Çözümleme Önseliyle Gürültüsüzleştirme

İlker Bayram
Biomedical Imaging Group,
EPFL, Lozan, İsviçre

ilker.bayram@epfl.ch

Ivan W. Selesnick
Dept. of Electrical and Computer Eng.
Polytechnic Inst. of New York Univ.,
Brooklyn, NY, ABD

selesi@poly.edu

Öz

Bu bildiride çözümleme önseliyle düzenlileştirilmiş tersine problemler için bir algoritma incelenmiştir. Algoritmanın yakınsama koşulu belirlenmiş ve varolan başka bir algoritma ile karşılaştırılmıştır.

1 Giriş

Bir tersine problem senaryosu düşünelim. $x \in \mathbb{R}^m$ görüntülemek istediğimiz nesne, $y \in \mathbb{R}^k$ de x'e dair gürültülü ve bozuk gözlemlerimiz olsun. Daha net bir ifadeyle, $H : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ bildiğimizi varsaydığımız bozulum işleci (distortion operator) ve $n \in \mathbb{R}^k$ de gürültü işareti olduğu halde

$$y = Hx + n \tag{1}$$

olsun. Amacımız y'den, H'ye dair bilgimizi kullanarak x'i kestirmek. Buradaki zorluğun, H tersinir (invertible) olsa bile (ki burada öyle kabul edeceğiz), gürültü işaretinin varlığından dolayı y'nin x'in sürekli bir fonksiyonu olmaması olduğunu sözleyebiliriz. Problemi düzenlileştirmek (regularize) için x'e dair önsel (prior) bilgimizi kullanacağız. Bu bağlamda son birkaç yılda sıkça kullanılan seyreklik (sparsity) varsayımına (x'in bilinen bir çerçevede (frame) az sayıda çerçeve elemanı kullanarak ifade edilebilmesi) başvuracağız.

Seyreklik varsayımından hareketle, $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ($m \geq n$) çerçevenin bireşim işleci (synthesis operator) (bkz. [2, 3]), $T^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ çözümleme işleci (analysis operator) ise, x'in kestirimi bireşim önseli kullanarak,

$$\tilde{c} = \operatorname*{argmin}_{c \in \mathbb{R}^m} \|y - H\,T\,c\|_2^2 + \lambda \|c\|_1 \tag{2}$$

$$\tilde{x} = T\,\tilde{c} \tag{3}$$

şeklinde, veya çözümleme önseli kullanarak

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{t \in \mathbb{R}^m} \|y - H\,t\|_2^2 + \lambda \|T^*\,t\|_1 \tag{4}$$

şeklinde yapılabilir. Bu iki yaklaşımdan hangisinin 'daha iyi' olduğu açık olmamakla birlikte [5], bireşim önselli düzenlemenin seyreklik varsayımına daha yakın olduğu, çözümleme önselli düzenlemenin ise seyreklik varsayımının pek de doğru olmadığı 'doğal' işaretler için daha uygun olduğu öne sürülebilir [9]. Ayrıca okurun dikkatini bireşim önselli düzenlemenin, çözümleme önselli düzenlemenin özel bir durumu olduğuna çekmek istiyoruz.

Bu bildiride, bir başka özel durum olan, bozulum işlecinin tersinir olması durumunu ele alacağız (yani (4)'teki H'nin tersinir olması durumu). $W = T^*\,H^{-1}$ dersek, bu problemin çözümünü

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} \|y - x\|_2^2 + \lambda \|W\,x\|_1 \tag{5}$$

şeklinde ifade edebiliriz. (5)'teki problemin çözümü Chambolle tarafından [1]

$$x^* = y - \lambda\,\pi_K(y/\lambda) \tag{6}$$

şeklinde nitelendirilmiştir. Burada B_∞, $\mathbb{R}^m$ üzerinde ℓ_∞ normuna göre birim topunu (unit ball) ifade ettiği halde, K kümesi B_∞'nin W^T uygulandığındaki görüntüsü (yani $K = \{x : \exists z \in B_\infty \text{ ki } x = W^T z\}$), $\pi_K(\cdot)$ ise K kümesine izdüşüm işlecini ifade etmektedir.

