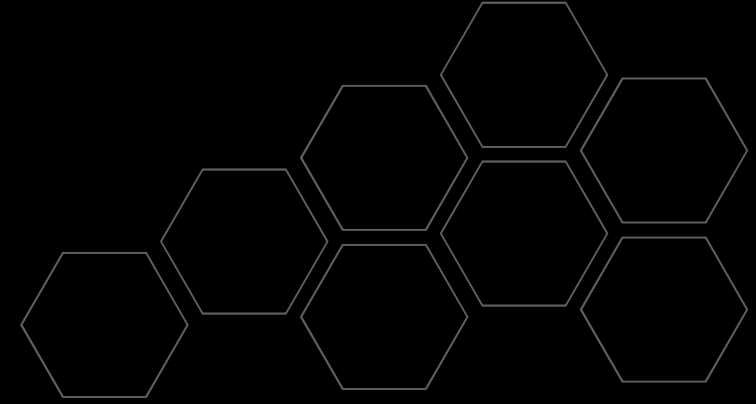
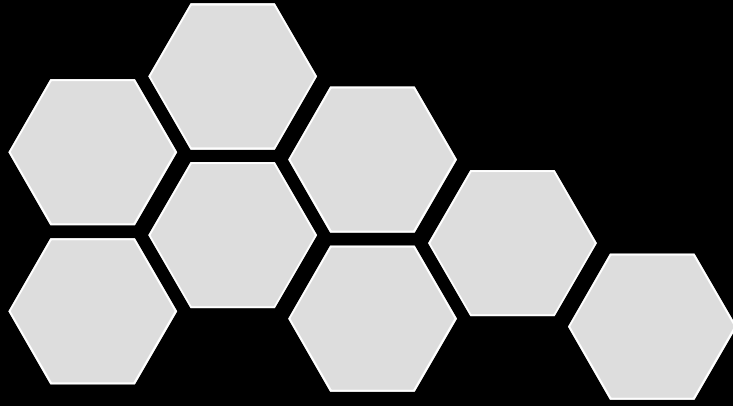
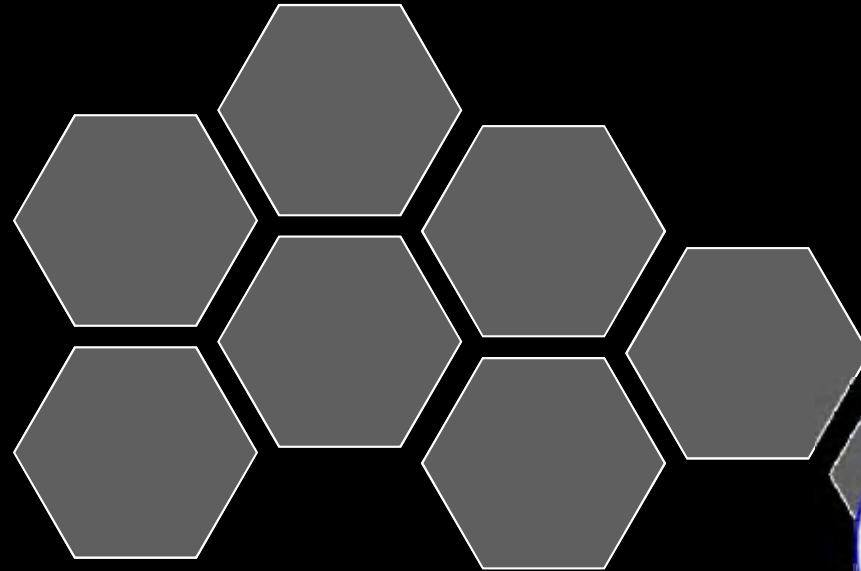
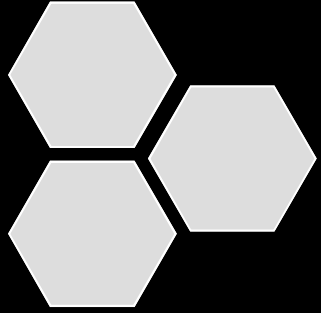




Makina Elemanlarının Mukavemeti

Vedat Temiz



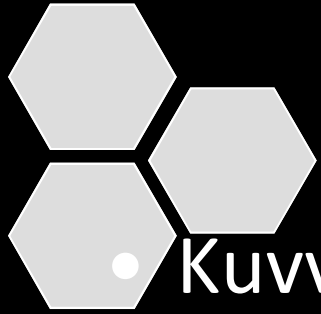


Giriş

- Herhangi bir teknik yapıt veya makina elemanı genellikle 3 sebepten dolayı kullanım dışı kalabilir. Bunlar:

1. Parça kırılması veya kopması (mukavemet sınırının aşılması)
2. Zaman içinde meydana gelen aşınma
3. Teknolojisi eskimesi (yeni ve daha ucuz teknolojilerin gelişmesi)





Etkiyen Kuvvetler

- Kuvvetler çeşitli fiziksel etkiler sonucu ortaya çıkabilirler.

1. Uygulanan kuvvetler
2. Ağırlık Kuvvetleri
3. Sürtünme Kuvvetleri
4. Basıncıtan kaynaklanan kuvvetler
5. Hava direncinden kaynaklanan kuvvetler
6. Dengesizlikten ortaya çıkan kuvvetler (merkezkaç)
7. Atalet kuvvetleri
8. Manyetik ve elektriksel kuvvetler.....



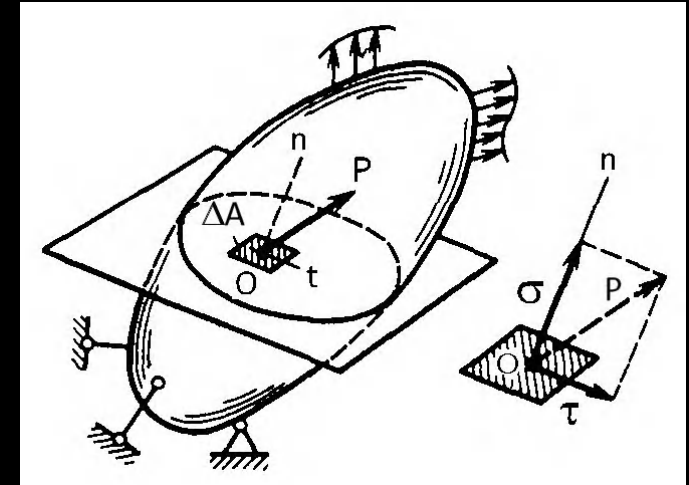


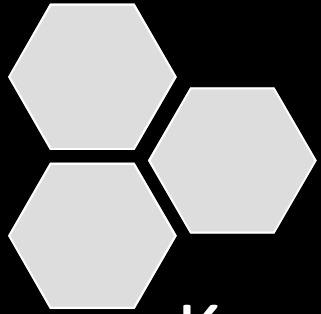
Normal ve Teğetsel Gerilmeler

- Dış kuvvetlerin ve/veya momentlerin etkisindeki bir makina elemanının herhangi bir kesitinde tepki olarak iç kuvvetler oluşur. Elemanın kesitinde birim alana isabet eden ve hesap yoluyla tayin edilen iç kuvvetlere **gerilme** adı verilir.

- Gerilmeler temel olarak ikiye ayrılır:

1. Normal gerilmeler (yüzeye dik)
2. Teğetsel gerilmeler (yüzeye paralel)



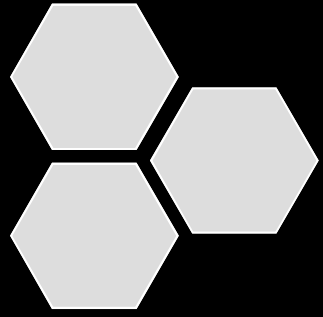


Gerilmeler

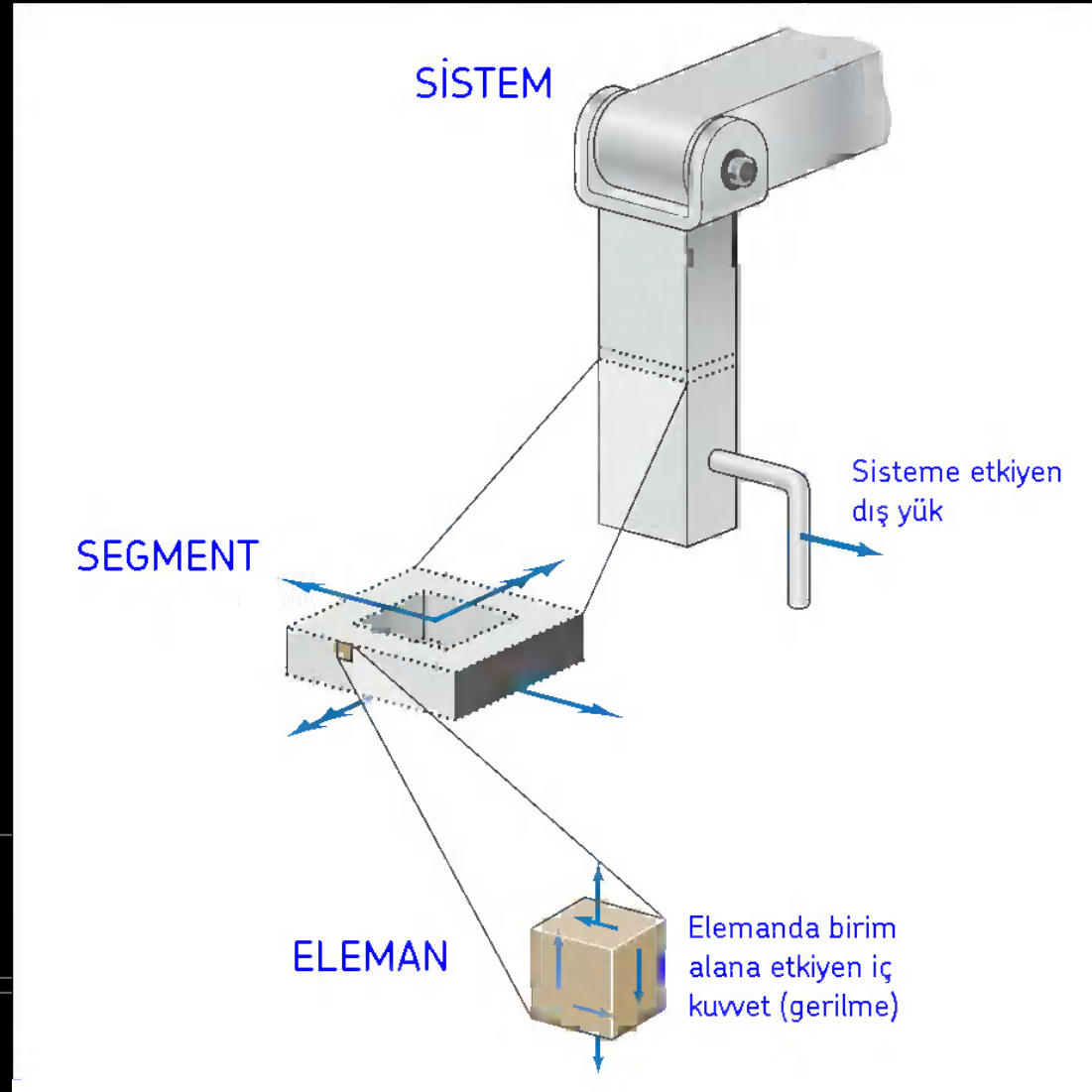
- Kuvvetler boyuttan bağımsız olarak değerlendirildiğinde makina elemanlarının mukavemeti hakkında bir fikir vermezler.
- Örnek: 10 mm çapında yapı çeliğinden bir çubuğun ucuna takılı 20 tonluk yük, bu çubuk için çok fazla olmasına karşın, aynı malzemeden 100 mm lik bir çubuk için bu yük pek fazla bir şey ifade etmez.
- Gerilme birim alana etkiyen kuvvet olarak tarif edilir.
Türüne göre σ veya τ ile gösterilir.

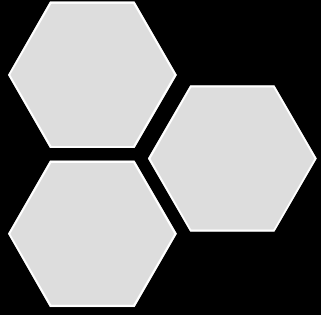
$$\sigma (\text{veya } \tau) = \frac{F}{A}$$



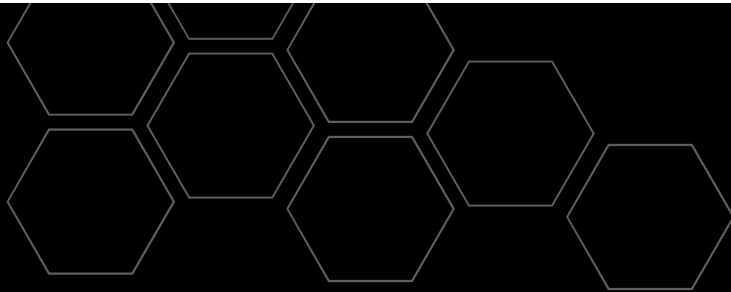


İç kuvvet, dış kuvvet ve eleman



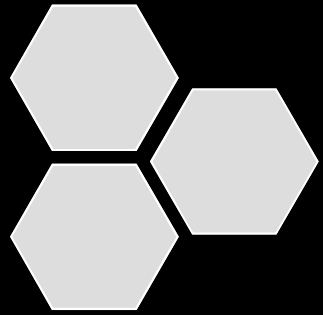


Gerilmeler



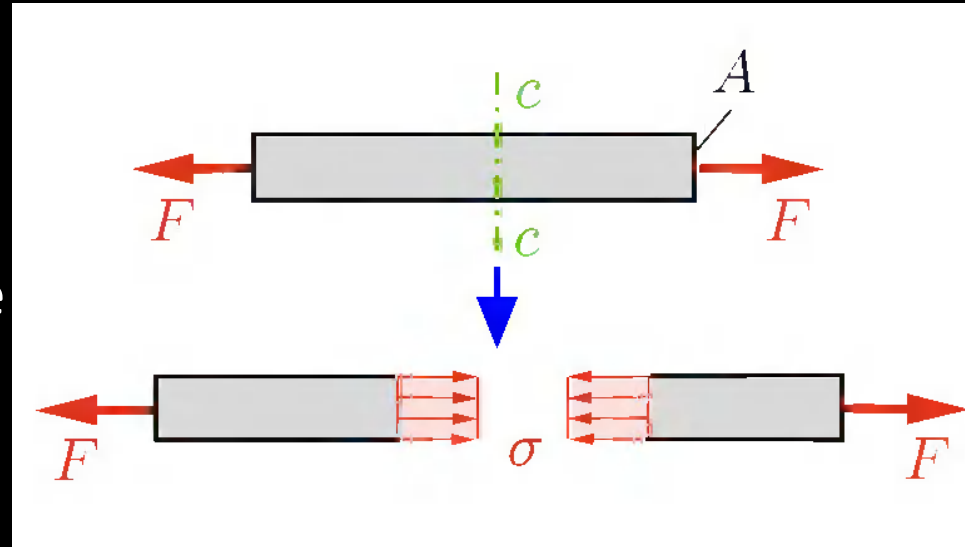
Gerilmeler



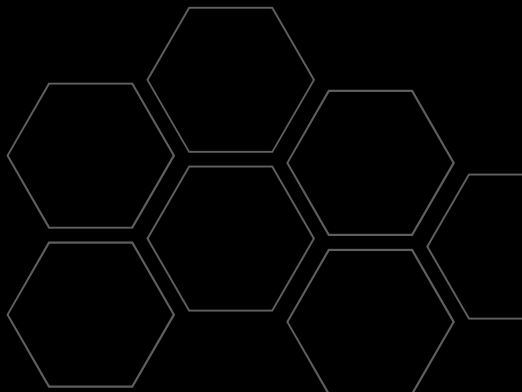
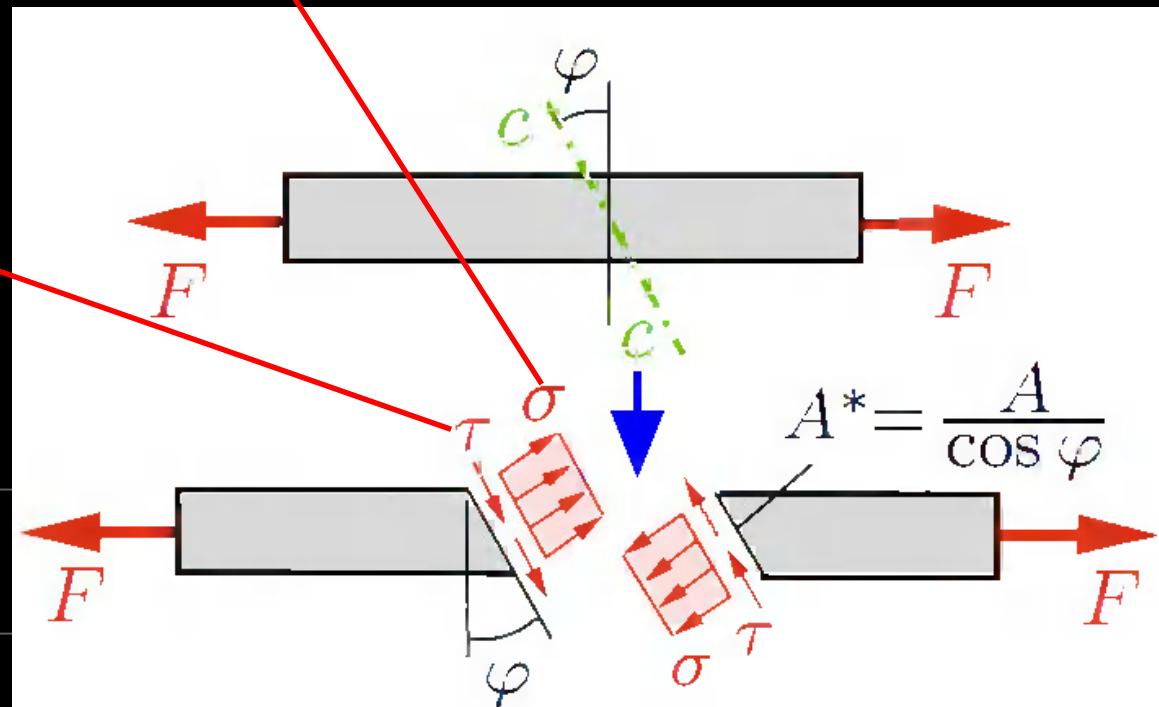


Normal ve Teğetsel Gerilmeler

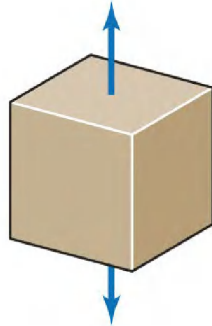
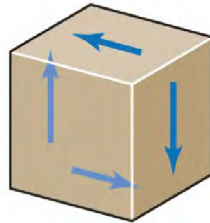
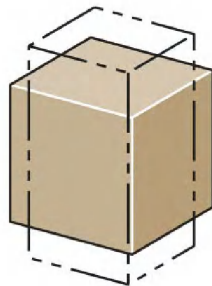
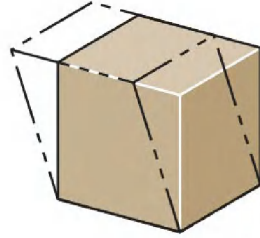
Normal gerilme

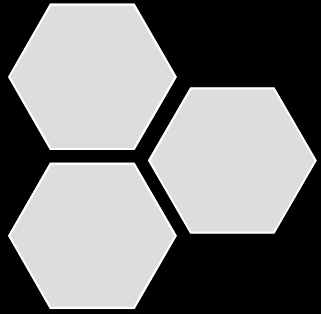


Teğetsel gerilme



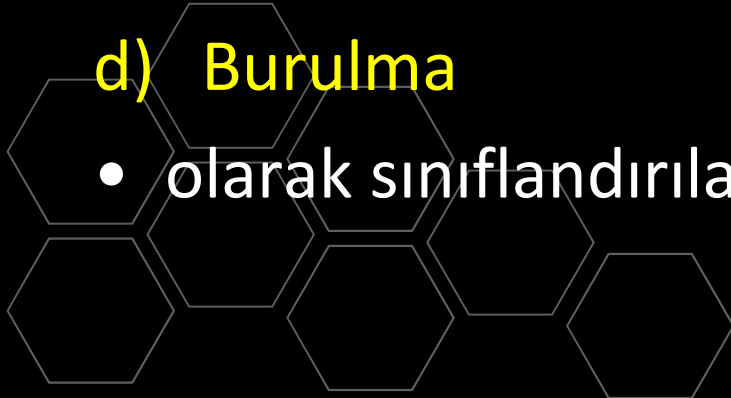
Normal ve Kayma Gerilmeleri

	<i>Normal Gerilme</i>	<i>Kayma Gerilmesi</i>
<i>İç kuvvetler (Gerilme)</i>		
<i>Birim uzama</i>		



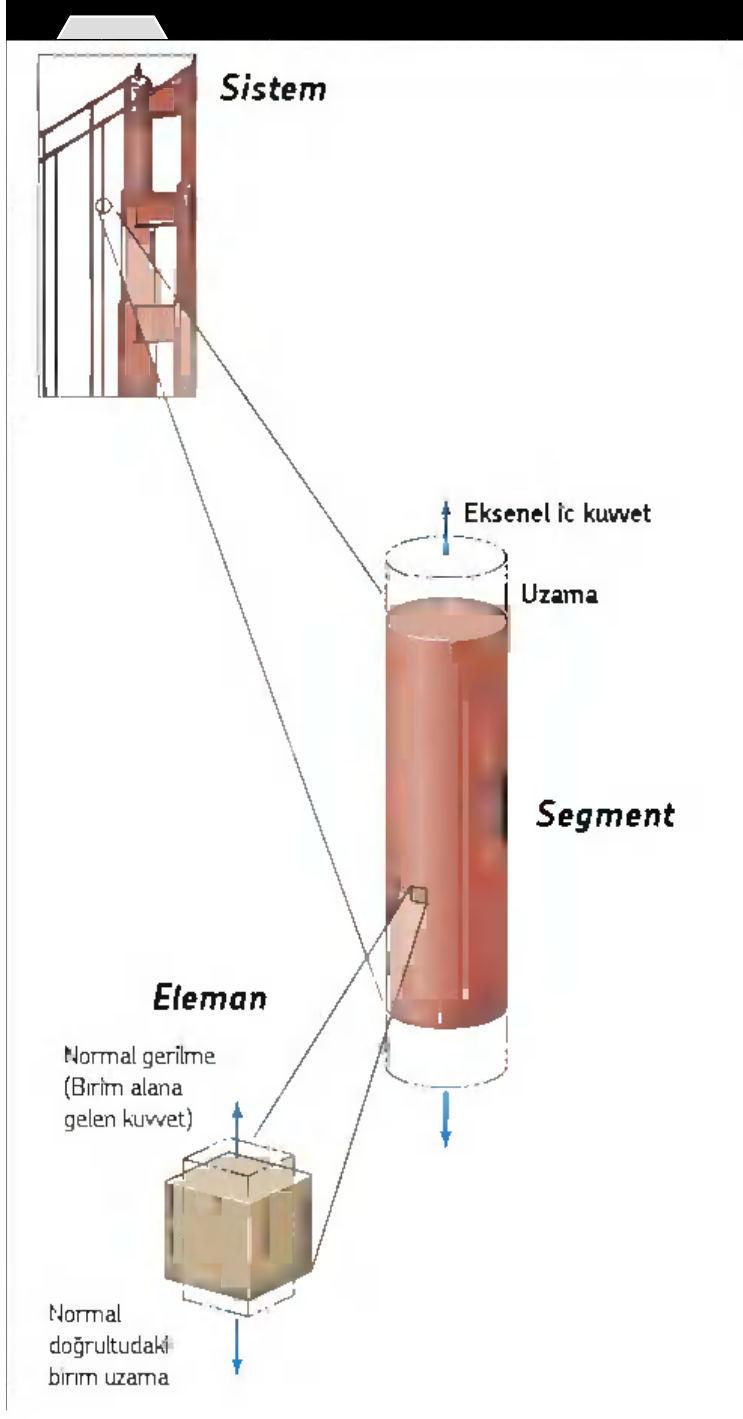
Makina Elemanlarının Zorlanma Halleri

- Makina elemanlarındaki normal ve teğetsel gerilmeler, bu elemanların değişik şekillerde zorlanmasından dolayı meydana gelir.
- Bu zorlanmalar sırası ile
 - a) Çekme-basma
 - b) Kesme (makaslama)
 - c) Eğilme
 - d) Burulma
- olarak sınıflandırılabilir



Çekme-basma

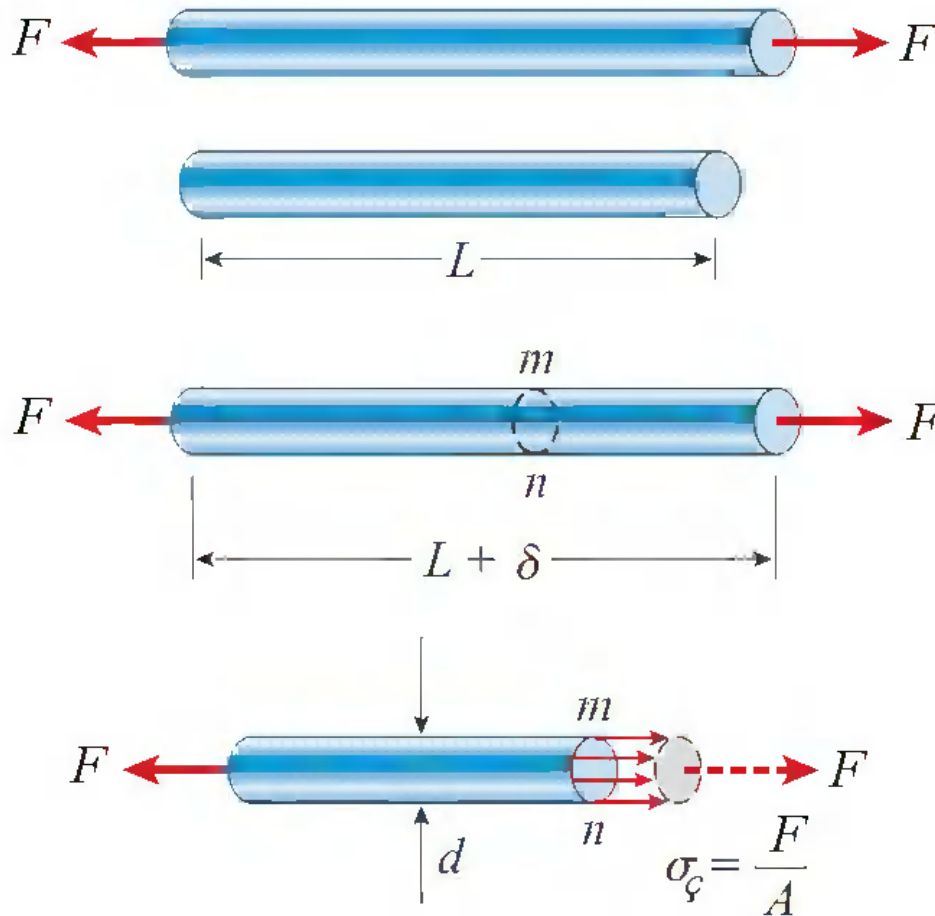
Örneğin Boğaz köprüsünün taşıyıcı halatları dikkate alınsın





Çekme-basma

- Tek eksenli çekme-basma makina elemanlarında karşılaşılan en basit yükleme durumudur.

