

## ALTINCI BÖLÜM

### YAPI SİSTEMLERİNİN DEPLASMAN ANALİZİ

#### 6.1. GİRİŞ

Burada ve daha sonraki bölümlerde gösterileceği gibi deplasman hesaplama yöntemlerinin en önemli uygulamaları statikçe belirsiz yapı sistemlerinin analizinde bulunmaktadır.

Mühendislik yapılarının birçoğunda deplasmanlar küçüktür ve nadiren önemli bir dizayn kriteri olarak kullanılır; fakat statikçe belirsiz bir sistemdeki çeşitli elemanların bağıl rijitlikleri yapı içinde gerilme dağılımını etkilemektedir. Bu nedenle bu gibi yapı sistemlerinin analizinde şekildeğişimlerini gözönünde bulundurmak gerekir.

Bu bölümde tanıtılan deplasman analiz yöntemleri; Castigliano yöntemi, Rayleigh-Ritz yöntemi ve sonlu farklar yöntemidir. Sonlu elemanlar yöntemi ayrı bir bölümde tanıtılmaktadır. Ayrıca statikçe belirsiz basit yapıların analizi için birim-yük yöntemi de tanıtılmaktadır. İncelenen enerji yöntemleri sırasıyla virtüel deplasmanlar ve virtüel kuvvetlerle ilgili virtüel iş ve virtüel bütünleyici iş prensiplerinden çıkarılmıştır. Bu bölümde şekildeğişimlerinin küçük ve bunların sebep olduğu deplasmanların da küçük olduğu farzedilmektedir. Bu varsayımlara ilave olarak malzemenin mükemmel elastik olduğu kabul edilmektedir.

## 6.2. İŞ VE BÜTÜNLEYİCİ İŞ; ŞEKİLDEĞİŞTİRME VE BÜTÜNLEYİCİ ŞEKİLDEĞİŞTİRME ENERJİLERİ

$Q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) genelleştirilmiş kuvvet dizisinin etkidiği bir yapıyı düşünelim. Bu kuvvetler doğrultusunda yapı genelleştirilmiş  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) deplasmanlarını yapacaktır. Tipik bir  $Q_n$  kuvveti ve buna karşılık gelen  $q_n$  deplasmanı Şek.6.1a'da grafik olarak gösterilmiştir. Eğri altında kalan alan,  $Q_n$  kuvvetinin  $q_n$  deplasmanı yapması sırasında yapılan  $W$  işini temsil eder. Eğrinin üzerinde kalan alan, bütünleyici  $\bar{W}$  iş olarak tanımlanır. Statik denge konumunda bulunan bir sistemde, ısının açığa çıkması ihmal edilirse, enerjinin sakınımına dayanılarak sistem üzerine yapılan işin, sistemde depolanan şekildeğiştirme enerjisine eşit olduğu söylenebilir, veya

$$W = U \quad (6.1)$$

ve

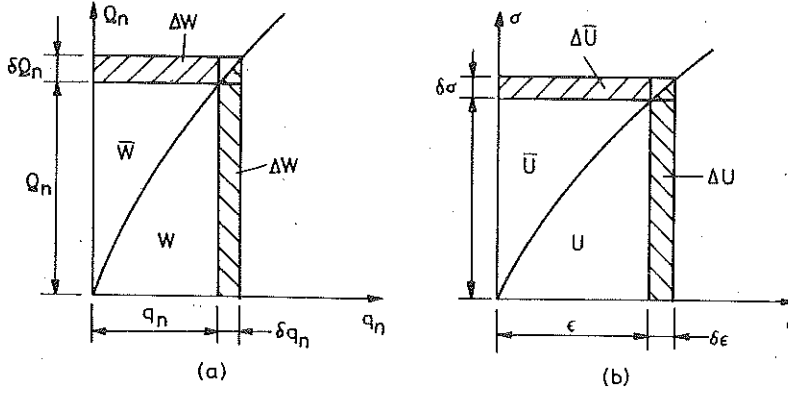
$$\bar{W} = \bar{U}$$

Burada sırasıyla  $U$  ve  $\bar{U}$  şekildeğiştirme enerjisi ve bütünleyici şekildeğiştirme enerjisidir. Şek.6.1b'de bu büyüklükler grafik olarak gösterilmektedir.

## 6.3. VİRTÜEL DEPLASMANLAR PRENSİBİ VE İLGİLİ KURAMLAR

Gerçekte böyle deplasmanlar yapılmasa bile varyasyonel mekanikte yapı sisteminin bağlarına uygun bir dizi sonsuz küçük deplasmanlar yaptığı farzedilir. Yapının bu hayali hareketine, genelde virtüel deplasmanlar denir ve buna karşılık gelen işe de virtüel iş denir.

