

BÖLÜM 5

TAŞINIM-YAYINIM PROBLEMLERİ İÇİN SONLU HACİMLER YÖNTEMİ

5.1. Giriş:

Akışkan akımının önemli rol oynadığı problemlerde taşınım etkilerinin hesaba katılması gerekir. *Doğada taşınım sırasında daima yayınım da oluşur.* Bu bakımdan bu bölümde taşınım ve yayınım etkilerini birlikte inceleyecek yöntemler incelenecektir.

Daimi haldeki taşınım-yayınım denklemi herhangi bir ϕ büyüklüğü için (2.39) transport denkleminde zamana bağlı terim silinerek

$$\nabla(\rho\bar{u}\phi) = \nabla(\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (5.1)$$

şeklinde çıkartılabilir. Bir kontrol hacmi içerisinde integral alınarak ve diverjans teoremi uygulanarak

$$\int_A (\rho\bar{u}\phi) \bar{n} dA = \int_A (\Gamma\nabla\phi) \bar{n} dA + \int_V S_\phi dV \quad (5.2)$$

elde edilir. Bu denklem bir kontrol hacmindeki *akı dengesini* ifade etmektedir. Sol tarafta *net taşınımsal akı* yer almakta iken sağ tarafta *net yayınımsal akı* ve kontrol hacmi içerisinde ϕ özelliğinin üretimi veya eksilmesi belirtilmektedir.

Taşınım terimlerinin ayrıklaştırılmasındaki ana problem, taşınan ϕ özelliğinin kontrol hacmi yüzeyleri üzerindeki değerleri ve bunun yüzeylerden geçen taşınımsal akıların hesaplanmasıdır. Bölüm 4 de (5.2) denkleminin sağ tarafındaki yayınım ve kaynak terimlerinin ayrıklaştırılması için merkezi farklar kullanılmıştı. Yayınım problemlerinde iyi çalışan bu uygulamanın burada da taşınım terimleri için kullanılmasının uygun olacağı aşikar gibidir. Ancak, yayınım olayı, taşınan bir büyüklüğün her yöndeki gradyanları boyunca dağılımını etkilerken taşınım olayı sadece akım doğrultusunda etkindir. Bu husus *merkezi farklarla kararlı bir taşınım-yayınım hesaplaması* yapılabilmesi için *hücre boyutları üzerinde taşınım ve yayınım şiddetlerinin oranına bağlı bir sınırlama getirir.*

Burada, taşınımsal etkiler için *daha az kısıtlama ile kararlı hesap yapabilecek* başka ayrıklaştırma yolları da sunulacaktır. Bu analizler sırasında hücre yüzlerindeki hızların hesabına kalkışılmayacak olup, bir şekilde bilindikleri varsayılacaktır. Hızların hesabı konusuna 6 ıncı bölümde yer verilecektir.

5.2. Daimi, bir-boyutlu taşınım ve yayınım:

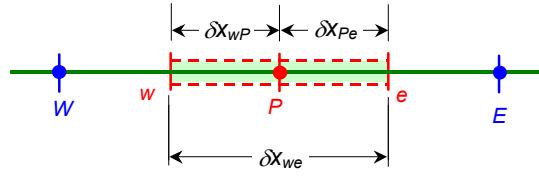
Kaynak teriminin olmaması halinde u hızındaki bir-boyutlu akım alanında bir ϕ özelliğinin daimi taşınım ve yayınımı

$$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) \quad (5.3)$$

denklemi ile modellenir. Akımın sürekliliğinin de sağlanması gerekir:

$$\frac{d}{dx}(\rho u) = 0 \quad (5.4)$$

Şeki1 5.1 de gösterilen bir-boyutlu kontrol hacmini göz önüne alarak Bölüm 4 de tanıtilan notasyonu kullanalım. Burada dikkatimizi, P kontrol noktasına vereceğiz. Komşu kontrol noktaları W ve E , kontrol hacmi yüzleri ise w ve e ile belirtilmektedir.



Şekil 5.1

Kontrol hacmi içerisinde (5.3) transport denklemi integre edilerek

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_w \quad (5.5)$$

(5.4) süreklilik denklemi integre edilerek

$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = 0 \quad (5.6)$$

elde edilir. Taşınım-yayınım problemine ait ayrıklaştırılmış denklemleri elde etmek için (5.5) denklemindeki terimlerin yaklaşık ifadelerinin yazılması gereklidir. Bunun için *birim alan* başına taşınımsal *kütle akısı* F ve hücre yüzlerinden *yayınım iletkenliği* de D olmak üzere iki yeni değişken tanımlamak uygun olur.

$$F = \rho u, \quad D = \frac{\Gamma}{\delta x} \quad (5.7)$$

F ve D büyüklüklerinin hücre yüzlerindeki değerleri

$$\begin{aligned} F_w &= (\rho u)_w, & F_e &= (\rho u)_e \\ D_w &= \frac{\Gamma}{\delta x_{WP}}, & D_e &= \frac{\Gamma}{\delta x_{PE}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

şeklinde yazılabilir.

$A_w = A_e = A$ olduğu kabul edilirse ve (5.5) denkleminin sağ tarafındaki yayınım terimlerinin katkısı merkezi farklarla hesaplanırsa

$$F_e \phi_e - F_w \phi_w = D_e (\phi_e - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_w) \quad (5.9)$$

ve (5.6) süreklilik denklemi de

$$F_e - F_w = 0 \quad (5.10)$$

şekline gelir. Hız alanının bir şekilde bilindiği varsayılmış olup, bu hız alanının hesabı sırasında F_e ve F_w nin değerleri dikkate alınmış olmalıdır. (5.9) denkleminin çözümü için e ve w hücre yüzlerinde ϕ özelliğini değerlerinin hesaplanmış olması gereklidir. Bu amaçlı şemalara izleyen paragraflarda yer verilecektir.

5.3. Merkezi fark şeması:

(5.9) denkleminin sağ tarafındaki yayınım terimlerini temsil etmek üzere merkezi fark yaklaşımı kullanılmış olup, bu denklemin sol tarafındaki taşınımsal terimlerin hücre yüzlerindeki değerlerini hesaplamak için de lineer interpolasyon uygulanması mantıklı gelmiştir. Üniform bir ağ için ϕ özelliğinin hücre yüzlerindeki değerleri

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E) / 2 \quad (5.11a)$$

$$\phi_w = (\phi_P + \phi_W) / 2 \quad (5.11b)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliklerin (5.9) daki taşınımsal terimlerde kullanılması halinde

$$\frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - \frac{F_w}{2}(\phi_W + \phi_P) = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \quad (5.12)$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenerek

$$\left[\left(D_w - \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e + \frac{F_e}{2} \right) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W - \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E$$

veya

$$\left[\left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) + (F_e - F_w) \right] \phi_P = \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right) \phi_E \quad (5.13)$$

ya da buradaki ϕ_W ve ϕ_E büyüklüklerinin katsayıları a_W ve a_E merkezi fark ifadeleri olarak isimlendirilerek ayrılaştırılmış taşınım-yayınım denklemi

$$\boxed{a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E} \quad (5.14a)$$

şekline gelir. Burada

$$\boxed{a_W = D_w + \frac{F_w}{2}, \quad a_E = D_e - \frac{F_e}{2}, \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)} \quad (5.14b)$$

Görüldüğü gibi daimi taşınım-yayınım problemleri için elde edilen (5.14) denklemi, sadece yayınım içeren problemleri için bulunan (4.11) denklemiyle aynı biçimdedir. Yeni denklemdeki tek farklılık taşınım ile ilgili olarak gelen ilave katsayılarıdır.

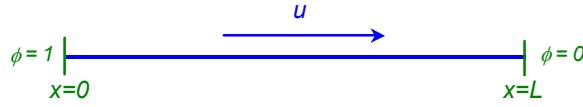
Bir-boyutlu bir taşınım-yayınım problemini çözmek için (5.14) ile verilen ayrılaştırılmış denklemin bütün ağ kontrol noktalarında yazılması gerekir. Böylece bir lineer denklem takımı elde edilir. Denklem takımı çözülerek taşınan ϕ özelliğinin kontrol noktalarındaki değerleri bulunur. Bu işlemler izleyen örnekle gösterilecektir.

Örnek 5.1:

Bir ϕ özelliği Şekil 5.2 de görülen bir-boyutlu bölgede taşınım ve difüzyon yoluyla nakledilmektedir. Olayı yöneten denklem (5.3) ile verilmiştir. Sınır şartları $x=0$ da $\phi_0=1$ ve $x=L$ de $\phi_L=0$ şeklindedir. Eşit boyda beş hücre olarak ve taşınım ve yayınım için merkezi fark ayrıklaştırması kullanarak ϕ nin x ile değişimini (i) $u=0.1$ m/s, (ii) $u=2.5$ m/s hallerinde hesaplayınız. Elde edilen sonuçları

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1}$$

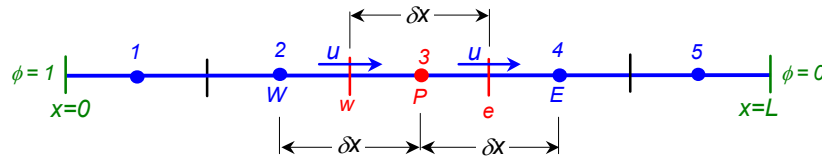
şeklindeki analitik çözümlerle karşılaştırınız. (iii) $u=2.5 \text{ m/s}$ halindeki çözümü 20 ağ noktası için tekrarlayınız ve analitik çözümle karşılaştırınız. Hesaplamalarda uzunluk $L=1.0 \text{ m}$, yoğunluk $\rho=1.0 \text{ kg/m}^3$, $\Gamma=0.1 \text{ kg/m/s}$ alınacaktır.



Şekil 5.2

Çözüm:

Çözüm yöntemi Şekil 5.3 de gösterilen basit ağ yapısı kullanılarak izah edilecektir. Çözüm bölgesi, $\delta x=0.2 \text{ m}$ alınarak 5 kontrol hacmine bölünmüştür. Bütün hücrelerde $F_e = F_w = F = u$, $D_e = D_w = D = \Gamma / \delta x$ olup, sınırlar A ve B ile belirtilmiştir.



Şekil 5.3

Ayrıklaştırılmış (5.14) denklemi ve katsayıları 2, 3 ve 4 numaralı dahili hücrelerde doğrudan uygulanacak, ancak 1 ve 5 numaralı sınır hücrelerindeki uygulama daha özel olacaktır.

1 numaralı hücrenin doğu yüzünde (5.3) denkleminin integralindeki yayılım terimlerinin ve taşınım akılarının her ikisinde de merkezi farklar kullanılacaktır. Bu hücrenin batı yüzünde ise ϕ büyüklüğünün değeri $\phi_w = \phi_A = 1$ olarak verilmiştir. Bu bakımdan bu yüzde taşınımsal akı terimi için herhangi bir yaklaşım yapmaya gerek yoktur. Yayılım terimi ise daha önce olduğu gibi ileri farklarla ayrıklaştırılacaktır. Böylece bu hücrenin 1 ile belirtilen kontrol noktasında

$$\frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - F_A \phi_A = D_e (\phi_E - \phi_P) - 2D_A (\phi_P - \phi_A) \quad (5.16)$$

denklemini elde edilir.

5 numaralı kontrol hacminin doğu yüzünde de $\phi_e = \phi_B = 0$ olarak verilmiş olup, bu hücrenin batı yüzünde taşınım ve yayılım terimlerinin her iki için yine merkezi farklar kullanılırken doğu yüzünde taşınım terimi için herhangi bir yaklaşım yapmaya gerek yoktur. Yayılım terimi ise geri farklarla hesaplanacaktır. Buna göre bu hücre için de

$$F_B \phi_B - \frac{F_w}{2} (\phi_P + \phi_W) = 2D_B (\phi_B - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.17)$$

denklemini elde edilir. (5.16) ve (5.17) denklemleri iç hücreler için (14) denkleminle verilen genel biçimde yeniden düzenlenerek

$$\boxed{a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u} \quad (5.18a)$$

şekline getirilebilir. Buradaki merkezi katsayı

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w) - S_p \quad (5.18b)$$

şeklindedir.