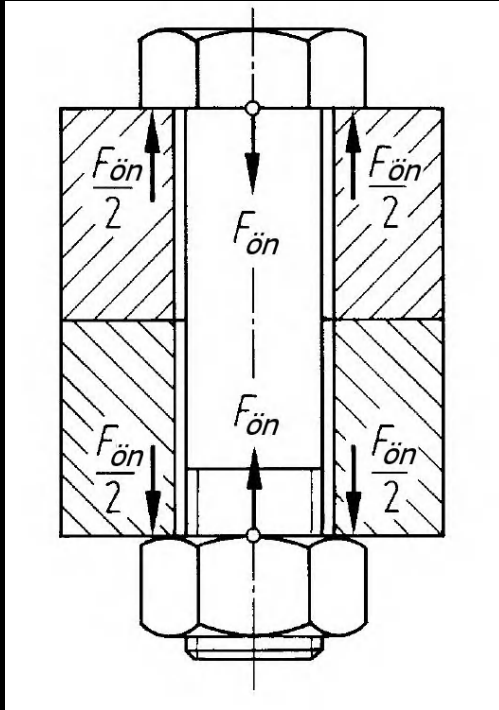


$$\sigma_{\zeta} = \frac{F}{A}$$

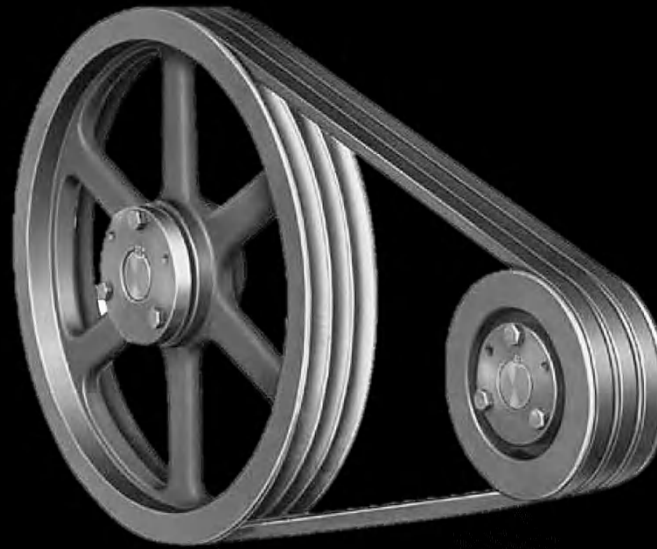
Etkiyen **F** yükünün yönü değiştiğinde aynı eleman bu sefer basma gerilmesine maruz kalacaktır. Bu ifadenin kesitteki ortalama gerilmeyi ifade ettiğini hatırlamak gerekir. Çekme gerilmesinin bu şekilde ifadesi mühendislik hesaplamalarında çoğunlukla yeterlidir.



Çekme-basmaya zorlanan bazı makina elemanları



Cıvatalar

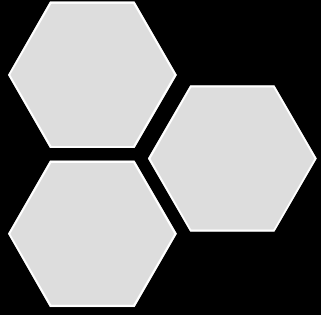


Kayışlar



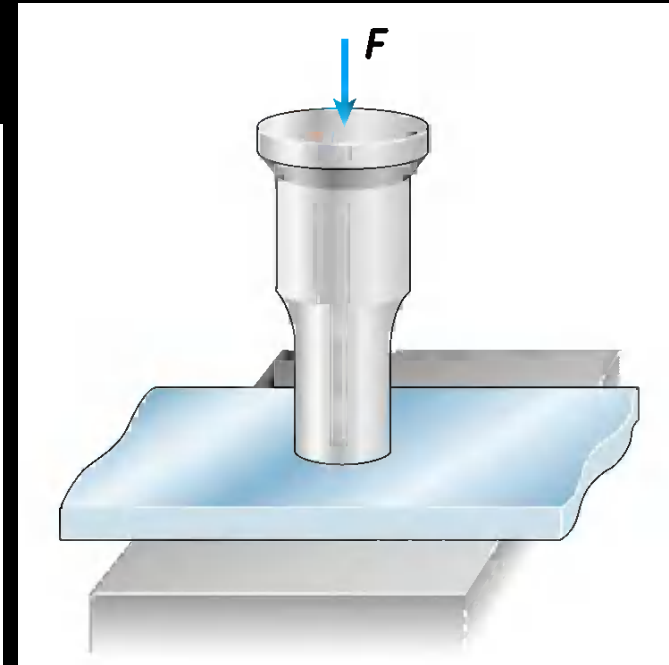
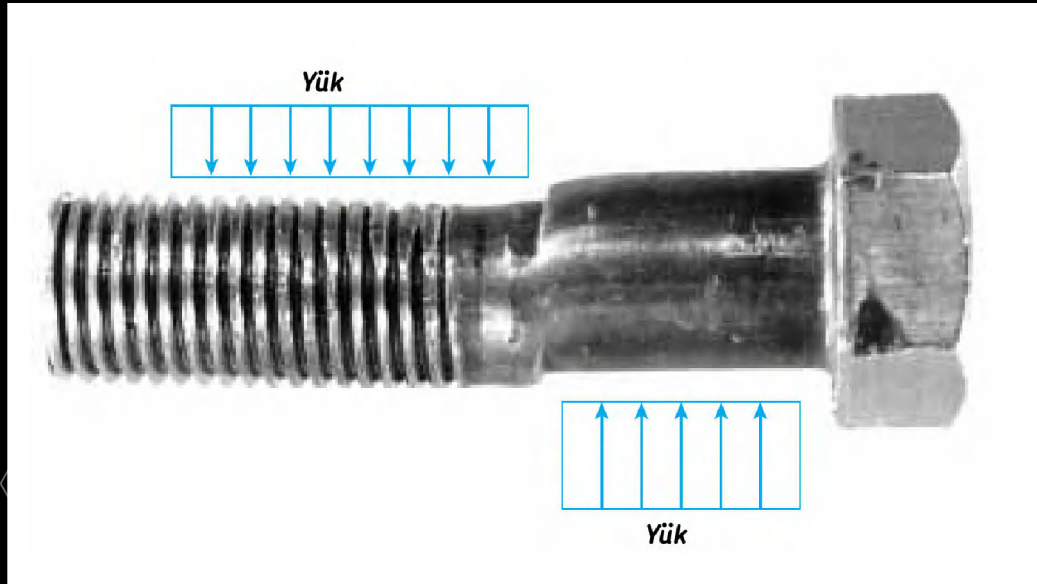
Zincirler

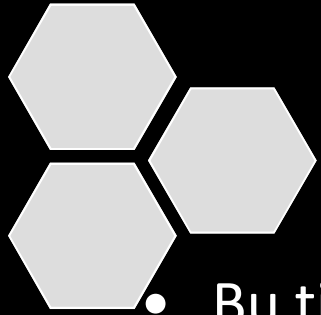




Makaslama (Kesme)

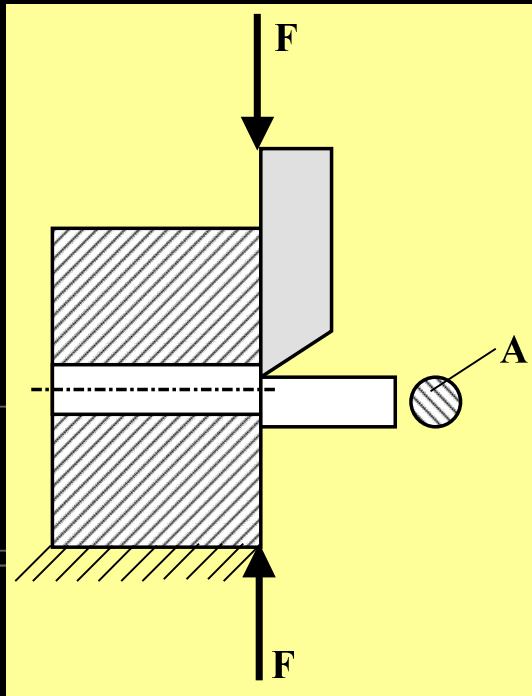
- Bu tip bir gerilme birbirine çok yakın olarak etkiyen ters yönlü kuvvetlerin bulunduğu durumlarda söz konusudur.





Makaslama (Kesme)

- Bu tip bir gerilme birbirine çok yakın olarak etkiyen ters yönlü kuvvetlerin bulunduğu durumlarda söz konusudur. Bu tip gerilmelere genellikle pim, cıvata, perçinli bağlantılar, yapıştırma ve lehim bağlantılarında rastlanır. Makaslama pratik olarak bir eğilme etkisi mevcut değildir.



$$\tau_{xy} = \frac{F}{A}$$

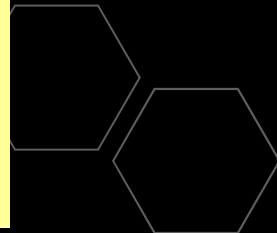
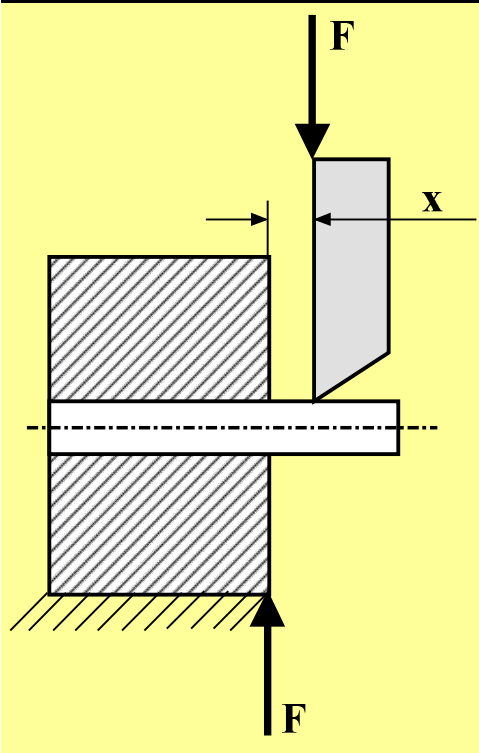
Kuvvet çifti arasındaki mesafenin pratik olarak sıfıra yakın olduğu durumlarda bu basit hesap genellikle yeterlidir.



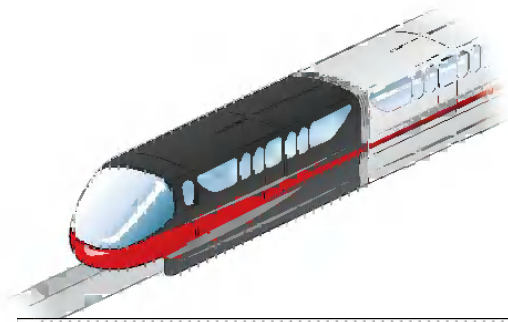
Makaslama (Kesme)

Bununla birlikte kuvvet çiftinin etkiye noktaları arasında alttaki şekilde görüldüğü gibi ihmal edilemeyecek bir mesafe varsa bu durumda hesaplamalar daha farklı şekilde gerçekleştirilir. Burada bu hesaplamaların ayrıntısına girilmeyecektir.

Ancak şekilde verilen yükleme durumunda çubuğun dairesel ve dikdörtgen şekillerde olması durumunda kesitteki gerilme yayılımı ve maksimum gerilmenin değerini vermekle yetinilecektir.







Eğilme

Sistem

Deformasyon

Segment

Deformasyon-
Eğrilelik ilişkisi

Eğrilik

Deformasyon öncesi

Deformasyon sonrası

Eğrilelik-birim
uzama ilişkisi

Eleman

Normal birim
uzama

Deformasyon öncesi

Deformasyon sonrası

Sistem

Dış yükler

İç ve dış kuvvet
ilişkisi

Segment

İç kuvvetler:
Eğilme momenti
(ve kesme kuv.)

Eğilme momenti -
eğrilelik ilişkisi

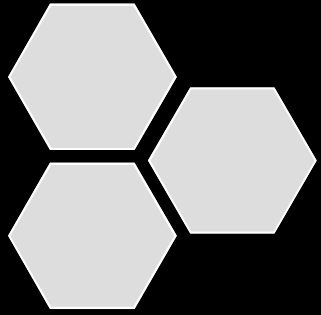
Eğilme momenti-
gerilme ilişkisi

Eleman

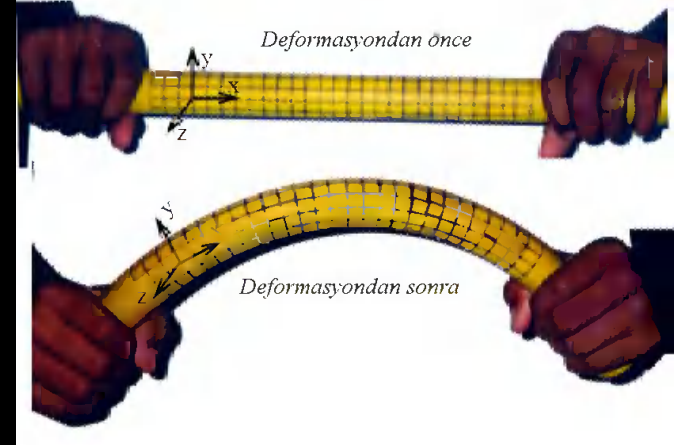
Normal gerilme

Gerilme-uzama ilişkisi

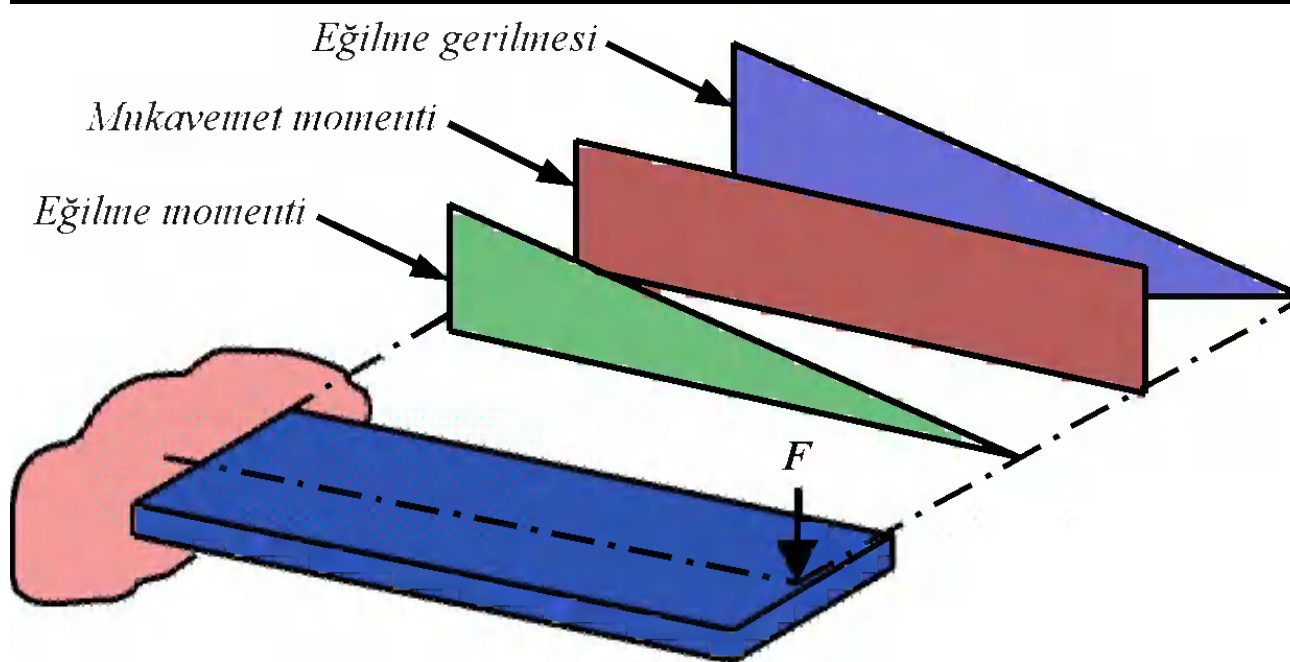




Eğilme



- Şekilde bir eğilme momenti etkisindeki eleman görülmektedir. Bu elemanın kesitindeki eğilme gerilmesi yayılışı şekildeki gibidir. Mukavemet derslerinden hatırlanacağı gibi böyle bir elemandaki eğilme gerilmesi



$$\sigma_e = \frac{M_e}{I_x} \cdot y$$

M_e ; eğilme momenti
 I_x ; alan atalet momenti,
 y ; tarafsız eksene olan
mesafe





Eğilme

- Eğilme gerilmesi normal gerilme türünden bir gerilmedir. Hatırlanacağı üzere, aşağıda verilen bağıntı ile hesap yapabilmek için belirli şartların sağlanması gerekir. Bunlar;

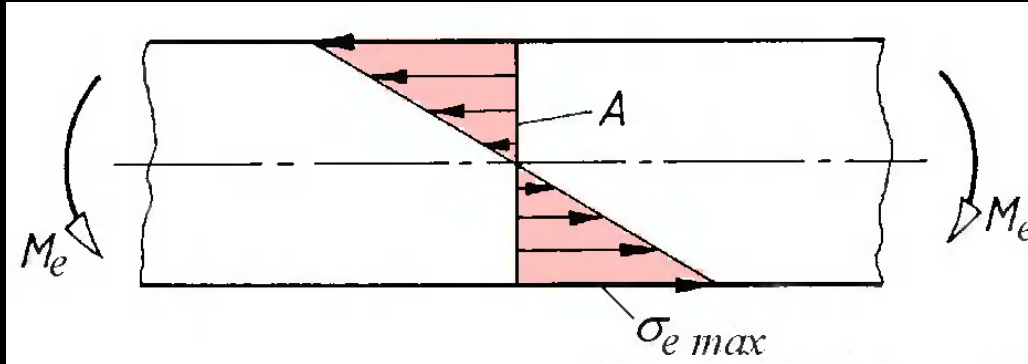
- a) Hesaplanan eleman başlangıçta düz olmalı ve deformasyondan sonra da aynı düzlemde kalmalıdır.
- b) Malzeme homojen olmalı ve gerilmeler elastiklik sınırı içinde kalmalıdır.
- c) Eğilme gerilmesinin hesaplandığı kesit, gerilme yığılması olabilecek bölgelerden uzak olmalıdır.

$$\sigma_e = \frac{M_e}{I_x} \cdot y$$



Eğilme

- Hesap kolaylığı açısından bazı hallerde alan atalet momenti ile tarafsız eksene olan mesafe birlikte düzenlenerek denklem basitleştirilebilir. Bu durumda eğilme gerilmesi



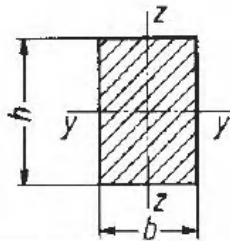
$$\sigma_e = \frac{M_e}{W_x}$$

şeklinde yazılır. Burada $W_x = I_x / y$ dir ve **mukavemet momenti** olarak isimlendirilir.

Alan atalet ve mukavemet momentleri ilgili tablolardan kolaylıkla temin edilebilir.