Şek.6.1'de gösterildiği gibi yapının virtüel deplasmanına küçük bir  $\delta q_n$  değişimi yaptırılınsın. Bu, virtüel işte  $\delta W$  ve buna karşılık gelen şekildeğiştirme enerjisinde de  $\delta U$  değişimlerini içerir. Bu, Şek.6.1'de taralı düşey alan ile gösterilmiştir. Eğer virtüel deplasmanlar sırasında uygulanan  $\{Q\}$  dış yükleri ve oluşan  $\{\Sigma\}$  iç gerilmeleri sabit kalıyor ise, virtüel iş ve virtüel şekildeğiştirme enerjileri Şek.6.1'den kolayca elde edilebilir ve



Şekil 6.1

$$\Delta W = \delta W = Q_n \delta q_n \quad (6.3)$$

$$\Delta U^* = \delta U^* = \sigma \delta \epsilon \quad (6.4)$$

ile ifade edilir. Burada  $\delta$  birinci varyasyonu (değişimi) gösterir ve bir d diferansiyel operatörü gibi iş görür.  $\delta U^*$  birim hacimde şekildeğiştirme enerjisindeki varyasyonu, yani enerji yoğunluğu varyasyonunu gösterir,

$$\delta U = \int_V \delta U^* dV \quad (\text{hacim integrali}) \quad (6.5)$$

$\delta W$  ve  $\delta U$  değişimleri bütün  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) deplasmanlarındaki değişimler için düşünülürse;

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (6.6)$$

veya matris formunda Denklem (6.6),

$$\delta W = [\delta q] \{Q\} \quad (6.7)$$

şeklini alır  $[ ]$  ve  $\{ \}$  sembolleri sırasıyla satır ve sütun matrisleri gösterir. Benzer şekilde buna karşılık gelen şekildeğiştirme enerjisi yoğunluğundaki varyasyon ise,

$$\delta U^* = [\delta E] \{\Sigma\} \quad (6.8)$$

şeklinde ifade edilebilir. Genelde buradaki şekildeğiştirme ve gerilme alanı;

$$[\delta E] = \delta [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{xz} \quad \epsilon_{xy}] \quad (6.9)$$

ve

$$\{\Sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

ile belirtilir.

Virtüel deplasmanlar prensibi, yapının bağlarına uygun her bir virtüel deplasmanında  $\{Q\}$  kuvvetlerinin yaptığı  $\delta W$  virtüel işinin, virtüel şekildeğiştirme enerjisi  $\delta U^*$ 'ya eşit olduğunda şekildeğiştirebilen elastik bu yapı sisteminin denge konumunda olduğunu söyler. Bu, matematiksel olarak ifade edilmek istenirse,

$$\delta W = \delta U \quad (6.11)$$

veya

$$[\delta q] \{Q\} = \int_V [\delta E] \{\Sigma\} dV \quad (6.12)$$

yazılabilir. Uygulanan  $\{Q\}$  dış yükleri ile  $\{\Sigma\}$  iç gerilmelerinin burada denge halinde olduğu farzedilir ve  $\{\delta q\}$  koordinat deplasmanları ile  $\{\delta E\}$  şekildeğişimleri uygunluk şartını sağlarlar:

$$\{\delta E\} = [\lambda] \{\delta q\} \quad (6.13)$$

Denklem (6.13), Denklem (6.12)'ye konulursa,

$$[\delta q] \{Q\} = \int_V [\delta q] [\lambda]^T \{\Sigma\} dV \quad (6.14)$$

elde edilir veya açık şekilde;

$$[\delta q_1 \quad \delta q_2 \dots \delta q_i \dots \delta q_n] \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_i \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} = \int_V [\delta q_1 \quad \delta q_2 \dots \delta q_i \dots \delta q_n]$$

$$x \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \dots \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \dots \lambda_{2n} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \dots \lambda_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{61} & \lambda_{62} & \lambda_{63} \dots \lambda_{6n} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{bmatrix} dV \quad (6.15)$$

yazılabilir. Burada T, matrisin transpozisini (yani satırlar ve bunlara karşılık gelen sütunlar yerdeğiştirilmiştir) gösterir.

