 \quad (1.24)$$

olur. Yine bu integral denklemi de herhangi bir kontrol hacmi için geçerli olduğundan integrandının sıfıra eşit olması gerekir. Denklem benzeri diğer eksen doğrultularında da benzeri şekilde çıkartılarak sonuçta momentum denkleminin üç bileşeni için

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla (\rho v_i \vec{V}) = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (i=1,2,3) \quad (1.25)$$

elde edilir. Bu denklemin sol tarafındaki terimler açılıp süreklilik denklemi de kullanılarak

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \nabla (\rho v_i \vec{V}) = v_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v_i \right] = \rho \frac{Dv_i}{Dt}$$

veya materyal türev kullanılarak kısaca

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (i=1,2,3) \quad (1.26)$$

yazılabilir. Denklemin kartezyen koordinatlardaki bileşenleri aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \rho f_x + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.26a)$$

Newtonien akışkanlar için τ_{ij} gerilme bileşenleri daha önce (1.10) denklemleriyle verilmişti. Bu denklemler (1.26) denklemlerinde kullanılarak, **Navier-Stokes denklemleri** tansörel formda

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v_i \right) = \rho f_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (i=1,2,3) \quad (1.27)$$

ve kartezyen koordinatlarda

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla u \right) &= \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla v \right) &= \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla w \right) &= \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.27a)$$

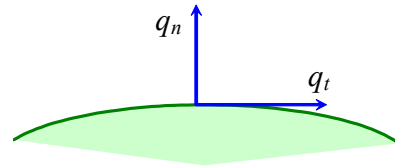
şeklinde elde edilir.

Tipik sınır şartları:

Bu problem için tipik sınır şartları, durağan (stationary) katı cidarlar üzerinde normal ve teğetsel hız bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olmasını gerektirir (Şekil 1.9):

$$v_n = 0 \quad (1.28a)$$

$$v_t = 0 \quad (1.28b)$$



Şekil 1.9: Katı cidar üzerinde teğetsel ve normal hız bileşenleri

Navier-Stokes denklemleri non-lineer olup tam (exact) çözümleri kısıtlı sayıdadır. Ancak, çoğu halde bazı terimler ihmal edilerek daha basit denklemler elde edilebilir.

Örneğin; μ viskozite katsayısı sabit kabul edilirse

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (1.29)$$

Sıkıştırılmaz akışkan için (bu halde süreklilik denklemi $\nabla \cdot \vec{V} = 0$)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.30)$$

Viskozitesiz sıkıştırılabilir akışkan için

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (\text{Euler denklemi}) \quad (1.31)$$

Ele alınan problemde silindirik veya küresel simetri olması hallerinde, uygun eksen takımı seçilmesi problemin çözümünü kolaylaştırabilir.

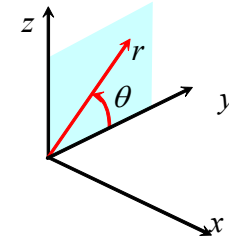
Silindirik koordinatlarda

Bir örnek olarak **sabit viskoziteli sıkıştırılmaz** bir akışkan için temel denklemler ele alınırsa, Şekil 1.10 'da gösterilen silindirik koordinat sisteminde gradyan, Laplasiyen ve materyal türev operatörleri aşağıdaki gibi yazılabilir (bkz: *Pai Shih-I, Viscous flow theory, van Nostrand, 1956, sayfa 38* veya *Yuan S.W., Foundation of Fluid Mechanics, 1969, sayfa 132*):

$$\text{Gradyant} \quad \nabla = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}, \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\text{Laplasiyen} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\text{Materyal türev} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_x \frac{\partial}{\partial x}$$



Silindirik koordinat sistemi

Böylece **süreklilik denklemi**

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad (1.15)$$

r , θ ve x doğrultularındaki **momentum denklemleri**

$$\rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \quad (1.36)$$

$$\rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = \rho f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (1.37)$$

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v_x \quad (1.38)$$

olur.