Alan atalet ve mukavemet momentleri

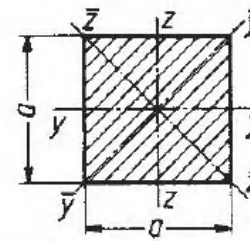


$$I_y = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12}$$

$$W_y = \frac{bh^2}{6}$$

$$W_z = \frac{hb^2}{6}$$

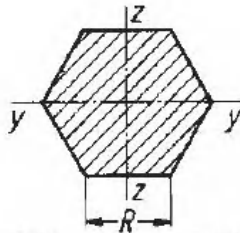


$$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$$

$$W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$$

$$I_{\bar{y}} = I_{\bar{z}} = \frac{a^4}{12}$$

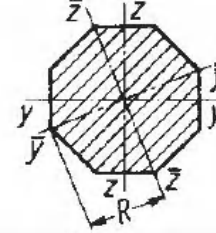
$$W_{\bar{y}} = W_{\bar{z}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = 0,118 a^3$$



$$I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$$

$$W_y = \frac{5}{8} R^3 = 0,625 R^3$$

$$W_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^3 = 0,5413 R^3$$

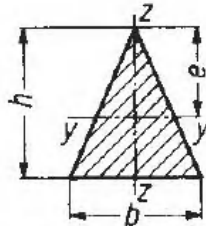


$$I_y = I_z = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0,638 R^4$$

$$W_y = W_z = 0,6906 R^3$$

$$I_{\bar{y}} = I_{\bar{z}} = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0,638 R^4$$

$$W_{\bar{y}} = W_{\bar{z}} = 0,638 R^3$$

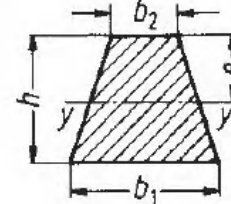


$$I_y = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_z = \frac{hb^3}{48}$$

$$W_y = \frac{bh^2}{24} \text{ für } e = \frac{2}{3} h$$

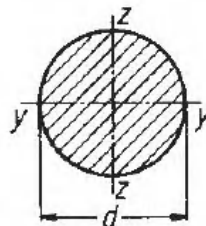
$$W_z = \frac{hb^2}{24}$$



$$I_y = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$$

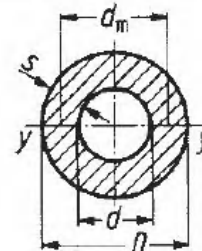
$$W_y = \frac{h^2}{12} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{2b_1 + b_2}$$

$$e = \frac{h}{3} \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2} \text{ için}$$



$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$$



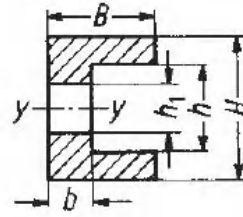
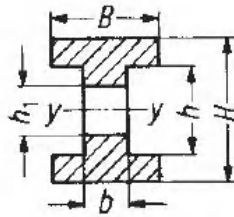
$$I_y = I_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$$

$$W_y = W_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32 D}$$

Et kalınlığı düşük ise $\left(\frac{s}{d_m}\right)^2 \ll 1$:

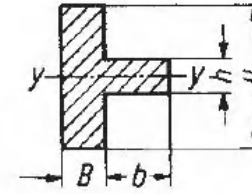
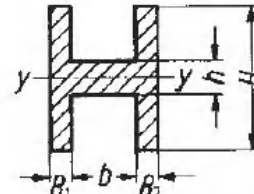
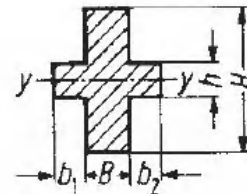
$$I_y = I_z = \frac{\pi d_m^3 s}{8}, W_y = W_z = \frac{\pi d_m^2 s}{4}$$

Alan atalet ve mukavemet momentleri



$$I_y = \frac{B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)}{12}$$

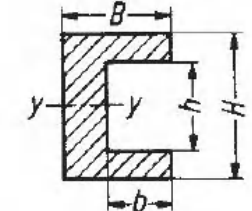
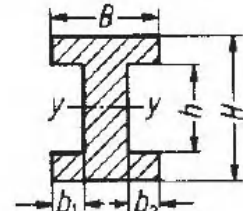
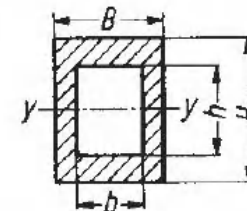
$$W_y = \frac{B(H^3 - h^3) + b(h^3 - h_1^3)}{6H}$$



$$I_y = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$$

$$W_y = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$$

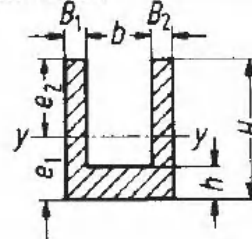
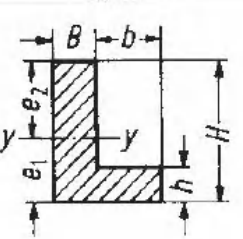
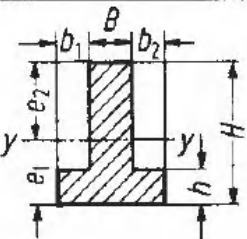
mit $B = B_1 + B_2$
 $b = b_1 + b_2$



$$I_y = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$W_y = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$

mit $b = b_1 + b_2$



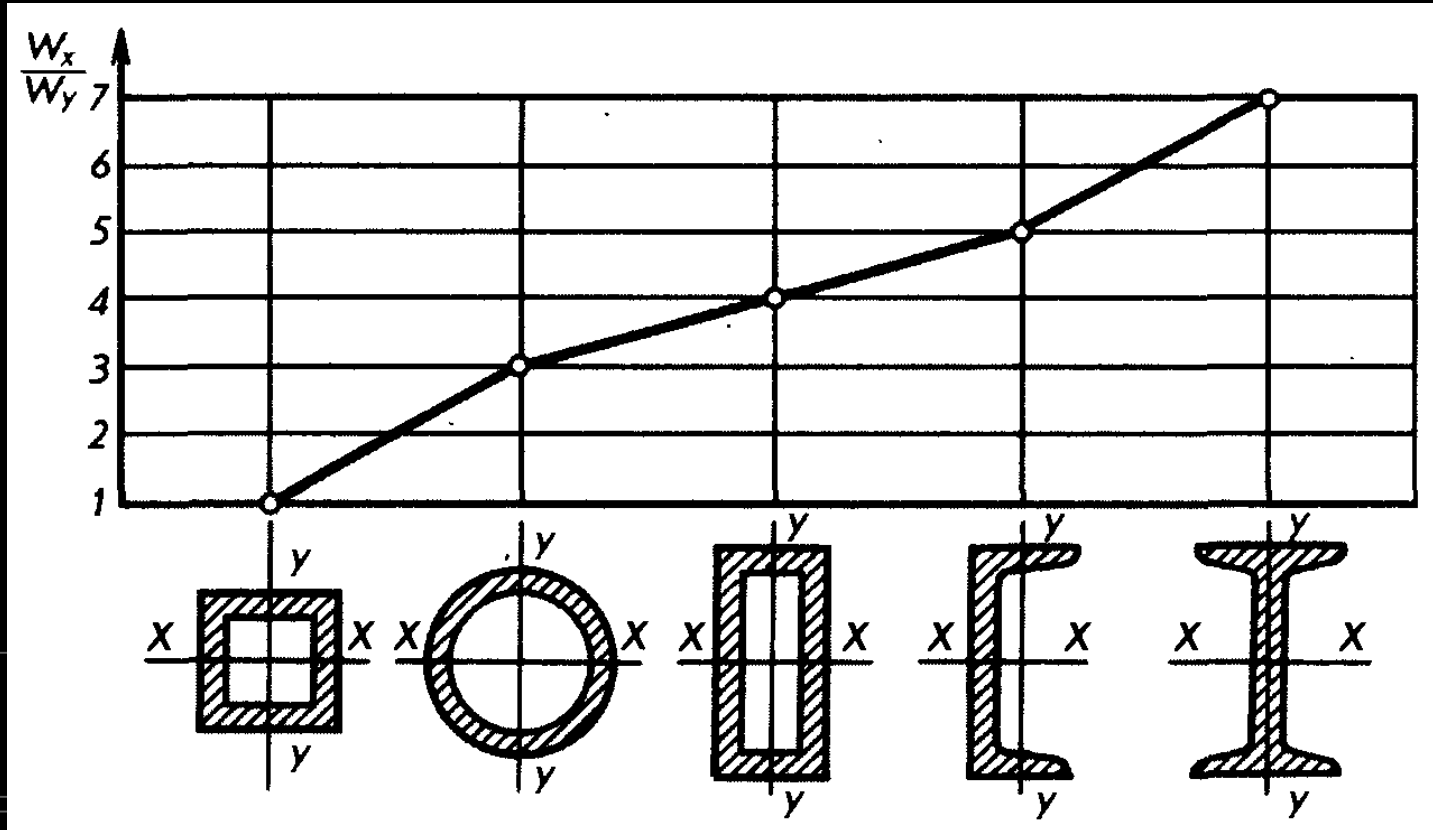
$$I_y = \frac{BH^3 + bh^3}{12} - (BH + bh) e_1^2$$

$$B = B_1 + B_2, \quad b = b_1 + b_2$$

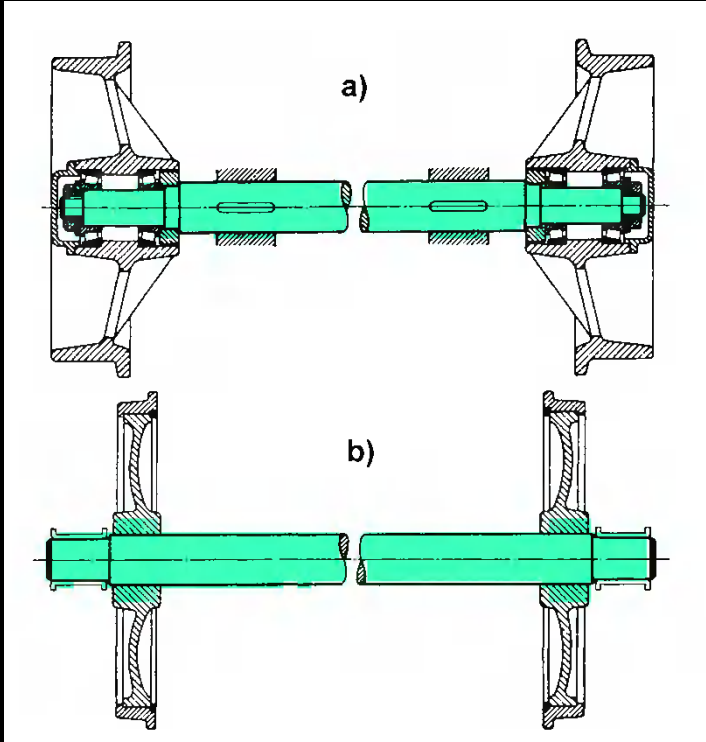
$$W_{y1,2} = I_y / e_{1,2}$$

$$e_1 = \frac{1}{2} \frac{BH^2 + bh^2}{BH + bh} \quad \text{für} \quad e_2 = H - e_1$$

Profillerin eğilme rijitliği

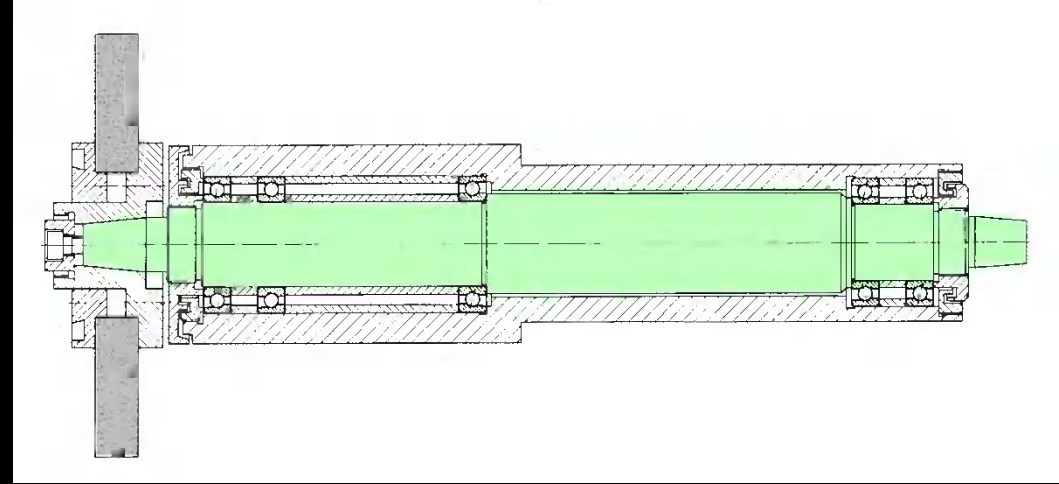


Eğilmeye zorlanan bazı makina elemanları

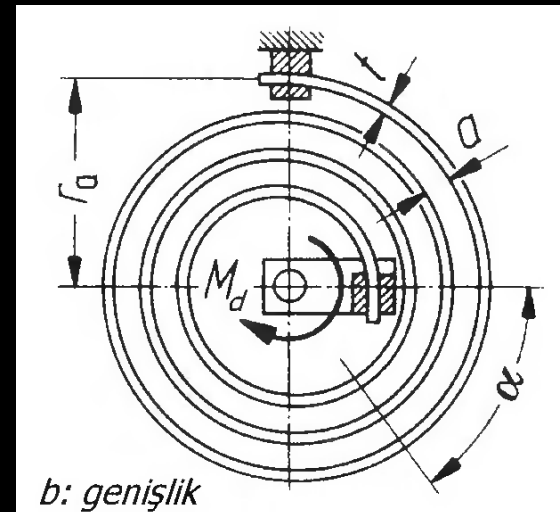


Akslar

Spiral yaylar



Miller



Burulma

Sistem

Açısal dönme

Burulma-açısal dönme ilişkisi

Segment

Burulma

Burulma-birim uzama ilişkisi

Eleman

Kayma deformasyonu

Sistem

Dış moment

İç ve dış moment ilişkisi

Moment-burulma ilişkisi

Moment-gerilme ilişkisi

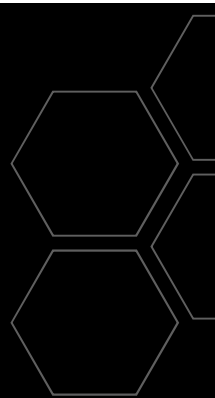
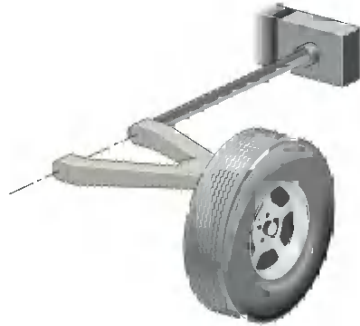
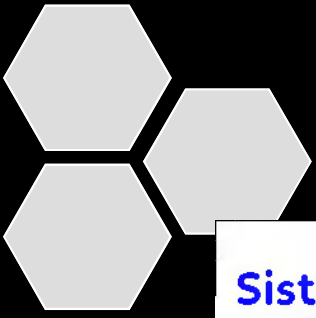
Gerilme-uzama ilişkisi

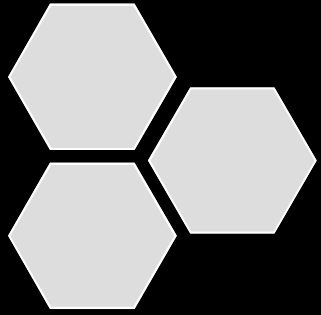
Segment

İç moment

Eleman

Kayma gerilmesi

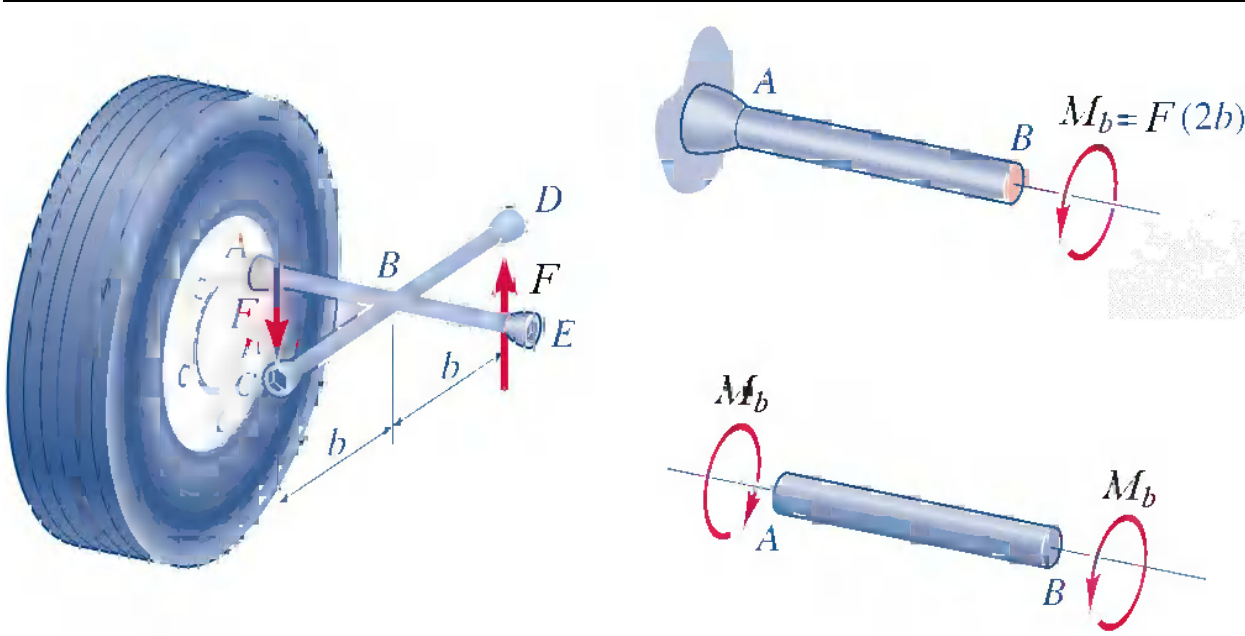




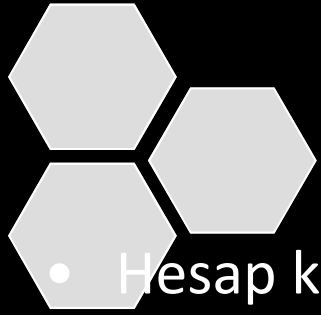
Burulma

- Genellikle güç aktaran makina sistemlerinde karşılaşılan ve teğetsel gerilmelere neden olan zorlanmadır.

$$\tau_b = \frac{M_b}{I_p} \cdot r$$



M_b ; burulma momenti
 I_p ; polar atalet momenti,
 r : tarafsız eksene olan
mesafe

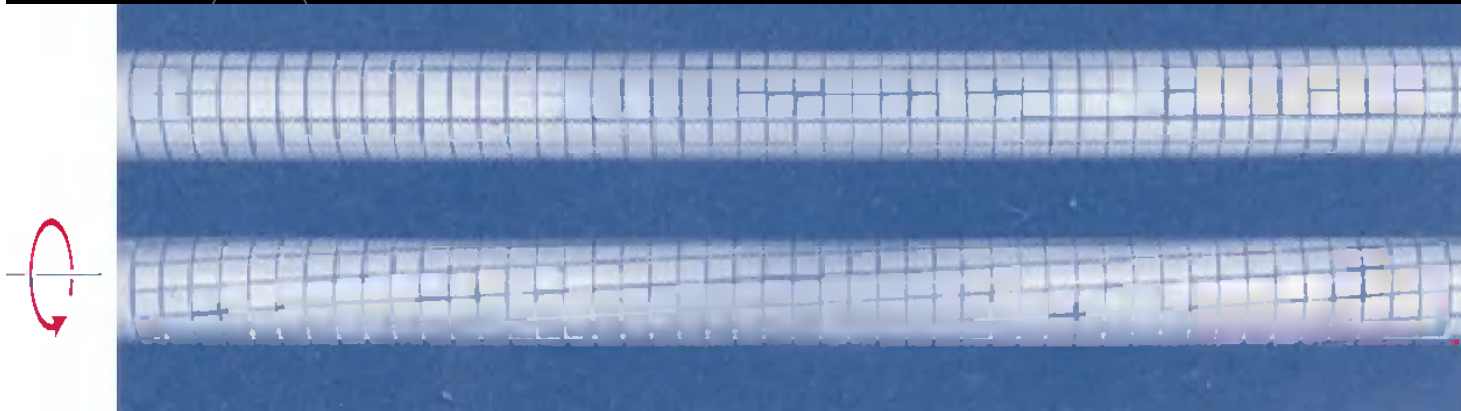
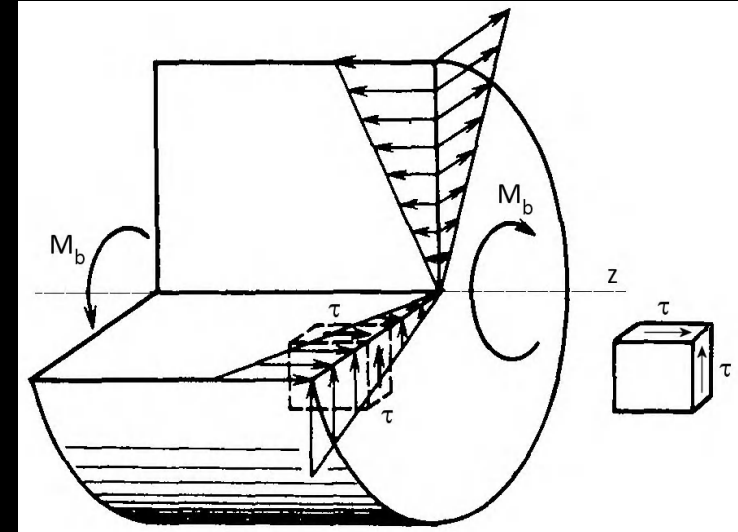


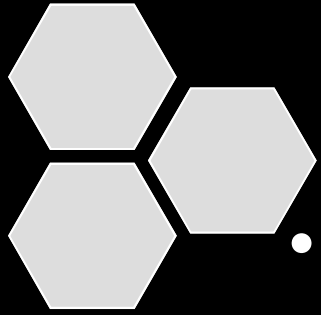
Burulma

- Hesap kolaylığı açısından bazı hallerde polar atalet momenti ile tarafsız eksene olan mesafe birlikte düzenlenerek denklem basitleştirilebilir. Bu durumda burulma gerilmesi

$$\tau_b = \frac{M_b}{W_p}$$

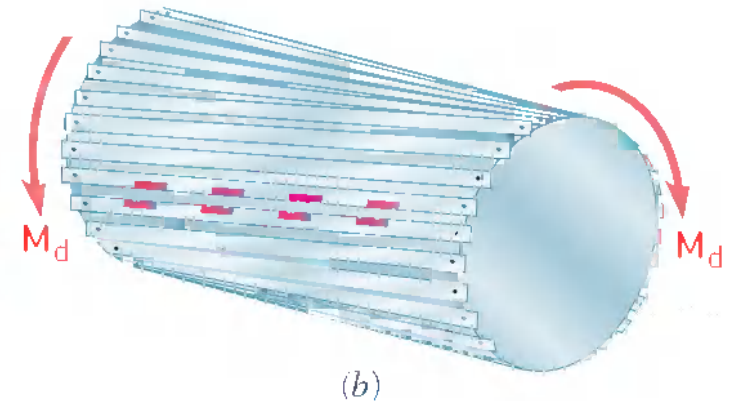
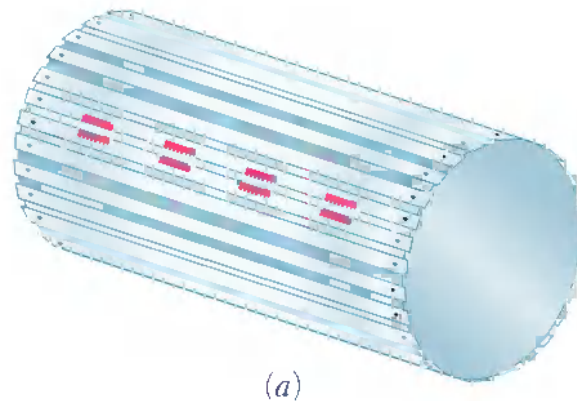
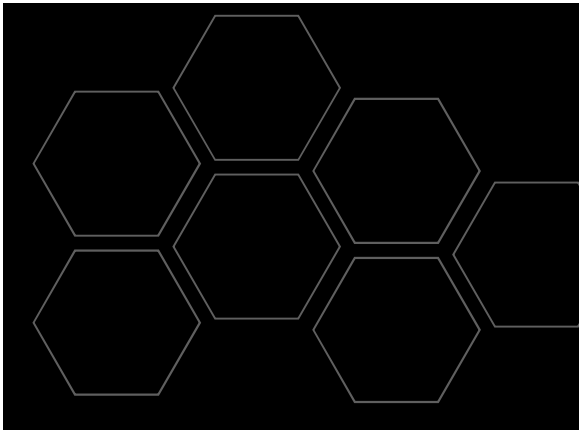
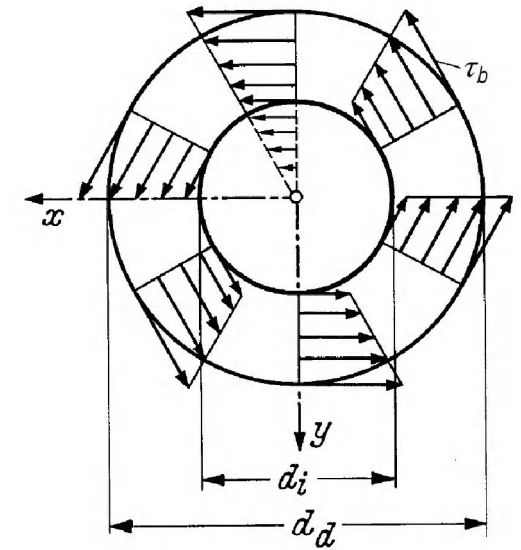
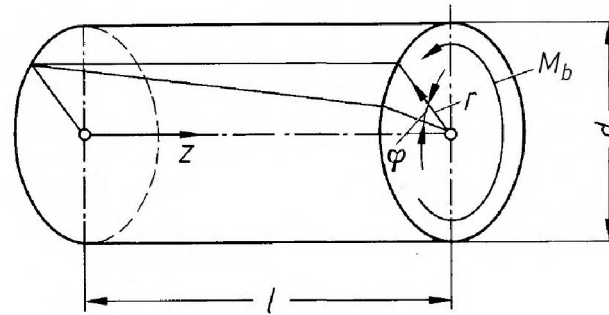
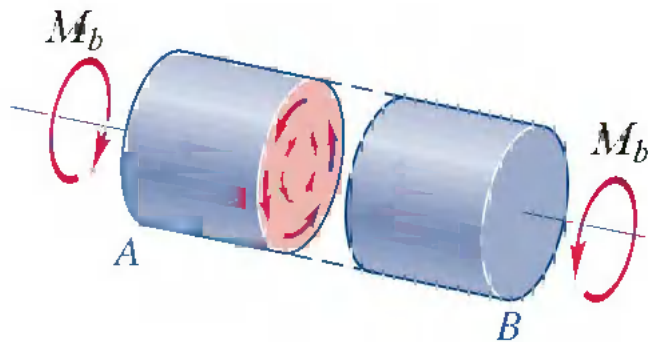
şeklinde yazılır. Burada $W_p = I_p / r$ dir ve **polar mukavemet momenti** olarak isimlendirilir.