Herbir  $\delta q_r$  ( $r=1,2,\dots,n$ ;  $r \neq j$ ) virtüel deplasmanı,  $i$ 'inci  $\delta q_i$  deplasmanı birim değerde alınıp diğerleri sifıra eşitlenirse, Denklem (6.16)'dan kolayca görülebileceği gibi Denklem (6.14),

$$1. Q_i = \int_V 1 [\lambda] \{\Sigma\} dV$$

veya

$$Q_i = \int_V [\lambda] \{\Sigma\} dV \quad (6.16)$$

'ye eşit olur. Burada Denklem (6.13) ile tanımlanan ve

$$\delta q_r = \begin{cases} 0 & r \neq i \\ 1 & r = i \end{cases}$$

şartlarında  $[\lambda_i]$  satır matrisi,

$$[\lambda_i] = [\delta E_i] \quad (6.17)$$

şeklini alır. Denklem (6.16), genel olarak birim-deplasman yöntemi ismi ile bilinen yöntemi tanımlar. Bu teorem hakkında daha ayrıntılı bilgi için Argyris ve Kelsey<sup>23</sup>'e başvurulabilir.

Tersinir yapı sistemlerinde Denklem (6.11),

$$\delta(U+P) = \delta V = 0 \quad (6.18)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\delta V$  toplam potansiyel enerjinin birinci varyasyonudur

ve

$$\delta W = -\delta P = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

şeklindedir. Denklem (6.18) toplam potansiyel enerjinin stasyonerliği prensibidir ve yapı analizinde Rayleigh-Ritz yönteminin esasını oluşturan,

$$\frac{\partial V}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (6.19)$$

ifadesine eşdeğer olduğu gösterilebilir.

Virtüel deplasmanlar prensibine dayanan bir diğer teorem Castigliano'nun birinci teoremidir.

Denklem (6.3) ve (6.11)'den

$$U = [\delta q] \{Q\} \quad (6.20)$$

olur.  $\delta U$ 'nun  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) genelleştirilmiş deplasman koordinatlarının fonksiyonu olduğu hatırlanır ve Taylor serisine açılımı kullanılırsa Denklem (6.20);

$$\delta U = \sum_{i=1}^n \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \delta q_i \delta q_j + \dots$$

şeklini veya matris formunda;

$$\delta U = [\delta q] \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\} + \frac{1}{2} [\delta q] [S] \{\delta q\} + \dots \quad (6.21)$$

şeklini alır. Burada  $\delta$  sembolü kısmi diferansiyeli ve [S] matrisi; elemanları

$$S_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.22)$$

olan katılık matrisini gösterir. Denklem (6.21)'de yalnız  $\delta q$  'ye göre birinci dereceden varyasyonlar alınırsa Denklem (6.20)'den

$$[\delta q] \{Q\} = [q] \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\}$$

veya

$$[\delta q] \left( \{Q\} - \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\} \right) = 0$$

olur.  $[\delta q]$  'lar bağımsız deplasmanlar olduğundan

$$\{Q\} - \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\} = 0$$

veya

$$\{Q\} = \left\{ \frac{\partial U}{\partial q} \right\} \quad (6.23)$$

olur.  $i=r$  için Denklem (6.23)

$$Q_r = \frac{\partial U}{\partial q_r} \quad (6.24)$$

olduğunu belirtir. Denklem (6.24) Castigliano'nun birinci teoremidir.

#### 6.4. VİRTÜEL KUVVETLER PRENSİBİ VE İLGİLİ TEOREMLER

Varyasyonel mekanikte virtüel kuvvetlerin irdelenmesi, Kısım 6.3.'te açıklanan virtüel deplasmanlara analogdur. Şek.6.1'den kolayca görülebileceği gibi, statik denge



şartlarına uygun, virtüel kuvvete küçük bir  $\delta Q_n$  değişimi uygulandığında buna karşılık gelen bütünleyici virtüel iş ve bütünleyici şekildeğiştirme enerjisi yoğunluğu;

$$\Delta \bar{W} = \delta \bar{W} = q_n \delta Q_n \quad (6.25)$$

ve

$$\Delta \bar{U}^* = \delta \bar{U}^* = \varepsilon \delta \sigma \quad (6.26)$$

olur.

$$\delta \bar{U} = \int_v \delta \bar{U}^* dV \quad (\text{hacim integrali}) \quad (6.27)$$

şeklindedir. Bütün  $Q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) kuvvetlerindeki varyasyonlar gözönünde

bulundurulursa,  $\delta \bar{W}$  ve  $\delta \bar{U}$  varyasyonları Denklem (6.25) ve (6.26)'dan

$$\delta \bar{W} = [\delta Q] \{q\} \quad (6.28)$$

ve

$$\delta \bar{U} = \int_v [\delta \Sigma] \{E\} dV \quad (6.29)$$

olur.

