ITU Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi Uçak Mühendisliği Bölümü
2017-2018 Güz Yarıyılı
11729 DNK201E Dinamik

Örnek Sorular – 1

Problem 1: Düşey yönde atılan parçacık ilk hızı v_0 ve ivmesi $a = -(9.81 + 0.02v^2)\ m/s^2$ şeklindedir. Parçacık, çıkabileceği maksimum yüksekliğe 3.5 saniyede ulaşıyorsa, parçacığın
(a) ilk hızını (v_0),
(b) çıkabileceği maksimum yüksekliği,
(c) t=2.0 s anındaki ivmesini hesaplayınız.

Çözüm 1:

(a) $a = dv/dt \quad \Rightarrow \quad -(9.81 + 0.02v^2) = dv/dt$

$$\frac{dv}{9.81 + 0.02v^2} = -dt \quad \Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v(y)} \frac{dv}{9.81 + 0.02v^2} = -\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{v_0}^{v(y)} \frac{dv}{9.81 + 0.02v^2} = -\int_0^t dt = -t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{0.02}} \int_{v_0}^{v(y)} \frac{d\left(\sqrt{0.02}v\right)}{\left(\sqrt{9.81}\right)^2 + \left(\sqrt{0.02}v\right)^2} = -t$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{9.81}} \arctan \frac{\sqrt{0.02}v}{\sqrt{9.81}}\right]_{v(0)}^{v(y)} = -\sqrt{0.02}t \qquad \Rightarrow \arctan\frac{\sqrt{0.02}}{\sqrt{9.81}}v(y) - \arctan\frac{\sqrt{0.02}}{\sqrt{9.81}}v(0) = -\sqrt{9.81}\sqrt{0.02}t$$

Maksimum yükseklikte, t=3.5 anında, $v(h_{max})$=0:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{0.02}}{\sqrt{9.81}}v(0) = \tan\left[\sqrt{0.02}\sqrt{9.81}(3.5)\right] \quad \boxed{\Rightarrow \quad v(0) = 1080.7\ m/s}$$

(b) $ady = vdv \quad \Rightarrow -(9.81 + 0.02v^2)dy = vdv$

$$\Rightarrow -\int_0^y dy = \int_{v_0}^{v(y)} \frac{vdv}{9.81 + 0.02v^2} \quad \Rightarrow \quad -y = \frac{1}{0.04}\ln\left[\frac{9.81 + 0.02v^2}{9.81 + 0.02v_0^2}\right]$$

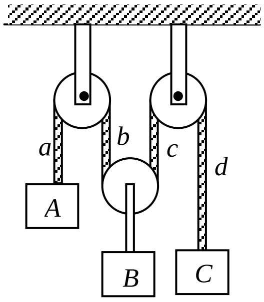
maksimum yükseklikte v=0:

$$h_{\max} = -\frac{1}{0.04}\ln\left[\frac{9.81}{9.81 + 0.02v_0^2}\right] \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = 194{,}4\ \ m$$

(c) $\Rightarrow \arctan\frac{\sqrt{0.02}}{\sqrt{9.81}}v(2s) - \arctan\frac{\sqrt{0.02}}{\sqrt{9.81}}1080.7 = -\sqrt{9.81}\sqrt{0.02}(2)$

$$\Rightarrow \ v(2s) = 17.35\ m/s \quad \boxed{\Rightarrow a(2s) = -(9.81 + 0.02 * 17.35^2) = -15.83\ m/s^2}$$

<u>Problem 2:</u> Şekildeki makara sisteminde m_A=2 kg, m_B=6 kg ve m_C=3 kg dır. Bloklar hareketsizken aniden serbest bırakılmaktadır. Makaraların kütlesiz ve sürtünmesiz olduğunu kabul ederek



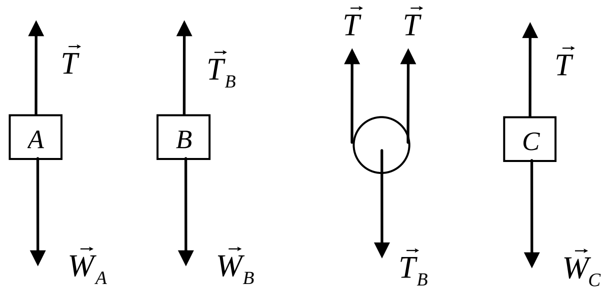
(a) *abcd* ipindeki gerilmeyi ve blokların ivmelerini hesaplayınız.
(b) Harekeket başladıktan iki saniye sonra *A* ve *B* bloklarının birbirlerine göre bağıl hız ve konumunu hesaplayınız (başlangıçta bloklar aynı hizada).
(c) Mevcut sistemin serbestlik derecesi kaçtır? Açıklayınız.