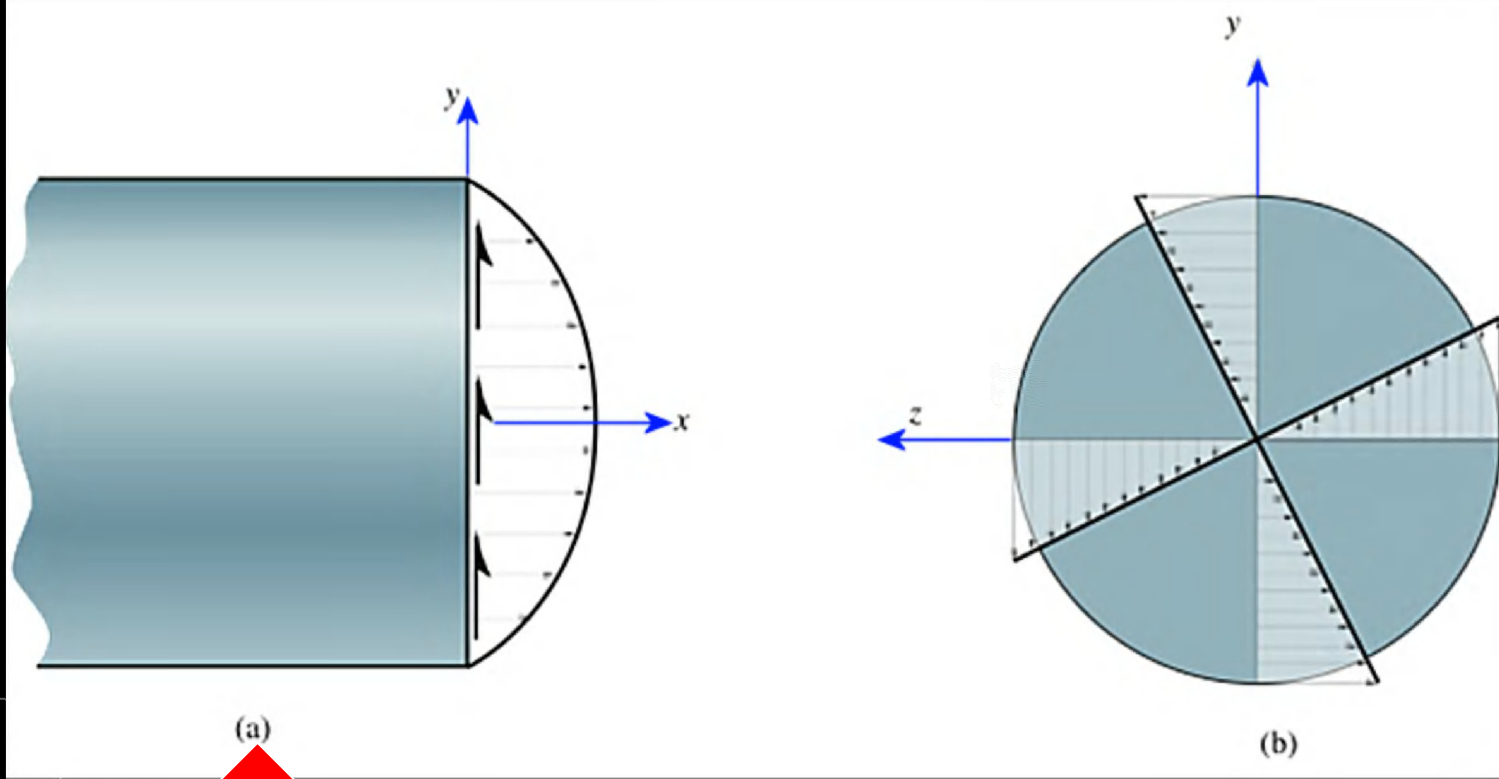


Burulma

- Burulmadan kaynaklanan teğetsel gerilmenin kesit içindeki değişimi eğilme gerilmesine çok benzerdir.



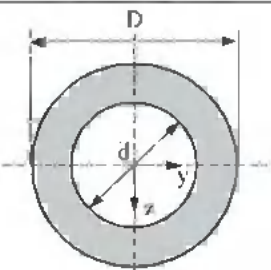
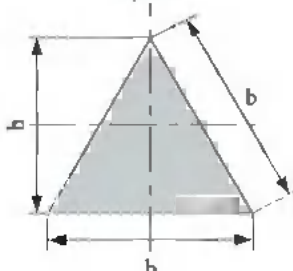
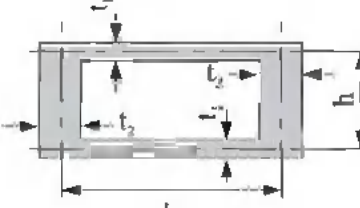
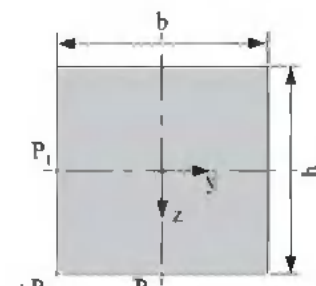
Kayma gerilmesinin kesitteki dağılımı

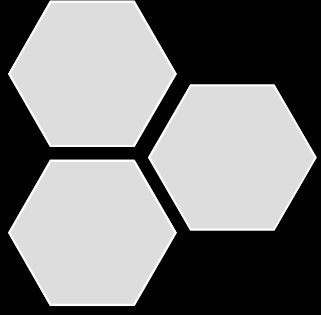


Düşey bir kesme kuvveti nedeni
ile oluşan kayma gerilmesi

Burulma momentinden
kaynaklanan kayma gerilmesi

Polar atalet ve mukavemet momentleri

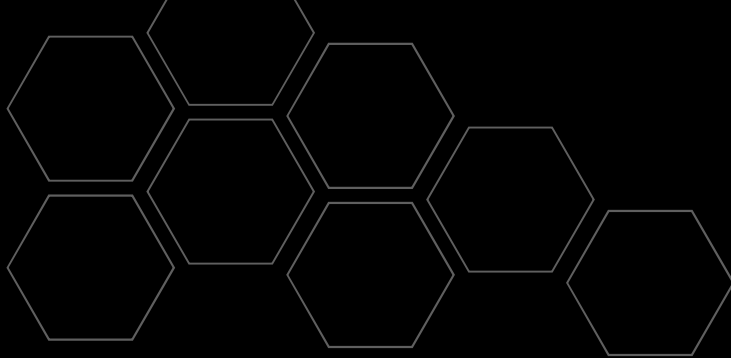
Kesit	Polar atalet momenti ^a	Polar mukavemet momenti
	$I_P = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$	$W_P = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{16 \cdot D}$
	$I_P = \frac{b^4}{46,19} \approx \frac{h^4}{26}$	$W_P = \frac{b^3}{20} \approx \frac{h^3}{13}$
	$I_P = \frac{4 \cdot (b \cdot h)^2}{2(b/t_1 + h/t_2)}$	$W_P = 2 \cdot h \cdot b \cdot t_{\min}$
	$I_P = c_1 \cdot h \cdot b^3 = c_1 \cdot n \cdot b^4$	$W_P = \frac{c_1}{c_2} \cdot h \cdot b^2 = \frac{c_1}{c_2} \cdot n \cdot b^3$



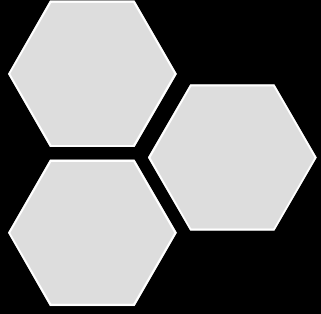
Burulmaya zorlanan bazı makina elemanları



Şaftlar

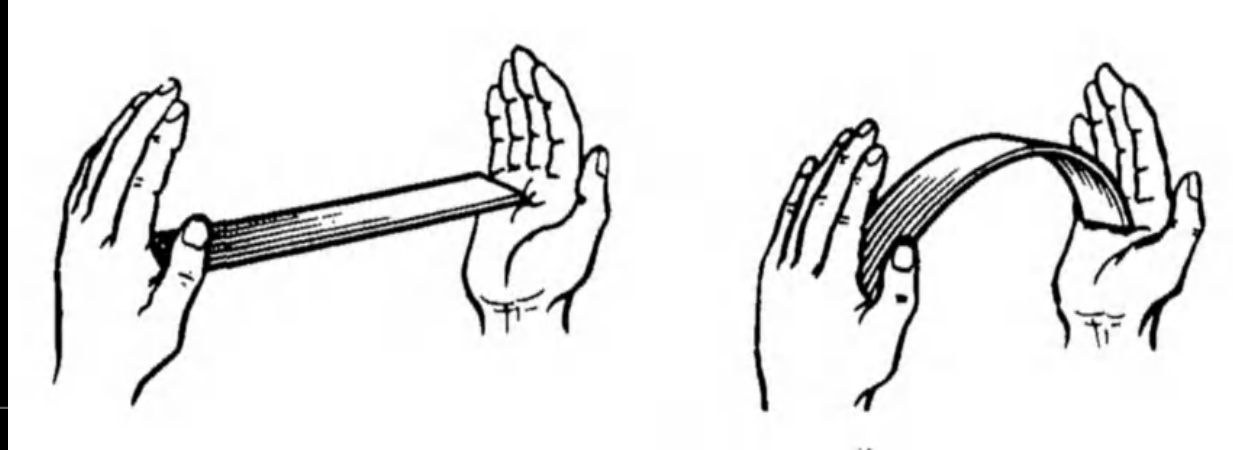


Helisel yaylar



Burkulma

- Esas olarak bir stabilite problemidir.
- Düşey bir kolonun üzerindeki bası yükü ilave olarak çok az arttırıldığında ani olarak gösterdiği büyük yanal deformasyondur.

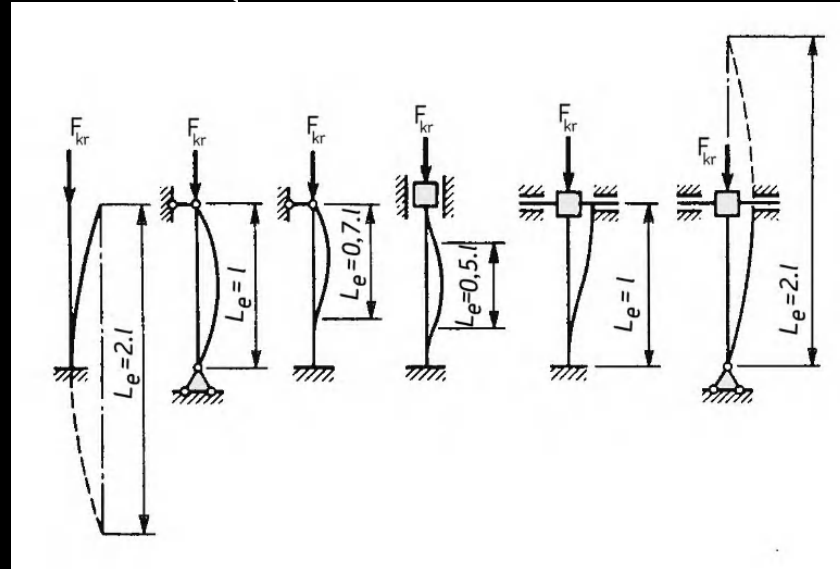


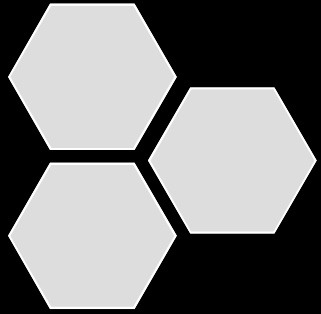
Burkulma

• Basma yükü altındaki düşey bir kolonun, burkulma olmaksızın destekleyebileceği eksenel yükün, aşağıda verilen kritik yükten daha az olması gerekir.

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L_e^2}$$

Burada E ; kolon malzemesinin elastiklik modülü, I ; kesitin alan atalet momenti ve L_e ise kuvvet istikametindeki eşdeğer boydur.





Burkulma

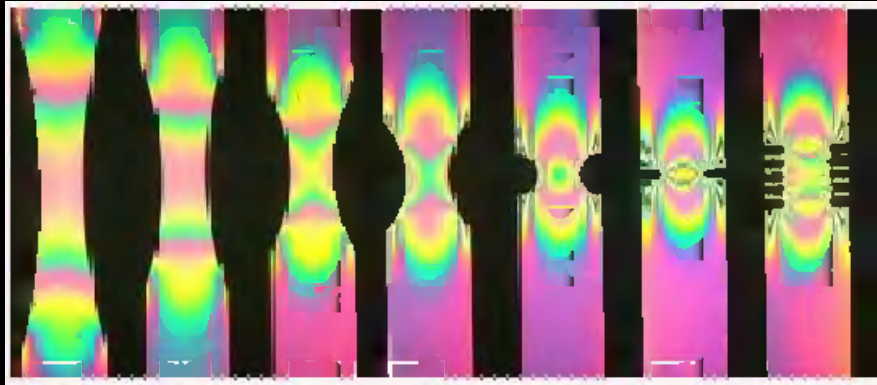
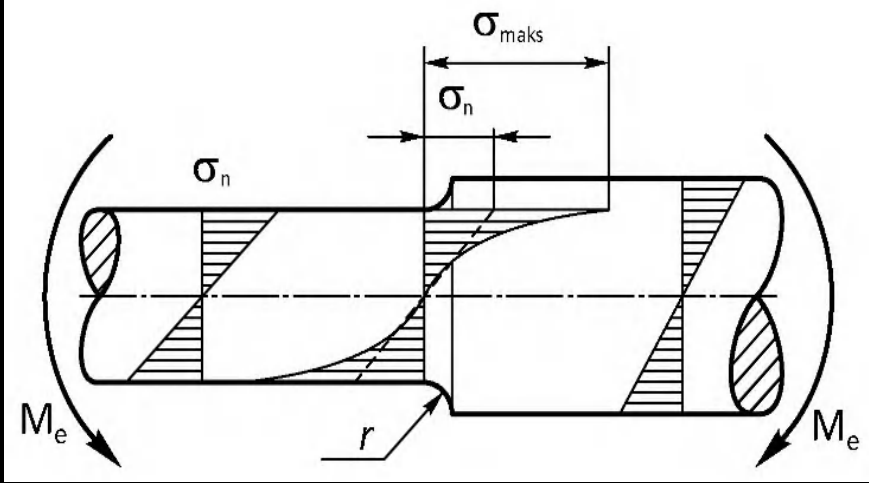
- Kritik yük bağıntısından elde edilen değer, ancak burkulmadaki gerilme orantı sınırının altında ise fiziksel olarak anlamlıdır. Burkulma deformasyonu öncesi kolondaki basma gerilmesi kritik yük bağıntısında $l=A.r^2$ koyarak elde edilebilir. Burada, A; kolonun kesiti, r ise kesitin en küçük jirasyon yarıçapıdır. Denklem tekrar düzenlenirse;

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(L_e/r\right)^2}$$

Bu denklemdeki L_e/r oranına **narinlik derecesi** adı verilir. Bu açıklamalar ışığında, bir kolonda önceki slayttaki bağıntı ile hesaplanan kritik yük değeri, ancak kritik gerilme (σ_{kr}), o malzemenin orantı sınırının altında ise kullanılabilir bir veridir.

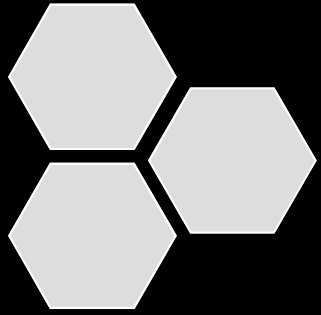


Gerilme yığılması



- Kuvvet hatlarının yön değiştirmesi, o bölgedeki gerilmenin artmasına neden olur.
- Bu artış statik yükleme halinde sünek malzemelerde pek dikkate alınmaz. Ancak, gevrek malzemelerde yükleme statik olsa bile gerilme yığılmasının dikkate alınması gerekir.
- Dinamik yükleme halinde gerilme yığılması bütün malzemelerde dikkate alınır.
- Kuvvet hatları ne kadar keskin yön değiştirirse, gerilme yığılması o kadar büyük olur.

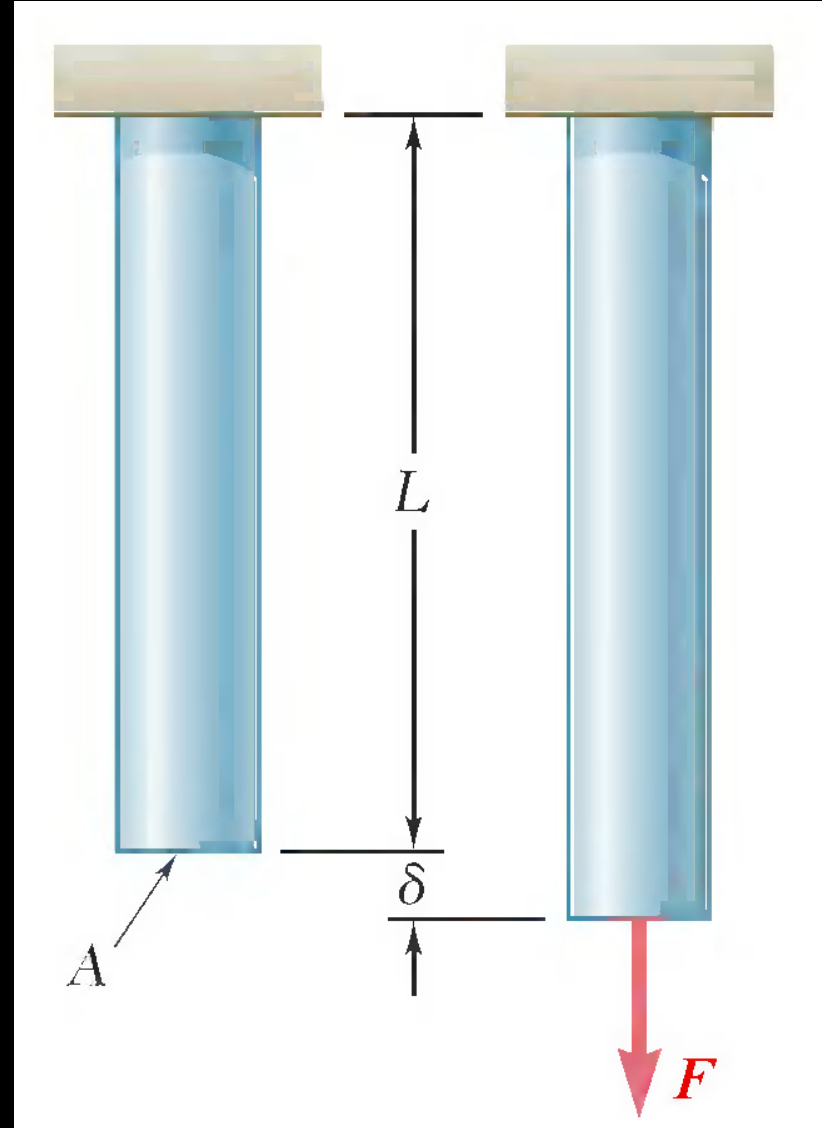
Ayrıntılı bilgi için bkz: Miller ve akslar

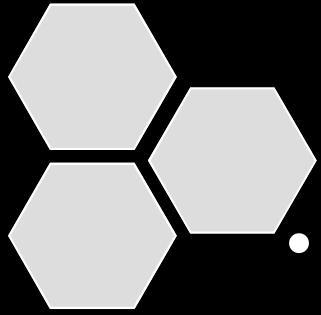


Şekil deęiřtirmeler

- Gerilme altındaki uzamanın ilk boya oranı birim uzama olarak tariflenir.

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$



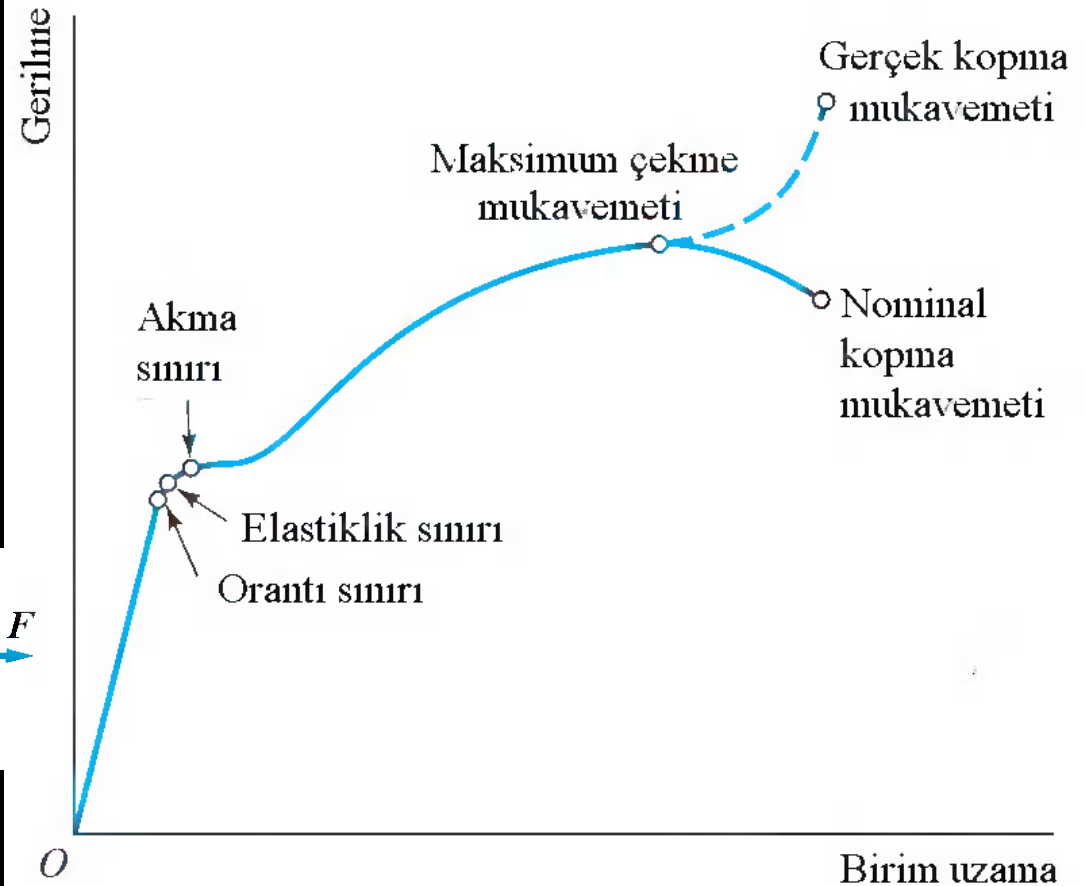
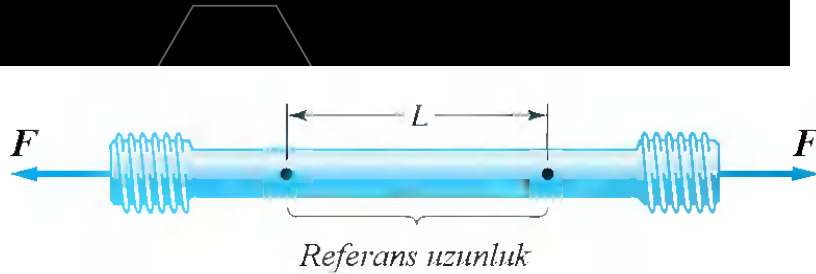


Çekme testi

- Standart bir parçaya, bir çekme makinasında hasar oluşana kadar eksenel kuvvet uygulanır. Test sırasında hem kuvvet, hem de uzama sürekli olarak ölçülür.