Virtüel kuvvetler prensibi <sup>24</sup> (virtüel iş prensibi) statik denge şartlarına uygun her bir  $\delta Q$  virtüel kuvvet artışında, bütünleyici virtüel iş, bütünleyici şekildeğiştirme enerjisine eşitse, elastik sistemin uygun bir deformasyon formunda olduğu söylenir. Matematiksel olarak bu prensip

$$\overline{\delta W} = \overline{\delta U} \quad (6.30)$$

veya

$$[\delta Q] \{q\} = \int_v [\delta \Sigma] \{E\} dV \quad (6.31)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\{q\}$  deplasmanları ve bunlara karşılık gelen  $\{E\}$  şekildeğişimleri birbirlerine uygundur ve  $\{\delta Q\}$  virtüel kuvvetleri ile bunlara karşılık gelen  $\{\delta \Sigma\}$  gerilmeleri, denge şartını sağlar:

$$\{\delta \Sigma\} = [\Phi] \{\delta Q\} \quad (6.32)$$

Denklem (6.32), Denklem (6.31)'e konulursa

$$[\delta Q] \{q\} = \int_v [\delta Q] [\Phi]^T \{E\} dV \quad (6.33)$$

verir.

Denklem (6.33)'te herbir virtüel  $\delta Q_r$  [ $r=1,2,\dots,n$ ],  $r \neq i$ ] kuvvetlerinden  $i$ 'ncisi birim değer, diğerleri sıfır kılınırsa denklem;

$$q_i = \int_v [\Phi_i] \{E\} dV \quad (6.34)$$

şeklini alır. Burada Denklem (6.32) ile tanımlanan  $[\Phi]$  satır matrisi

$$\begin{array}{l} r \neq i \text{ için} \\ r = i \text{ için} \end{array} \delta Q_r = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

şartlarında

$$[\Phi_i] = [\delta \Sigma_i] \quad (6.35)$$

halini alır. Denklem (6.34), Argyris ve Kelsey tarafından birim-yük yöntemi olarak isimlendirilmiştir.

Bütünleyici potansiyelin stasyoner değeri prensibi Denklem (6.18)'den çıkarılabilir ve

$$\delta(\bar{P} + \bar{U}) = \delta \bar{V} = 0 \quad (6.36)$$

olarak verilir. Burada;

$$\delta \bar{W} = -\delta \bar{P} = \sum_{i=1}^n q_i \delta Q_i \quad (6.37)$$

dir.

Bütün  $i$  koordinatlarında Denklem (6.36)'nın, uygunluk şartını temsil ettiği ve

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial Q_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.38)$$

eşdeğer olduğu gösterilebilir.

Denklem (6.30), ele alınır, Denklem (6.28)'den bütünleyici şekildeğiştirme enerjisi;

$$\delta \bar{U} = [\delta Q] \{q\} \quad (6.39)$$

şeklinde ifade edilir. Denklem (6.39) Taylor serilerine açılırsa

$$\delta\bar{U} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\bar{U}}{\partial Q_i} \delta Q_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial Q_i \partial Q_j} \delta Q_i \delta Q_j + \dots$$

halini alır, matris formunda bu

$$\delta\bar{U} = [\delta Q] \left\{ \frac{\partial\bar{U}}{\partial Q} \right\} + \frac{1}{2} [\delta Q][\alpha]\{\delta Q\} + \dots \quad (6.40)$$

yazılabilir. Burada  $[\alpha]$ , katsayıları

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial Q_i \partial Q_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (6.41)$$

ile tanımlanan esneklik matrisidir. Denklem (6.40)'da yalnız birinci derece varyasyonlar alınırsa Denklem (6.39)'dan;

$$[\delta Q]\{q\} = [\delta Q] \left\{ \frac{\partial\bar{U}}{\partial Q} \right\}$$

veya

$$[\delta Q] \left( \{q\} - \left\{ \frac{\partial\bar{U}}{\partial Q} \right\} \right) = 0 \quad (6.42)$$

elde edilir.  $[\delta Q]$  'lar bağımsız herhangi bir değerde kuvvetler olduğundan Denklem (6.42)'nin gerçekleşmesi için şunların geçerli olması gerekir:

$$\{q\} - \left\{ \frac{\partial\bar{U}}{\partial Q} \right\} = 0$$

veya

$$\{q\} = \left\{ \frac{\partial \bar{U}}{\partial Q} \right\} \quad (6.43)$$

$i=r$  için Denklem (6.43),

$$q_r = \frac{\partial \bar{U}}{\partial Q_r} \quad (6.44)$$

ya eşdeğerdir. Bu da Castigliano'nun ikinci teoremidir.