Bütün hücreler için katsayılar $D_w=D_e=D_A=D_B=\Gamma/\delta x=D$ ve $F_w=F_e=F_A=F_B=F$ olmak üzere:

Nokta	a_w	a_e	S_p	S_u
1	0	$D-F/2$	$-(2D+F)$	$(2D+F) \phi_A$
2,3,4	$D+F/2$	$D-F/2$	0	0
5	$D+F/2$	0	$-(2D-F)$	$(2D-F) \phi_B$

Sınır şartlarının uygulanmasıyla sınır tarafındaki katsayının sıfır yapıldığı ve sınırdaki akının da kaynak teriminde yer aldığı görülmektedir.

(i) $u=0.1 \text{ m/s}$, $\rho=1.0 \text{ kg/m}^3$, $\Gamma=0.1 \text{ kg/m/s}$, $\delta x=0.2 \text{ m}$ için $F=\rho u=0.1$; $D=\Gamma/\delta x=0.5$ olup katsayıların değerleri aşağıda listelenmiştir.

Tablo 5.1

Nokta	a_w	a_e	S_p	$a_p = a_w + a_e - S_p$	S_u
1	0	0.45	-1.1	1.55	1.1 ϕ_A
2	0.55	0.45	0	1.0	0
3	0.55	0.45	0	1.0	0
4	0.55	0.45	0	1.0	0
5	0.55	0	-0.9	1.45	0.9 ϕ_B

Denklemler, $\phi_A=1$ ve $\phi_B=0$ olmak üzere matris formda

$$\begin{bmatrix} 1.55 & -0.45 & 0 & 0 & 0 \\ -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 & 1.0 & -0.45 \\ 0 & 0 & 0 & -0.55 & 1.45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.19)$$

ve denklemin çözümünü

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9421 \\ 0.8006 \\ 0.6276 \\ 0.4163 \\ 0.1579 \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

şeklindedir.

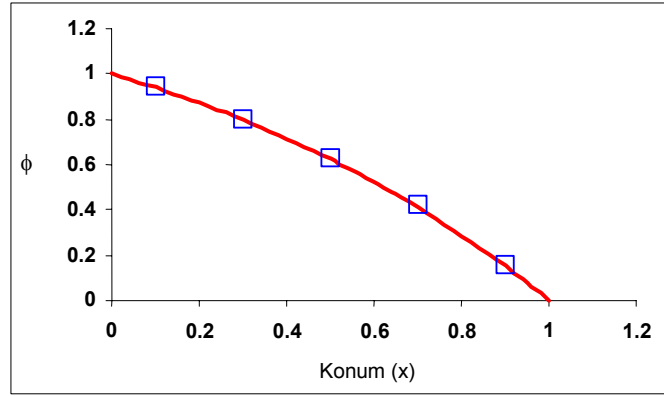
Verilen büyüklükler (5.15) denkleminde kullanılarak problemin analitik çözümü

$$\phi(x) = \frac{2.7183 - \exp(x)}{1.7183}$$

şeklinde elde edilir. Nümerik ve analitik sonuçlar Tablo 5.2 ve Şekil 5.4 de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.2

Nokta	Mesafe	FVM	Analitik	Fark	Yüzde hata
1	0.1	0.9421	0.9387	-0.003	-0.36
2	0.2	0.8006	0.7963	-0.004	-0.53
3	0.3	0.6276	0.6224	-0.005	-0.83
4	0.4	0.4163	0.4100	-0.006	-1.53
5	0.5	0.1579	0.1505	-0.007	-4.91



Şekil 5.4

Ağ yapısının kaba olmasına karşın merkezi fark şeması analitik çözümlerle kabul edilebilir bir uyum göstermiştir.

(ii) $u=2.5\text{ m/s}$, $\rho=1.0\text{ kg/m}^3$, $\Gamma=0.1\text{ kg/m/s}$, $\delta x=0.2\text{ m}$ için $F=\rho u=2.5$, $D=\Gamma/\delta x=0.5$ olup katsayılar Tablo 5.3 de listelendiği gibi elde edilmiştir.

Tablo 5.3

Nokta	a_W	a_E	S_p	$a_p = a_W + a_E - S_p$	S_u
1	0	-0.75	-3.5	2.75	3.5 ϕ_A
2	1.75	-0.75	0	1	0
3	1.75	-0.75	0	1	0
4	1.75	-0.75	0	1	0
5	1.75	0	1.5	0.25	-1.5 ϕ_B

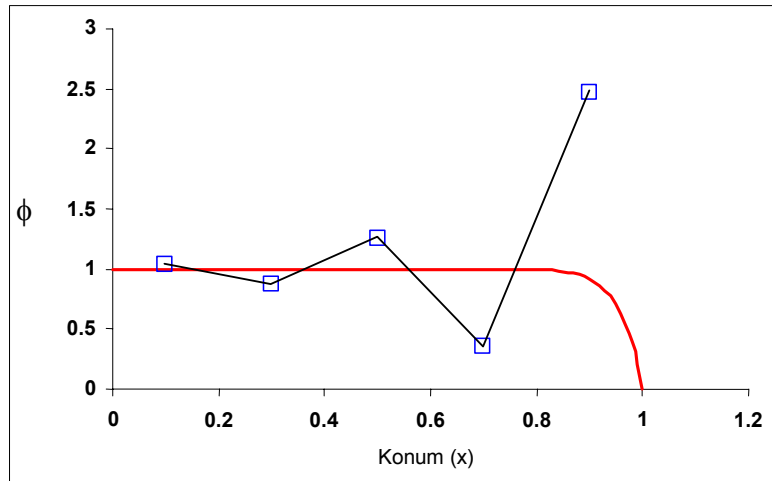
(i) halindekiyle aynı formüllerde bu tablodaki değerler kullanılarak matris denklemleri elde edilmiş ve çözülmüştür. Bu haldeki analitik çözüm de

$$\phi(x) = 1 + \frac{1 - \exp(25x)}{7.20 \times 10^{10}}$$

şeklindedir. Nümerik ve analitik çözümler Tablo 5.4 ve Şekil 5.5 de karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.4

Nokta	Mesafe	FVM	Analitik	Fark	Yüzde hata
1	0.1	1.0356	1.0000	-0.035	-3.56
2	0.3	0.8694	0.9999	0.131	13.05
3	0.5	1.2573	0.9999	-0.257	-25.74
4	0.7	0.3521	0.9994	0.647	64.70
5	0.9	2.4644	0.9179	-1.546	-168.48



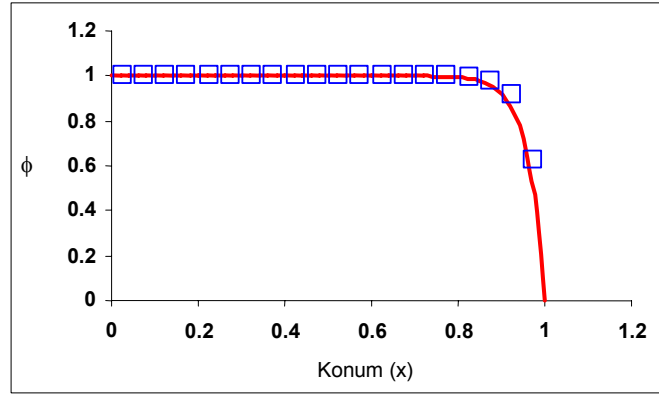
Şekil 5.4

Bu kez merkezi fark şeması analitik çözüm etrafında çalkantı gösteren bir çözüm vermiştir. Bu çalkantılar literatürde genellikle "wiggles" olarak adlandırılır. Analitik çözümle uyumun iyi olmadığı açıktır.

(iii) $u=2.5 \text{ m/s}$ halinde 20 nokta için $\delta x=0.05$, $F=\rho u=2.5$; $D=\Gamma/\delta x=0.1/0.05=2.0$ olup, bu durumda bulunan katsayılar Tablo 5.5 de özetlenmiş ve elde edilen çözümler analitik çözümle Şekil 5.6 da karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.3

Nokta	a_W	a_E	S	S_p	$a_p = a_W + a_E - S_p$
1	0	0.75	$6.5 \phi_A$	-6.5	7.25
2-19	3.25	0.75	0	0	4.00
20	3.25	0	$5 \phi_B$	-1.5	4.75



Şekil 5.6

Şimdi nümerik çözümlerle analitik çözümlerin uyumu iyidir. Bu haldeki verilerle (ii) halindeki veriler karşılaştırıldığında hücre genişliklerinin azalmasıyla F/D oranının 5 den 1.25 e indiği görülmektedir. Merkezi fark şemasının F/D oranının küçük değerleri için doğru sonuçlar verdiği görülmektedir. F/D oranının etkisi ve bu oran büyük olduğunda merkezi fark çözümlerinde "wiggles" görülmesinin nedenleri aşağıda tartışılacaktır.

5.4. Ayırıklaştırma şemalarının özellikleri

Birleştirilmiş taşınım-yayınım içeren bazı hallerde merkezi fark yaklaşımının hata vermesi ayırıklaştırma şemalarının özelliklerinin derinliğine incelenmesini gerekli kılmaktadır.

Hücre sayısının sonsuz büyük olması halinde, kullanılan fark yöntemine bağlı olmaksızın, tam (exact) çözümden ayırt edilemeyen nümerik çözümler elde edilmesi teorik olarak mümkündür. Ancak pratikte sonlu sayıda (bazen çok az sayıda) hücre kullanmak zorunda kalınır. Bu durumda ancak ayırıklaştırma şeması bazı temel hususiyetlere sahipse nümerik sonuçlar fiziksel olarak gerçekçi olur. En önemli hususiyetler şunlardır:

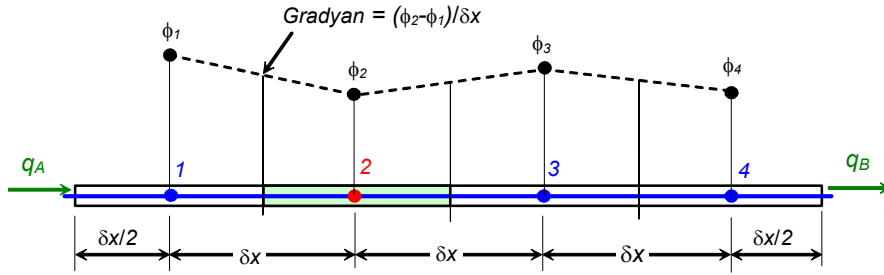
- Korunumsallık
- Sınırlılık
- Nakledilebilirlik

5.4.1 Korunumsallık

Taşınım-yayınım denklemi sonlu sayıda kontrol hacmi içerisinde integre edilerek, taşınan ϕ büyüklüğünün kontrol hacmi yüzlerinden geçen akılarını içeren ayırıklaştırılmış bir korunum denklemi takımı elde edilmektedir. ϕ büyüklüğünün bütün çözüm bölgesinde korunumunun sağlanabilmesi için ϕ nin herhangi bir kontrol hacmini bir yüzünden terk eden akısının, komşu kontrol hacmine aynı yüzden giren akıya eşit olması gerekir. Bunun sağlanabilmesi için de akının herhangi bir genel hücre yüzü için komşu hücre ile uygun biçimde yazılması gerekir.

Örneğin Şekil 5.7 de gösterilen, kaynak terimi olmayan daimi bir-boyutlu yayınım problemini ele alalım.

