

2.7 Bezier eğrileri, B-spline eğrileri

Bezier eğrileri ve B-spline eğrileri bilgisayar grafiklerinde ve Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) uygulamalarında çok kullanılmaktadır.. B-spline eğrileri sadece bir grup veri noktası için tanımlanan fonksiyonların sayısal türev ve integrasyonu için kullanılır. Bu iki tip eğri gerçek interpolasyon spline'ları değildir. Zira bu eğriler normal olarak bütün veri noktalarından geçmez. Bu bağlamda bu eğriler en-küçük kareler eğrileriyle benzerlik gösterirler. Bununla birlikte Bezier eğrileri ve B-spline eğrileri veri noktalarının belirlediği poligon dahilinde kalma özelliğine sahiptirler. Ayrıca bu spline eğrileri güzel bir geometrik özelliğe sahiptirler ki, noktalardan biri değiştirildiğinde eğrinin sadece bir kısmı değişerek yerel bir etki görülür. Oysa kübik spline eğrilerinde data setindeki noktalardan sadece biri değiştiğinde ilk noktadan son noktaya kadarki eğrilerin tamamı etkilenmektedir. Son olarak, kübik spline eğrilerinde veri noktaları eğrilerin geçtiği noktalar iken, Bezier ve B-spline eğrilerinde ilgilenilen noktalar eğrinin şeklini belirlemek için kullanılan kontrol noktalarıdır.

Kolaylık açısından bu eğrilerin kübik çeşidiyle ilgileneceğiz. Bu incelemelerde $y=f(x)$ fonksiyonu parametrik olarak ifade edilecektir. Parametrik biçim x ve y arasındaki ilişkinin başka iki denklemle $x=F_1(u)$ ve $y=F_2(u)$ şeklinde bir u parametresine bağlı olarak ifadesi anlamına gelmektedir. Örneğin bir daire çemberinin denklemi θ açisal parametresi cinsinden

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta\end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu parametrik ifadelerde u büyüklüğünün değeri 0 ile 1 arasında değişecektir.

Bezier eğrileri

Bu eğriler Renault firmasında çalışan Fransız mühendis P. Bezier tarafından otomobil kaporta yüzeylerinin az sayıda parametreyle değiştirilerek kontrol edilebilen eğrilerle tanımlanabilmesi için 1960 da geliştirilmiştir.

Bir seri kontrol noktasının (Bezier noktaları)

$$P_i(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

olarak verildiğini varsayalım.

Bu noktalar bilgisayar ekranına imleç vasıtasıyla yerleştirilebilir ve sürüklenerek yerleri değiştirilebilir. Noktaların soldan sağa sıralanma zorunluluğu yoktur. Her bir noktanın koordinatını

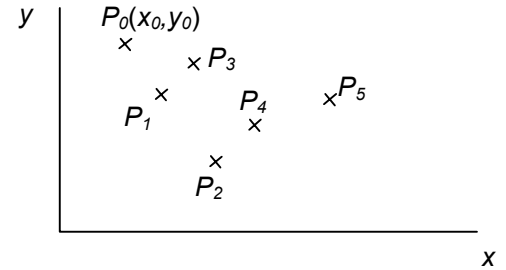
$$P_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix}$$

şeklinde iki elemanlı bir vektör ile gösterelim. Bu koordinatlar parametrik biçimde de

$$P(u) = \begin{Bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{Bmatrix}, \quad 0 \leq u \leq 1$$

şeklinde ifade edilebilir.

N 'inci dereceden bir Bezier polinomu $N+1$ nokta ile belirlenir ve



$$P(u) = \sum_{i=0}^N \binom{N}{i} (1-u)^{N-i} u^i P_i$$

şeklinde verilir. Burada

$$\binom{N}{i} = \frac{N!}{i!(N-i)!}$$

dir. $P(u)$ aslında bir Bernstein polinomudur. Bernstein 1912 de bu polinomların ağırlıklı bir toplamının $N \rightarrow \infty$ için $[0,1]$ aralığında üniform olarak bir sürekli fonksiyona yakınsayacağını göstermiştir.

$N=2$ için P_0, P_1 ve P_2 noktalarıyla tanımlanan $P(u)$ kuadratik bir ifadedir.

$$P(u) = (1)(1-u)^2 P_0 + (2)(1-u)u P_1 + (1)u^2 P_2$$

NOT: $N=2$ için $i=0,1,2$ ve $\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1$ dir.