İzdüşüm algoritmasını çıkarmak ve yakınsadığını göstermek için biraz ön bilgiye ihtiyacımız olacak.

2 Ön Bilgi

İzleyen bölümlerde tüm kümelerin ve vektörlerin sonlu bir m değeri için $\mathbb{R}^m$'de yer aldığını var sayacağız.

Bu kısımda verdiğimiz tanımlar ve sonuçlar [6, 7]'den alınmıştır.

Teorem 1. *$K \subset \mathbb{R}^m$ dışbükey ve tıkız (compact) bir küme, $y \in \mathbb{R}^m$ de verilmiş herhangi bir nokta olsun. $\|\cdot - y\|_2^2$ fonksiyonu K üzerinde minimum değerini alır. Bu minimum değeri veren $x^* \in K$ tektir.*

Tanım 1. *Yukarıda bahsi geçen noktaya y'nin K'ya izdüşümü diyeceğiz ve $\pi_K(y)$ şeklinde ifade edeceğiz.*

Tanım 2. *$f(\cdot)$, $\mathbb{R}^m$ üzerinde bir fonksiyon olsun. Verilen herhangi bir $x \in \mathbb{R}^n$ için $\partial f(x)$ öyle bir küme olsun ki*

$$s \in \partial f(x) \iff f(y) + \langle s, y - x\rangle \leq f(y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{7}$$

denkliği sağlansın. Bu kümeye $f(\cdot)$'nin x noktasındaki altdiferansiyeli (subdifferential) diyeceğiz.

Teorem 2. *$f(\cdot)$, $\mathbb{R}^m$ üzerinde dışbükey bir fonksiyon olsun.*

$$f(x^*) \leq f(x) \iff 0 \in \partial f(x^*). \tag{8}$$

Tanım 3. *$M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu, verilen her x, $\tilde{x}$ ikilisi için*

$$\|M(x) - M(\tilde{x})\|_2 \leq \|x - \tilde{x}\|_2 \tag{9}$$

eşitsizliğini geçerli kılıyorsa M'ye (ℓ_2 normuna göre) yaymayan (non-expansive) diyeceğiz.

Tanım 4. *$x \in \mathbb{R}^m$, verilen bir $M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu için $M(x) = x$ eşitliğini sağlıyorsa x'e M'nin sabit bir noktasıdır diyeceğiz.*

3 İzdüşüm Algoritması

Problemimizi hatırlayalım. y/λ noktasının K'ya izdüşümünü (ki Teorem 1 sayesinde tek olduğunu biliyoruz), yani

$$t^* := \pi_K(y/\lambda) = \operatorname*{argmin}_{t \in K} \|y/\lambda - t\|_2^2 \tag{10}$$

noktasını bulmaya çalışıyoruz. K'nın tanımını kullanır ve z^*'ı

$$z^* \in \operatorname*{argmin}_{z \in B_\infty} \|y/\lambda - W^T z\| \tag{11}$$

olacak şekilde seçersek, $t = W^T z^*$ eşitliğini elde edebiliriz. Dikkat edin ki, W^T'nin bayağı olmayan bir sıfır uzayı varsa, (11)'deki minimizasyon probleminin çözüm kümesinin birden fazla elemanı olabilir. Bu çözüm kümesine Z^* diyelim. Z^*'ın W^T uygulandığındaki görüntüsü, t^* tek olduğu için, $W^T Z^* = \{t^*\}$ olacaktır. İşleç parçalama (operator splitting – bkz. [4]) yöntemiyle çıkaracağımız algoritmamızın amacı Z^*'dan bir elemana ulaşmak. Öncelikle, B_∞ kümesinin belirteç (indicator) fonksiyonunu