Hesap bölgesi sınırlarından geçen akılar q_A ve q_B ile belirtilmiştir. Çözüm bölgesini dört hücreye bölerek hücre yüzlerinden geçen yayınımsal akıları hesaplamak için merkezi fark uygulayalım. 2 noktasını içeren hücreyi batı yüzünden terk eden akı için $\Gamma_{w2}(\phi_2 - \phi_1)/\delta x$ ve hücreye doğu yüzünden giren akı için de $\Gamma_{e2}(\phi_3 - \phi_2)/\delta x$ yazılabilir.



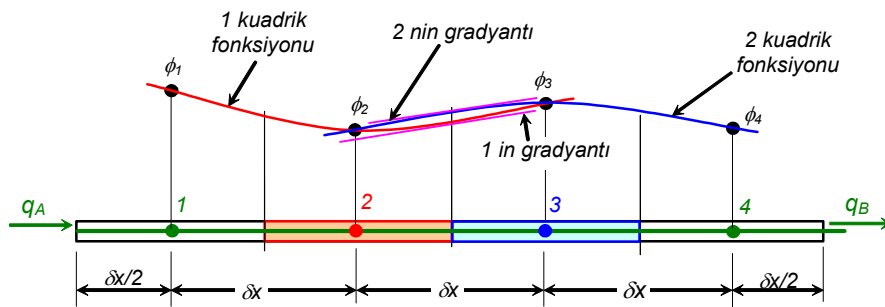
Şekil 5.7

1 ve 4 noktalarını içeren kontrol hacimleri için sınırdan geçen akıları da dikkate alarak bütün kontrol hacimlerine ait net akıları toplamak suretiyle çözüm bölgesinin tamamı için bir akı bilançosu elde edilebilir.

$$\left[\Gamma_{e1} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\delta x} - q_A \right] + \left[\Gamma_{e2} \frac{(\phi_3 - \phi_2)}{\delta x} - \Gamma_{w2} \frac{(\phi_2 - \phi_1)}{\delta x} \right] + \left[\Gamma_{e3} \frac{(\phi_4 - \phi_3)}{\delta x} - \Gamma_{w3} \frac{(\phi_3 - \phi_2)}{\delta x} \right] + \left[q_B - \Gamma_{w4} \frac{(\phi_4 - \phi_3)}{\delta x} \right] = q_B - q_A \quad (5.21)$$

$\Gamma_{e1} = \Gamma_{w2}$, $\Gamma_{e2} = \Gamma_{w3}$ ve $\Gamma_{e3} = \Gamma_{w4}$ olduğundan kontrol hacmi yüzeylerinden geçen akılar uygun bir tarzda ifade edilmiş olup, bütün bölge üzerinde toplama yapıldığında eş akılar birbirini götürmektedir. Sonuçta sadece iki sınır akısı q_A ve q_B kalmakta olup (5.21) denklemi ϕ özelliğinin bütünsel korunumunu ifade etmektedir. Akı uygunluğu, yayılım akısının merkezi fark formülasyonu için ϕ nin bütün bölge üzerinde korunumunu sağlamaktadır.

Uygun olmayan interpolasyon formülleri bütünsel akı korunumunu sağlamayan uygunsuz şemalara götürebilir. Örneğin Şekil 5.8 de gösterildiği gibi 2 numaralı kontrol hacmi için 1, 2 ve 3 noktalarındaki değerlere dayanan ve 3 numaralı kontrol hacmi için de 2, 3 ve 4 noktalarındaki değerlere dayanan kuadratik interpolasyon formüllerini dikkate alalım.



Şekil 5.8

Bu kuadratik eğriler birbirinden gayet farklı olabilir. Ki bu şekilde iki eğrinin hücre yüzlerindeki gradyanları aynı olmazsa 2 kontrol hacminin doğu yüzünde hesaplanan akı değeri ile 3 kontrol hacminin batı yüzündeki akı değeri eşit olmayabilir. Bu durumda da iki akı birbirini götürmez ve bütünsel korunum sağlanamaz.

Yukarıdaki örnek kuadratik interpolasyonun tamamıyla kötü olduğu anlamına gelmez. Nitekim, QUICK adı verilen uygun kuadratik ayrıklaştırma şeması pratikte çok popülerdir.

5.4.2 Sınırlılık

Her bir kontrol noktasında ayrıklaştırılan denklemler sonuçta çözülmesi gereken bir lineer denklem takımı oluşturur. Büyük denklem takımlarını çözmek için normalde tekrarlı (iteratif) sayısal teknikler uygulanır. Bu yöntemler çözüm işlemine ϕ değişkeninin tahmini bir dağılımından başlayarak yakınsamış bir çözüm elde edilinceye kadar işlemleri tekrarlarlar. Scarborough (1958) bir *tekrarlı yöntemin yakınsak olması için yeterli bir koşulun* ayrıklaştırılmış denklemlerin katsayılarının değerleri cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini göstermiştir:

$$\frac{\sum |a_{nb}|}{|a'_p|} \begin{cases} \leq 1 & \text{Bütün noktalarda} \\ < 1 & \text{en az bir noktada} \end{cases} \quad (5.22)$$

Burada a'_p merkezi noktanın net katsayısı (yani, $a_p - S_p$) olup, sayaçtaki toplama bütün komşu noktalar (nb) üzerinde alınmıştır. Şayet fark şeması yukarıdaki kriteri sağlayan katsayılar verirse ortaya çıkan matris diyagonal baskın bir matris olur. Diyagonal baskın matris elde edebilmek için ($a'_p = a_p - S_p$) net katsayısının değerinin büyük olması gerekir. Buna göre kaynak terimlerinin lineerleştirilmesi S_p yi daima negatif işaretli verecek biçimde olmalıdır. Şayet durum bu şekilde ise $-S_p$ daima pozitif işaretli olacak ve a_p ye eklenerek a'_p katsayısının büyümesini sağlayacaktır.

Diyagonalin baskın olması sınırlılık kriterinin sağlanması için istenen bir özelliktir. Bu husus kaynak olmaması halinde ϕ büyüklüğünün iç noktalardaki değerlerinin sınırlardaki değerleri vasıtasıyla sınırlandıracağını ifade eder. Buna göre örneğin daimi halde kaynak içermeyen ve sınır sıcaklıkları 500°C ve 200°C olan bir ısı iletimi probleminde iç noktalarda T sıcaklığının değerleri 500°C den küçük ve 200°C den büyük olacaktır.

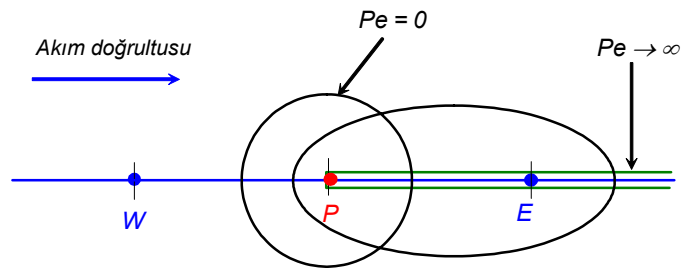
Sınırlılık için diğer bir temel gerek de, *ayrıklaştırılmış denklemlerin bütün katsayılarının aynı işaretli* (ekseriyetle pozitif) olmasıdır. Bunun fiziksel anlamı, bir noktada ϕ değerinde oluşacak artımın komşu noktalardaki değerlerde de bir artış yaratmasıdır. Şayet ayrıklaştırma şeması sınırlılık gereklerini sağlamazsa çözüm yakınsamayabilir. Bu husus Örnek 5.1 deki 2 halinde gösterilmiştir. Bütün diğer örneklerde ayrıklaştırılmış denklemlerin a_p ve a_{nb} katsayıları pozitif işaretli iken 2 halinde doğru katsayılarının çoğu negatif işaretli (bkz. Tablo 5.3) olup çözümde aşağı yukarı yönde büyük sapmalar vardır.

5.4.3 Nakledilebilirlik

Bir akışkan akımının nakledilebilirlik özelliği Şekil 5.9 da gösterildiği gibi bir P noktasında *sabit* bir ϕ kaynağı dikkate alınarak izah edilebilir (Roache, 1976).

Boyutsuz hücre Peclet sayısı taşınım ve yayılımın şiddetleri oranının ölçüsü olarak tanımlanır:

$$Pe = \frac{F}{D} = \frac{\rho u}{\Gamma / \delta x} \quad (5.23)$$



Şekil 5.9

Burada δx (hücre genişliği) karakteristik uzunluktur. Şekil 5.9 daki çizgiler Pe sayısının farklı değerleri için sabit ϕ eğrilerinin (Örneğin $\phi = 1$) genel şeklini göstermektedir.

Akım önünde yer alan bir P noktasının akım gerisinde yer alan bir E noktasındaki etkisini göstermek için iki uç hali dikkate alalım:

- Taşınım olmadığı sade yayınım hali ($Pe = 0$)
- Yayınım olmadığı sade taşınım hali ($Pe \rightarrow \infty$)

Yalnız yayınım olması halinde ($Pe = 0$) akışkan durağandır. Yayınım olayı ϕ özelliğini her doğrultuda eşit miktarda yayacağından sabit ϕ eğrileri P eş-merkezli daire çemberleridir.

E doğu noktasındaki şartlar akım önündeki P noktasından ve akım-gerisindeki şartlardan etkilenecektir. Pe sayısı arttığında eğriler daire çemberinden elipse dönüşür ve Şekil 5.9 da gösterildiği gibi akım doğrultusunda uzar. Böylece E noktası P deki şartlardan kuvvetli bir şekilde etkilenirken P deki şartlar E den zayıf bir şekilde etkilenir veya hiç etkilenmez.

Yalnız taşınım olması halinde ($Pe \rightarrow \infty$) eliptik eğriler akım doğrultusunda çizgi gibi uzar. P den çıkan ϕ özelliğinin tamamı anında geride E ye doğru taşınır. Böylece, yayınım olmadığından E deki ϕ değeri sadece akım önü şartlarından etkilenir, ϕ_E büyüklüğü ϕ_P ye eşit olur.

Peclet sayısının büyüklüğü ile etkileşimin doğrultusu arasındaki ilişki çok önemlidir ve "nakledilebilirlik" olarak nitelendirilir.

5.5 Taşınım-yayınım problemleri için merkezi ayrıklaştırma şemasının değerlendirilmesi

Korunumsallık

Merkezi fark şeması kontrol hacmi yüzlerinde taşınımsal ve yayınımsal akıların hesabı için uygun ifadeler kullanır. Bölüm 5.4.1 deki tartışmalar şemanın korunumsal olduğunu göstermektedir.

Sınırlılık

- (i) Merkezi farklarla ayrıklaştırılmış skaler transport denkleminin iç noktalardaki katsayıları

$$a_W = D_w + \frac{F_w}{2}, \quad a_E = D_e - \frac{F_e}{2}, \quad a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) \quad (5.14b)$$

şeklinde bulunmuştu. Daimi bir-boyutlu akım alanı aynı zamanda ayrıklaştırılmış süreklilik denklemi (5.10) ile de yönetilmektedir. Bu denklem akımda süreklilik sağlandığı zaman $(F_e - F_w)$ nin sıfır olacağını göstermektedir. Bu durumda $a_P = a_W + a_E$ olup merkezi fark şemasının katsayılarının (5.22) Scarborough kriterini sağladığı görülmektedir.