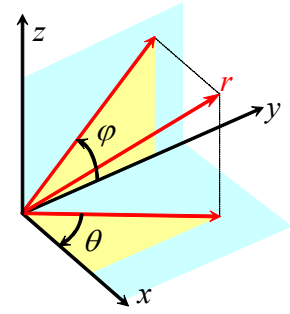
Küresel koordinat sisteminde

Şekil 1.11 'de gösterildiği gibi bir küresel koordinat sisteminde de gradyan, Laplasiyen ve materyal türev operatörleri sırasıyla

$$\nabla = \left(\bar{e}_r \frac{\partial}{\partial r}, \bar{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \bar{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (1.39)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (1.40)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.41)$$



Küresel koordinat sistemi

şeklinde (bkz: *Karamcheti, Principles of ideal-fluid aerodynamics, Krieger, 1980, Bölüm 2* veya *Yuan S.W., Foundation of Fluid Mechanics, 1969, sayfa 132*)

Bu durumda **sıkıştırılmaz akışkan** için süreklilik denklemi (bkz: *Pai Shih-I, Viscous flow theory, van Nostrand, 1956, sayfa 40*):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (v_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (1.42)$$

ve momentum denkleminin $r \theta \phi$ doğrultusunda bileşenleri (bkz: *Pai Shih-I, Viscous flow theory, van Nostrand, 1956, sayfa 40*):

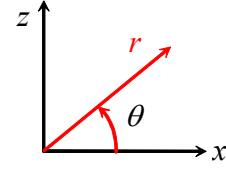
$$\rho \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\phi^2 + v_\theta^2}{r} \right) = \rho f_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\nabla^2 v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{2v_\theta \cot \theta}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (1.43)$$

$$\rho \left(\frac{Dv_\theta}{Dt} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = \rho f_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right) \quad (1.44)$$

$$\rho \left(\frac{Dv_\phi}{Dt} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = \rho f_\phi - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \mu \left(\nabla^2 v_\phi - \frac{v_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right) \quad (1.45)$$

şeklinde elde edilir.

İlerideki bölümlerde iki-boyutlu bir akımla ilgilenildiğinde bir kartezyen koordinat sistemi veya polar koordinat sistemi tanımlanarak kullanılacaktır (Şekil 1.12). İki-boyutlu polar koordinatlardaki süreklilik denklemi (1.35) denkleminde, x doğrultusundaki terim ihmal edilerek bulunacak olup, r ve θ doğrultusundaki momentum denklemleri doğrudan (1.36) ve (1.37) denklemleriyle aynıdır.



Şekil 1.12: İki boyutlu polar koordinat sistemi

1.7 Akışkanlar Mekaniği Denklemlerinin Boyut Analizi:

Önceki bölümlerde çıkartılan denklemler çok karmaşık olup çoğu pratik uygulamada sayısal yöntemlerle dahi çözümleri zordur. Şayet, akım alanının bazı bölgelerinde, baskın olan fiziksel büyüklükler korunmak kaydıyla, karmaşıklığa yol açan terimler ihmal edilirse bir takım basitleştirilmiş denklemler elde edilebilir ve muhtemelen bu denklemler de daha az bir çaba ile çözülebilir. Bu bölümde temel denklemlerin basitleştirilmesine ilişkin şartların bir kısmı tartışılacaktır.

Diferansiyel denklemlerdeki çeşitli terimlerin oransal büyüklüklerini belirlemek için boyut analizinden yararlanılır. Böyle bir analizde basitlik sağlamak açısından örnek olarak [Sabit viskoziteli ve sabit yoğunluklu akışkan hali](#)ni ele alalım. Bu halde akımı yöneten denklemler

$$\nabla \vec{V} = 0 \quad (1.23)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} \right) = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.30)$$

Akıma ait referans büyüklükler

L	Referans uzunluk (örneğin, kanat veter uzunluğu)
V	Referans hız (örneğin, serbest akım hızı)
T	Karakteristik zaman (periyodik olaylarda bir çevrimin süresi veya L/V)
p_0	Referans basınç (örneğin, serbest akım basıncı, p_∞)
f_0	Bünye kuvveti (örneğin, yer çekimi ivmesi, g)

şeklinde tanımlanırsa, bunlar yardımıyla örneğin kartezyen koordinatlarda aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L} & y^* &= \frac{y}{L} & z^* &= \frac{z}{L} & t^* &= \frac{t}{T} & p^* &= \frac{p}{p_0} & \vec{f}^* &= \frac{\vec{f}}{f_0} \\ u^* &= \frac{u}{V} & v^* &= \frac{v}{V} & w^* &= \frac{w}{V} \end{aligned} \quad (1.46)$$

karakteristik büyüklükler uygun biçimde seçildiği takdirde bütün bu boyutsuz büyüklükler 1 mertebesinde olur.