$$I_{B_\infty}(z) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } z \in B_\infty, \\ \infty & \text{eğer } z \notin B_\infty, \end{cases} \tag{12}$$

olarak tanımlarsak, (11)'deki problemi

$$\min_z \|y/\lambda - W^T z\|_2^2 + I_{B_\infty}(z) \tag{13}$$

şeklinde yeniden yazabiliriz. (13)'teki fonksiyonların altdiferansiyellerini

$$\begin{aligned} T_1(\cdot) &:= \partial \|y/\lambda - W^T \cdot\|_2^2 \\ &= W(W^T \cdot - y/\lambda), \end{aligned} \tag{14}$$

$$T_2(\cdot) := \partial I_{B_\infty}(\cdot). \tag{15}$$

şeklinde ifade edelim. Bu durumda z^*'ın (13)'deki fonksiyoneli minimize etmesi,

$$0 \in T_1(z^*) + T_2(z^*) \tag{16}$$

bağıntısının doğru olmasına denk olduğunu söyleyebiliriz (bkz. Teorem 2). (16)'nın ise c herhangi bir sabit, I da özdeşlik işleci olduğu halde

$$(I - c\,T_1)(z^*) \in (I + c\,T_2)(z^*), \tag{17}$$

bağıntısına denk olduğunu görebiliriz. Buradan, $(I + cT_2)^{-1}$ işleci birebir olduğu takdirde, $z^* \in Z^*$ bağıntısının

$$z^* = (I + cT_2)^{-1}(I - cT_1)(z^*) \tag{18}$$

bağıntısına denk olduğu sonucunu çıkarabiliriz.

$(I + cT_2)^{-1}$ işlecinin ne olduğunu anlamaya çalışalım. Farzedin ki

$$a \in (I + c\,T_2)(b). \tag{19}$$

Bu bağıntıyı,

$$0 \in b - a + c\,T_2(b) \tag{20}$$

şeklinde yeniden yazalım. Teorem 2'yi kullanırsak (20)'nin

$$b = \operatorname*{argmin}_z \frac{1}{2}\|z - a\|_2^2 + I_{B_\infty}(z) \tag{21}$$

denklemiyle aynı anlama geldiğini çıkarabiliriz. Bu problemin çözümünün ise, B_∞ kümesinin tanımını hatırlar ve 'kırp$_\alpha$' fonksiyonunu

$$\text{kırp}_\alpha(\cdot) = \text{sgn}(\cdot)\min(\alpha, |\cdot|). \tag{22}$$

şeklinde tanımlarsak,

$$b_i = \text{kırp}_1(a_i) \tag{23}$$

olduğunu görebiliriz. Burada b_i ve a_i, b ve a vektörlerinin elemanlarını ifade etmektedir.

Çözümün tek olmasından $(I + cT_2)^{-1}$ işlecinin birebir olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Bulgularımızı özetlersek,

Önerme 1. *$z^* \in Z^*$ bağıntısı ancak ve ancak z^*, $(I + cT_2)^{-1}(I - cT_1)(\cdot)$ işlecinin sabit bir noktası olduğunda doğrudur.*

Önermede geçen sabit nokta özelliğini kullanarak,

$$z^{k+1} = (I + cT_2)^{-1}(I - cT_1)(z^k) \tag{24}$$

şeklinde bir algoritma önerebiliriz. İşleçlerin anlamlarını açarak yazacak olursak,

Algoritma 1. *z^0, y verilmiş olsun. $k \geq 0$ için, belli bir yakınsama kriteri sağlanana kadar,*

$$z^{k+1} = \text{kırp}_1\left((I - cWW^T)z^k + \frac{c}{\lambda}Wy\right). \tag{25}$$