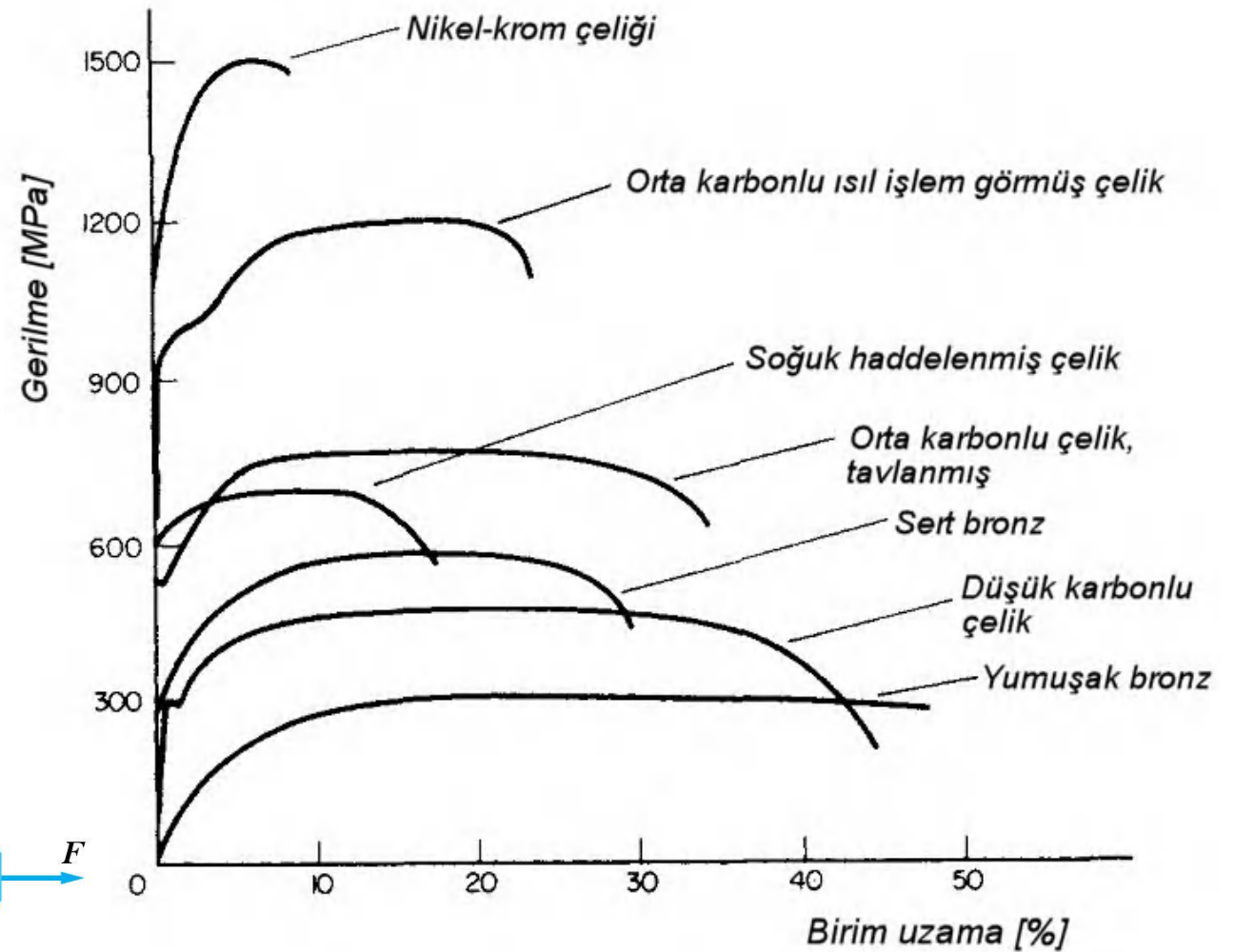
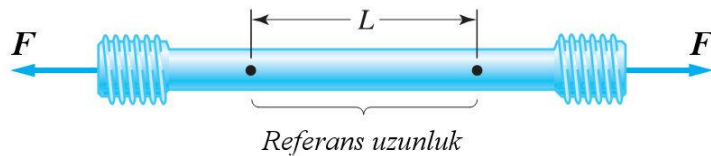
Orantı sınırı içinde gerilme uzama ile orantılıdır. Orantı sabiti **Elastiklik modülü** olarak adlandırılır. (Hooke kanunu)

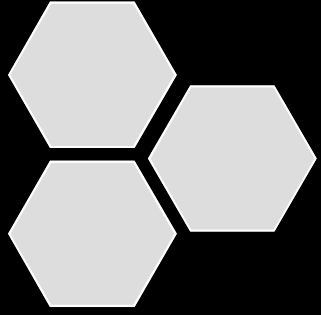
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$



Çekme testi

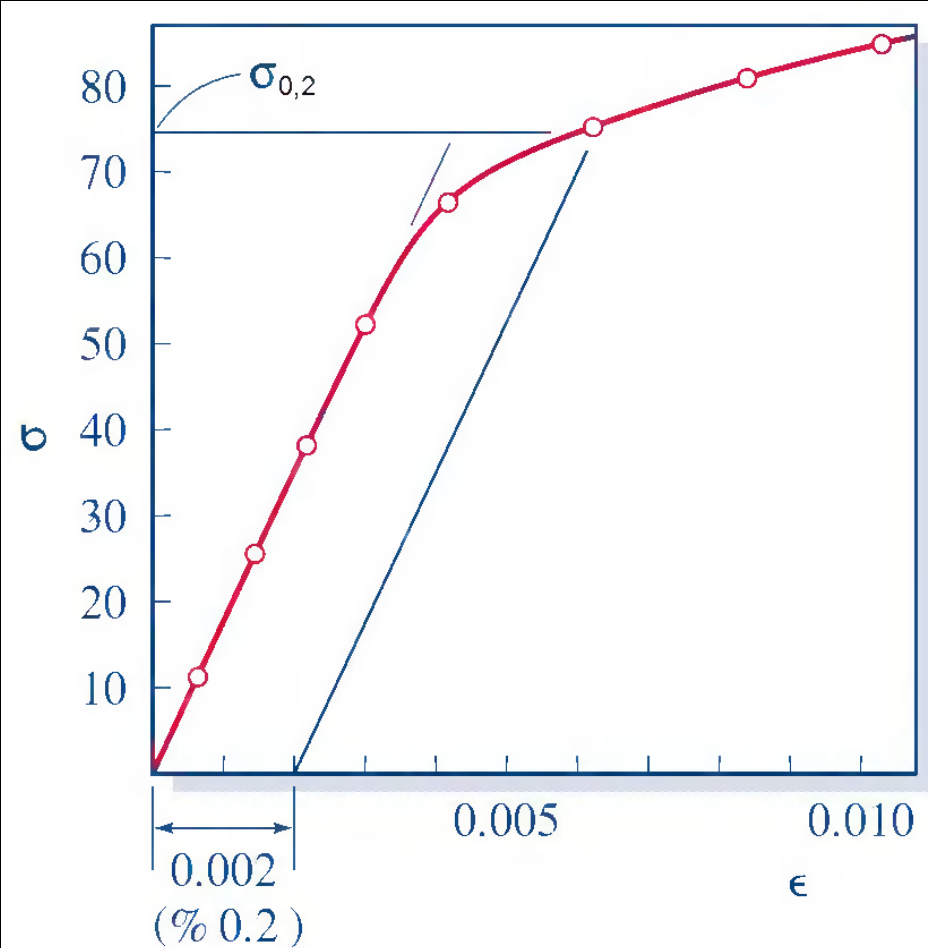
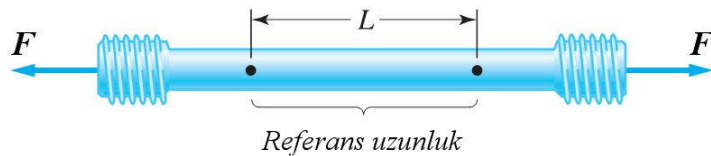
- Çekme testi sonuçları malzeme davranışı hakkında en güvenilir kaynaktır ve pek çok malzeme için ilgili literatürde mevcuttur.

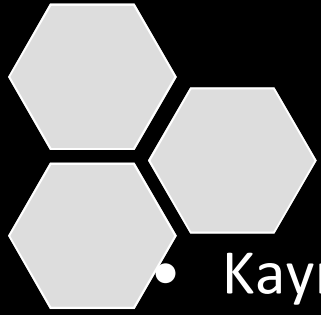




Çekme testi

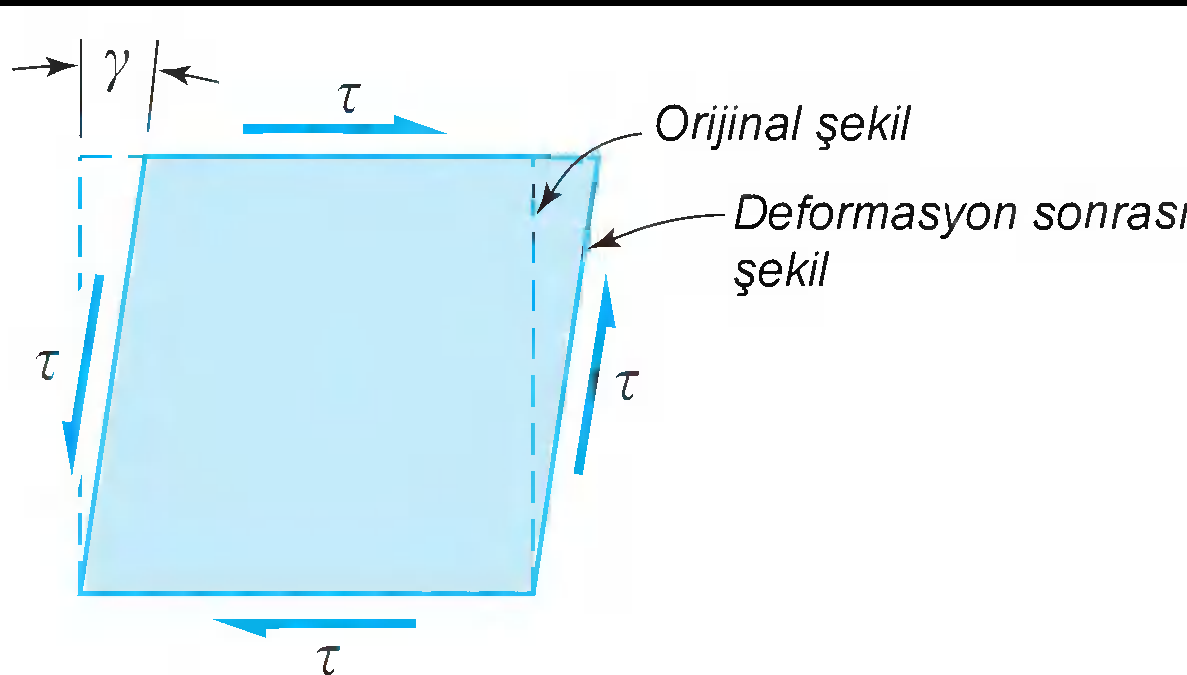
- Bazı malzemeler, belirgin bir akma göstermeden hasara uğramaktadır. Bu tür malzemelerde ise %0,2 kalıcı deformasyona neden olan gerilme, **teknik akma sınırı** olarak ifade edilir.





Kayma deformasyonu

- Kayma gerilmelerinin etkisinde oluşan deformasyon normal gerilmeler etkisinde olduğundan farklıdır. Bu deformasyon, elemanlarda bir biçim değişimine sebep olur. Normal gerilmeler ise elemanların formunda bir değişikliğe neden olmazlar (örn. daireler yine daire kalırlar).
- Yeni durumda Hooke kanunu aşağıdaki şekilde yazılır:



$$\tau = G \cdot \gamma$$

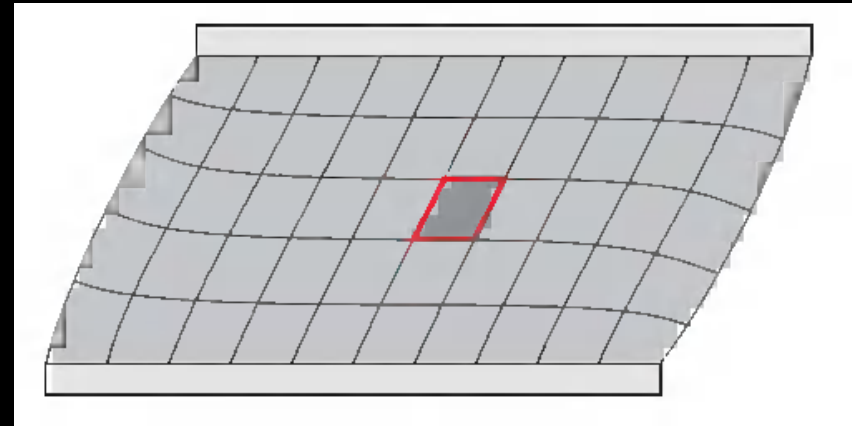
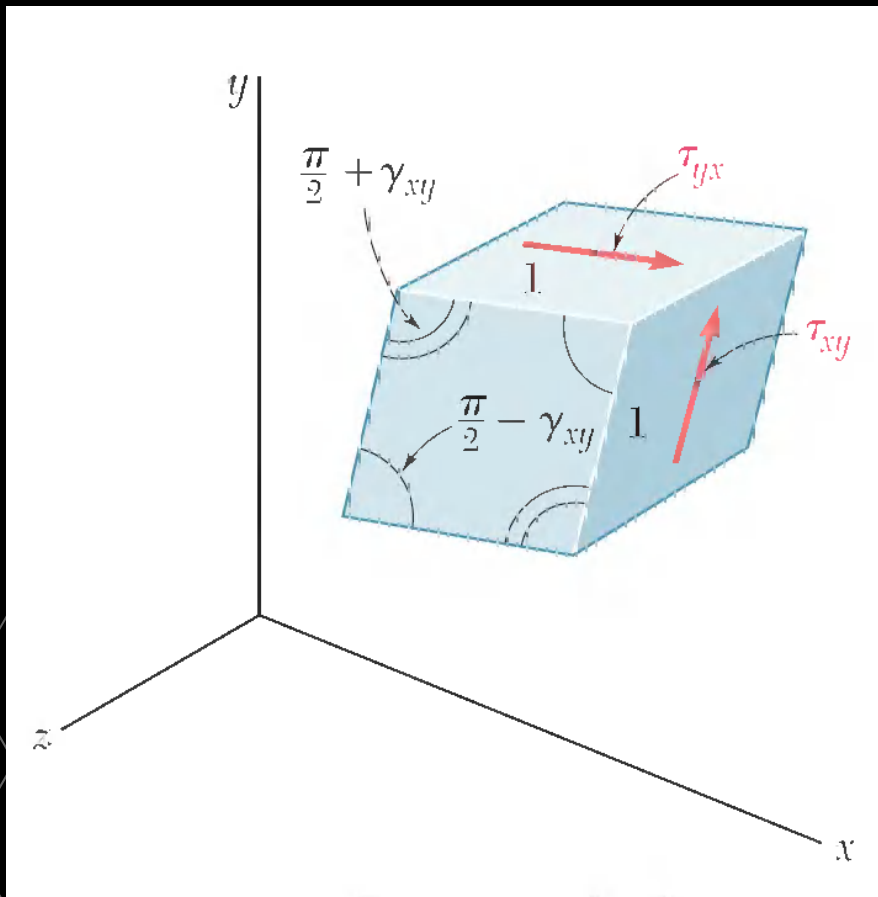
Kayma
modülü





Kayma deformasyonu

- Bir kübik hacim elemanında kayma gerilmeleri etkisinde oluşan deformasyon.





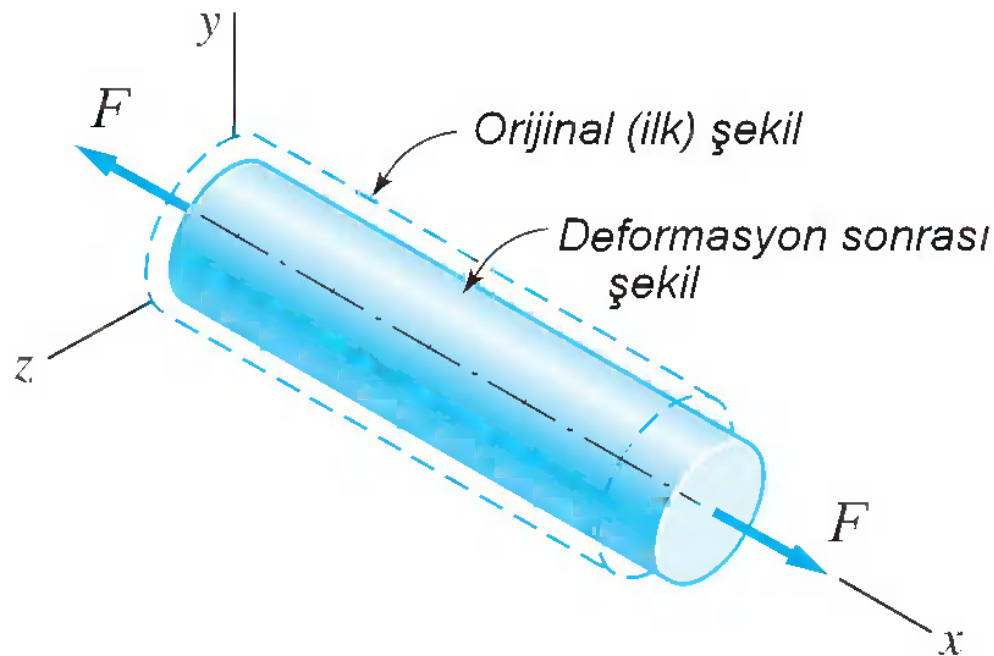
Poisson oranı

- Basitçe çekme testinde tarif edilirse, enlemesine birim uzamanın, boylamasına birim uzamaya oranıdır.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_x}$$

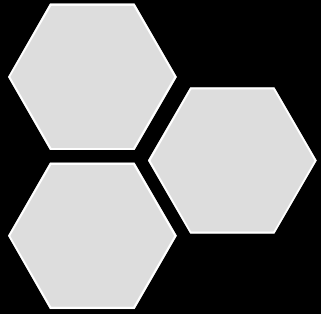


$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L} \text{ ve } \varepsilon_t = -\frac{\Delta d}{d}$$



Elastiklik modülü ile kayma modülü arasındaki ilişki

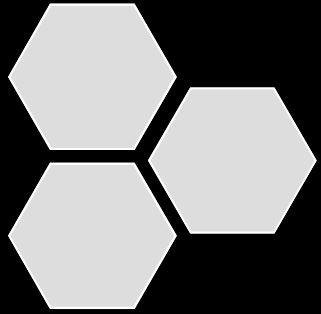
$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$



Gerilme halleri

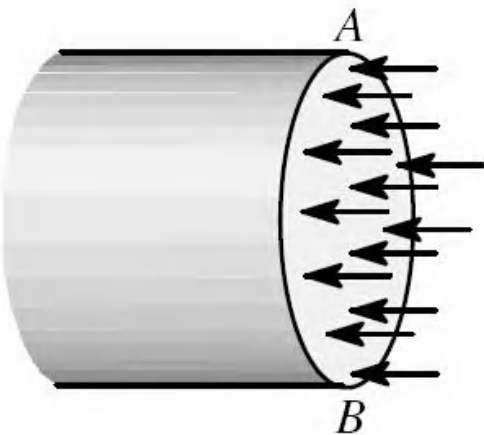
- Makina elemanları pek çok halde birden fazla zorlanma ve bunun sonucu gerilmeye maruz kalır. Bu tür gerilme hallerinde, iki veya üç eksenli gerilme durumu söz konusu olup, bunlar **bileşik gerilme** olarak adlandırılır.
- Bileşik gerilmelerin hesabında **süperpozisyon prensibi** esas alınır. Yani elemanda meydana gelen gerilmeler ayrı ayrı hesaplanarak doğrudan veya mukavemet hipotezleriyle birleştirilir.



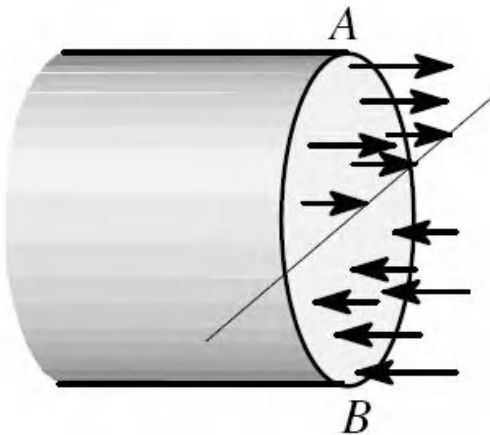


Gerilme halleri

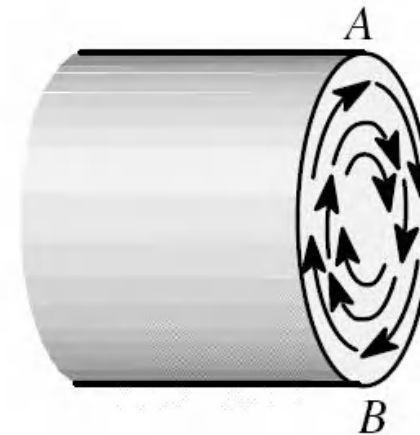
- Örnek olarak, aşağıdaki makina elemanı hem basmaya, hem eğilmeye hem de burulmaya zorlanmaktadır.



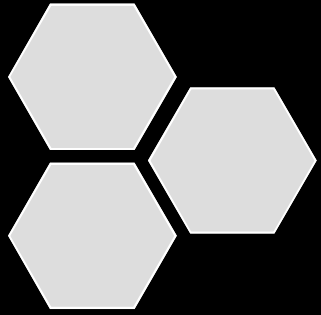
$$\sigma_b = -\frac{F}{A}$$



$$\sigma_e = \frac{M_e}{I_x} y$$

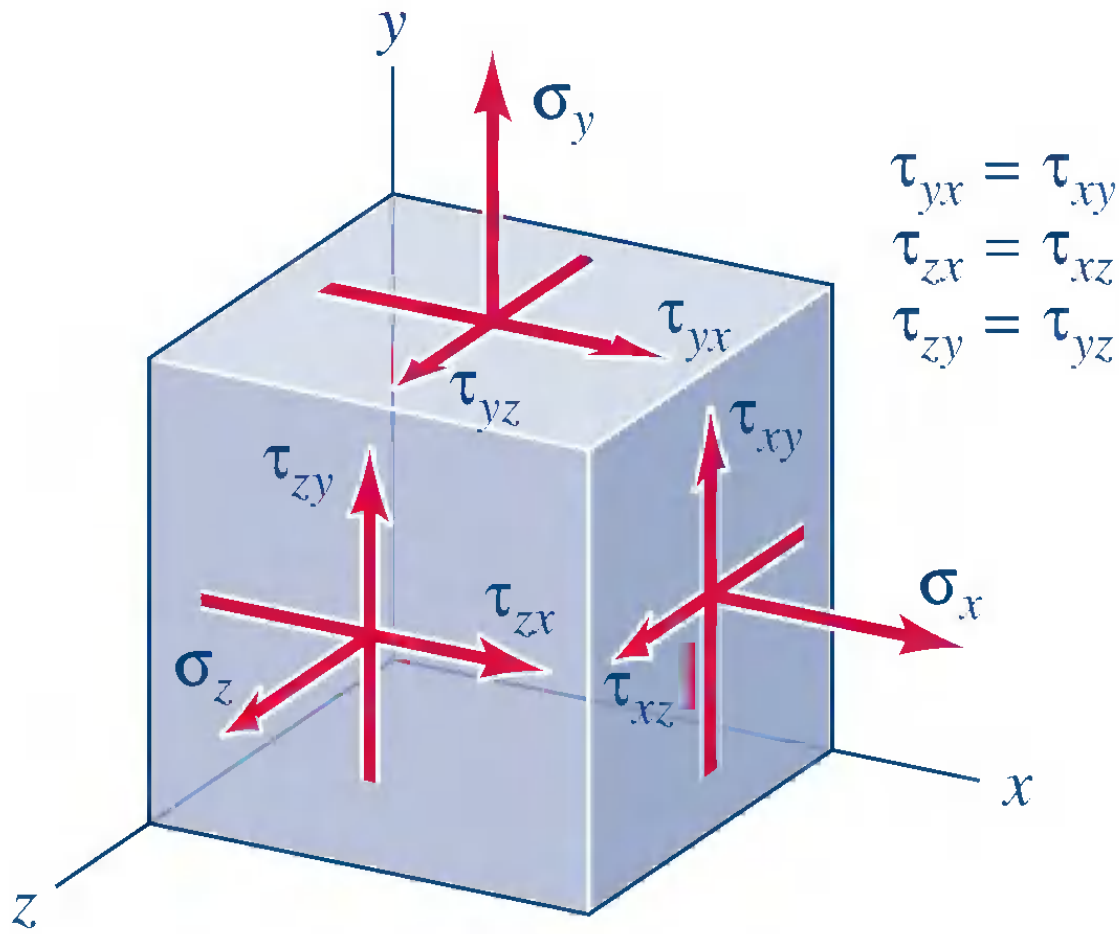


$$\tau_b = \frac{M_b}{I_p} r$$



3 eksenli gerilme hali

Karşılaşılabilecek en genel haldir.