## 6.5. LİNEER ELASTİK YAPI SİSTEMLERİ

Davranışları Şek.6.2'de gösterildiği gibi lineer elastik olan yapı sistemlerinde sistem üzerinde yapılan iş, bütünleyici işe eşittir; benzer şekilde depolanan şekildeğiştirme enerjisi, bütünleyici şekildeğiştirme enerjisine eşittir. Şek.6.2'den kolayca görülebileceği gibi iş ve şekildeğiştirme enerjileri ve bunların bütünleyicilerinin ifadeleri

$$W = \bar{W} = \frac{1}{2} [Q_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_n] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

veya kapalı matris formunda

$$W = \bar{W} = \frac{1}{2} [Q][q] \quad (6.45a)$$

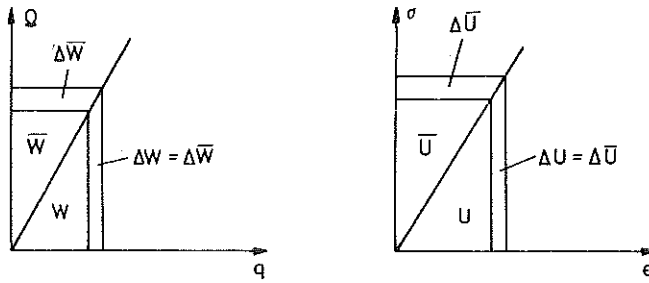
ve

$$U = \bar{U} = \frac{1}{2} \int_v [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \epsilon_{yz} \quad \epsilon_{xz} \quad \epsilon_{xy}] \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dV \quad (6.46)$$

veya kapalı matris formunda

$$U = \bar{U} = \frac{1}{2} \int_v [E] (\Sigma) dV \quad (6.46a)$$

olur. Burada  $Q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) uygulanan dış yükler ve  $q_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) bunlara karşılık gelen düğüm noktaları deplasmanları;  $[E]$  ve  $\{\Sigma\}$  matrisleri sırasıyla şekildeğişimleri ve gerilme alanlarıdır.



Şekil 6.2 Lineer elastik davranış

Hooke Yasası'ndan yararlanılarak Denklem (6.46) yalnızca gerilmeler veya

şekildeğişimleri cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$U = \bar{U} = \frac{1}{2} \int_v [\Sigma] [N] (\Sigma) dV \quad (6.47)$$

veya

$$U = \bar{U} = \frac{1}{2} \int_v [\epsilon] [\Theta] (\epsilon) dV \quad (6.48)$$

[N] ve [\Theta] matrisleri

$$[N] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \text{simetrik} \\ -\nu & 1 & & & & & \\ -\nu & -\nu & 1 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

ve

$$[\Theta] = \eta \begin{bmatrix} 1-\nu & & & & & & \text{simetrik} \\ \nu & 1-\nu & & & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & & \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\eta = E/(1+\nu) (1-2\nu)$$

E = elastisite modülü

$\nu$  = Poisson oranı

dır.

Çubuk elemanların birleştirilmesiyle meydana getirilen yapı sistemlerinde şekildeğiştirme enerjisini eleman iç kuvvetleri cinsinden ifade edip, daha sonra her elemanın şekildeğiştirme enerjisine katkılarını toplayarak sistemin toplam şekildeğiştirme enerjisini bulmak daha uygundur.

Şekildeğiştirme enerjisi ifadesini çıkarmak için uzunluğu boyunca herhangi bir  $\zeta$  noktasında iç yükleri  $M_z(\zeta)$ ,  $T(\zeta)$ ,  $V_y(\zeta)$  ve  $S(\zeta)$  ile verilen lineer elastik bir çubuk düşünelim. Burada  $M_z = z$  eksenine göre eğilme momenti,  $T =$  burulma,  $V_y = y$  doğrultusunda kesme kuvveti ve  $S =$  aksenal kuvvettir. İç kuvvetler sistemi tarafından çubukta oluşturulan normal kuvvetler, Bölüm 5'ten elde edilebilir ve

$$\sigma_{xxa} = \text{eksenel kuvvetten dolayı normal gerilme} = \frac{S(\zeta)}{A(\zeta)} \quad (a)$$

$$\sigma_{xxb} = \text{eğilmeden dolayı normal gerilme} = \frac{M_z(\zeta)}{I_z(\zeta)} y. \quad (b)$$

ile verilir. Eğer  $\sigma_{xx}$  'in sıfır olmayan tek gerilmenin  $\sigma_{xx}$  olduğu farzedilirse, Denklem (6.47);