Şimdi bu boyutsuz büyüklükler akımı yöneten denklemlerde kullanılırsa, örneğin süreklilik denkleminin ilk terimi için

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial u^*} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \frac{\partial x^*}{\partial x} = \frac{V}{L} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} \right)$$

elde edilebilir. Diğer terimler de benzeri işlemlere tabi tutularak sıkıştırılmaz akıma ait süreklilik denklemini

$$\frac{V}{L} \cdot \left(\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) = 0 \quad (1.47)$$

şekline getirilebilir.

Momentum denklemini için benzeri işlemler yapılırsa, örneğin x doğrultusundaki bileşeni için

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{V}{T} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + V \frac{V}{L} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + V \frac{V}{L} v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + V \frac{V}{L} w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right) \\ = \rho f_0 f_x^* - \frac{p_0}{L} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \mu \frac{V}{L^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (1.48)$$

bulunur. Momentum denkleminin diğer bileşenleri için de benzeri ifadeler bulunabilir.

(1.47) denklemini (L/V) ile ve (1.48) denklemini de $(L/\rho V^2)$ ile çarpılarak

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0 \quad (1.49)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{L}{TV} \right) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \\ = \left(\frac{L f_0}{V^2} \right) \cdot f_x^* - \left(\frac{p_0}{\rho V^2} \right) \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left(\frac{\mu}{\rho V L} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \end{aligned} \quad (1.50)$$

elde edilir.

Şayet (1.46) daki bütün boyutsuz büyüklükler 1 mertebesinde ise yukarıdaki (1.49) ve (1.50) denklemlerinin her bir teriminde yıldız indisli büyüklüklerin oluşturduğu gruplar da 1 mertebesinde olacaktır. Bu durumda denklemlerdeki her bir terimin büyüklük mertebesi, bu terimlerin başında parantezler içinde yer alan ve yıldız indisine sahip olmayan çarpanlar belirleyecektir. Dikkat edilirse parantez içerisindeki bu büyüklüklerin teşkil ettikleri grupların boyutsuz oldukları görülür.

Süreklilik denkleminde parantez içerisinde, yukarıda belirtildiği gibi büyüklükler olmayıp, herhangi bir üç-boyutlu akım için bu denklemin her bir terimi aynı mertebede ve aynı öneme sahiptir.

Momentum denklemindeki boyutsuz büyüklükler

Strouhal Sayısı:

Momentum denkleminin sol tarafında ilk terimin başındaki parantezler içerisinde yer alan büyüklükler

$$\Omega = \frac{L}{TV} \quad (1.51)$$

şeklinde, ele alınan akımda zamana bağlılığın hangi mertebede olduğunu belirten bir boyutsuz sayı teşkil etmektedir. Bu boyutsuz sayının pratikte daha sık kullanılan bir şekli, periyodik olayın frekansının tersi karakteristik zaman olarak alınıp

$$St = \frac{L}{(1/\omega)V} = \frac{\omega L}{V} \quad (1.52)$$

şeklinde tanımlanan *Strouhal sayısı*dır. Şayet incelenen bir olayda frekansın çok düşük olması nedeniyle Strouhal sayısı çok küçük ise (1.50) denkleminin ilk terimi 1 mertebesindeki diğer terimler yanında ihmal edilebilir.

Froude sayısı:

(1.50) denkleminin sağındaki ilk terimde çarpan olarak parantez içinde yer alan büyüklükler, bünye kuvvetinin, örneğin, yerçekimi kuvveti olarak alınması (f_0 olarak g yerçekimi ivmesinin alınması) halinde yine boyutsuz bir büyüklük teşkil ederler. Bu boyutsuz büyüklük, Froude sayısı olarak bilinen ve

$$F = \frac{V}{\sqrt{Lg}} \quad (1.53)$$

şeklinde tanımlanan boyutsuz bir sayının tersinin karesine eşittir. Froude sayısı aslında atalet kuvvetlerinin yerçekimi kuvvetlerine oranını belirtir. Froude sayısının küçük olması, ele alınan problem için bünyesel kuvvetin önemli olduğu ve buna ilişkin terimin denkleminde yer alması gerektiği anlamına gelir. (Örneğin: serbest yüzeyli akarsu akışları, şelale akımları, gemi hidrodinamiği gibi problemlerde.)