4 Algoritmanın Yakınsama Koşulu

Algoritmanın Z^*'ın bir elemanına yakınsayıp yakınsamayacağını inceleyelim. Öncelikle, kırpma fonksiyonunun ℓ_2 normuna göre yaymayan olmasını da göz önünde bulundurarak, verilen herhangi $\bar{z}$, $\tilde{z} \in B_\infty$ için,

$$\begin{aligned}\|(I+cT_2)^{-1}(I-cT_1)(\bar{z}) - (I+cT_2)^{-1}(I-cT_1)(\tilde{z})\|_2 \\ \leq \|(I - cWW^T)(\bar{z} - \tilde{z})\|_2 \end{aligned} \tag{26}$$

bağıntısını çıkarabiliriz. Böylece $\rho(I - cWW^T) \leq 1$ ise algoritmamızın yaymayan bir işlecin yinelenmesinden oluştuğunu söyleyebiliriz. Bunun özel bir durumu olarak da, verilen herhangi bir $z^* \in Z^*$, bahsi geçen işlecin sabit noktası olduğu için

$$\begin{aligned}\|(I + cT_2)^{-1}(I - cT_1)(z^k) - z^*\|_2 = \|z^{k+1} - z^*\|_2 \\ \leq \|z^k - z^*\|_2 \end{aligned} \tag{27}$$

bağıntısına ulaşabiliriz. Kelimelerle ifade edecek olursak : Artan yinelemeler bizi Z^*'ye sadece yaklaştırabilir. (27)'nin bir başka sonucu da, Z^* kümesi sınırlı olduğu için, başlangıç noktamız z^0 her ne olursa olsun, algoritmamızdan elde ettiğimiz $\{z^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ kümesinin sınırlı olacağıdır (aslında bu sonuca $z^i \in B_\infty$ olduğu için de varabilirdik). Bu da, $z^i \in \mathbb{R}^n$ olduğu için, $\{z^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsayan bir alt dizisi olacağı anlamına gelir (Bolzano-Weierstrass Teoremi gereği, bkz. [8], Thm. 2.42). $\{z^{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisinin böyle bir alt dizi olduğunu ve z^∞ noktasına yakınsadığını farzedelim. Dikkat edin ki z^∞ algoritmamızın sabit bir noktası olmak zorunda değildir. Yine de, eğer $z^\infty \in Z^*$ olduğunu gösterebilirsek, Önerme 1 sayesinde z^∞'un algoritmanın sabit bir noktası olacağı sonucunu çıkarabiliriz. Öyle bir durumda da (27) gereği $\|z^i - z^*\|_2$ dizisinin monoton azalan ve 0'a yakınsayan bir dizi olduğunu, dolayısıyla algoritmanın Z^*'ın bir elemanına yakınsayacağını söyleyebiliriz. Buradaki kritik noktanın, z^∞'un Z^* içinde yer aldığını göstermek olduğunu söyleyebiliriz.

Önerme 2. *W'nun değer kümesinde (range space) $\rho := \rho(I - cWW^T) < 1$ ise Algoritma 1'in tüm toplanma noktaları (cluster point) Z^*'ın elemanıdır.*

Kanıt. $\{z^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ verilmiş herhangi bir z^0 için algoritmanın ürettiği noktalar kümesi olsun. $\{z^{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ bu kümeden çıkarttığımız yakınsak bir alt dizi ve $z^{i_k} \to z^\infty$ olsun. Farzedelim ki $z^\infty \notin Z^*$. O halde, öyle bir $z^* \in Z^*$ bulabiliriz ki $\|z^\infty - z^*\|_2 = d > 0$ sağlanır. W'nun değer kümesine izdüşüm işlecini P ile ifade edelim ve $P^\perp := I - P$ diye tanımlayalım. $W^T z^* \neq W^T z^\infty$ olduğu için (aksi takdirde $z^\infty \in Z^*$ olurdu),

$$\|P(z^* - z^\infty)\|_2 = d_1 > 0, \tag{28}$$

$$\|P^\perp(z^* - z^\infty)\|_2 = d_2 \geq 0 \tag{29}$$

ve $d^2 = d_1^2 + d_2^2$ diyebiliriz. $\{z^{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsak olduğu için, herhangi bir $\epsilon > 0$ verildiğinde öyle bir tamsayı $K(\epsilon)$ bulabiliriz ki $k \geq K(\epsilon)$ olduğunda