- (ii) $a_E = D_e - F_e/2$ olup taşınımın doğu katsayısına olan katkısı negatiftir. Şayet taşınım baskınsa a_E negatif olabilir. $F_w > 0$, $F_e > 0$ (yani akım tek yönlü) ve a_E pozitif işaretli olmak üzere D_e ve F_e aşağıdaki koşulu sağlamalıdır:

$$\frac{F_e}{D_e} = Pe_e < 2 \quad (5.24)$$

Şayet Pe_e 2 den büyükse doğru katsayısı negatif olacaktır. Bu durum sınırlılık gereklerinden birini ihlal eder ve fiziksel bakımdan imkansız çözümler verebilir.

Örnek 5.1 de (ii) ile belirtilen $Pe=5$ halinde (5.24) koşulu ihlal edilmiştir. Bunun sonuçları büyük miktardaki düşük-tahminlerle ve fazla-tahminlerle (wiggles) açık biçimde görülmüştür. Pe nin 2 den küçük alındığı (i) ve (iii) hallerinde ise analitik çözümlere yakın ve sınırlı yanıtlar elde edilmiştir.

Nakledilebilirlik

Merkezi fark şeması, P noktasında taşınımsal ve yayınımsal akıların hesaplanmasında çevresindeki bütün doğrultulardan etki alır. Dolayısıyla bu şema akımın yönünü veya taşınımın yayınıma kıyasla şiddetini fark etmez. Bu bakımdan yüksek Pe sayılarında nakledilebilirlik özelliğine sahip değildir.

Doğruluk

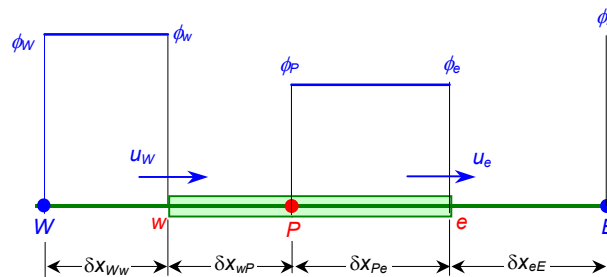
Merkezi ayrıklaştırma şemasında Taylor serisindeki kesme hatası ikinci mertebededir (bkz. Ek A). Merkezi fark şemasında katsayıların pozitif olması gereksinimi sadece $Pe = F/D < 2$ olması halinde şemanın kararlı ve doğru olacağını gösterir. Hücre Peclet sayısının, (5.23) tanımlamasından da görüldüğü gibi, akışkan özellikleriyle (ρ ve Γ), bir akım özelliğinin (u) ve bir ağ özelliğinin (δx) kombinasyonu olduğunu belirtmek önemlidir. Buna göre ρ ve Γ nin verilmiş değerleri için (5.24) koşulunun sağlanması sadece hızın küçük olması halinde (dolayısıyla yayınının baskın olduğu küçük Reynolds sayılı akımlarda) ya da ağ genişliğinin küçük olması halinde mümkündür.

Bu kısıtlamalara göre merkezi fark ayrıklaştırması genel amaçlı akım hesaplamaları için uygun bir ayrıklaştırma yöntemi değildir. Buna göre daha uygun özelliklere sahip ayrıklaştırma şemalarına ihtiyaç vardır. Bu çerçevede, izleyen paragraflarda sırasıyla upwind, hibrid, kuvvet-kanunu ve QUICK şemaları tartışılacaktır.

5.6 Upwind ayrıklaştırma şeması

Merkezi farkla ayrıklaştırma şemasının en uygun olmayan yönlerinden birisi akım yönünü belirleyememesidir. Merkezi fark ayrıklaştırılmasında ϕ özelliğinin hücrenin batı duvarındaki değeri ϕ_P ve ϕ_W nin her ikisinden de etkilenmektedir. Taşınımın soldan sağa doğru ve kuvvetli olduğu bir akımda ise hücrenin batı duvarı P noktasına kıyasla W noktasından daha kuvvetle etkileneceğinden yukarıdaki durum doğru değildir.

“Upwind” veya “verici hücre” ayrıklaştırma şeması bir hücre duvarında hesap yaparken akımın yönünü dikkate alır: ϕ nin bir hücre duvarındaki taşınan değeri akım-önü noktasındaki değerine eşit alınır. Hücre duvarlarındaki değerleri hesaplamak için kullanılan noktasal değerler, akım pozitif yönde (batıdan doğuya) iken Şekil 5.10 da, ve negatif yönde iken Şekil 5.11 de gösterilmektedir.



Şekil 5.10

Akım pozitif yönde iken, $u_w > 0$, $u_e > 0$ ($F_w > 0$, $F_e > 0$), olup upwind şemasında

$$\phi_w = \phi_W \quad \text{ve} \quad \phi_e = \phi_P \quad (5.25)$$

alınır ve böylece ayrıklaştırılmış (5.9) denklemi

$$F_e \phi_P - F_w \phi_W = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.26)$$

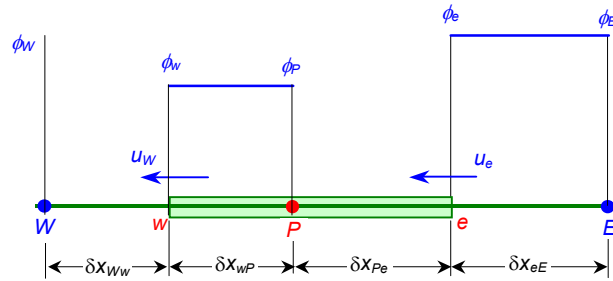
veya düzenlenerek

$$(D_w + D_e + F_e) \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E$$

ya da

$$[(D_w + F_w) + D_e + (F_e - F_w)] \phi_P = (D_w + F_w) \phi_W + D_e \phi_E \quad (5.27)$$

şekline gelir.



Şekil 5.11

Akım negatif yönde ise, $u_w < 0$, $u_e < 0$ ($F_w < 0$, $F_e < 0$), olup upwind şemasında bu kez

$$\phi_w = \phi_P \quad \text{ve} \quad \phi_e = \phi_E \quad (5.28)$$

alınır ve ayrıklaştırılmış denklem

$$F_e \phi_E - F_w \phi_P = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.29)$$

veya

$$[D_w + (D_e - F_e) + (F_e - F_w)] \phi_P = D_w \phi_W + (D_e - F_e) \phi_E \quad (5.30)$$

şekline gelir.

ϕ_W ve ϕ_E nin katsayıları a_W ve a_E ile belirtilerek (5.27) ve (5.30) denklemleri alışlageldik genel

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E \quad (5.31)$$

biçiminde düzenlenebilir. Buradaki merkezi katsayı

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

ve komşu katsayılar da aşağıdaki şekildedir.

	a_W	a_E
$F_w > 0, F_e > 0$	$D_w + F_w$	D_e
$F_w < 0, F_e < 0$	D_w	$D_e - F_e$

Upwind ayırıklaştırma şemasında komşu katsayılar için her iki akım yönünü de içerecek biçimde bir formülasyon aşağıda verilmiştir.

a_W	a_E
$D_w + \max(F_w, 0)$	$D_e + \max(0, -F_e)$

Örnek 5.2:

Örnek 1 deki problemi upwind ayırıklaştırma şeması ve 5 hücre kullanarak (i) $u = 0.1 \text{ m/s}$, (ii) $u = 2.5 \text{ m/s}$ halinde çözünüz

Çözüm

Buradaki ayırıklaştırma için yine Şekil 5.3 deki ağ yapısı kullanılmaktadır. 2, 3 ve 4 numaralı iç noktalarda ayırıklaştırılmış denklem ve katsayıları (5.31) ve eşliğindeki tablolarda verilmiştir. Bu örnekte bütün hücreler için $F = F_e = F_w = \rho u$ ve $D = D_e = D_w = \Gamma / \delta x$ olduğu belirtilmelidir.

Taşınım terimleri için upwind ayırıklaştırmasının kullanılmasıyla 1 numaralı sınır noktasında

$$F_e \phi_P - F_A \phi_A = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_A (\phi_P - \phi_A) \quad (5.32)$$

ve 5 numaralı sınır noktasında

$$F_B \phi_P - F_w \phi_W = D_B (\phi_B - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.33)$$

elde edilir. Sınır noktalarında $D_A = D_B = 2\Gamma / \delta x = 2D$ ve $F_A = F_B = F$ olup bu iki denklem alışlageldik biçimde düzenlenirse

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (5.34)$$

şekline gelir. Burada

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

olup katsayıların değerleri aşağıda tablolanmıştı.

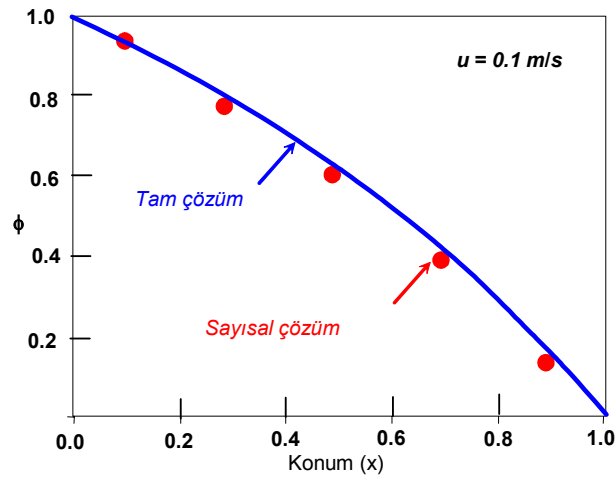
Nokta	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	D	$-(2D + F)$	$(2D + F) \phi_A$
2,3,4	$D + F$	D	0	0
5	$D + F$	0	$-2D$	$2D \phi_B$

Katsayıların hesaplanması ve denklem sisteminin oluşturularak çözülmesi konusu daha önce bir çok kez incelendiği için buradaki uygulama bir alıştırmaya olarak öğrencilere bırakılmıştır. Analitik çözüm yine (5.15) bağıntısıyla hesaplanıp upwind şemasıyla elde edilecek nümerik sonuçlarla karşılaştırılabilir.

(i) $u=0.1$ m/s için çözüm: Bu halde $F=\rho u=0.1$, $D=\Gamma/\delta x=0.5$, $Pe=\Gamma/D=0.2$ olup sonuçlar Tablo 5.6 de özetlenmiştir. Şekil 5.12 de upwind ayrıklaştırma şemasının bu hücre Peclet sayısı için iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 5.6

Nokta	Mesafe	Sonlu hacim çözümü	Analitik çözüm	Fark	Hata yüzdesi
1	0.1	0.9337	0.9387	0.005	0.53
2	0.3	0.7879	0.7963	0.008	1.05
3	0.5	0.6130	0.6224	0.009	1.51
4	0.7	0.4031	0.4100	0.007	1.68
5	0.9	0.1512	0.1505	-0.001	-0.02

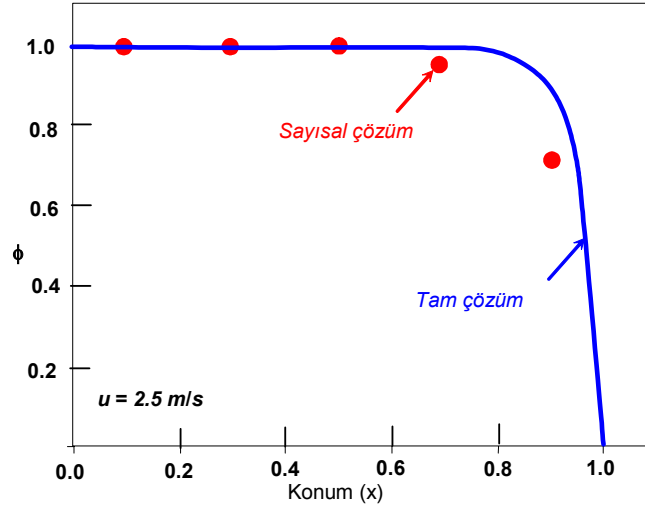


Şekil 5.12

(ii) $u=2.5$ m/s için çözüm: Bu halde de $F=\rho u=2.5$, $D=\Gamma/\delta x=0.5$, $Pe=\Gamma/D=5$ olup sonuçlar Tablo 5.7 ve Şekil 5.13 de analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Tablo 5.6

Nokta	Mesafe	Sonlu hacim çözümü	Analitik çözüm	Fark	Hata yüzdesi
1	0.1	0.9998	0.9999	0.0001	0.00
2	0.3	0.9987	0.9999	0.001	0.01
3	0.5	0.9921	0.9999	0.007	0.70
4	0.7	0.9524	0.9994	0.047	4.70
5	0.9	0.7143	0.8946	0.180	20.15



Şekil 5.13

Bu ikinci uygulamada *upwind şemasının* aynı ağ genişliği için *merkezi fark şemasına* göre daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Bununla birlikte B sınırı yakınındaki çözüm analitik çözüme yeterince yakın değildir.