<u>Çözüm 2:</u>(a)

İpin boyu sabit:

$$l = a + b + c + d = sbt$$

$$\Rightarrow y_A + 2y_B + y_C = sbt$$
$$\Rightarrow a_A + 2a_B + a_C = 0 \qquad (1)$$



Blok A için hareket denklemi: $m_A g - T = m_A a_A$ (2)

B deki makara için hareket denklemi: $T_B - 2T = 0$ (makara kütlesiz) (3)

Blok B için hareket denklemi: $m_B g - T_B = m_B a_B$ (4)

Blok C için hareket denklemi: $m_C g - T = m_C a_C$ (5)

(2), (3), (4), (5) → (1):

$$\frac{m_A g - T}{m_A} + 2\frac{m_A g - 2T}{m_B} + \frac{m_C g - T}{m_C} = 0 \qquad \boxed{\Rightarrow T = 26.16 \ N}$$

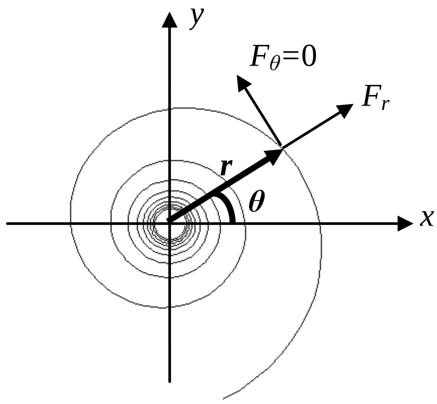
Buradan $a_A = -3.27 \ m/s^2 \ \uparrow$, $a_B = 1.09 \ m/s^2 \ \downarrow$, $a_B = 1.09 \ m/s^2 \ \downarrow$

$$y_A(0) = y_B(0),\ v_A(0) = v_B(0) = 0,\quad a_{A/B} = -3{,}27 - 1{,}09 = -4{,}36 \ m/s^2$$
$$v_{A/B} = \int a_{A/B} dx = -4{,}36t,\quad y_{A/B} = \int v_{A/B} dx = -2{,}18t^2$$
$$\boxed{v_{A/B}(t = 2s) = -8.72 \ \ m/s}$$
$$\boxed{y_{A/B}(t = 2s) = -8.72 \ \ m}$$

(c) Sistemin serbestlik derecesi ikidir. Çünkü $\Rightarrow y_A + 2y_B + y_C = sbt$ bağıntısına göre üç bloğun konumlarının tespit edilmiş olması için herhangi ikisinin belirlemek gerekir.

Problem 3: Merkezcil bir kuvvetin etkisindeki bir parçacığın yörüngesi spiral şeklinde olup $r\theta = C = sbt$ bağıntısıyla verilmektedir. Bu hareketi meydana getiren kuvvetin şiddetini $F = F(r,\theta)$ belirleyiniz.

Çözüm 3:



Kinematik bağıntılar:

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $\quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$

$r\theta = C_1 = sbt$ **(i)**

(i) nolu bağıntı iki kez türetilirse

$\dot{r}\theta + r\dot{\theta} = 0$ (ii)

$\ddot{r}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$ (iii)

elde edilir. Fakat $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = a_\theta = 0$ dır. O halde,

$\ddot{r}\theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \ddot{r}\theta + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta = 0 \ \vee \ \ddot{r} = 0$ (iv)

Parçacığın yörüngesi spiral olduğuna göre $\ddot{r} = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla $\dot{r} = sbt = C_2$

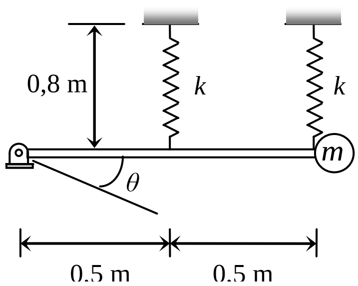
Radyla ivme: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2$ (v)

(ii) den: $\dot{\theta} = -\dfrac{\dot{r}\theta}{r}$ (vi)