$$U_\sigma = \frac{1}{2} \int_v \frac{\sigma_{xx}^2}{E} dV \quad (c)$$

şeklini alır. Burada  $U_\sigma =$  yalnızca normal gerilmelerden dolayı şekildeğiştirme enerjisidir. Denklem (a) ve (b), Denklem (c)'de yerlerine konulursa



$$U_{\sigma} = U_{\sigma_a} + U_{\sigma_b} = \frac{1}{2} \int_V \frac{S^2(\zeta)}{EA^2(\zeta)} dV + \frac{1}{2E} \int_V \frac{M_z^2(\zeta)}{EI_z^2(\zeta)} y^2 dV$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\zeta} \int_A \frac{S^2(\zeta)}{EA^2(\zeta)} dA d\zeta + \frac{1}{2E} \int_{\zeta} \int_A \frac{M_z^2(\zeta)}{EI_z^2(\zeta)} y^2 dA d\zeta$$

verir, fakat

$$\int_A dA = A(\zeta) = \text{kesit alanı}$$

ve

$$\int_A y^2 dA = I_z(\zeta) = \text{kesit atalet momenti}$$

olduğundan

$$U_{\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\zeta} \frac{s^2(\zeta)}{EA(\zeta)} d\zeta + \frac{1}{2} \int_{\zeta} \frac{M_z^2(\zeta)}{EI_z(\zeta)} d\zeta \quad (d)$$

olur.

Yanlamasına kesmeden dolayı şekildeğiştirme enerjisi Şek.6.3 gözönünde bulundurulurak elde edilebilir. Çubuğun sağ yüzüne etkiyen ortalama kayma gerilmesi;

$$\sigma_{\zeta y} = \frac{V_y(\zeta)}{A_s(\zeta)} = \frac{V_y(\zeta)}{kA(\zeta)} \quad (e)$$

ile ifade edilebilir. Burada  $A_s(\zeta)$  etkin kayma alanı,  $A(\zeta)$  çubuğun gerçek kesit alanı ve  $k$  kiriş yüksekliği boyunca kayma gerilmesi dağılımını hesaba katan şekil katsayısıdır.

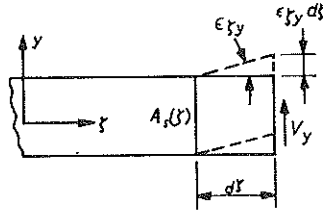
Hooke yasasından;

$$\epsilon_{\zeta y} = \frac{\sigma_{\zeta y}}{G} \quad (f)$$

Denklem (e), Denklem (f)'de kullanılırsa

$$\epsilon_{\zeta y} = \frac{V_y(\zeta)}{GkA(\zeta)} \quad (g)$$

olur.



Şekil 6.3

$V_y(\zeta)$  kuvveti tarafından  $d\zeta$  diferansiyel eleman üzerine yapılan iş, depo edilen şekildeğiştirme enerjisine eşittir veya

$$\begin{aligned} dW = dU_s &= \frac{1}{2} V_y \epsilon_{\zeta y} d\zeta \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_y^2(\zeta)}{GkA(\zeta)} d\zeta \end{aligned}$$

Böylece

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\zeta} \frac{V_y^2(\zeta)}{GkA(\zeta)} d\zeta \quad (h)$$

olur.

Bir T burulmasından dolayı şekil değiştirme enerjisinin

$$U_t = \frac{1}{2} \int_{\zeta} \frac{T^2(\zeta)}{GJ} d\zeta \quad (i)$$

ile verilebileceği gösterilebilir. Burada J = kutupsal atalet momentidir.

Bu şekilde m adet çubuk yapı elemanından meydana gelmiş bir yapı sisteminin şekil değiştirme enerjisi ifadesi;

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\zeta} \left[ \frac{S^2(\zeta)}{EA(\zeta)} + \frac{M^2(\zeta)}{EI(\zeta)} + \frac{V^2(\zeta)}{kGA(\zeta)} + \frac{T^2(\zeta)}{GJ(\zeta)} \right] d\zeta$$

şeklinde yazılabilir.

Burada m = yapıdaki toplam eleman sayısı

S = aksel iç yük

M = iç eğilme momenti

V = iç kesme kuvveti

T = iç burulma

AE, EI, AG, GJ = sırasıyla çekme, eğilme, kesme ve burulma rijitlikleri

A, I, J = sırasıyla kesit alanı, kesit atalet momentini ve kutupsal atalet momentini

G = kayma modülü

k = kiriş yüksekliği boyunca kayma gerilmeleri dağılımını hesaba katan kayma-şekil katsayısı (enli başlıklarda k=1 iken dikdörtgen kesitlerde k=0,833'tür)

$\zeta$  = genelleştirilmiş koordinat ekseni.