Bu durumda Bezier eğrisinin parametrik denklemleri

$$\begin{aligned} x(u) &= (1-u)^2 x_0 + 2(1-u)u x_1 + u^2 x_2 \\ y(u) &= (1-u)^2 y_0 + 2(1-u)u y_1 + u^2 y_2 \end{aligned}$$

şeklinde dir. Bu bağıntılardan

$$\begin{aligned} u=0 \quad \text{için} \quad & x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \\ u=1 \quad \text{için} \quad & x(1) = x_2, \quad y(1) = y_2 \end{aligned}$$

olduğu görülmektedir. Buna göre u parametresi 0 ile 1 arasında değişirken ilk nokta (P_0) ile üçüncü nokta (P_2) arasında bir eğri çizilmektedir. Üç noktanın bir doğru üzerinde olması hali hariç ikinci nokta (aradaki P_1 noktası) bu eğrinin üzerinde yer almayacaktır.

Gerçekte ikinci dereceden bir Bezier eğrisinin üzerindeki noktaların koordinatları, bu eğriyi tanımlamak için kullanılan üç noktanın koordinatlarının ağırlıklı bir ortalamasıdır. Bir başka bakış açısıyla Bezier denklemlerini, değişkeni u olan üç polinomun ağırlıklı toplamı olarak düşünmek mümkündür. Burada ağırlık faktörlerini üç noktanın koordinatları belirlemektedir.

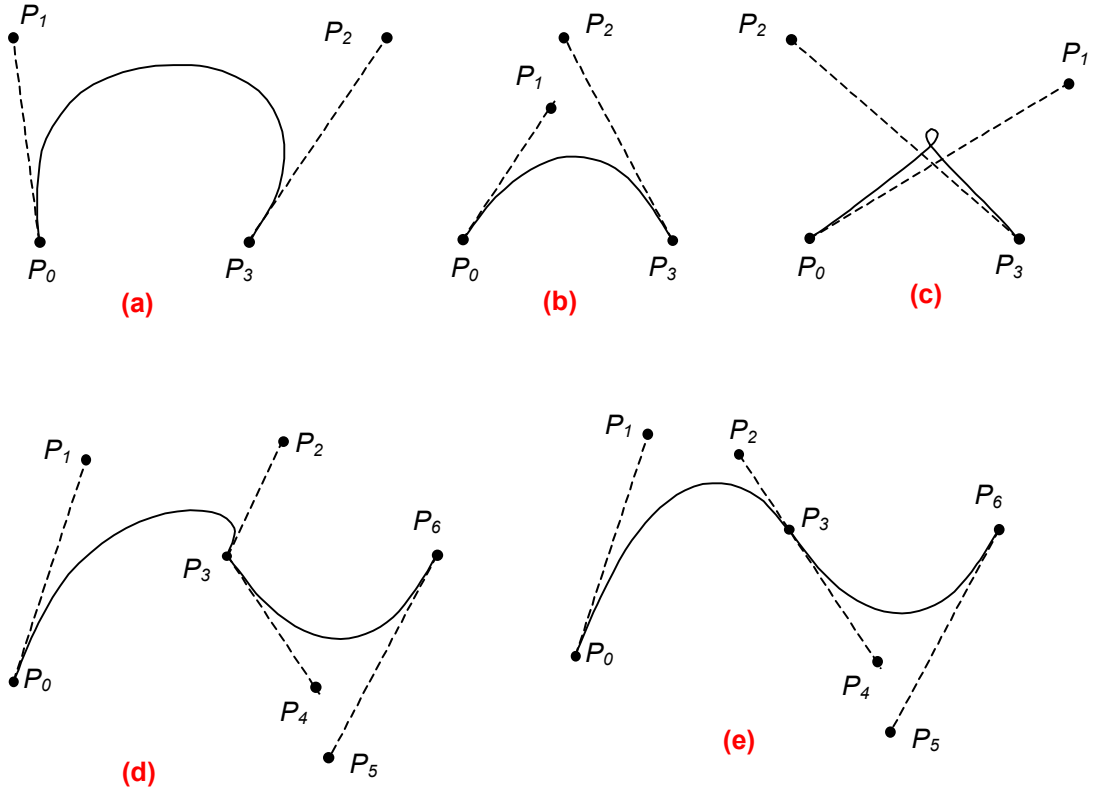
$N=3$ için kübik Bezier polinomları

$$\begin{aligned} x(u) &= (1-u)^3 x_0 + 3(1-u)^2 u x_1 + 3(1-u)u^2 x_2 + u^3 x_3 \\ y(u) &= (1-u)^3 y_0 + 3(1-u)^2 u y_1 + 3(1-u)u^2 y_2 + u^3 y_3 \end{aligned}$$