5.6.1 Upwind ayrıklaştırma şemasının değerlendirilmesi

Korunumsallık

Upwind ayrıklaştırma şeması hücre duvarlarını geçen akıların hesabı için uygun bağıntılar kullanmakta olup, formülasyonun korunumsal olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Sınırlılık

Ayrıklaştırılmış denklemin katsayıları hep pozitif olup sınırlılık koşulunu sağlamaktadır. Akım süreklilik denklemini sağladığında a_p katsayısı içindeki $(F_e - F_w)$ terimi sıfır olur. Böylece $a_p = a_w + a_e$ elde edilir ki bu da tekrarlı çözümlerde kararlılık için istenilen bir durumdur.

Bütün katsayılar pozitif işaretli olunca katsayılar matrisinin diyagonal baskın olur ki böylece çözümde bir "wiggles" oluşmaz

Nakledilebilirlik

Şema akımın yönünü dikkate aldığından nakledilebilirlik sağlanmaktadır.

Doğruluk

Şema geri farkla ayrıklaştırma formülasyonuna dayanmakta olup hassasiyeti Taylor seri açılımının kesme hataları bakımından sadece birinci derecedendir. (Bkz Ek A).

Basitliği nedeniyle upwind ayrıklaştırma şeması ilk CFD hesaplamalarında geniş şekilde kullanılmıştır. Çok-boyutlu problemlerde, upwind stratejisi her bir eksen doğrultusunda tekrarlanarak kolaylıkla uygulanabilir

Şemanın önemli bir zaafı akımın ağ çizgilerine uymaması halinde hatalı sonuçlar vermesidir. Bu gibi problemlerde upwind ayrıklaştırma şeması taşınan özelliğin

dağılımında bir bozukluğa neden olur. Ortaya çıkan hata yayılım benzeri bir görüntüde olup “*yapay yayılım*” olarak adlandırılır. Bu etki ϕ özelliğinin transport büyüklükleri bir kartezyen ağ ile belli bir açı yapan akım için upwind ayrıklaştırma şeması kullanılarak hesaplanmak suretiyle gösterilebilir.

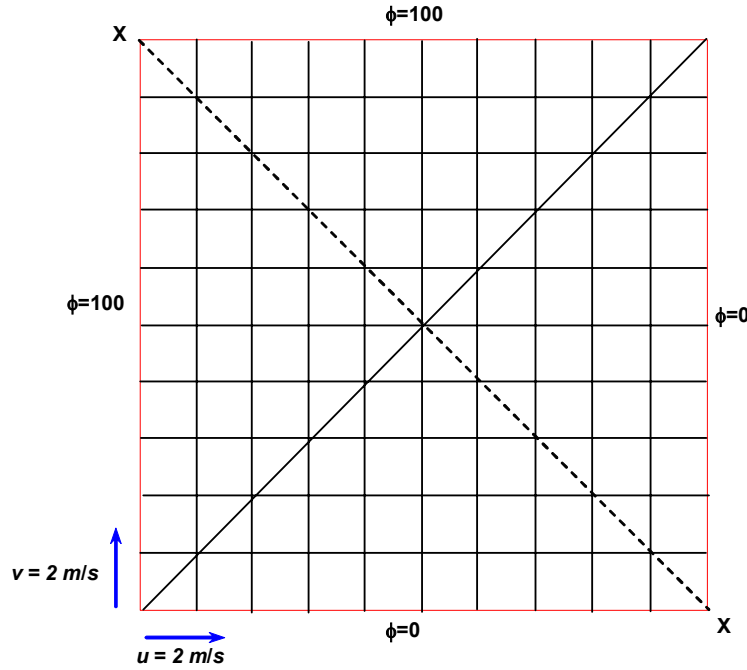


Fig. 5.14

Şekil 5.14 de hızların her yerde $u=v=2\text{ m/s}$ olmak üzere üniform ve diyagonale (dolu çizgi) paralel olduğu bir akım alanı söz konusudur. Sınır koşulları güney ve doğu sınırlarında $\phi=0$ ve batı ve kuzey sınırlarında $\phi=100$ olarak verilmiştir. Diyagonal çizgisinin sınır çizgileriyle kesiştiği birinci ve sonuncu düğüm noktalarında ϕ özelliğinin değeri 50 olarak atanmıştır. Upwind şemasından kaynaklanan yapay yayılımı tespit etmek için, fiziksel yayılımın olmadığı bir salt taşınım olayı dikkate alınmaktadır. ϕ büyüklüğü için herhangi bir kaynak terimi söz konusu olmayıp daimi hal incelenmektedir.

Bu haldeki doğru çözüm bilinmekte olup, akım dolu çizgi şeklinde belirtilen diyagonale paralel olduğundan, $\phi=100$ büyüklüğünün değeri diyagonalin üstünde 100 ve altında da 0 olacaktır.

Yapay yayılımın derecesi ϕ nin dağılımı hesaplanıp sonuçlar X-X diyagonalini boyunca çizilerek gösterilebilir. Fiziksel bir yayılım olmadığından X-X diyagonalinin dolu diyagonalini kesip geçtiği noktada tam çözüm ϕ nin değerinde 100 den sıfıra ani bir değişim gösterecektir.

Çeşitli ağ yapıları için hesaplanmış değerler Şekil 5.15 de tam çözümle birlikte gösterilmiştir. Şekilde sayısal çözümlerin kötü biçimde yayvanlaşmış profiller verdiği görülmektedir. Hata en seyrek ağ için en büyük olup şekle göre ağın sıkılaştırılmasının prensip olarak yapay yayılım probleminin üstesinden geldiği anlaşılmaktadır. 50×50 ve 100×100 hücreli ağlar için elde edilen çözümler tam çözüme yakındır.

Bununla birlikte pratikteki akım hesaplamalarında ağ yapısını yapay yayılımı giderecek derecede sıkılaştırmanın maliyeti yüksek olabilir.

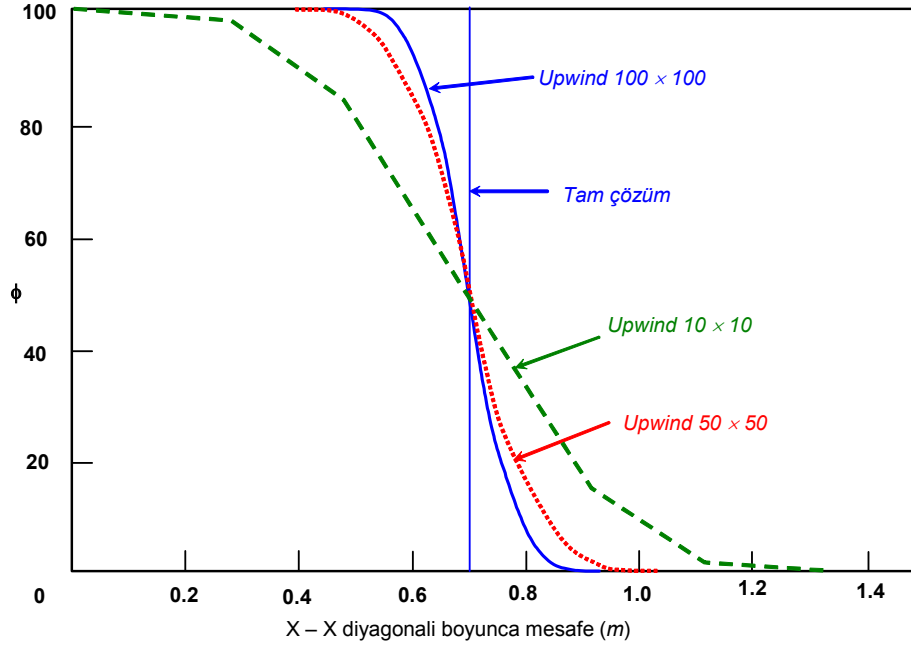


Fig. 5.14

İncelemeler, yüksek Reynolds sayılı akımlarda, yapay yayılımın fiziksel olarak doğru olmayan sonuçlar verecek kadar büyük olabileceğini göstermiştir (Leschziner, 1980; Huang ve arkadaşları, 1985). Bu nedenle, upwind ayırıklaştırma şeması doğru akım hesaplamaları için tam anlamıyla kullanışlı görülmemiş olup iyileştirilmiş ayırıklaştırma şemaları bulunması yönünde önemli miktarda araştırma yapılmıştır.

5.7 Hibrid ayırıklaştırma şeması

Spalding'in (1972) hibrid ayırıklaştırma şeması merkezi ayırıklaştırma ve upwind ayırıklaştırma şemalarının bir birleşimidir. Bu şemada küçük Peclet sayılarında ($Pe < 2$) ikinci-mertebeden hassasiyete sahip merkezi fark ayırıklaştırması kullanılırken büyük Peclet sayılarında ($Pe \geq 2$) da birinci mertebeden hassasiyete sahip olan ama nakledilebilirliği dikkate alan upwind şeması kullanılmaktadır.

Daha önce olduğu gibi hibrid şemanın incelenmesinde de kaynak terimi olmayan bir-boyutlu taşınım-yayınım denklemi ele alınacaktır. Bu denklem bir *akı balansı denklemi* olarak da yorumlanabilir.

Hibrid ayırıklaştırma şeması her bir kontrol hacmi yüzünden geçen net akının hesaplanmasında *lokal Peclet sayısı*na dayanan bir kısmi formülasyon kullanır. Bunun için Peclet sayısı kontrol hacminin yüzleri üzerinde hesaplanır. Örneğin, bir hücrenin batı yüzünde

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / \delta x_{WP}} \quad (5.35)$$

olup bu yüzde birim alan başına net akı için hibrid ayırıklaştırma formülü

$$q_w = F_w \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_W + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{Pe_w} \right) \phi_P \right] \quad -2 < Pe_w < 2$$

$$q_w = F_w A_w \phi_w \quad Pe_w \geq 2 \quad (5.36)$$

$$q_w = F_w A_w \phi_p \quad Pe_w \leq -2$$

şeklindedir.

Bu ayrıklaştırma, kolaylıkla görülebilir ki, küçük Peclet sayılarında taşınım ve yayınım terimleri için merkezi ayrıklaştırma kullanılmasına eşdeğer, $|Pe| > 2$ olduğunda ise taşınım için upwind ayrıklaştırması yapılması ve yayınının da sıfır alınmasına eşdeğerdir. Ayrıklaştırılmış denklemin genel formu

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e \quad (5.37)$$

şeklinde olup buradaki merkezi katsayı da

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Daimi bir-boyutlu taşınım-yayınım problemi için hibrid ayrıklaştırma şemasına ait diğer katsayılar da bazı düzenlemelerden sonra aşağıdaki biçimde elde edilir:

a_w	a_e
$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$

Örnek 5.3:

Örnek 5.1 de (ii) $u=2.5$ m/s halindeki problemi hibrid ayrıklaştırma şeması kullanarak çözünüz. Beş noktalı bir çözümü 25 noktalı çözümle karşılaştırınız.