$$\|P(z^{i_k} - z^\infty)\|_2 < \epsilon, \tag{30}$$

ve

$$\|P^\perp(z^{i_k} - z^\infty)\|_2 < \epsilon \tag{31}$$

eşitsizlikleri doğru olur. Dikkat edin ki bu durumda

$$\|P(z^{i_k} - z^*)\|_2 < d_1 + \epsilon, \tag{32}$$

$$\|P^\perp(z^{i_k} - z^*)\|_2 < d_2 + \epsilon \tag{33}$$

olacaktır. Dolayısıyla,

$$\|(I + cT_2)^{-1}(I - cT_1)(z^{i_k}) - z^*\|_2^2 \tag{34}$$
$$= \|(I + cT_2)^{-1}(I - cT_1)(z^{i_k})$$
$$- (I + cT_2)^{-1}(I - cT_1)(z^*)\|_2^2 \tag{35}$$
$$\leq \|(I - cWW^T)(z^{i_k} - z^*)\|_2^2 \tag{36}$$
$$= \|P(I - cWW^T)(z^{i_k} - z^*)\|_2^2$$
$$+ \|P^{\perp}(I - cWW^T)(z^{i_k} - z^*)\|_2^2 \tag{37}$$
$$\leq \rho^2 \,(d_1 + \epsilon)^2 + (d_2 + \epsilon)^2 \tag{38}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer,

$$\rho^2 \,(d_1 + \epsilon)^2 + (d_2 + \epsilon)^2 < d_1^2 + d_2^2, \tag{39}$$

olduğunu gösterebilirsek, yeterince küçük bir bir $\epsilon_2 > 0$ için $\|z^{i_k+1} - z^*\|_2 + \epsilon_2 < \|z^{\infty} - z^*\|_2$ olacaktır ve bu da $\|z^{i_{k+r}} - z^*\|_2 \leq \|z^{i_k+1} - z^*\|_2$ herhangi pozitif tamsayı r için doğru olduğundan, $z^{i_k} \nrightarrow z^{\infty}$ sonucunu doğuracaktır. Fakat bu, kanıtın başındaki $z^{i_k} \rightarrow z^{\infty}$ tanımımızla açıkça çeliştiği için, $z^{\infty} \notin Z^*$ varsayımımızın doğru olmadığını çıkarırız ve önerme kanıtlanmış olur.

Şimdi (39)'u yeterince küçük bir ϵ seçerek doğru kılıp kılamayacağımıza bakalım. (39)'un aşağıdaki bağıntıya denk olduğunu görebiliriz:

$$\rho^2 < \frac{d_1^2 + d_2^2 - (d_2 + \epsilon)^2}{(d_1 + \epsilon)^2} = \frac{1 - \epsilon(2d_2 + \epsilon)/d_1^2}{1 + \epsilon(2 + \epsilon)/d_1^2}. \tag{40}$$

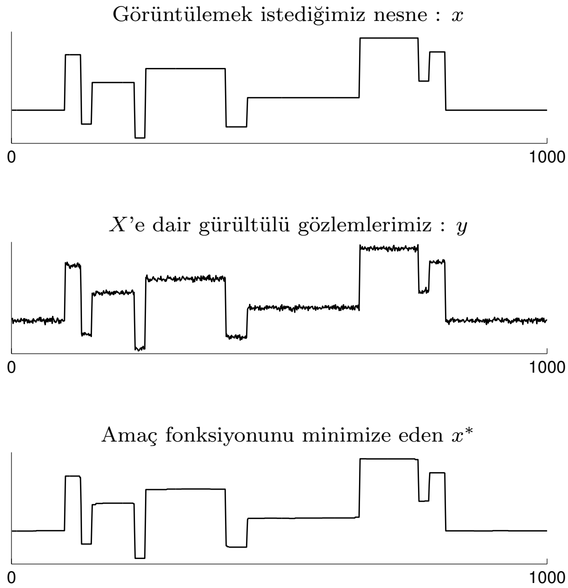
ϵ sayısı 0'a yaklaştıkça, bağıntının sağ tarafındaki terim 1'e yaklaşacaktır. Dolayısıyla yeterince küçük bir ϵ bulabiliriz ki (39) doğru olur ve böylelikle de kanıtımız tamamlanır. □