Euler sayısı:

(1.50) denkleminde yer alan üçüncü boyutsuz sayı

$$Eu = \frac{p_0}{\rho V^2} \quad (1.54)$$

olup, basınçla atalet kuvvetlerinin oranını belirten bu büyüklük Euler sayısı olarak bilinir. Pratikte bu sayı yerine daha ziyade basınç katsayısı kullanılır:

$$C_p = \frac{p - p_0}{1/2 \rho V^2} \quad (1.55)$$

Reynolds sayısı:

(1.50) denklemindeki sonuncu boyutsuz grup atalet kuvvetlerinin viskozite kuvvetlerine oranını belirten Reynolds sayısını teşkil etmektedir:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu} = \frac{V L}{\nu} \quad (1.56)$$

Buradaki

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.57)$$

büyüklüğü kinematik viskozitedir. Gaz akışları için kinetik teori bakış açısından viskozite, moleküllerin c karakteristik hızlarına ve λ ortalama serbest yörüngelerine

$$\mu \approx \rho \frac{c \lambda}{3}$$

şeklinde bağlanabilir (*Yuan S.W., Foundation of Fluid Mechanics, 1969, sayfa 257*). Bu büyüklük (1.56) da kullanılarak

$$Re = \left(\frac{V}{c} \right) \left(\frac{L}{\lambda} \right)$$

bulunur ki, buradan da Reynolds sayısının (hız × uzunluk) büyüklüğünün moleküler ölçekle kıyaslamasını yaptığı anlaşılır.

$Re \gg 1$ olması halinde viskoz terimlerin ihmal edilmesiyle ilgili şartlar, izleyen bölümde daha ayrıntılı olarak incelenecektir.

NOT:

Bu bölümdeki boyut analizi kolaylık açısından *sabit viskoziteli*, *sıkıştırılmaz* akımlar için yapılmıştır. Şayet sıkıştırılabilirlik etkisi göz önüne alınırsa denklemlerde

$$M = \frac{V}{a} \quad (1.58)$$

şeklinde akım hızının ses hızına oranını belirten ve Mach sayısı adı verilen bir başka boyutsuz sayı daha yer alır. $p/\rho \sim a^2$ olup, Euler sayısı Mach sayısı ile ilişkilendirilebilir (bkz: *Bölüm 4.8*).

Şayet

$$M \ll 1 \quad \frac{M^2}{F^2} \ll 1 \quad \frac{M^2}{Re} \ll 1$$

ise basınç değişikliklerinin yarattığı yoğunluk değişimleri ihmal edilebilir ki, bu şartlarda akışkan sıkıştırılmaz kabul edilebilir.

1.8 Yüksek Reynolds Sayısında Akım:

Akımı yöneten denklemleri boyutsuzlaştırmanın en önemli yararı denklemlerde gözükten terimlerin oransal büyüklüklerinin belirlenmesi ve birbirleriyle karşılaştırılabilmesidir. Böylece, istenirse küçük terimler ihmal edilebilir, ve kalan terimler daha kolay çözülebilir. Ayrıca akımda hakim olan fiziksel büyüklükler de göz önüne alınmış olur.