İndislerin düzenlenmesi
Teğetsel gerilmelerde;

İndisteki ilk sembol gerilmenin
dik olduğu eksen

İkinci sembol ise gerilmenin
paralel olduğu eksen gösterir.

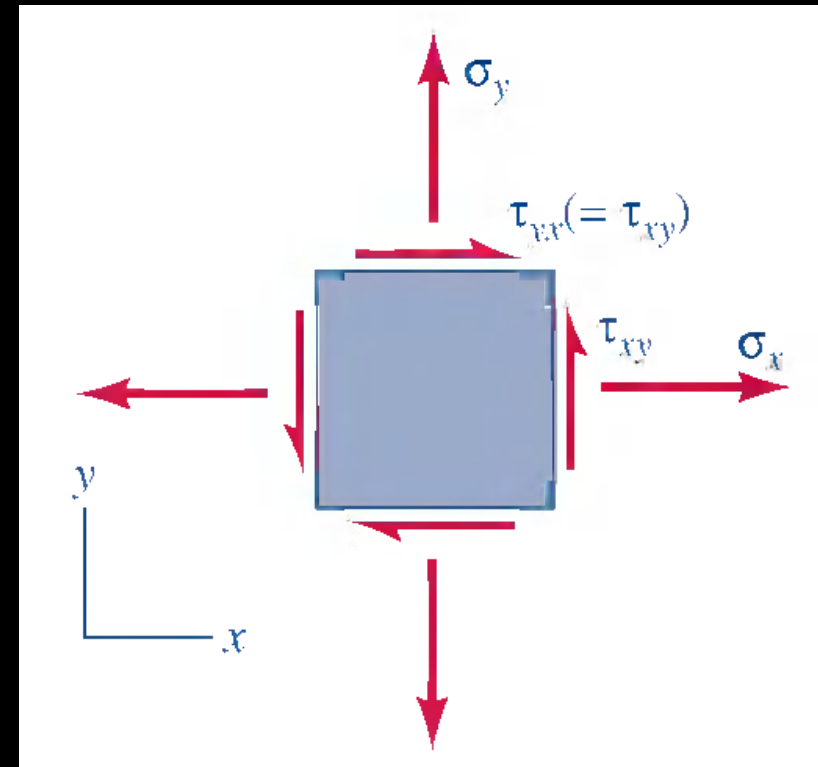
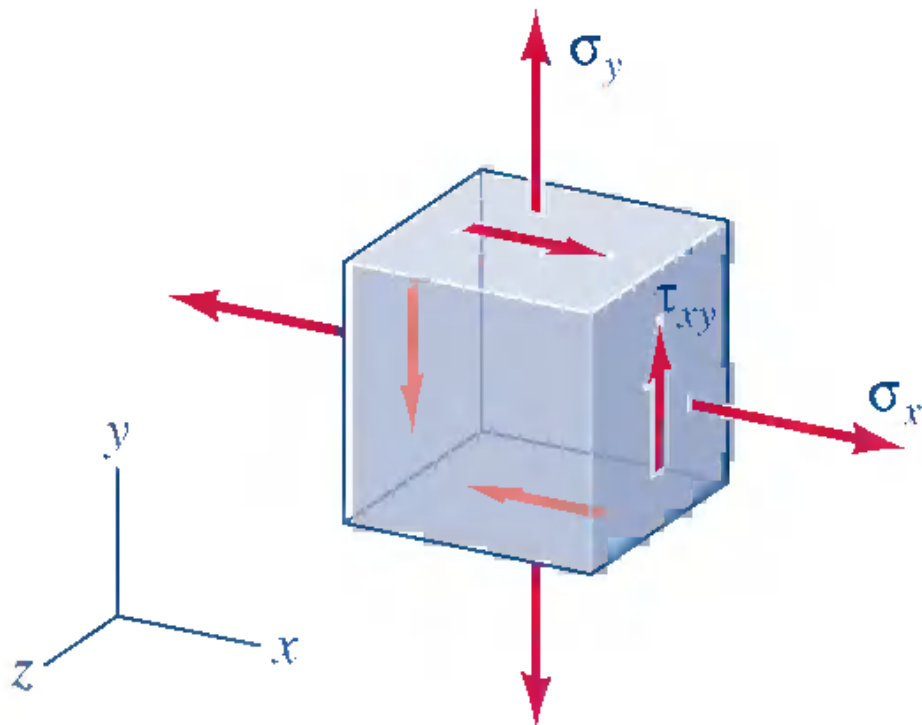
Pozitif ve negatif işaret kuralı
geçerlidir.





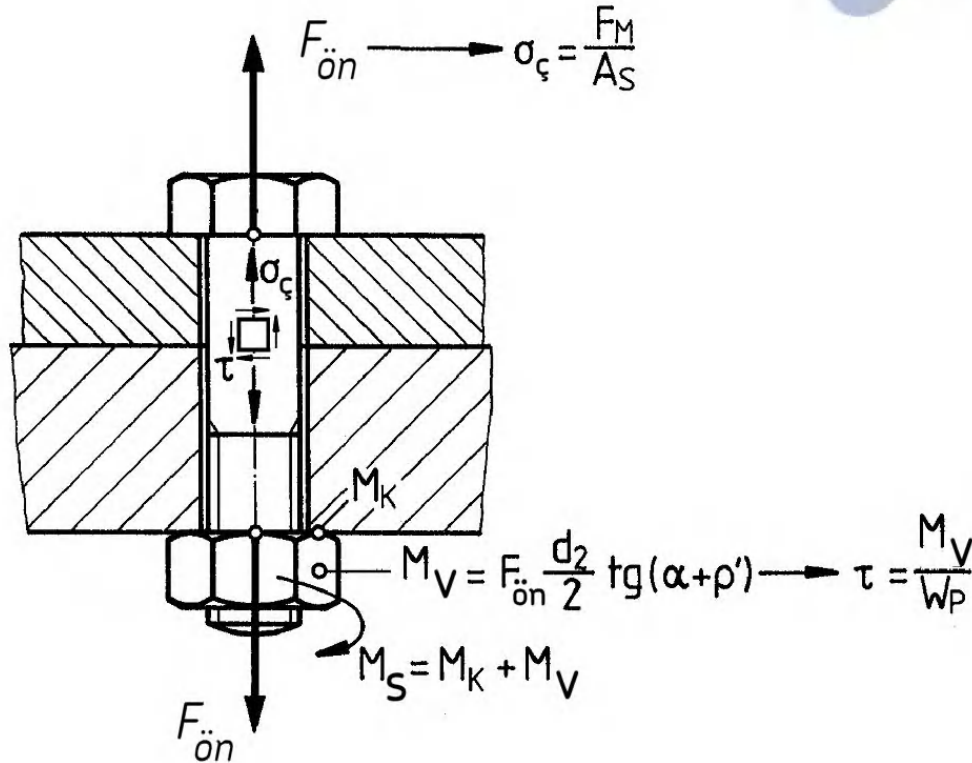
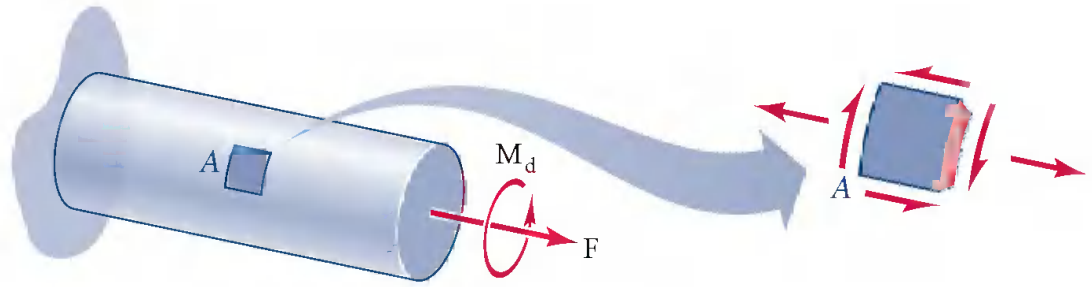
Düzlem gerilme hali

Makina konstrüksiyonunda 3 eksenli gerilme hallerine ender olarak rastlanır. Genelde karşılaşılan gerilme hali normal gerilmelerden birinin olmadığı **düzlem gerilme** halidir.



Düzlem gerilme hali

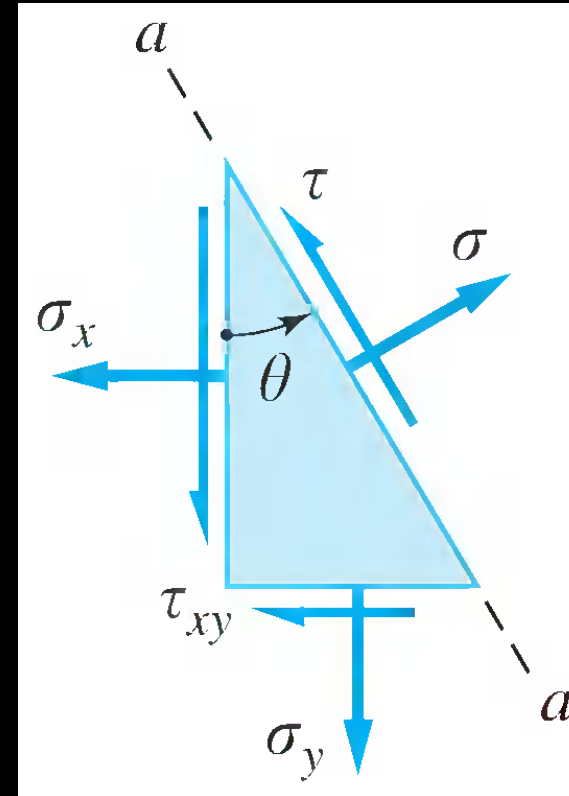
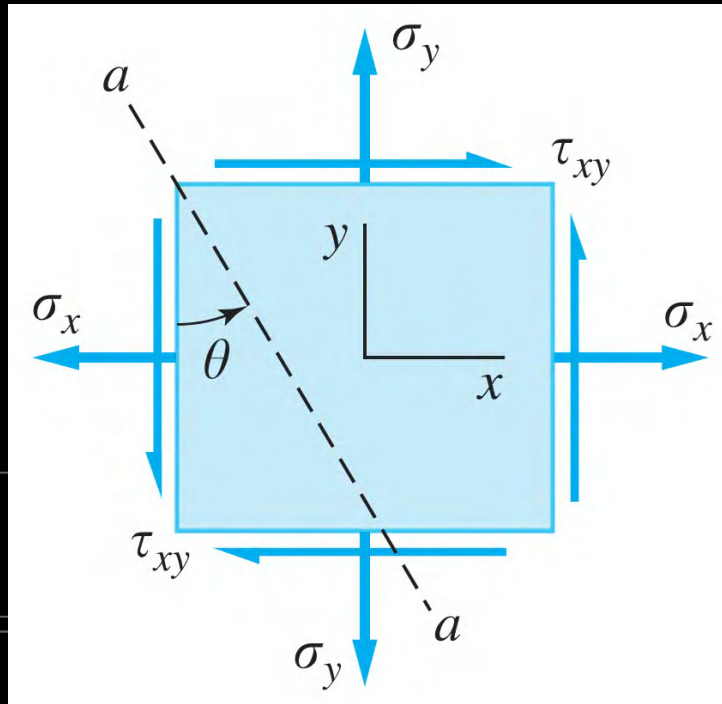
- **Örnek:** Çekmeye ve burulmaya maruz bir kirişte aşağıda gösterilen gerilmeler meydana gelir. **Cıvata bağlantıları gibi.**





Düzlem gerilme hali

Düzlem gerilmeye maruz eleman bir θ açısı ile kesilsin (şekilde **a-a** doğrusu). Bu takdirde oluşan teğetsel ve normal iç gerilmeler sırası ile σ ve τ ile temsil edilsin.



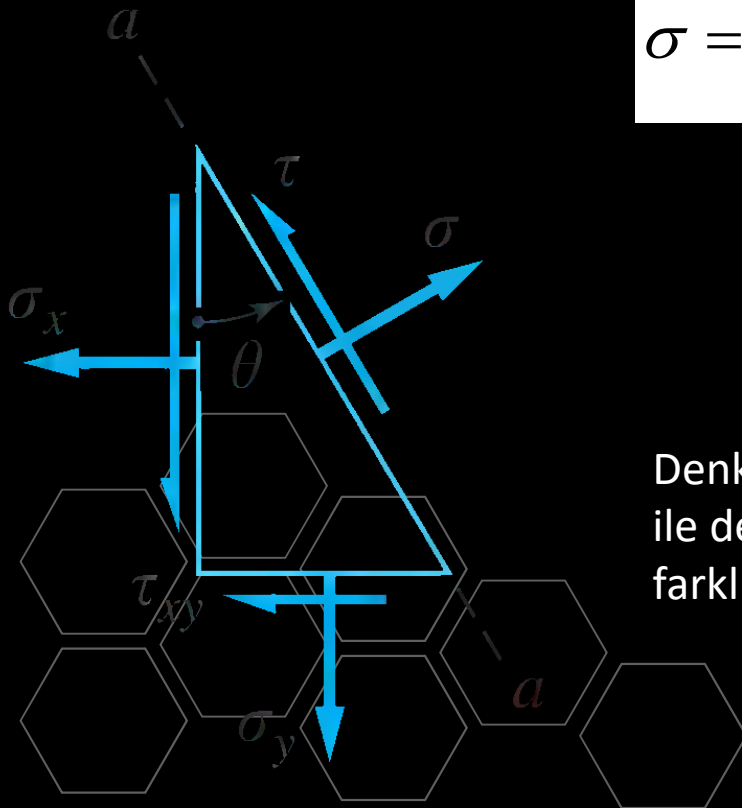


Düzlem gerilme hali

Şekilde birim alan kabulü ile, σ ve τ doğrultularındaki denge denklemleri yazılıp, bunlar düzenlenirse, dış yükler sonucu malzemede oluşan gerilmeler elde edilmiş olur.

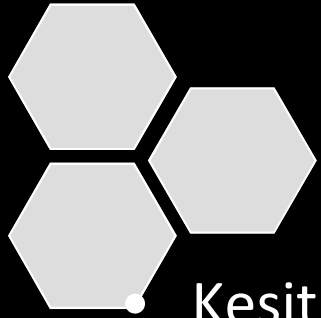
$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta$$

$$\tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta$$



Denklemler malzeme içindeki gerilmelerin θ açısı ile değiştiğini göstermektedir. Farklı doğrultularda farklı değerler söz konusudur.





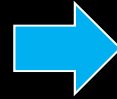
Düzlem gerilme hali

Kesit içindeki maksimum normal gerilme için



$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 0$$

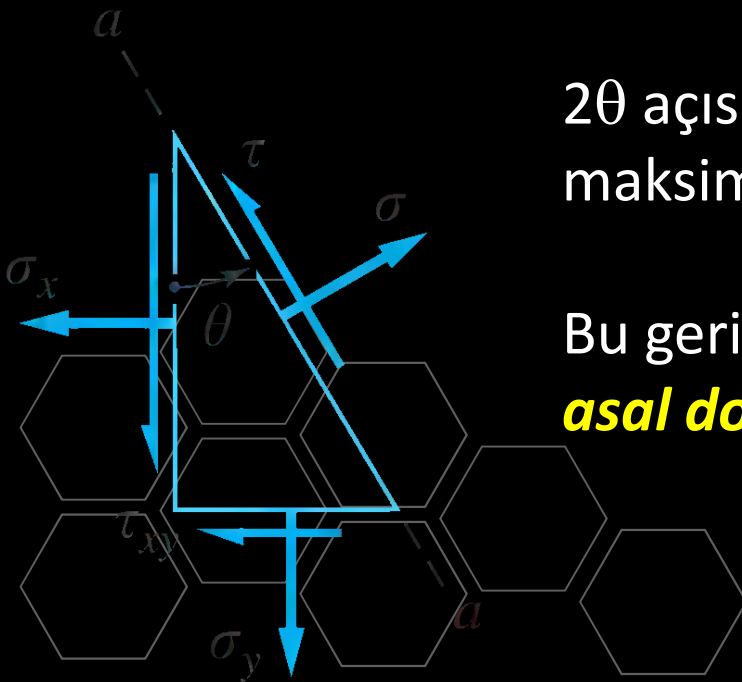
İşlemler yapılırsa normal gerilmenin maksimum olduğu doğrultu

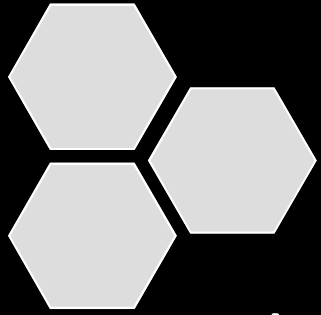


$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

2θ açısının pozitif değerinde normal gerilme maksimum (σ_1) değerinde ise minimumdur (σ_2).

Bu gerilmelere **asal gerilmeler**, bu doğrultulara ise **asal doğrultular** adı verilir.





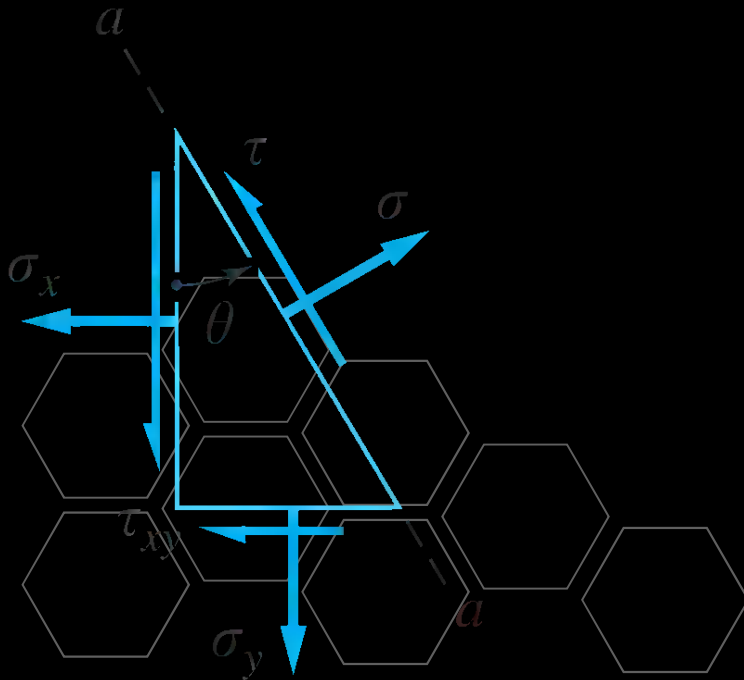
Düzlem gerilme hali

- Aynı işlemler kayma gerilmeleri için de yapılabilir

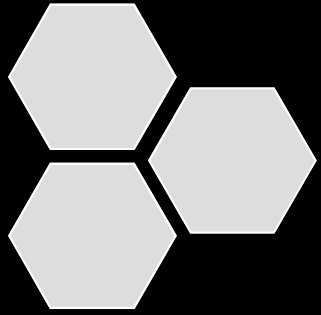


$$\frac{d\tau}{d\theta} = 0$$

İşlemler yapılırsa teğetsel gerilmenin maksimum olduğu doğrultu



$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}}$$



Düzlem gerilme hali

Asal gerilme doğrultusuna ait denklem aşağıdaki formda tekrar yazılırsa;

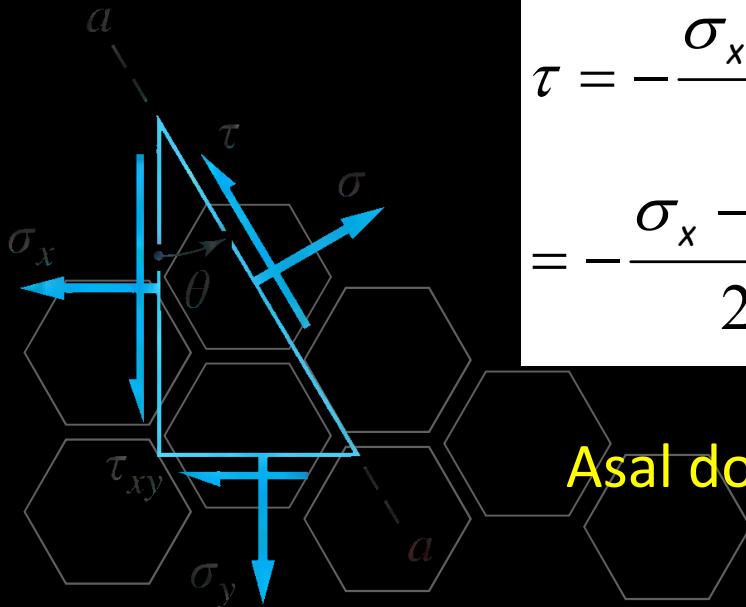
$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



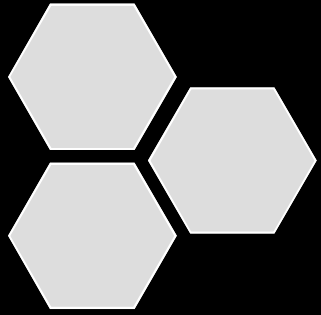
$$\sin 2\theta = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \cdot \cos 2\theta$$

Bu doğrultu kayma gerilmesi denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta \\ &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \cos 2\theta = 0 \end{aligned}$$



Asal doğrultularda kayma gerilmeleri sıfırdır.