şeklinde dir. Yine $x(0)=y(0)=P_0$ ve $x(1)=y(1)=P_3$ olduğu görülmektedir ve (P_1, P_2) ara noktaları eğri üzerinde yer almayacaktır. Şekil 2.7 'deki örnek eğrilerde görüldüğü gibi ara noktaların yerlerinin değiştirilmesi eğriyi değiştirmektedir. Bu şekildeki ilk üç eğri (a-c) dört nokta kullanılarak elde edilmiştir.

Şekil 2.7d ve e 'de kübik Bezier eğrilerinin nasıl dört noktadan öteye devam ettirilebileceğini göstermektedir. Bunun için yedi kontrol noktası alınmakta olup ilk dört nokta ile bir eğri oluşturulurken dördüncü nokta ortak olmak üzere son dört nokta ile ikinci bir eğri elde edilmektedir. Şekil 2.7d deki eğrilerde P_3 noktasında bir süreksizlik vardır. Şekil 2.7e 'de ise bu

süreksizlik ortadan kalkmıştır. Bunun için P_2 , P_3 , ve P_4 noktalarının aynı doğru üzerinde yer alması yeterlidir.



Şekil 2.7 Dört ve yedi nokta ile tanımlanmış Bezier eğrileri

Bezier kübiklerinin özellikleri özetlenirse:

$$1- P(0)=P_0, P(1)=P_3$$

2- $u=0$ da kübik fonksiyonların türevleri

$$dx / du = 3(x_1 - x_0), \quad dy / du = 3(y_1 - y_0)$$

olup eğrinin türevi de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

şeklinde elde edilebilir. Bu aynı zamanda P_0 ve P_1 noktaları arasındaki doğrunun eğimidir. Aynı şekilde kübik eğrinin P_3 noktasındaki eğiminin P_3 ve P_2 noktaları arasındaki doğru parçasının eğimine eşit olduğu gösterilebilir. Bu teğetler Şekil 2.7 de kesik çizgilerle gösterilmiştir.

3- Kübik Bezier eğrisi 4 noktanın oluşturduğu içbükey bölgenin içerisinde yer almaktadır.

Çoğu zaman Bezier eğrilerinin matris biçiminde gösterilmesi uygun olur. Bezier kübiği için bu gösterilim aşağıdaki gibidir:

$$P(u) = [u^3, u^2, u, 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = u^T M_2 P$$

B-Splayn eğrileri

B-splayn eğrileri de Bezier eğrileri gibi veri noktalarından geçmeyen eğrilerdir. (Bu açıdan en-küçük kareler eğrilerine benzerler). Herhangi bir derecede olabilirler. Ancak burada kübik eğrilerle ilgilenilecektir. Kübik B-splayn eğrileri iki nokta arasından geçirilen basit kübik eğrilere benzerdir. Ancak bu eğriler veri noktalarından geçmek zorunda değildir.

$N+1$ adet nokta $P_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$ şeklinde verilmiş olsun. Herhangi bir $P_i - P_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) aralığındaki kübik B-splayn eğrisi parametrik olarak

$$B_i(u) = \sum_{k=-1}^2 b_k P_{i+k} \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (3.19)$$

şeklindedir. Buradaki b_k katsayıları dört noktanın etkisi için ağırlık faktörleri olup

$$b_{-1} = \frac{(1-u)^3}{6}, \quad b_0 = \frac{u^3}{2} - u^2 + \frac{2}{3}, \quad b_1 = -\frac{u^3}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{2} + \frac{1}{6}, \quad b_2 = \frac{u^3}{6}$$