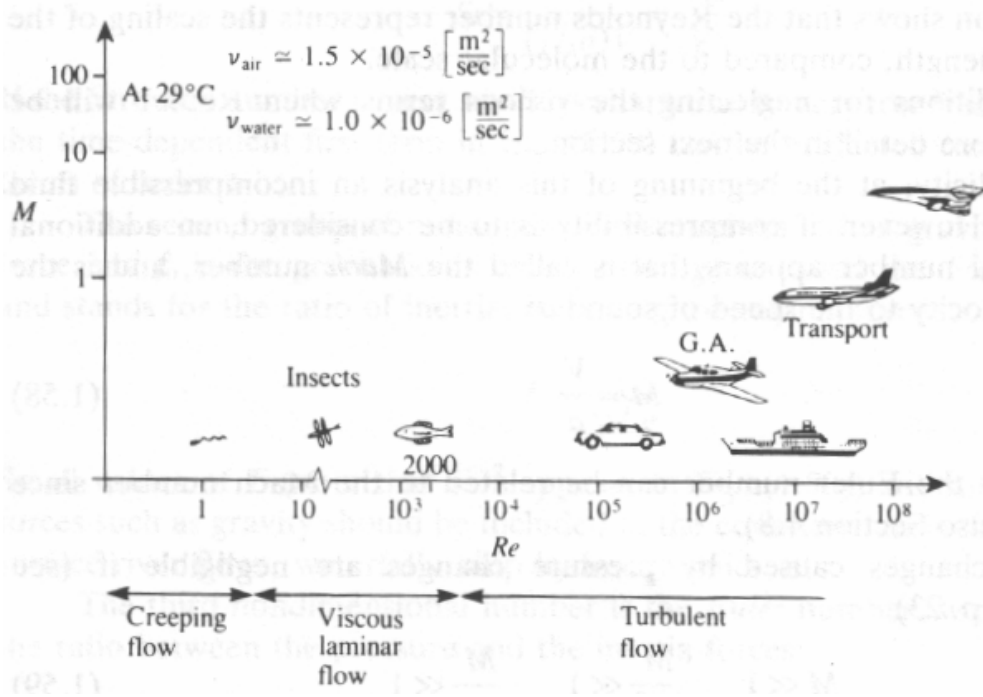
Sıkıştırılmaz haldeki süreklilik denkleminde bütün terimler aynı büyüklük mertebesinde olup hiç birisi ihmal edilmemiştir.

Momentum denkleminde gelince, (1.51-56) eşitlikleri kullanılarak x doğrultusundaki bileşen için boyutsuz sayılarla

$$\Omega \cdot \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = \left(\frac{1}{F^2} \right) \cdot f_x^* - Eu \cdot \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left(\frac{1}{Re} \right) \cdot \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \quad (1.60)$$

yazılabilir. Buradaki terimlerin değerlendirilmesi hususunda daha ileriye gitmeden önce bazı tipik mühendislik problemlerinde Reynolds ve Mach sayısı aralıklarını gözden geçirmekte yarar vardır.

Hava ve su gibi tipik akışkanların viskozitesi küçük olduğundan pratikteki mühendislik problemlerinin geniş bir kesiminde (uçak aerodinamiği, deniz araçlarının hidrodinamiği gibi) Reynolds sayısı çok büyüktür (Şekil 1.13).

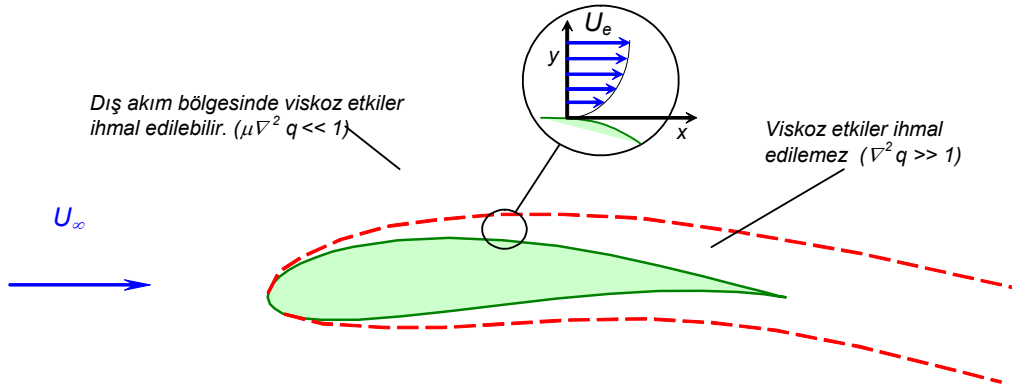


Şekil 1.13: Bazı tipik akışkan akımları için Reynolds ve Mach sayısı aralıkları

Reynolds sayısının çok büyük olduğu bu gibi problemler için (1.60) denklemindeki viskoz terimler 1 mertebesindeki diğer terimler yanında küçük kalır. Bununla birlikte, bu terimleri ihmal etmeden önce yüksek Reynolds sayılı akım şartlarına daha yakından göz atmakta yarar vardır.

Örneğin Şekil 1.14 'de görülen kanat profili etrafındaki akımda iki bölge vardır:

- Viskoz etkilerin hakim olduğu sınır tabaka ve iz bölgesi.
- Viskoz etkilerin küçük olduğu dış bölge.