Düzlem gerilme hali

Benzer işlemler maksimum kayma gerilmesi için de yapılabilir; Maksimum kayma gerilmesi doğrultusu

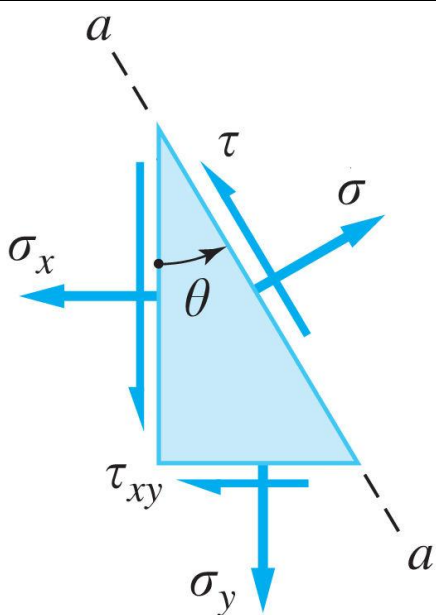
$$\tan 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}}$$



$$\sin 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} \cdot \cos 2\theta$$

Bu doğrultu normal gerilme denkleminde yerine konursa

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \sin 2\theta \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos 2\theta + \tau_{xy} \cdot \left[-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} \cdot \cos 2\theta \right]\end{aligned}$$



Maksimum kayma gerilmesi doğrultusunda normal gerilme:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$



Düzlem gerilme hali

- Bulunan asal eksen doğrultuları  $\tan 2\theta = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$
- normal gerilme denkleminde yerine konarak
- asal gerilmelerin değerleri düzlem gerilme hali için elde edilebilir:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Aynı işlemler kayma gerilmesi için de yapılırsa

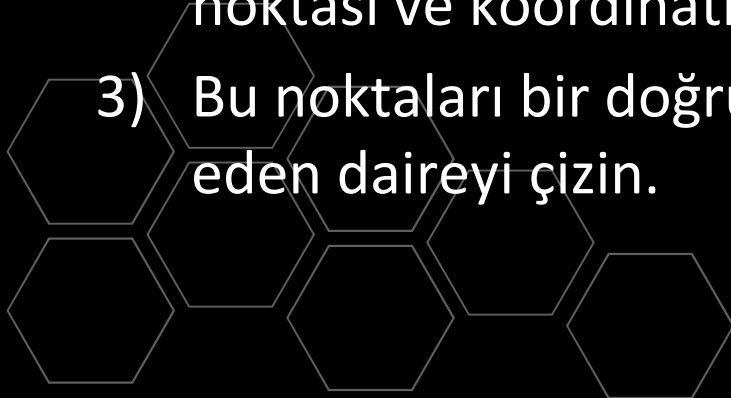
$$\tau_{maks} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

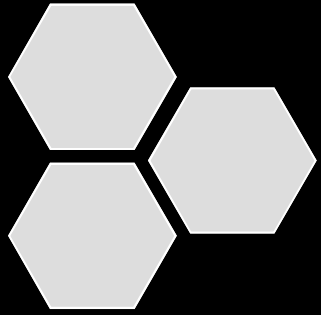




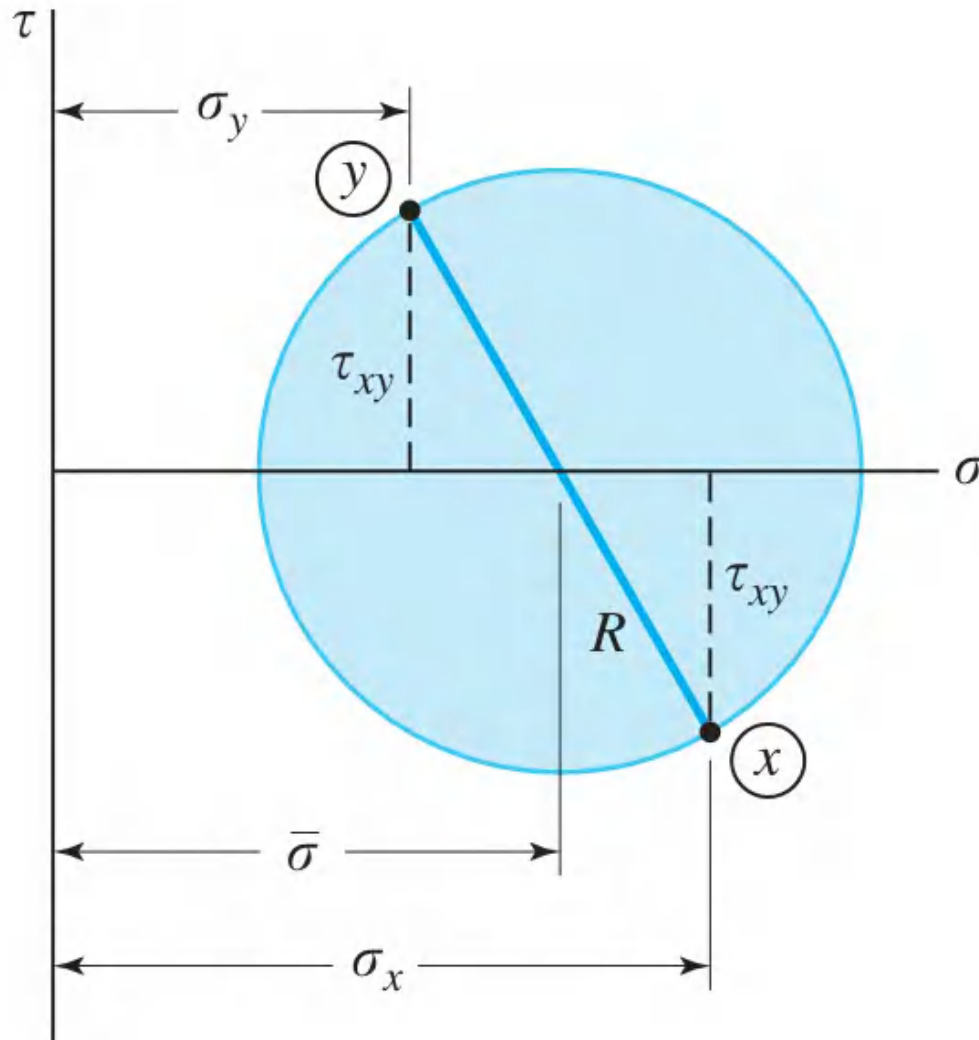
Mohr çemberi

- Yapılan bütün bu işlemleri bir grafikte göstermenin en kolay yolu Mohr çemberidir.
- Bir elemanda oluşan gerilmeler σ_x , σ_y ve τ_{xy} olsun.
- Bu halde Mohr çemberi çiziminin 3 aşaması:
 - 1) Apsisi normal gerilmeyi (σ), ordinatı ise teğetsel gerilmeyi (τ) temsil eden bir eksen takımı çizin.
 - 2) Bu eksen takımı üzerinde koordinatları ($\sigma_x, -\tau_{xy}$) olan bir x noktası ve koordinatları (σ_y, τ_{xy}) olan bir y noktası işaretleyin.
 - 3) Bu noktaları bir doğru ile birleştirin. Bu doğruyu çap kabul eden daireyi çizin.

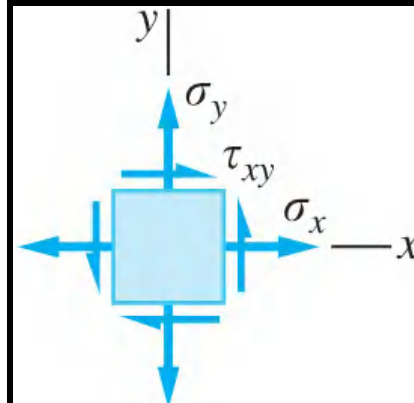


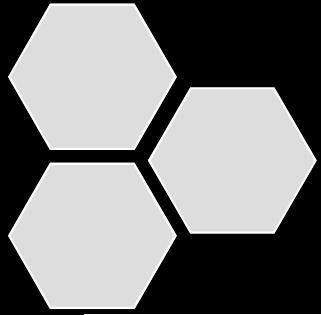


Mohr çemberi

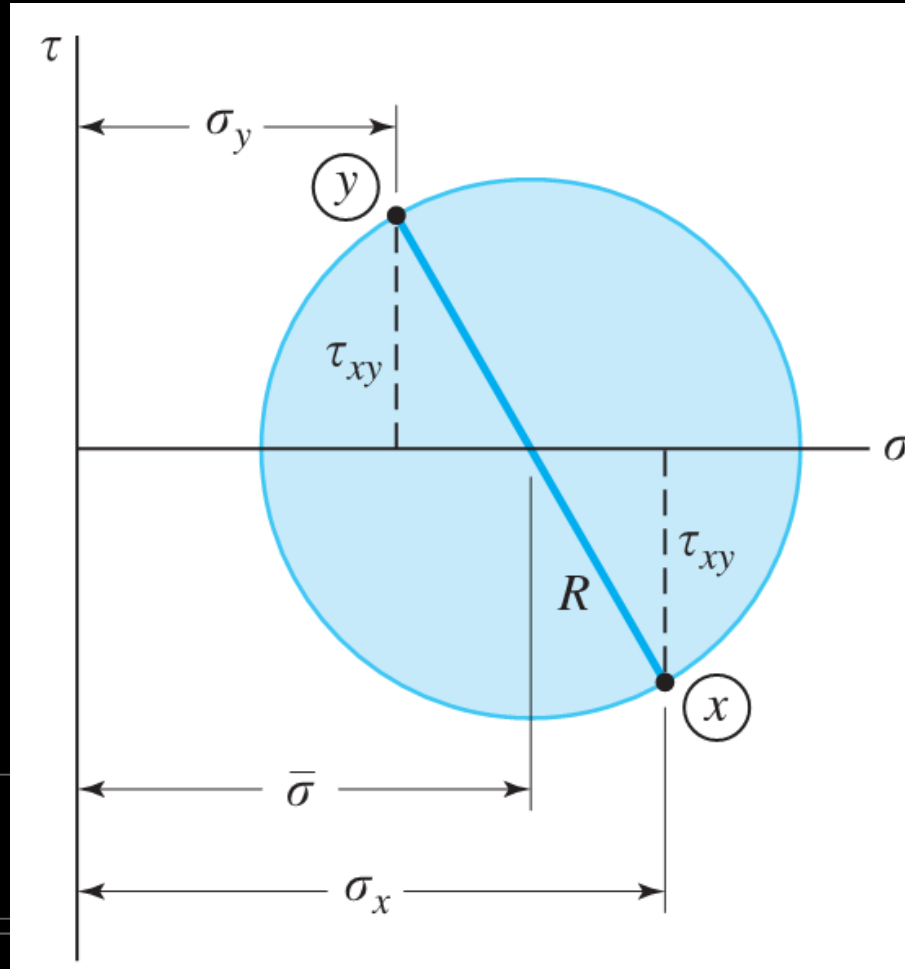


- Grafikteki **x** ve **y** noktaları inceleme konusu elemanın **x** ve **y** yüzlerine etkiyen gerilmeleri temsil etmektedir.





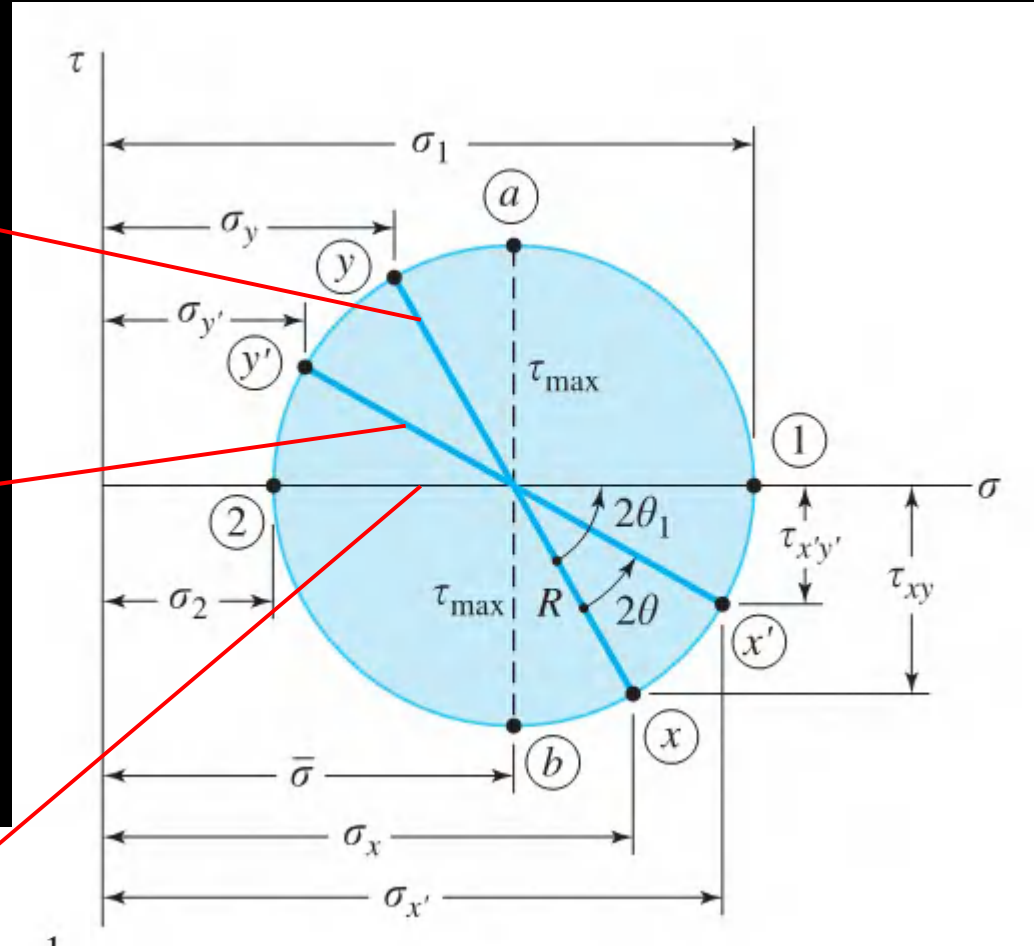
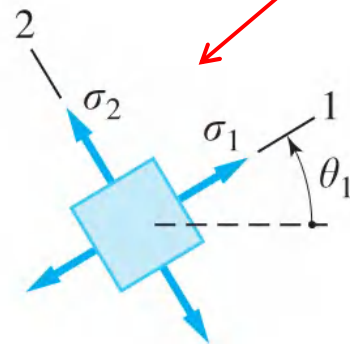
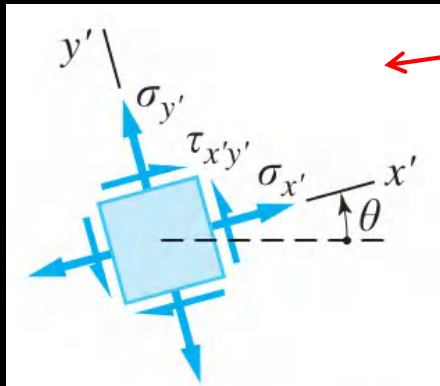
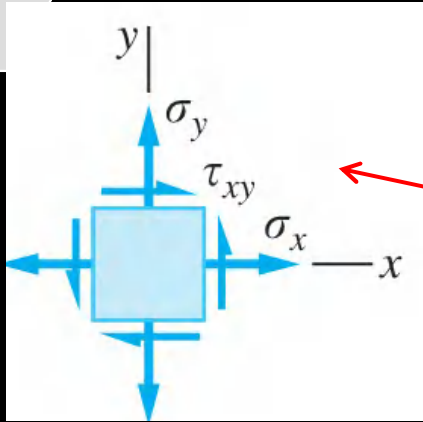
Mohr çemberinin özellikleri

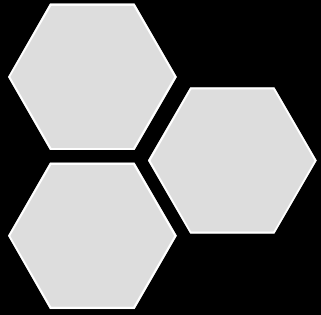


- Çemberin her bir noktasındaki koordinatlar, söz konusu elemanda o doğrultulardaki teğetsel ve normal gerilmeleri temsil etmektedir.
- Çemberdeki θ açısı ile gerçek elemandaki kesit açısı arasında **2** kat fark vardır. Örneğin çemberdeki **90°** lik açı, gerçek kesitte **45°** ye denk gelmektedir.



Mohr dairesinin özellikleri



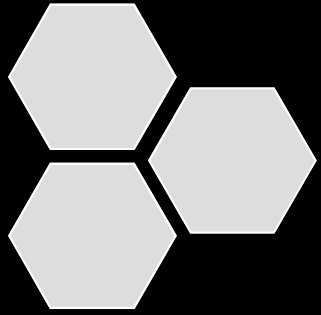


Gerilme-uzama ilişkileri

- Gerilme, tarif itibarı ile hayali bir büyüklük olduğundan fiziksel olarak ölçülemez. Ancak uzama, dolayısı ile birim uzamayı ölçmek mümkündür. Bu nedenle gerilme ile uzama arasındaki ilişkiler bilinirse, uzamanın ölçümü sureti ile söz konusu elemanda o yükleme durumu için gerilmeler hesaplanabilir.
- Asal gerilmeler doğrultusundaki birim uzamalara asal birim uzama denirse, bu doğrultularda kayma gerilmesinden kaynaklanan şekil değişimi olmayacaktır.
- Tek eksenli gerilme halinde asal birim uzamalar;

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2 = -\nu \cdot \varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1$$





Gerilme-uzama ilişkileri

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_2 = -\nu \cdot \varepsilon_1, \quad \varepsilon_3 = -\nu \cdot \varepsilon_1$$

- Düzlem gerilme halinde $\sigma_3=0$ olacaktır. Süperpozisyon prensibi uygulanırsa asal doğrultulardaki birim uzamalar;

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1}{E}$$

$$\varepsilon_3 = -\nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E}$$



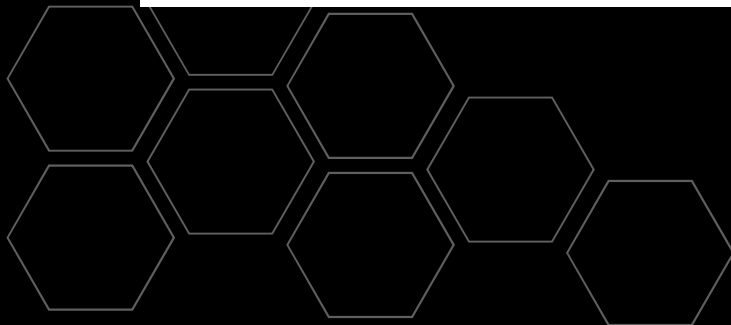
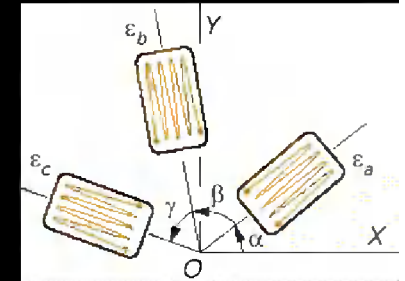
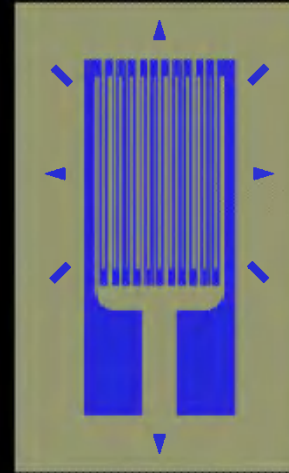


Gerilme-uzama ilişkileri

- Asıl amaç ölçülen birim uzamalardan asal gerilmelerin değerlerini elde etmek olduğu için, denklemler buna göre tekrar düzenlenirse;

$$\sigma_1 = \frac{E \cdot (\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2)}{1 - \nu^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{E \cdot (\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1)}{1 - \nu^2}$$

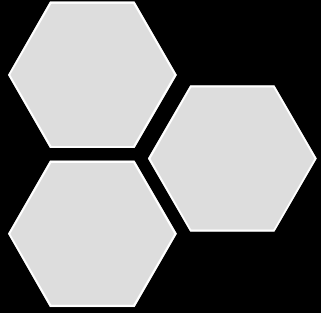




Statik hasar teorileri

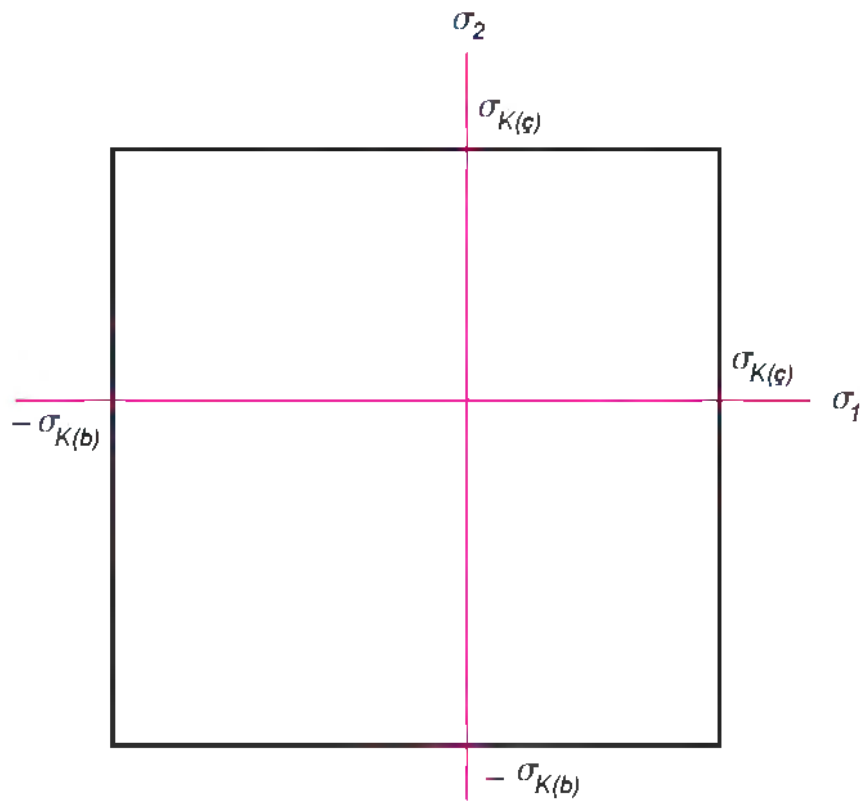
- Makina elemanlarında genellikle birden fazla ve çoğunlukla farklı türden gerilmeler meydana gelir.
- Bu gerilmeler etkisinde makina elemanında hasar oluşup oluşmayacağını söyleyebilmek için makina elemanının yapıldığı malzemenin sınır gerilme değerini bilmek gerekir.
- Mühendislik malzemeleri için tasarımcının elinde statik zorlanmalar için akma sınırı, dinamik zorlanmalar için ise yorulma sınırı vardır.
- Makina elemanında oluşan pek çok gerilmeyi bu sınır değerlerle kıyaslayıp, bir sonuca ulaşmak çoğunlukla mümkün olmaz.
- Bu nedenle çeşitli malzemeler için geçerli olabilecek ve dene sonuçları ile uyumlu kırılma hipotezleri geliştirilmiştir.





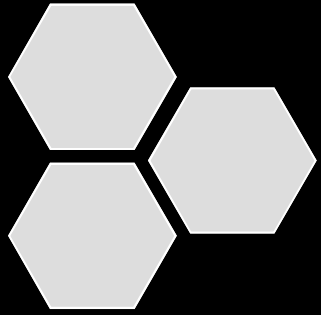
Maksimum Normal Gerilme Hipotezi

- Bu teori en büyük asal gerilme akma veya kopma sınırını aştığında hasar oluşacağını ifade eder ($\sigma_1 = \sigma_{Ak}$ veya $\sigma_1 = \sigma_K$).



Bu teoride sadece en büyük asal gerilme göz önüne alınıp, diğer gerilmelerin etkisi pek düşünülmez.

Örneğin sadece burulma varsa; $\sigma_1 = \tau = \sigma_K$ olunca hasar başlar. Bu deneysel verilere pek uymaz.