Çözüm

Şayet beş noktalı ağ yapısı kullanılır ve Örnek 1 deki veriler $u=2.5$ m/s ile birlikte kullanılırsa

$$F = F_e = F_w = \rho u = 2.5 \quad \text{ve} \quad D = D_e = D_w = \Gamma / \delta x = 0.5$$

ve böylece Peclet sayısı için de

$$Pe_w = Pe_e = \rho u \delta x / \Gamma = 5$$

elde edilir. Hücre Peclet sayısı Pe 2 den büyük olduğu için hibrid şema taşınımsal terimler için upwind ayrıklaştırma kullanacak ve yayınımları da sıfır alacaktır.

İç noktalar 2, 3 ve 4 de ayrıklaştırılmış denklem (5.37) bağıntısı ve katsayılarıyla tanımlanır.

Sınır koşullarının dahil olduğu 1 ve 2 noktalarında ise özel inceleme gerekir. Buna göre 1 numaralı sınır noktasında

$$F_e \phi_p - F_A \phi_A = 0 - D_A (\phi_p - \phi_A) \quad (5.38)$$

ve 5 numaralı sınır noktasında da

$$F_B \phi_P - F_W \phi_W = D_B (\phi_B - \phi_P) - 0 \quad (5.39)$$

yazılabilir. Sınırdaki yayınımsal akı sağda yer alırken taşınımsal akıların upwind yöntemiyle verildiği görülmektedir. Ayrıca $F_A = F_A = F$ ve $D_B = 2\Gamma/\delta x = 2D$ olup böylece ayrıklaştırılmış denklem

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (5.40)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_p$$

ve

Nokta	a_W	a_E	S_p	S_u
1	0	0	$-(2D + F)$	$(2D + F) \phi_A$
2, 3, 4	F	0	0	0
5	F	0	-2D	$2D \phi_B$

Verilen sayısal büyüklükler kullanılarak elde edilen katsayılar Tablo 5.8 de sunulmuştur.

Tablo 5.8

Nokta	a_W	a_E	S_p	$a_P = a_W + a_E - S_p$	S_u
1	0	0	-3.5	3.5	$3.5 \phi_A$
2	2.5	0	0	2.5	0
3	2.5	0	0	2.5	0
4	2.5	0	0	2.5	0
5	2.5	0	-1.0	3.5	$1.0 \phi_B$

Denklemler takımını, $\phi_A=1$ ve $\phi_B=0$ olmak üzere matris formunda

$$\begin{bmatrix} 3.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.5 & 2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.5 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.5 & 3.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

ve denklemler sisteminin çözümü

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.7143 \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

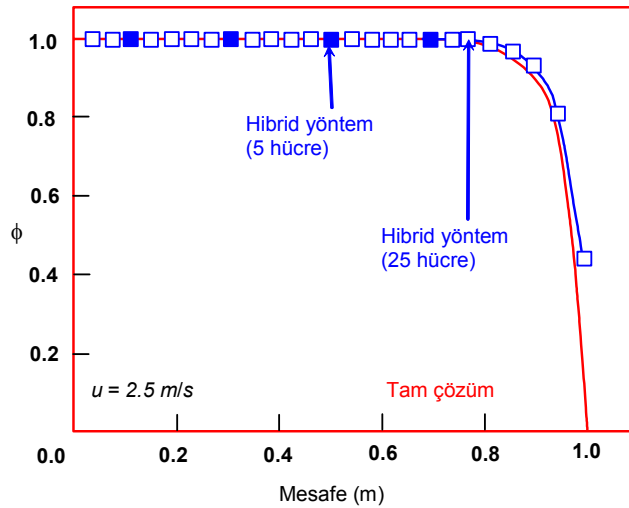
şeklindedir.

Anolitik çözümle karşılaştırma

Nümerik sonuçlar analitik çözüm ile Tablo 5.9 da karşılaştırılmıştır. Hücre Peclet sayısı yüksek olduğundan sonuçlar salt upwind şemasında olduğu gibidir. Ağ yapısının $Pe < 2$ olacak biçimde sıkılaştırılması halinde şema merkezi ayrıklaştırmaya dönüşür ve daha hassas bir çözüm verir. Bu husus 25 noktalı bir ağ yapısı kullanılarak ($\delta x = 0.04 \text{ m}$, $F = D = 2.5$) gösterilmiştir. Seyrek ve sıkı ağ yapılarıyla elde edilen sonuçların her ikisi de analitik çözümle birlikte Şekil 5.16 da sunulmuştur.

Tablo 5.9

Nokta	Mesafe	FVM	Anolitik	Fark	Yüzde hata
1	0.1	1.0	0.9999	-0.0001	-0.01
2	0.3	1.0	0.9999	-0.0001	-0.01
3	0.5	1.0	0.9999	-0.0001	-0.01
4	0.7	1.0	0.9994	-0.0006	-0.06
5	0.9	0.7143	0.8946	0.1843	20.15



Şekil 5.16

5.7.1 Hibrid ayrıklaştırma şemasının değerlendirilmesi

Hibrid ayrıklaştırma şeması upwind ve merkezi ayrıklaştırma şemalarının istenen özelliklerini kullanmaktadır. Merkezi ayrıklaştırma şemasının hatalı sonuçlar verdiği yüksek Pe sayılarında upwind şemaya geçer. Şema tam olarak korunumsaldır ve katsayılar daima pozitif işaretli olduğundan koşulsuz olarak sınırlıdır. Peclet sayısının

büyük değerleri için bir upwind şeması kullanarak nakledilebilirlik gereğini sağlar. Şema fiziksel olarak gerçekçi çözümler verir ve bu bölümde daha ileride tartışılacak olan yüksek mertebeden şemalara kıyasla hayli karardır. Hibrid ayrıklaştırma çeşitli CFD prosedürlerinde geniş şekilde kullanmıştır ve pratik akımların hesabında çok faydalı bulunmuştur. Olumsuz yanı ise Taylor serisi kesme hatası bakımından hassasiyetinin sadece birinci-mertebeden olmasıdır.

5.7.2 Çok-boyutlu taşınım-yayınım için hibrid ayrıklaştırma şeması

Hibrid ayrıklaştırma şeması her ilave koordinat doğrultusunda tekrarlama suretiyle iki- ve üç-boyutlu problemlere kolaylıkla uygulanabilir. Buna göre bütün halleri içeren ayrıklaştırılmış denklem

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_S \phi_S + a_N \phi_N + a_B \phi_B + a_T \phi_T \quad (5.43)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada merkezi katsayı

$$a_P = a_W + a_E + a_S + a_N + a_B + a_T + \Delta F$$

şeklinde olup diğer katsayılar da aşağıda özetlenmiştir:

	Bir-boyutlu akım	İki-boyutlu akım	Üç--boyutlu akım
a_W	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$
a_E	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
a_S	-	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[F_s, \left(D_s + \frac{F_s}{2} \right), 0 \right]$
a_N	-	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$	$\max \left[-F_n, \left(D_n - \frac{F_n}{2} \right), 0 \right]$
a_B	-	-	$\max \left[F_b, \left(D_b + \frac{F_b}{2} \right), 0 \right]$
a_T	-	-	$\max \left[-F_t, \left(D_t - \frac{F_t}{2} \right), 0 \right]$
ΔF	$F_e - F_w$	$F_e - F_w + F_n - F_s$	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Yukarıdaki ifadelerdeki F ve D nin değerleri de aşağıdaki formüllerle hesaplanmaktadır:

Hücre Yüzü	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho u)_s A_s$	$(\rho u)_n A_n$	$(\rho u)_b A_b$	$(\rho u)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$	$\frac{\Gamma_s}{\delta y_{SP}} A_s$	$\frac{\Gamma_n}{\delta y_{PN}} A_n$	$\frac{\Gamma_b}{\delta z_{PN}} A_b$	$\frac{\Gamma_t}{\delta z_{PT}} A_t$

İki ve üç boyutlu halde sınır koşullarının uygulanmasıyla bu bağıntılarda meydana gelecek değişiklikler (5.40) ifadesine benzer olacaktır.

5.8 Kuvvet-kanunu şeması

Patankar'ın (1980) kuvvet-kanunu ayırıklaştırma şeması bir-boyutlu tam çözüme daha yakın yaklaşım yapmakta olup hibrid şemadan daha iyi sonuçlar vermektedir. Bu şemada hücre Peclet sayısı 10 u aştığında yayınım sıfır alınır. Şayet Peclet sayısı $0 < Pe < 10$ aralığında ise akı polinomsal bir ifade kullanılarak hesaplanır. Örneğin, bir hücrenin batı yüzünde birim alan başına net akı

$$0 < Pe < 10 \quad \text{için} \quad q_w = F_w [\phi_W - \beta_w (\phi_P - \phi_W)] \quad (5.44a)$$

ve

$$Pe > 10 \quad \text{için} \quad q_w = F_w \phi_W \quad (5.44b)$$

bağıntılarıyla hesaplanır. Burada $\beta_w = (1 - 0.1Pe_w)^5 / Pe_w$ dır.

Daimi bir-boyutlu taşınım-yayınım problemi için kuvvet-kanunu şeması kullanılarak ayırıklaştırılmış denklemin merkezi katsayısı

$$a_p = a_w + a_e + (F_e - F_w)$$

ve komşu katsayıları da

a_w	a_e
$D_w, \max[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5] + \max[F_w, 0]$	$D_e, \max[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5] + \max[-F_e, 0]$

şeklinde verilmektedir.

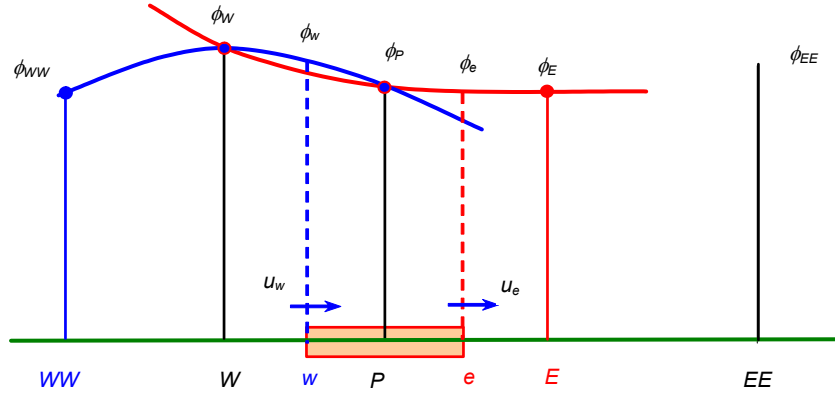
Kuvvet-kanunu ayırıklaştırma şemasının özellikleri hibrid şemanınkiyle benzerdir. Bir-boyutlu problemlerde tam çözüme daha yakın sonuçlar vermekte olup daha hassastır. Şema pratik akım hesaplamalarında faydalı gözükmekte olup hibrid şemalara bir alternatif olarak kullanılabilir. Bazı ticari bilgisayar yazılımları, örneğin FLUENT 4.22 versiyonu, bu şemayı akım hesaplamaları için "default" şema olarak kullanmaktadır (FLUENT Users' Manual, 1992).