Önerme 2'nin hemen öncesindeki açıklamalardan aşağıdaki önermeyi elde edebiliriz.

Önerme 3. *W'nun değer kümesinde (range space) $\rho(I - cWW^T) < 1$ ise Algoritma 1 başlangıç noktası ne olursa olsun Z^*'ın bir elemanına yakınsar.*

5 Başarım

Bu bölümde, algoritmanın başarımını Chambolle'ün [1]'de sunduğu algoritmanın başarımıyla karşılaştıracağız. Niyetimiz amaç fonksiyonunu değerlendirmek olmadığı için tek boyutlu basit bir



Şekil. 1: Gözlemlemek istediğimiz nesne (üstteki şekil), bu nesneye dair gözlemlerimiz (ortadaki şekil) ve $\lambda = 1$ için (5)'i minimize eden x^* fonksiyonu (alttaki şekil).

örnek ele alacağız. Elimizde gözlem olarak Şekil 1'de orta panelde gösterilen fonksiyon olsun. Amacımız, asıl nesneyi (yani Şekil 1'in üst panelinde gösterilen fonksiyonu) bu gürültülü gözlemden kestirmek. Burada herhangi bir bozulma uygulanmadığını bildiğimizi varsayıyoruz (yani (4)'te $H = I$). Chambolle'ün algoritmasını, Algoritma 1'in gösterimini kullanarak şöyle özetleyebiliriz:

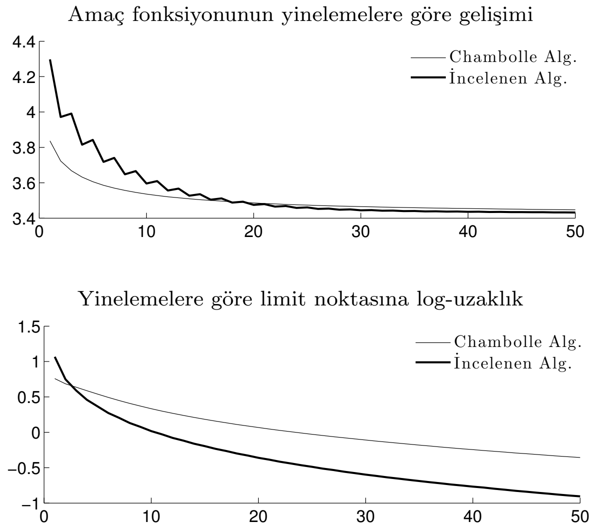
Algoritma 2. *z^0, y verilmiş olsun. $k \geq 0$ için, belli bir yakınsama kriteri sağlanana kadar,*

$$z^{k+1} = \Big((I - cWW^T)z^k + \frac{c}{\lambda}Wy\Big)$$
$$./\, \big(1 + c\,W\,(y/\lambda - W^T z^k)\big)\,.$$

Burada './' işlemi vektör elemanlarını ayrı ayrı bölmeyi ifade etmektedir.

Chambolle'ün bu algoritmayla ilgili ilginç bir gözlemi, [1]'de yakınsama kriteri olarak $I - cWW^T \geq 0$ verilmesine rağmen algoritmanın pratikte $2I - cWW^T \geq 0$ sağlandığında dahi yakınsadığına dairdir. Bizim bir başka ilginç gözlemimiz ise $I - cWW^T \geq 0$ sağlandığında (5)'teki amaç fonksiyonunun monoton olarak azalmasıdır.