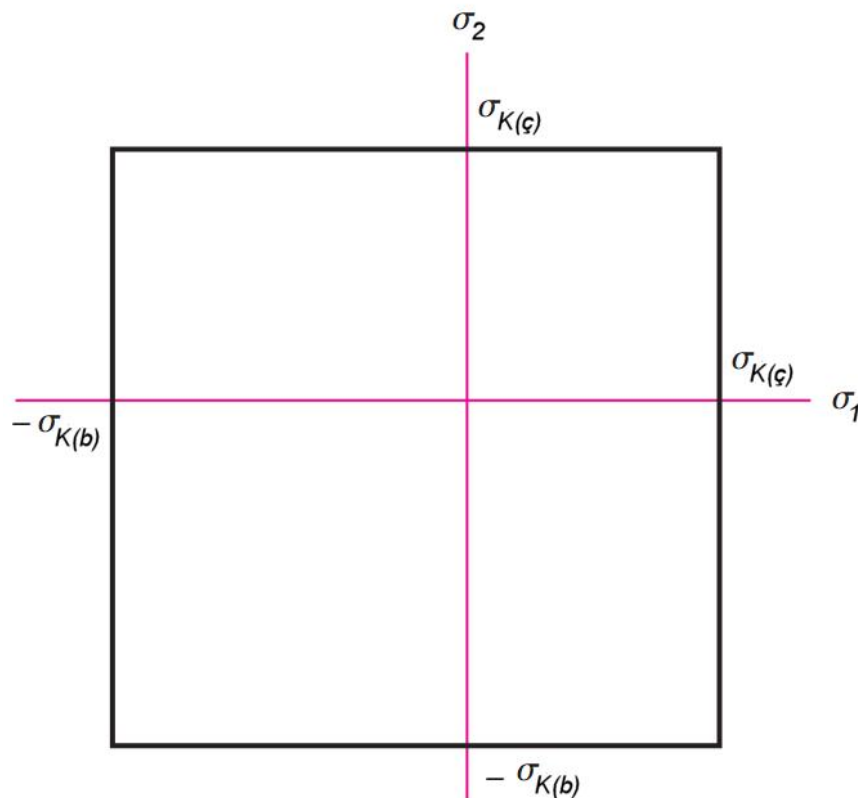


Maksimum Normal Gerilme Hipotezi

- Hasar şartı



$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \leq \sigma_K (\sigma_{Ak})$$



Mukayese gerilmesi

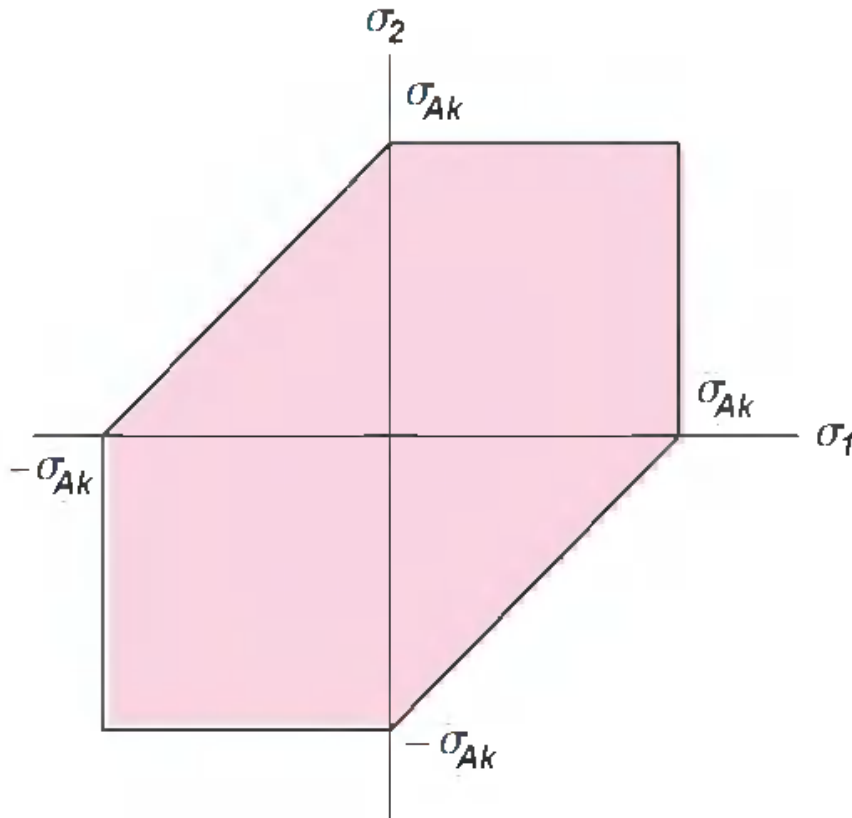
$$\sigma_v = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Bu teori **gevrek malzemelerde** deneylerle uyumlu sonuçlar vermektedir.



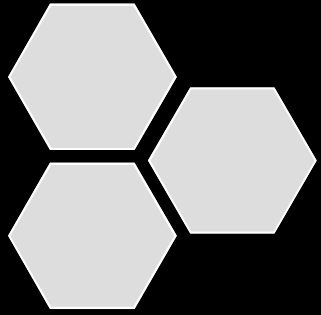
Maksimum Kayma Gerilmesi Hipotezi (Mohr Hipotezi)

Bu teori deneysel verilerin emniyetli tarafındadır. Genelde **sünek malzemelere** uygulanır.



Teorinin esası:

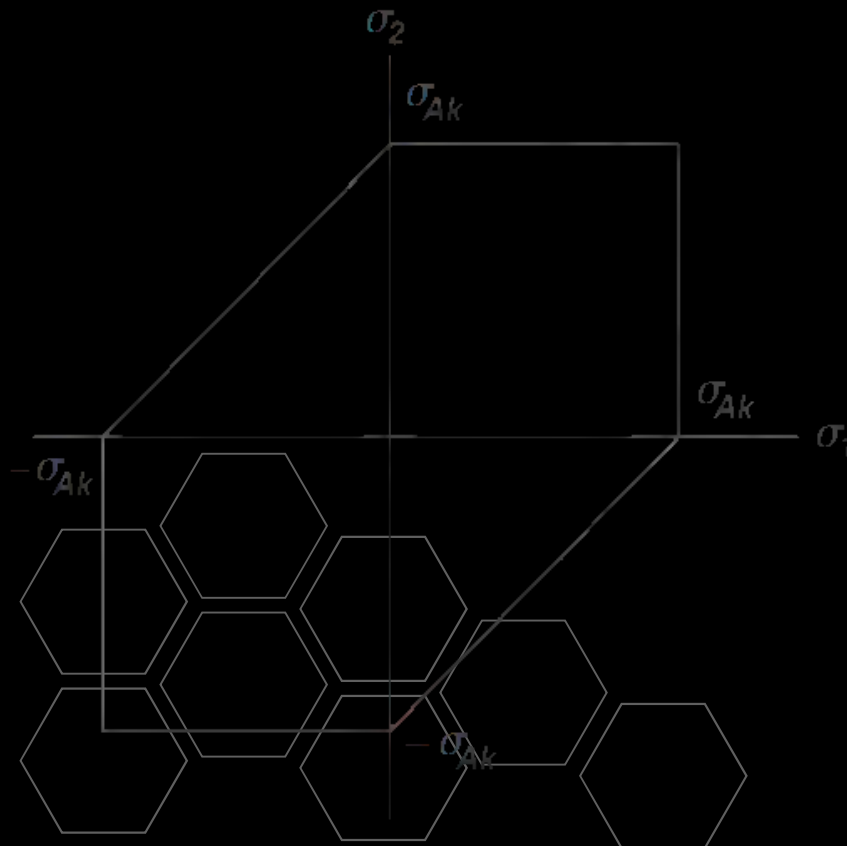
Bir malzemedeki maksimum kayma gerilmesi, çekme deneyindeki kayma mukavemetine eşit olduğunda hasar başlar.



Maksimum Kayma Gerilmesi Hipotezi

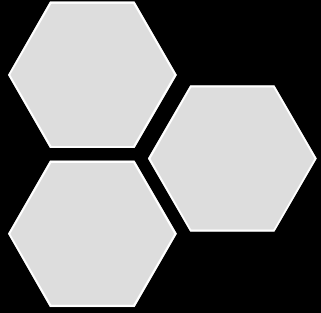
Hasar şartı →

$$\tau_{maks} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{Ak}}{2}$$



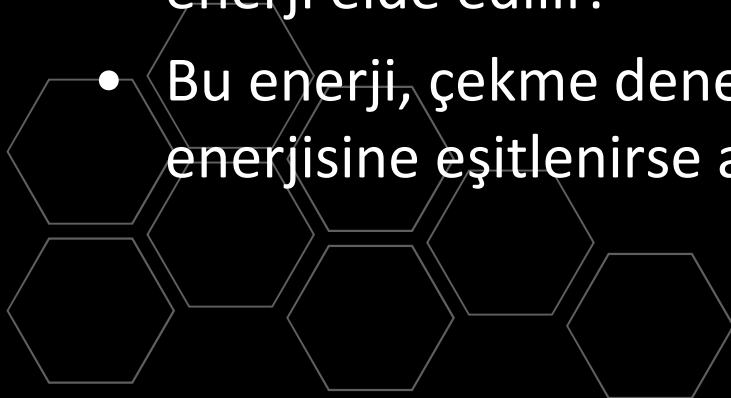
Mukayese gerilmesi

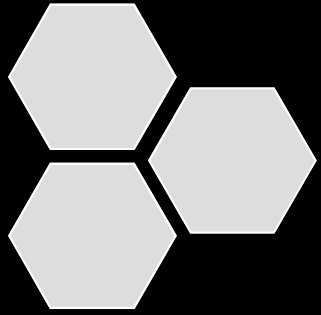
$$\sigma_v = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2}$$



Maksimum Biçim Değişirme Enerjisi Hipotezi (Von Misses – Hencky)

- Sünek malzemeler için en iyi sonuç veren teoridir. Bu teori de, malzemenin akmaya başlamasını esas alır.
- Hidrostatik yüklemde elde edilen akma dayanımları, çekme deneyinden elde edilenlerden oldukça büyüktür. Bu nedenle akmanın gerilme altındaki elemanın açisal deformasyonu ile ilgili olması bu teorinin esasıdır.
- Biçim değişimi için gerekli toplam enerjiden, hacim değişimi için gerekli enerji çıkarılırsa, açisal deformasyon için gerekli enerji elde edilir.
- Bu enerji, çekme deneyindeki toplam biçim değiştirme enerjisine eşitlenirse akma noktası elde edilir.





Maksimum Biçim Değişirme Enerjisi Hipotezi (Von Misses – Hencky)

Hasar şartı

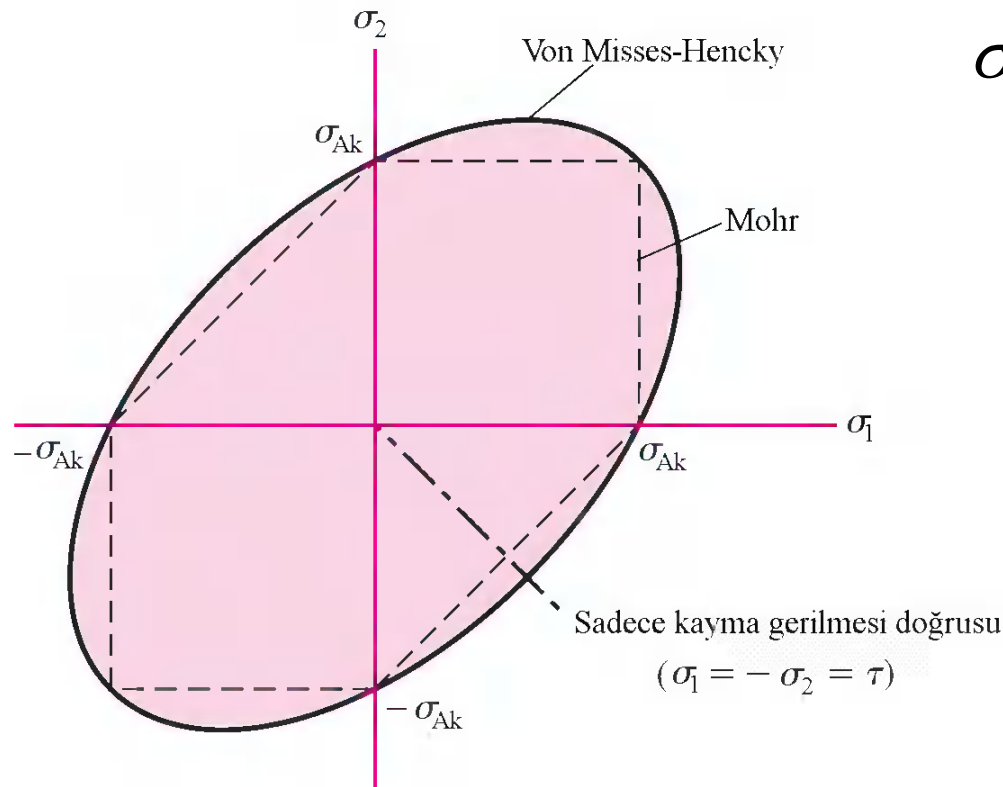


$$\sigma_{Ak} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2}$$

Mukayese gerilmesi



$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2^2}$$

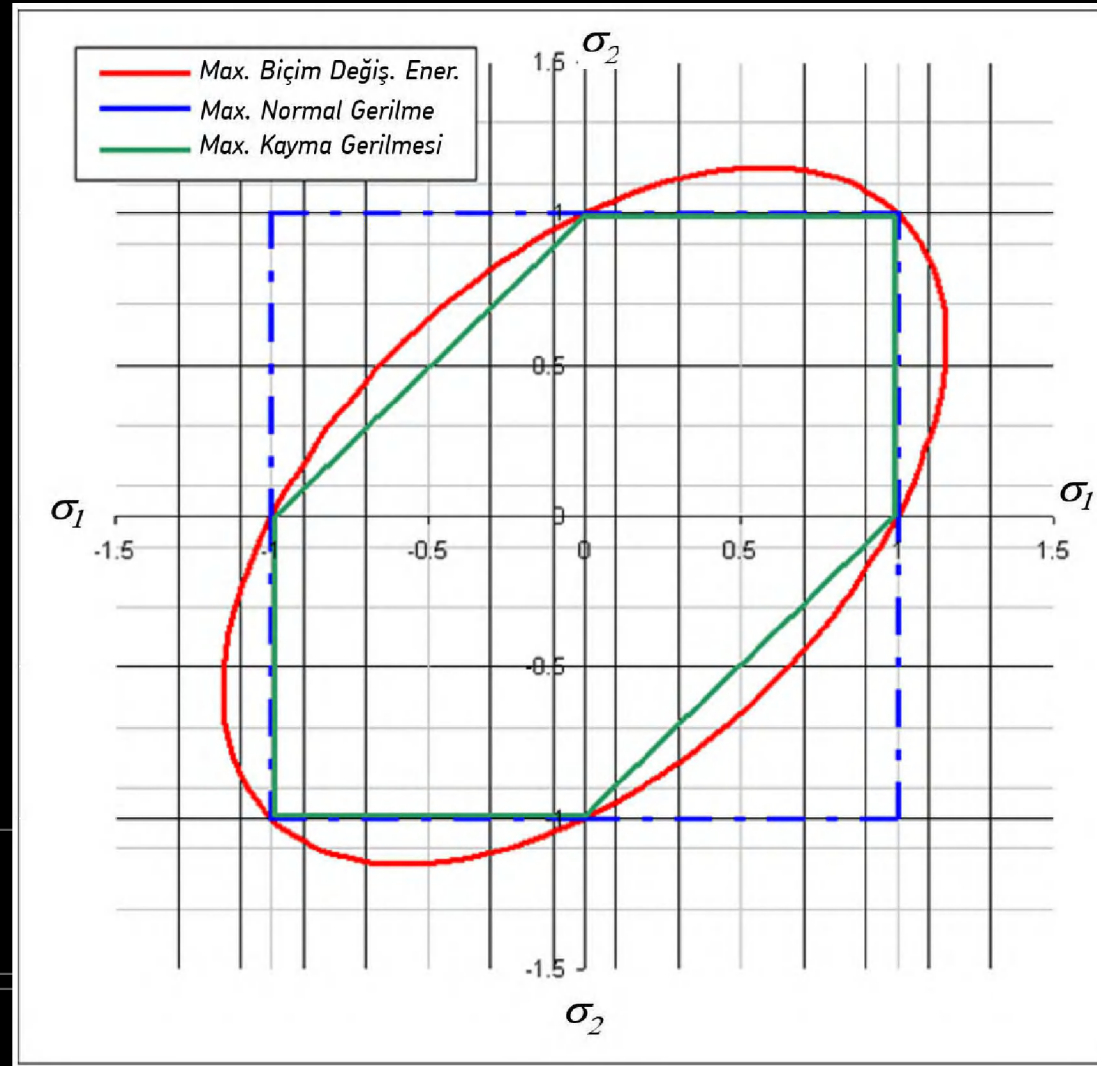


$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \cdot \sigma_y + 3 \cdot \tau_{xy}^2}$$

Örnek: Sadece eğilme ve burulmaya maruz bir makina elemanı için

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_e^2 + 3 \cdot \tau_b^2}$$

Üç hipotezin karşılaştırılması

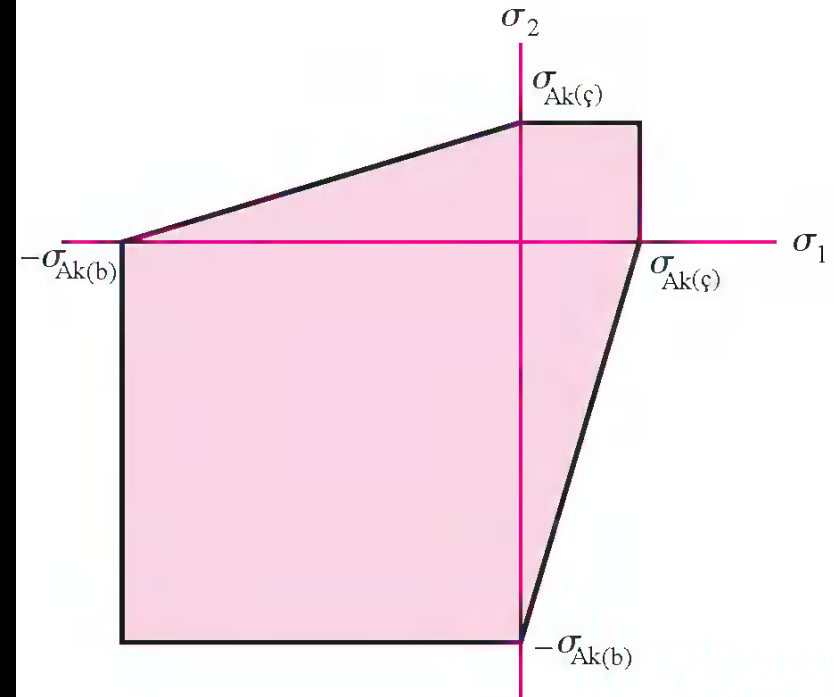
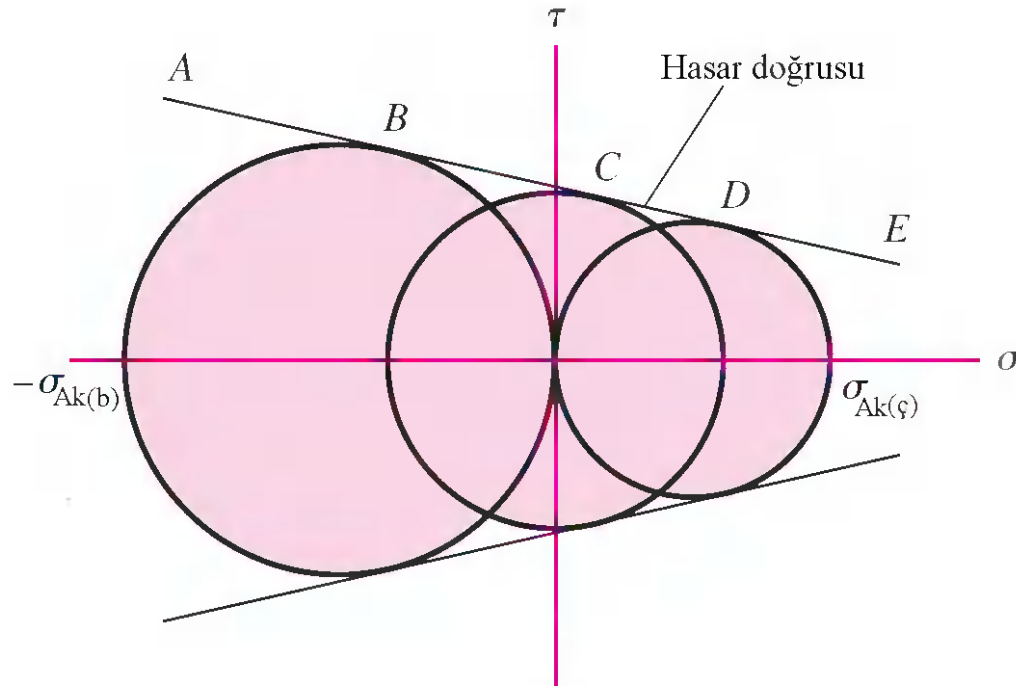




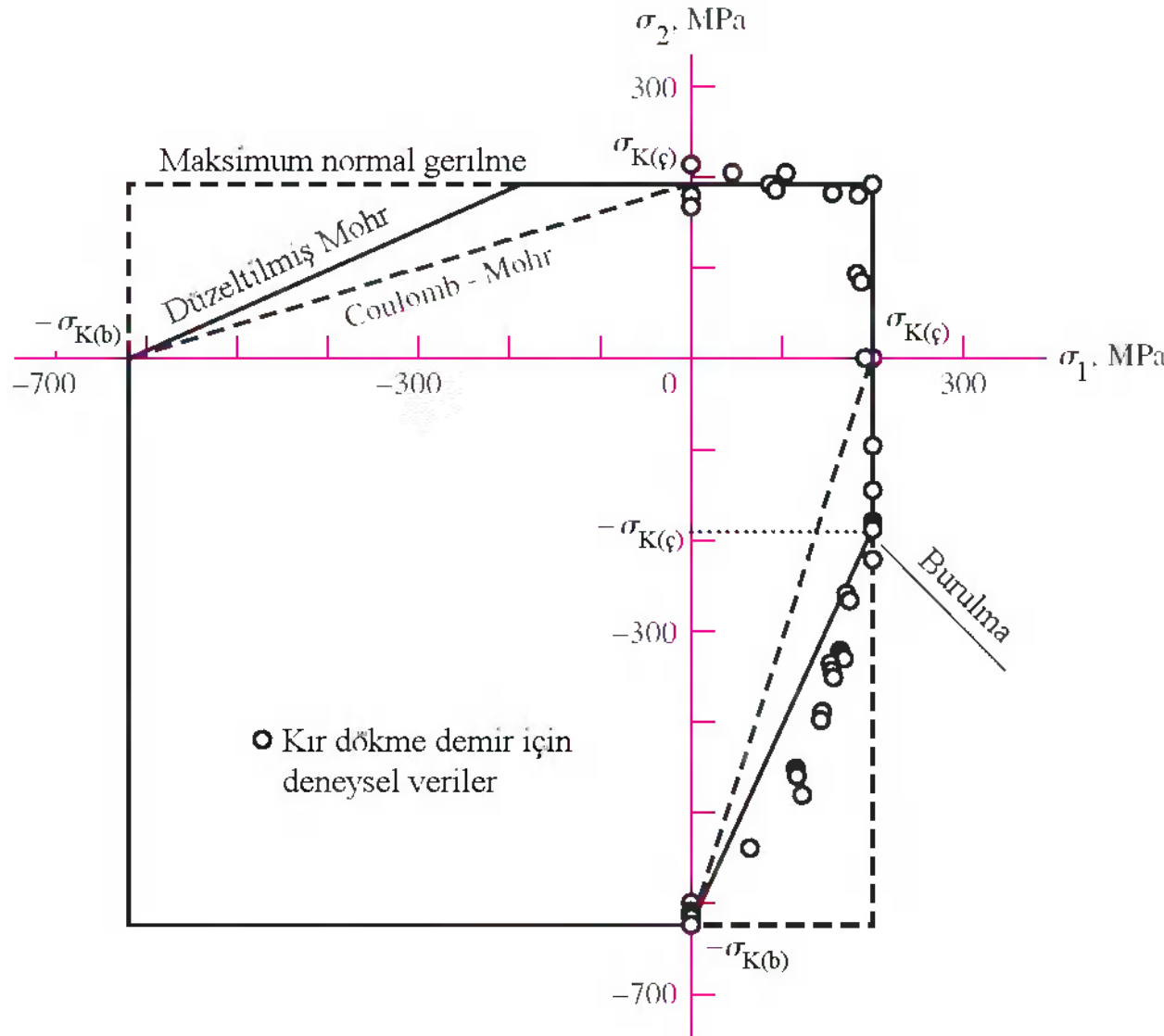
Sünek Malzemeler İçin Coulomb-Mohr Teorisi

- Bütün mühendislik malzemelerinin çekme mukavemetleri ile basma mukavemetleri aynı değildir. Örneğin kır dökme demirin basma mukavemeti, çekmenin 3...4 katıdır.
- Bu teoride sadece çekme testi değil, basma ve kayma testlerinin de sonuçları kullanılır.

Düzlem gerilme için



Gevrek Malzemeler için Düzeltilmiş Mohr Teorisi



- Deneysel verilere daha uygun düşecek şekilde değiştirilmiştir. Yanda kır dökme demir için hasar bölgeleri ifade edilmiştir.