Şekil 1.24: Yüksek Reynolds sayısında kanat profili etrafındaki akım alanı

Dış Akım Bölgesinde:

(1.30) denklemindeki viskoz terimler ihmal edilebilir: Böylece çözüm

$$\nabla \vec{V} = 0 \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \vec{f} - \frac{\nabla p}{\rho} \quad (\text{Euler denklemi}) \quad (1.62)$$

şeklindeki süreklilik ve Euler denklemleri vasıtasıyla yapılabilir.

(1.62) denklemi birinci dereceden bir kısmi türevli diferansiyel denklem olup, önceki bölümdeki (1.30) denklemi katı cidar üzerinde hız vektörü için bir sınır şartı gerektirirken, bu denklem için katı cidar üzerinde bir tek hız bileşeni cinsinden sınır şartı yeterli olmaktadır. Akım viskozitesiz kabul edildiğinden durağan katı cidar üzerinde teğetsel hızın sıfır olmasının bir anlamı olmayıp, sınır şartı olarak dikey hız bileşeninin sıfır olması yeterlidir:

$$v_n = 0 \quad (\text{katı cidar üzerinde}) \quad (1.63)$$

Sınır Tabaka ve İz Bölgesinde:

$\nabla^2 \vec{V}$ türevleri çok büyük olup, yüksek Reynolds sayılarında dahi viskoz terimler ihmal edilemez. Bu durumda katı cidarın yakın civarındaki bu bölge içerisinde Navier-Stokes

denklemleri klasik sınır-tabaka denklemlerine indirgenir (Bkz: *Schlichting H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1979, sayfa 131*):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (1.64)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \quad (1.65)$$

Sonuç olarak:

Yüksek Reynolds sayılarında akım alanında iki hakim bölge bulunmaktadır:

- 1- Katı cidarın uzağında, viskoz etkilerin ihmal edildiği dış akım bölgesi: Bu bölgede viskoz olmayan akım çözümü basınç dağılımını ve buna bağlı kuvvetleri verir.
- 2- Katı cidarın yakın civarında, viskoz etkilerin ihmal edilemediği ince sınır-tabaka bölgesi: Bu bölgede sınır-tabaka denklemlerinin çözümü kayma-gerilmeleri ve buna bağlı (sürtünme) kuvvetlerini verir.

Sınır tabaka denklemlerinin çözümünde, katı cidar üzerinde *kaymama* sınır şartı uygulanır. Sınır tabaka içerisindeki teğetsel hız dağılımı Şekil 1.14 'de verildiği gibi olup, dış akım bölgesine yaklaştıkça teğetsel hızın z ile değişmediği görülmektedir. Sınır tabaka ile dış akım bölgesinin girişim yeri kesin şekilde belirlenememekle birlikte katı cidardan, sınır tabaka kalınlığı olarak adlandırılan bir δ mesafesinde olduğu ifade edilir. Yüksek Reynolds sayısında sınır tabaka kalınlığının cismin karakteristik uzunluğuna (örneğin bir kanat profili için veter uzunluğu) bölümünün $1/\sqrt{Re}$ ile orantılı olduğu bilinir (Bkz: *Schlichting H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1979, sayfa 129*)

Yüksek Reynolds sayılarında komple akım alanının ayrıntılı çözümü şu şekilde yapılır:

- 1- Cisim etrafında viskoz olmayan akım kabulü ile bir çözüm bulunur. Bu çözüm için katı cidar üzerinde sıfır normal hız sınır şartı uygulanır. Böylece cisim yüzeyi üzerindeki teğetsel hız ve buna dayanılarak yüzey boyunca basınç dağılımı elde edilir.
- 2- Sınır tabaka denklemlerinden, sınır tabaka içindeki basıncın yüzeye dik doğrultuda değişmediğinin kabul edildiği anlaşılmaktadır. Bu bakımdan, viskoz olmayan akım çözümüyle yüzey boyunca elde edilen basınç dağılımı, sınır tabakanın kenarında gereken sınır şartı için kullanılabilir.

Yukarıdaki incelemeler göstermektedir ki, yüksek Reynolds sayılarındaki akımlar için viskoz olmayan akım kabulüyle yapılan çözümler problemin komple çözümü için ilk adımı teşkil etmektedir.