5.9 Yayınım-taşınım problemleri için yüksek mertebeden ayırıklaştırma şemaları

Hibrid ve upwind şemalarının hassasiyeti Taylor seri açılımındaki kesme hataları bakımından birinci-mertebededir. Upwind büyüklüklerinin kullanımı şemanın gayet kararlı olmasını ve nakledilebilirlik gereğini sağlarken birinci mertebeden hassasiyet bu şemaların nümerik yayınım hatalarına eğilimli olmalarına yol açar. Bu gibi hatalar yüksek mertebeden ayırıklaştırmalar kullanarak azaltılabilir. Yüksek mertebeden şemalar daha çok sayıda komşu noktayı hesaba katarak ayırıklaştırma hatalarını azaltır. İkinci-mertebeden hassasiyete sahip olan merkezi ayırıklaştırma şeması kararsız olarak gözükmekte olup nakledilebilirlik özelliğine sahip değildir. Akım yönünü dikkate almayan formülasyonlar kararsızdır ve bu nedenle kararlılık için upwind büyüklüklerini içeren ve akım yönüne hassas olan yüksek-mertebeden şemalara ihtiyaç vardır. Geniş şekilde kullanılan yaklaşımların bazıları aşağıda tartışılacaktır.

5.9.1 Kuadratik upwind ayrıklaştırma şeması - QUICK şeması

Leonard (1979) tarafından ortaya konan QUICK (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics) şemasında hücre duvarı değerleri için üç-noktalı akımönü-ağırlıklı kuadratik bir interpolasyon kullanılmaktadır. ϕ nin bir hücre yüzündeki değeri bu yüzün iki yanındaki iki düğüm noktasıyla akım-geliş tarafındaki bir diğer düğüm noktasından geçen bir kuadratik fonksiyondan elde edilir. (Şekil 5.17).



Şekil. 5.17

Örneğin, $u_w > 0$ and $u_e > 0$ olması halinde ϕ_w yi hesaplamak için WW , W ve P noktalarından geçen bir kuadratik kullanılırken, ϕ_e yi hesaplamak için de W , P ve E noktalarından geçen bir başka kuadratik kullanılmaktadır. $u_w < 0$ and $u_e < 0$ olması halinde ise ϕ_w yi hesaplamak için W , P ve E noktalarından yararlanılırken ϕ_e yi hesaplamak için de P , E ve EE noktalarında yararlanılmaktadır.

Genel bir ifadeyle, $i-1$ ve i düğüm noktaları arasında kalan herhangi bir hücre yüzündeki ϕ değeri komşu iki düğüm noktası ile $i-2$ akım-önü noktasındaki ϕ değerleri cinsinden

$$\phi_{yüz} = \frac{6}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-2} \quad (5.45)$$

şeklinde hesaplanır. $u_w > 0$ ve $u_e > 0$ olması halinde bu bağıntı, "w" batı yüzü için komşu noktalar W ve P , akım-önü noktası da WW olup

$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \quad (5.46)$$

şeklinde, ve "e" doğu yüzü için komşu noktalar P ve E , akım-önü noktası da W olup

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \quad (5.47)$$

şeklinde yazılır. Yayınım terimleri de ilgili parabolün türevi alınarak elde edilebilir.

Üniform ağ yapısı kullanılarak izlenen bu yolun, yayınım için merkezi ayrıklaştırma ile elde edilenlerle aynı ifadeleri verdiği belirtilmelidir.

$F_w > 0$, $F_e > 0$ olması halinde ve taşınımsal terimler için (5.46-5.47) denklemleri ve yayınım terimleri için de merkezi ayrıklaştırma kullanılırsa, (5.9) bir-boyutlu taşınım-yayınım denkleminin ayrıklaştırılmış biçimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$F_e \left(\frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_W \right) - F_w \left(\frac{6}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{WW} \right) = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W)$$

Bu denklem düzenlenerek

$$\left(D_w - \frac{3}{8} F_w + D_e + \frac{6}{8} F_e \right) \phi_P = \left(D_w + \frac{6}{8} F_w + \frac{1}{8} F_e \right) \phi_W + \left(D_e - \frac{3}{8} F_e \right) \phi_E - \frac{1}{8} F_e \phi_{WW} \quad (5.48)$$

şeklinde veya daha önce de tanımlanan standart biçimle

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} \quad (5.49)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

a_W	a_E	a_{WW}	a_P
$D_w + \frac{6}{8} F_w + \frac{1}{8} F_e$	$D_e - \frac{3}{8} F_e$	$-\frac{1}{8} F_e$	$a_W + a_E + a_{WW} + (F_e - F_w)$

$F_w < 0$, $F_e < 0$ olması halinde batı ve doğu yüzlerindeki akılar sırasıyla

$$\begin{aligned} \phi_w &= \frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_W - \frac{1}{8} \phi_E \\ \phi_e &= \frac{6}{8} \phi_E + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{EE} \end{aligned} \quad (5.50)$$

şeklinde hesaplanır. Bu bağıntılar (5.9) bir-boyutlu taşınım-yayınım denkleminde ayrıklaştırılmış taşınımsal terimler yerine kullanılarak ve yayınım terimleri de merkezi farklarla ayrıklaştırılarak standart biçimdeki ayrıklaştırılmış denklemin katsayıları aşağıdaki gibi elde edilir:

a_W	a_E	a_{EE}	a_P
$D_w + \frac{3}{8} F_w$	$D_e - \frac{6}{8} F_e - \frac{1}{8} F_w$	$\frac{1}{8} F_e$	$a_W + a_E + a_{WW} + (F_e - F_w)$

Pozitif ve negatif akım doğrultuları için geçerli genel bağıntılar yukarıdaki iki grup bağıntı birleştirilerek elde edilebilir.

Buna göre bir-boyutlu taşınım-yayınım problemleri için QUICK şeması aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + a_{EE} \phi_{EE} \quad (5.51)$$

Burada merkezi katsayı

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + a_{EE} + (F_e - F_w)$$

şeklinde ve komşu katsayılar da

$$a_w = D_w + \frac{6}{8}\alpha_w F_w + \frac{1}{8}\alpha_e F_e + \frac{3}{8}(1-\alpha_w)F_w$$

$$a_{ww} = -\frac{1}{8}\alpha_w F_w$$

$$a_e = D_e - \frac{3}{8}\alpha_e F_e - \frac{6}{8}(1-\alpha_e)F_e - \frac{1}{8}(1-\alpha_w)F_w$$

$$a_{ee} = \frac{1}{8}(1-\alpha_e)F_e$$

şeklinde tanımlanmakta olup ayrıca

$$F_w > 0, F_e > 0 \quad \text{için} \quad \alpha_w = 1, \alpha_e = 1$$

$$F_w < 0, F_e < 0 \quad \text{için} \quad \alpha_w = 0, \alpha_e = 0$$

dır.

Örnek 5.4

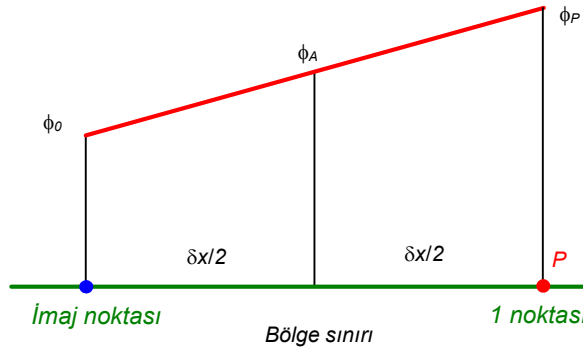
Örnek 5.1 de göz önüne alınan problemi beş-noktalı bir ağ yapısıyla $u=0.2 \text{ m/s}$ için QUICK şemasını kullanarak çözünüz. QUICK sonuçlarını tam çözümle ve merkezi fark ayrıklaştırması sonuçlarıyla karşılaştırınız.

Çözüm

Örnek 5.1 de olduğu gibi ayrıklaştırma için beş-noktalı bir ağ yapısı kullanılacaktır. O örnekteki veriler ve $u=0.2 \text{ m/s}$ değeri kullanılarak her yerde $F=F_e=F_w=0.2$ ve $D=D_e=D_w=0.5$ elde edilir ki hücre Peclet sayısı da $Pe_w=Pe_e=\rho u \delta x / F = 0.4$ olur. 3 ve 4 iç noktalarında QUICK şemasıyla ayrıklaştırılmış denklem (5.51) denklemi ve katsayılarıyla verilmektedir.

QUICK şemasında iç hücrelerin yüzlerinde ϕ değeri üç noktadaki değerleri kullanan (5.46-5.47) formülleriyle hesaplanır. Ancak 1, 2 ve 5 noktalarının hepsi de sınır bölgelerinden etkilenmekte olup ayrı biçimde incelenmesi gerekir.

1 numaralı sınır noktası için w batı yüzünde $\phi_w = \phi_A$ değeri verilmiştir. Fakat doğu yüzünde (5.47) bağıntısını kullanarak ϕ_e değerini hesaplamak için gereken bir W batı noktası bulunmamaktadır. Leonard (1979) bu problemi halletmek için fiziksel sınırın batısında $\delta x/2$ uzaklıkta bir imaj nokta elde etmek üzere bir lineer ekstrapolasyon önermiştir (Şekil 5.18).



Şekil. 5.18

Ekstrapolasyonla imaj noktasında elde edilecek değerin

$$\phi_0 = 2\phi_A - \phi_P \quad (5.52)$$

olacağı kolaylıkla gösterilebilir. İmaj noktasında yapılan ekstrapolasyon 1 numaralı hücrenin doğu yüzünde (5.47) bağıntısıyla yapılacak olan hesap için gereken W hesap noktası değerini sağlamaktadır.

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}(2\phi_A - \phi_P) \\ \phi_e &= \frac{7}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{2}{8}\phi_A \end{aligned} \quad (5.53)$$

Sınır hücrelerinde gradyanlar da (5.53) formülüne uygun bir bağıntıyla hesaplanmalıdır. Batı sınırındaki yayınımsal akının

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_A = \frac{D_A}{3} (9\phi_P - 8\phi_A - \phi_E) \quad (5.54)$$

ile hesaplanacağı gösterilebilir. Böylece 1 numaralı noktada ayrıklaştırılmış denklem

$$F_e \left(\frac{7}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{2}{8}\phi_A \right) - F_A \phi_A = D_e (\phi_E - \phi_P) - \frac{D_A}{3} (9\phi_P - 8\phi_A - \phi_E) \quad (5.55)$$

şeklinde elde edilir.

5 numaralı hücrenin doğu yüzünde $\phi_e = \phi_B$ verilmiş olup bu yüzdeki yayınım akısı

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_B = \frac{D_B}{3} (8\phi_B - 9\phi_P + \phi_W) \quad (5.56)$$

ile hesaplanır. Böylece 5 noktasındaki ayrıklaştırılmış denklem de

$$F_B \phi_B - F_w \left(\frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \right) = \frac{D_B}{3} (8\phi_B - 9\phi_P + \phi_W) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.57)$$

şeklinde elde edilir.

1 hücrenin doğu yüzünde ϕ değerini elde etmek için özel bir ifade kullanıldığından akı uygunluğunu sağlamak için 2 numaralı hücrenin batı yüzündeki taşınım akısını hesaplariken de aynı bağıntıyı kullanmak gerekmektedir. Böylece 2 noktasında

$$F_e \left(\frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{2}{8}\phi_W \right) - F_w \left(\frac{7}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{2}{8}\phi_A \right) = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \quad (5.58)$$

elde edilir.

Şimdi 1, 2 ve 5 noktalarındaki denklemler standart formda düzenlenirse:

$$a_P \phi_P = a_{WW} \phi_{WW} + a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (5.59)$$

Burada merkezi katsayı

$$a_p = a_{ww} + a_w + a_e + (F_e - F_w) + S_p$$

şeklinde ve komşu katsayılar da aşağıdaki gibidir:

Nk	a_{ww}	a_w	a_e	S_p	S_u
1	0	0	$D_e + \frac{1}{3}D_A - \frac{3}{8}F_e$	$-\left(\frac{8}{3}D_A + \frac{2}{8}F_e + F_A\right)$	$\left(\frac{8}{3}D_A + \frac{2}{8}F_e + F_A\right)\phi_A$
2	0	$D_w + \frac{7}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e$	$D_e - \frac{3}{8}F_e$	$\frac{1}{4}F_w$	$-\frac{1}{4}F_w\phi_A$
5	$-\frac{1}{8}F_w$	$D_w + \frac{1}{3}D_B + \frac{6}{8}F_w$	0	$-\left(\frac{8}{3}D_B - F_B\right)$	$\left(\frac{8}{3}D_B - F_B\right)\phi_B$

Verilen sayısal değerlerle elde edilen katsayılar Tablo 5.10 da özetlenmiştir.