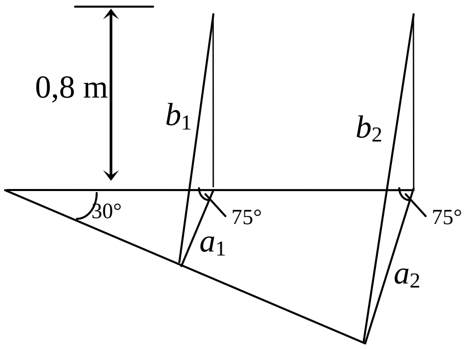
(i), (vi) → (v) : $a_r = -r\dot{\theta}^2 = -r\left(-\dfrac{\dot{r}\theta}{r}\right)^2 = -\dfrac{\dot{r}^2\theta^2}{r} = -\dfrac{C_2^2C_1^2}{r^3} = -\dfrac{C^*}{r^3}$

$F_r = ma_r = -m\dfrac{C^*}{r^3} = -\dfrac{C}{r^3} \quad \Rightarrow \boxed{F_r = -\dfrac{C}{r^3}}$ (bu sonuç açısal momentum korunumundan yararlanılarak da kolayca bulunabilir.)

Problem 4: Şekildeki sistemde *m*=30 kg kütleye sahip bir blok, *O* noktasında menteşelenmiş kütlesi ihmal edilebilen bir çubuğa bağlıdır. Yaylar verilen konumda, θ=0° iken, serbest boydadır ve yay sabitleri her iki yay için *k*=700 N/m değerindedir. Kütle bu konumda serbest bırakılmaktadır. θ=30° olduğunda bloğun hızını hesaplayınız.



Çözüm 4:



$$U = T_1 + V_{1s} + V_{1g} = 0 + 0 + 0 = 0$$

sinüs teoremi:

$$\frac{a_1}{\sin 30} = \frac{0.5}{\sin 75} \Rightarrow a_1 = 0.258\ m$$

Benzerlikten $a_2 = 2 * a_1 = 0.516\ m$

Kosinüs teoremi:

$$b_1^2 = 0.258^2 + 0.8^2 - 2 * 0.258 * 0.8 * \cos 165 \Rightarrow b_1 = 1.051\ m$$

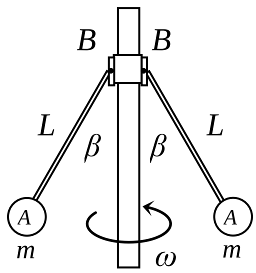
$$b_2^2 = 0.516^2 + 0.8^2 - 2 * 0.516 * 0.8 * \cos 165 \Rightarrow b_2 = 1.305\ m$$

Yaylardaki uzamalar:
$\delta_1 = 1.051 - 0.8 = 0.251\ m$, $\delta_2 = 1.305 - 0.8 = 0.505\ m$

$$V_{2s} = 0.5 * 700 * 0.251^2 + 0.5 * 700 * 0.505^2 = 111.3\ Nm$$
$$V_{2g} = -mgy = -30 * 9.81 * 1.0 * \sin 30 = -147.1\ Nm$$
$$T_1 + V_{1s} + V_{1g} = T_2 + V_{2s} + V_{2g}$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 0.5 * 30 * v_2^2 + 111.3 - 147.1$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad v_2 = 1.545\ m/s}$$

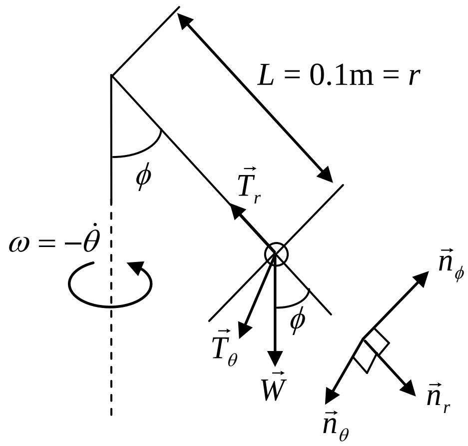
Problem 5: Şekildeki hız-kontrol (governor) mekanizmasında *m*=0.25 kg, *L*=12 cm (*AB* çubuklarının kütleleri ihmal edilebilir), *ω*=550 dev/dak, β=45° ve $\dot{\beta} = 0$. Bu anda $\ddot{\beta}$ değerini ve çubuklardaki kuvveti belirleyiniz.