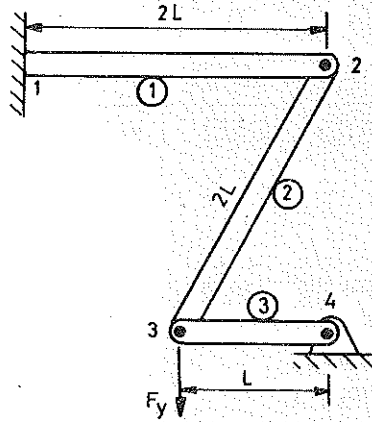
## 6.6. YAPILARIN DEPLASMAN ANALİZİNDE CASTIGLIANO'NUN İKİNCİ YASASI

Lineer yapı sistemleri için Castigliano'nun ikinci yasası;

$$q_r = \frac{\partial U}{\partial Q_r} \quad (U = \bar{U}) \quad (6.52)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem yapı üzerindeki herhangi bir  $r$  noktasının etkiyen  $Q$  kuvveti doğrultusundaki  $q$  deplasmanın toplam şekil değiştirme enerjisinin  $Q$ 'ya nazaran birinci kısmi türevine eşit olduğunu gösterir. Aşağıdaki örnekler sıkça kullanılan bu yasanın yapı analizindeki kullanımını gösterecektir.

**Örnek 6.1** Şekilde gösterilen yapının 3 noktasının düşey deplasmanını hesaplayınız. Bütün elemanların aynı malzemeden yapıldığı ve aynı kesit özelliklerine sahip olduğu farzedilecektir. 2,3 ve 4 noktaları mafsallıdır.



**ÇÖZÜM** Yapıda depolanan toplam şekil değiştirme enerjisi

$$U = U_1 + U_2 + U_3$$

dür. Burada  $U_1$ ,  $U_2$  ve  $U_3$  sırasıyla 1, 2 ve 3 elemanlarının şekil değiştirme enerjileridir. 2 ve 3 elemanlarının aksel çubuk elemanı olduğuna dikkat edilirse bunların şekil değiştirme enerjileri,

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2L} \frac{S_2^2}{AE} dx_{32}$$

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{S_3^2}{AE} dx_{34}$$

ile ifade edilebilir.  $x_{ij}$  koordinatı eksen yönünün  $i$ 'den  $j$ 'ye doğru alındığını belirtir. 1 elemanında eğilme, kesme ve eksenel yük olarak iç yükler bulunur. Bu nedenle bu eleman için şekildeğiştirme enerjisi ifadesi;

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2L} \frac{S_1^2}{AE} dx_{21} + \frac{1}{2} \int_0^{2L} \frac{M_1^2}{EI} dx_{21} + \frac{1}{2} \int_0^{2L} \frac{V_1^2}{kAG} dx_{21}$$

şeklinde yazılabilir. Herbir elemandaki iç yükler statikten bulunabilir ve

$$S_3 = \frac{F_y}{\sqrt{3}}$$

$$S_2 = \frac{2F_y}{\sqrt{3}}$$

$$S_1 = \frac{F_y}{\sqrt{3}}$$

$$M_1 = F_y x_{21}$$

$$V_1 = F_y$$

değerindedir. Uygun şekilde enerji ifadesine yerleştirilirse:

$$U = \frac{1}{2AE} \left( \frac{1}{3} \int_0^{2L} F_y^2 dx_{21} + \frac{4}{3} \int_0^{2L} F_y^2 dx_{32} + \frac{1}{3} \int_0^L F_y^2 dx_{34} \right) + \frac{1}{2EI} \int_0^{2L} F_y^2 x_{21}^2 dx_{21} + \frac{1}{2kAG} \int_0^{2L} F_y^2 dx_{21}$$

veya

$$U = \left( \frac{11L}{6AE} + \frac{4L^3}{3EI} + \frac{L}{kAG} \right) F_y^2$$

Castigliano yasası kullanılırsa Denklem (6.52);

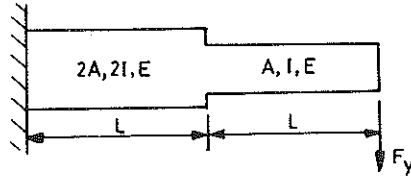
$$\delta_y = -\frac{\partial U}{\partial F_y} = \left( \frac{11L}{3AE} + \frac{8L^3}{3EI} + \frac{2L}{kAG} \right) F_y$$

verir. Eğer kayma deformasyonu ihmal edilirse;

$$\delta_y = \left( \frac{11L}{3AE} + \frac{8L^3}{3EI} \right) F_y$$

olur.