Table 5.10

Nokta	a_w	a_e	a_{ww}	S_u	S_p	A_p
1	0.	0.592	0	$1.583\phi_A$	-1.583	2.175
2	0.7	0.425	0	$-0.05\phi_A$	0.05	1.075
3	0.675	0.425	-0.025	0	0	1.075
4	0.675	0.425	-0.025	0	0	1.075
5	0.817	0.	-0.025	$1.133\phi_A$	-1.133	1.925

Denklem takımının matris biçimi

$$\begin{bmatrix} 2.175 & -0.592 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 1.075 & -0.425 & 0 & 0 \\ 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 & 0 \\ 0 & 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 \\ 0 & 0 & 0.025 & -0.817 & 1.925 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.583 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

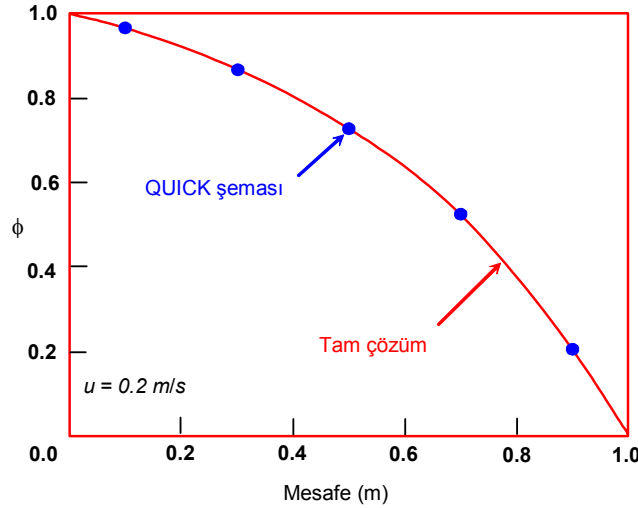
olup çözüm de

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9648 \\ 0.8707 \\ 0.7309 \\ 0.5226 \\ 0.2123 \end{Bmatrix}$$

şeklindedir.

Analitik çözümle karşılaştırma

Şekil 5.19 dan QUICK çözümünün tam çözümden neredeyse farksız olduğu görülmektedir. Tablo 5.11 seyrek ağ yapısına rağmen hataların çok küçük olduğunu doğrulamaktadır. Örnek 5.1 de izah edilen adımları takiben yukarıdaki verilerle merkezi fark çözümü de yapılmıştır. Tablo 5.11 de gösterildiği gibi mutlak hataların toplamı alındığında QUICK şemasının merkezi fark şemasına göre daha hassas çözüm verdiği anlaşılmaktadır.



Şekil 5.19

Table 5.11

Nokta	Konum	Analitik çözüm	QUICK çözümü	Hata	Merkezi fark çözümü	Hata
1	0.1	0.9653	0.9648	0.0005	0.969	0.0043
2	0.3	0.8713	0.8707	0.0006	0.8786	0.0073
3	0.5	0.7310	0.7309	0.0001	0.7421	0.0111
4	0.7	0.5218	0.5226	-0.0008	0.5374	0.0156
5	0.9	0.2096	0.2123	-0.0027	0.2303	0.0207
Σ mutlak hata				0.0047		0.0590

5.9.2 QUICK şemasının değerlendirilmesi

Şema uygun kuadratik profiller kullanmaktadır – akıların hücre yüzündeki değerleri hep komşu iki nokta ve ilave bir akımönü noktası arasında kuadratik interpolasyonla hesaplanmaktadır – ve bu nedenle korunumsaldır. Şema bir kuadratik fonksiyonu esas aldığından Taylor serisi kesme hataları açısından doğruluğu üniform ağ yapısı için üçüncü-mertebededir. Nakledilebilirlik özelliği kuadratik fonksiyonun iki akımönü noktası ile bir akımarka noktasını esas alması üzerine inşa edilmiştir. Akım alanı sürekliliği sağlıyorsa a_p katsayısı komşu katsayıların toplamına eşittir ki bu da sınırlılık için arzu edilen bir durumdur.

Buna karşılık, a_E ve a_W katsayılarının pozitif olması garanti olmayıp a_{WW} ve a_{EE} katsayıları da negatiftir. Buna göre örneğin, şayet $u_w > 0$ ve $u_w > 0$ ise nispeten orta büyüklüklerdeki Peclet sayılarında ($Pe_e = F_e/D_e > 8/3$) doğu katsayısı negatif olur. Bu durum bazı akım koşullarında kararsızlık problemleri yaratır ve sınırsız çözümler verir. Akım negatif yönde olduğunda benzeri biçimde batı katsayısı negatif olabilir. Dolayısıyla QUICK şeması şartlı kararlıdır.

Belirtilmesi gereken bir diğer nokta da ayrıklaştırılmış denklemlerin sadece komşu noktadaki bilinmeyenleri içermeyip daha ilerideki bir noktayı da içermesidir. Bu nedenle bu çözüm tekniğinde üç-diyagonal denklemler sistemi çözüm yöntemi kullanılamaz.

5.9.3 QUICK şemasının kararlılık sorunları ve çareleri

QUICK şeması yukarıda izah edilen biçimde, katsayılarının negatif olması nedeniyle kararsız olabileceğinden çeşitli yollarla kararsızlığı giderilecek biçimde yeniden formüle edilmiştir. Bütün bu formülasyonlarda sorunlu negatif katsayılar kaynak terimine dahil edilerek ana katsayıların pozitif işaretli kalması sağlanmaktadır. Böylece olabildiğince pozitif katsayılar elde edilerek daha iyi bir kararlılık sağlanmaktadır. Pratikteki bu tip yaklaşımlardan iyi bilinen bazıları Han ve arkadaşları (1981), Pollard ve Siu (1982) ve Hayase ve arkadaşları (1992) tarafından gerçekleştirilmiştir. Belirtilen en son çalışmada QUICK şemaları yeniden düzenlenerek yaklaşım genelleştirilmiş olup kararlı ve yakınsayan bir yöntem ortaya konmuştur.

Hayase ve arkadaşları (1990) tarafından geliştirilen QUICK şeması aşağıdaki gibi özetlenebilir:

$$F_w > 0 \text{ için} \quad \phi_w = \phi_W + \frac{I}{8}(3\phi_P - 2\phi_W - \phi_{WW})$$

$$F_e > 0 \text{ için} \quad \phi_e = \phi_P + \frac{I}{8}(3\phi_E - 2\phi_P - \phi_W)$$

$$F_w < 0 \text{ için} \quad \phi_w = \phi_P + \frac{I}{8}(3\phi_W - 2\phi_P - \phi_E)$$

$$F_e < 0 \text{ için} \quad \phi_e = \phi_E + \frac{I}{8}(3\phi_P - 2\phi_E - \phi_{EE})$$

Ayrıklaştırılmış denklemler

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + \bar{S} \quad (5.63)$$

Merkezi katsayı

$$a_P = a_W + a_E + (F_e - F_w)$$

Diğer katsayılar

$$a_W = D_w + \alpha_w F_w$$

$$a_E = D_e - (1 - \alpha_e) F_e$$

$$\bar{S} = \frac{I}{8}(3\phi_P - 2\phi_W - \phi_{WW})\alpha_w F_w + \frac{I}{8}(\phi_W + 2\phi_P - 3\phi_E)\alpha_e F_e$$

$$+ \frac{I}{8}(3\phi_W - 2\phi_P - \phi_E)(1 - \alpha_w)F_w + \frac{I}{8}(2\phi_E + \phi_{EE} - 3\phi_P)(1 - \alpha_e)F_e$$

Burada

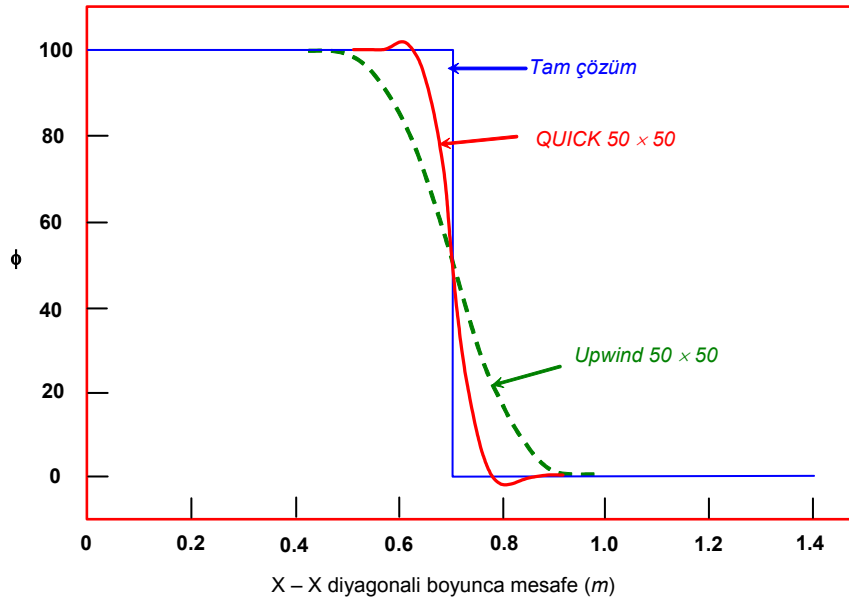
$$F_w > 0, F_e > 0 \quad \text{için} \quad \alpha_w = 1, \alpha_e = 1$$

$$F_w < 0, F_e < 0 \quad \text{için} \quad \alpha_w = 0, \alpha_e = 0$$

Bu yaklaşımın en büyük üstünlüğü katsayıların daima pozitif işaretli olması ve korunumsallık, sınırlılık ve nakledilebilirlik gereklerini sağlamasıdır. Burada, Hayase ve arkadaşlarınınki de dahil olmak üzere QUICK şemasının bütün varyasyonlarının yakınsama sonucunda aynı çözümü verdikleri belirtilmelidir.

5.9.4 QUICK ayrıklaştırma şemasıyla ilgili genel görüşler

QUICK ayrıklaştırma şeması merkezi ayrıklaştırma veya hibrid şemalara kıyasla daha büyük bir hassasiyete sahiptir. Yapay yayılım küçük olup seyrek ağ yapısıyla elde edilen sonuçlar bile sık sık upwind veya hibrid şemalardakinden daha hassas olmaktadır. Bölüm 5.6.1 de ortaya konan iki-boyutlu test hali için upwind ve QUICK şemalarının bir karşılaştırması Şekil 5.20 de gösterilmiştir. QUICK şemasının tam çözüme 50x50 hücreli upwind şemasından çok daha yakın olduğu dikkati çekmektedir.



Şekil 5.20

Bununla birlikte QUICK şeması Şekil 5.20 den de görüldüğü gibi (küçük çapta) aşırı-tahmin veya yetersiz-tahminlerde bulunabilir. Karmaşık akım hesaplamalarında, QUICK kullanılması sınırsız sonuçların neden olduğu sorunlar çıkartabilir. Örneğin, $k-\varepsilon$ modeli ile hesaplamalarda negatif türbülans kinetik enerji ortaya çıkabilir. Bu nedenle sonuçların yorumlanması sırasında aşırı tahmin veya yetersiz tahmin olasılıklarının dikkate alınması gerekir.