Çözüm 5:

m = 0.25 kg, *L*=0.12 m, $\phi = 45°$, $\dot{\phi} = 0$,
$\dot{\theta} = -\omega = -550 * 2\pi / 60 = -57.6\ rad/s$, $\ddot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\phi} = ?$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2 \sin^2 \phi)\vec{n}_r +$$
$$(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2 \sin\phi \cos\phi)\vec{n}_\phi +$$
$$(r\ddot{\theta} \sin\phi + 2\dot{r}\dot{\theta} \sin\phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi)\vec{n}_\theta$$



$$\sum F_r = ma_r \quad \Rightarrow \quad -T_r + mg\cos\phi = m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 - r\dot{\theta}^2\sin^2\phi)$$

$$T_r = 0.25 * 9.81 * \cos 45° - 0.25 * (-0.12 * (-57.6)^2 \sin^2 45°) \; \boxed{\Rightarrow T_r = 51.5\ N}$$

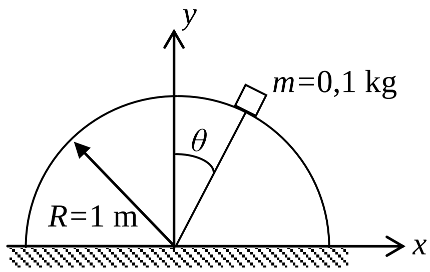
$$\sum F_\phi = ma_\phi \quad \Rightarrow \quad -mg\sin\phi = m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} - r\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi)$$

$$-0.25 * 9.81 * \sin 45° = 0.25(0.12 * \ddot{\phi} - 0.12 * (-57.6)^2 \sin 45° \cos 45°) \boxed{\Rightarrow \ddot{\phi} = 1716.7 \quad rad/s^2 = \ddot{\beta}}$$

$$\sum F_\theta = ma_\theta \quad \Rightarrow \quad T_\theta = m(r\ddot{\theta}\sin\phi + 2\dot{r}\dot{\theta}\sin\phi + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\phi) = 0.25 * (0 + 0 - 0)$$

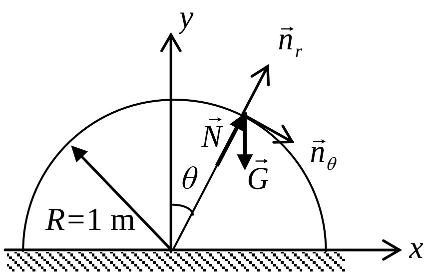
$$\boxed{\Rightarrow T_\theta = 0}$$

Problem 6: Sürtünmesiz tümsek yüzey üzerinde duran blok $\theta_0 = 10°$ konumundayken aniden serbest bırakılmaktadır ve yüzey boyunca aşağı doğru kaymaya başlamaktadır. Bloğun yüzeyden ayrılacağı θ açısını hesağlayınız. (*İpucu*: yüzeyden ayrılma koşulu *N*=0).



Çözüm 6:

Kutupsal koordinatlarda hareket denklemleri:



$$\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \;\rightarrow\quad N - mg\cos\theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\sum F_r = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \;\rightarrow\; mg\sin\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

$r = sbt \rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ ve (b) ifadesi

$g\sin\theta = r\ddot{\theta}$ (i)

olur ve (a) ifadesinden

$N - mg\cos\theta = -mr\dot{\theta}^2 \rightarrow$ yüzeyden ayrılma koşulu *N*=0: $-g\cos\theta = -r\dot{\theta}^2$ (ii) bulunur.

R yarıçapı için açısal ivme ve açısal hız arasında ilişki ve (i) den aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta}\, d\theta = \dot{\theta}\, d\dot{\theta} \;\Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \ddot{\theta}\, d\theta = \int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} \Rightarrow \int_{10}^{\theta} \frac{g}{r}\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{g}{r}\left[\cos\theta\right]_{10}^{\theta} = \frac{g}{r}\left[\cos 10 - \cos\theta\right] = \frac{\dot{\theta}^2}{2} \qquad \text{(iii)}$$

(iii) $\rightarrow$ (ii): $\quad -g\cos\theta = -r * 2 * \dfrac{g}{r}\left[\cos 10 - \cos\theta\right] = -2g\left[\cos 10 - \cos\theta\right]$

$$\Rightarrow \; \cos\theta = \frac{2}{3}\cos 10 \; \boxed{\Rightarrow \quad \theta_{ayrilma} = 48.96°}$$