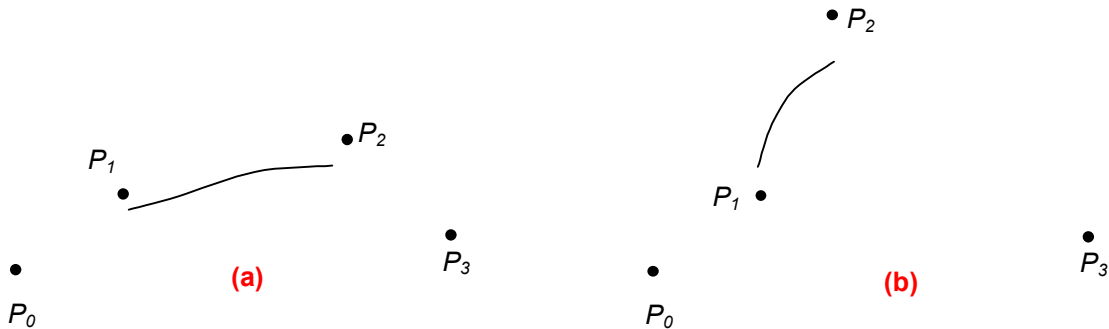
şeklinde tanımlanmaktadır. B_i yerine sırasıyla x ve y , P_i yerine de x_i ve y_i konularak eğri üzerindeki noktaların koordinatları

$$x(u) = \frac{1}{6} \left[(1-u)^3 x_{i-1} + (3u^3 - 6u^2 + 4)x_i + (-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)x_{i+1} + u^3 x_{i+2} \right]$$

$$y(u) = \frac{1}{6} \left[(1-u)^3 y_{i-1} + (3u^3 - 6u^2 + 4)y_i + (-3u^3 + 3u^2 + 3u + 1)y_{i+1} + u^3 y_{i+2} \right]$$

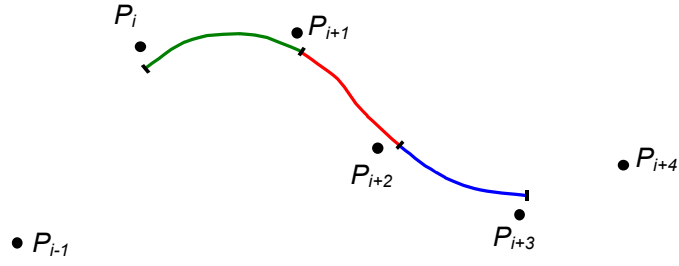
şeklinde elde edilecektir. Noktaların ağırlık faktörleri u parametresi ile değişmekte olup $u=0$ için sırasıyla $1/6, 2/3, 1/6, 0$ ve $u=1$ için de $0, 1/6, 2/3, 1/6$ dir.

Şekil 2.8a-b de dört nokta ile belirlenmiş bir B-splayn eğrisinin noktalardan sadece birinin yer değiştirmesi halindeki durumu göstermektedir. P_2 noktası önce yukarı ve daha sonra sola doğru çekilince, bekleneceği gibi eğri de bunu izleme eğiliminde olup P_1 noktasının ötesine geçmiştir. Eğrinin başladığı ve bittiği bu iki noktaya da çok yakın olmadığı ilgi çekicidir. Bu aralıktaki eğrinin tanımlanması için P_0, P_1, P_2 ve P_3 gibi dört nokta kullanılmıştır.



Şekil 2.8

Bir B-spline eğrini tanımlamak için dört noktaya ihtiyaç vardır. Daha fazla sayıdaki noktadan B-splayn eğrileri geçirmek için kübik splayn uygulamalarındakine benzer bir yöntem kullanılabilir. Bu durumda eğrinin sürekliliği için koşullar alelade splaynlardakine benzer şekilde birinci ve ikinci türevlerinin sürekliliği koşullarıdır. Ağırlık faktörleri için yukarıda verilen bağıntılar bu koşullar sağlanacak şekilde çıkartılmıştır. Şekil 2.9 da Bir B-splayn eğrinin ardarda üç parçası görülmektedir.



Şekil 2.9

B-splayn eğrilerinin özellikleri şu şekilde özetlenebilir:

1. B-splayn eğrileri kübik splaynlarda olduğu gibi parçalardan oluşur ve birleşme yerlerinde aşağıdaki üç koşul sağlanır

$$a) B_i(l) = B_{i+1}(0) = \frac{P_i + 4P_{i+1} + P_{i+2}}{6}$$

$$b) B'_i(l) = B'_{i+1}(0) = \frac{-P_i + P_{i+2}}{2}$$

$$c) B''_i(l) = B''_{i+1}(0) = P_i - 2P_{i+1} + P_{i+2}$$

2. Her bir B-spline eğrisi tanımlandıkları dört noktanın oluşturduğu içbükey bölgenin içinde kalır.