Ayrıca dikkat çekmek isteriz ki, 4. Bölümde sunduğumuz yakınsama kriteri Chambolle tarafından yeterliliği kanıtlanan yakınsama kriterine göre (2 kat) daha büyük bir c sabiti kullanmaya izin vermektedir.



Şekil. 2: Sunulan algoritmanın Chambolle'ün algoritmasıyla karşılaştırılması. Üstteki şekilde (5)'te verilen amaç fonksiyonunun logaritmasının yinelemelere göre nasıl değiştiği gösterilmiştir. Alttaki şekilde ise algoritmaların çözüm noktasına log-uzaklığı gösterilmiştir.

Deneyimize geri dönelim. W matrisini $H(z) = (-1 + z)/\sqrt{2}$ süzgecinin evrişim matrisi olarak seçip, $\lambda = 1$ alıp Chambolle'ün algoritmasını 10000 yineleme yapacak şekilde koşturarak Şekil 1'in alt panelindeki amaç fonksiyonunu (yaklaşık olarak) minimize eden fonksiyonu elde ettik. Burada c için izin verilen en yüksek değer olan 1'i kullandık.

Algoritmamızın hızını Chambolle'ün algoritmasının hızıyla karşılaştırmak için aynı gözlem fonksiyonuna kendi algoritmamızı $c = 2$ alarak uyguladığımızda ise amaç fonksiyonunun logaritmasının yinelemelere göre değişimini Şekil 2'nin üst panelinde gösterilen şekilde elde ettik. Buradan algoritmamızın monoton azalan bir algoritma olmadığını ve özellikle ilk yinelemelerde Chambolle'ün algoritmasının ($c = 1$ alındığında) amaç fonksiyonunu daha hızlı azalttığını görebiliriz. Fakat (Şekil 1 alt panelde gösterilen) limit fonksiyonuna olan log-uzaklığa baktığımızda durum değişmektedir. Bu açıdan algoritmamızın Chambolle'ün algoritmasına göre çok daha hızlı bir şekilde yakınsadığını söyleyebiliriz. Yine de adil olmak gerekirse bu fark Chambolle'ün algoritmasında $c = 2$ aldığımızda neredeyse yok olmaktadır. Buna rağmen, Chambolle'ün algoritması için bu seçimi destekleyen teorik bir sonuç bildirilmediği için sunduğumuz algoritmanın ve çözümlemesinin anlamlı olduğunu düşünüyoruz.

6 Sonuç

Bu bildiride çözümleme önseli kullanarak düzenlileştirilen gürültü giderme problemini çözen bir algoritma önerdik. Ayrıca algoritmanın yakınsama çözümlemesinden hangi koşulda yakınsayacağını çıkardık ve yakınsama hızını aynı işi yapan başka bir algoritmanın hızı ile karşılaştırdık. Sunduğumuz algoritmanın daha genel tersine problemlerin çözümü için uyarlanmasının daha da ilginç sonuçlara götüreceğini umuyoruz.

Kaynaklar

[1] A. Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 20(1-2):89–97, January-March 2004.

[2] O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases.* Birkhäuser, 2003.

[3] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* SIAM, 1992.

[4] J. Eckstein. Splitting methods for monotone operators with applications to parallel optimization. Doktora tezi, MIT, Operations Research Merkezi, 1989.

[5] M. Elad, P. Milanfar, and R. Rubinstein. Analysis versus synthesis in signal priors. *Inverse Problems*, 23(3):947–968, June 2007.

[6] J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Fundamentals of Convex Analysis.* Springer, 2004.

[7] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* Academic Press, 1970.

[8] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis.* McGraw-Hill, 3rd edition, 1976.

[9] I. W. Selesnick and M. A. T. Figueiredo. Signal restoration with overcomplete wavelet transforms: comparison of analysis and synthesis priors. In *Proc. SPIE Wavelets XIII*, 2009.