**Örnek 6.2** Şekilde gösterilen konsol kirişin ucundaki eğimi ve düşey deplasmanı bulunuz. Kayma deformasyonunu ihmal ediniz.

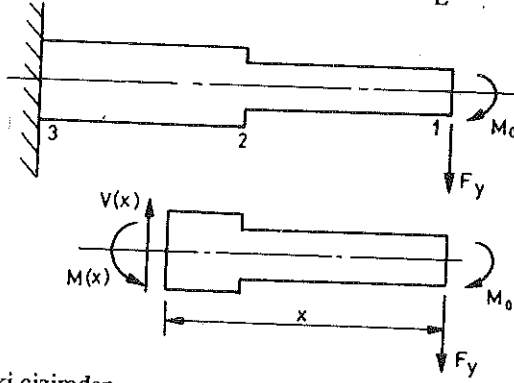


**ÇÖZÜM** Castigliano'nun ikinci yasası kullanılarak belirli bir koordinat deplasmanını

bulmak için deplasmanın araştırıldığı noktada, deplasman yönünde bir kuvvetin bulunması gerektiğini hatırlamak lazım. Şekilde gösterildiği gibi konsol kirişin ucundaki eğimi bulmak için bu noktaya hayali bir moment uygulanması gerekir. Eğim bulduktan sonra gerçek yapıda bulunmayan bu moment sıfır kılınır.

Bu hal için şekildeğiştirme enerjisi ifadesi

$$U = \frac{1}{2} \int_x \frac{M^2(x)}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{12}^2}{EI_{12}} dx + \frac{1}{2} \int_L^{2L} \frac{M_{23}^2}{EI_{23}} dx$$



şeklindedir. Yukarıdaki çizimden

$$M_{12} = M_{23} = M_o + F_y x$$

olduğu görülebilir. Böylece

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L (M_o + F_y x)^2 dx + \frac{1}{4EI} \int_L^{2L} (M_o + F_y x)^2 dx$$

$$= \frac{3}{4EI} \left( M_o^2 L + \frac{5M_o F_y L^2}{3} + F_y^2 L^3 \right)$$

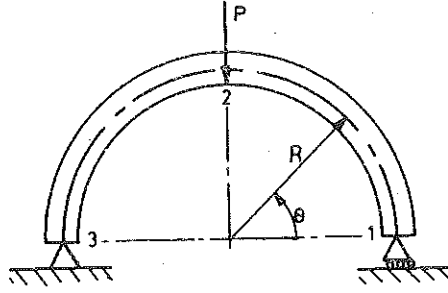
Denklem (6.52) kullanılarak;

$$\delta_y = \frac{\partial U}{\partial F_y} \Big|_{M_o=0} = \frac{3F_y L^3}{2EI}$$

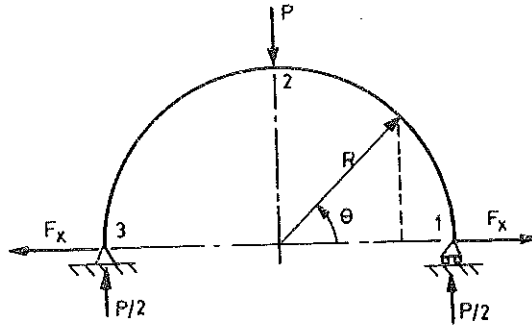
$$\text{eğilim} = \theta = \frac{\partial U}{\partial M_o} \Big|_{M_o=0} = \frac{5F_y L^2}{4EI}$$

bulunur.

**Örnek 6.3** Şekilde gösterilen yarım daire kemerin sağ mesnedindeki yatay deplasmanı bulunuz. Yalnız eğilme deformasyonlarının bulunduğu ve EI'nın sabit olduğu farzedilecektir.



**ÇÖZÜM** 1 noktasındaki yatay deplasmanı bulmak için bu noktaya şekilde gösterildiği gibi hayali bir yatay yük uygulanmalıdır. Eğilme momentinin bulunması kolayca hesaplanabilir ve





$$M_{12} = R(1-\cos\theta) \frac{P}{2} + (R \sin\theta)F_x \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M_{32} = M_{12}$$

ile belirtilebilir.

Böylece şekildeğiştirme enerjisi

$$U = 2 \left( \frac{1}{2} \int_s \frac{M_{12}^2}{EI} ds \right) = 2 \left( \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi/2} M_{12}^2 R d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} \left[ R(1-\cos\theta) \frac{P}{2} + F_x R \sin\theta \right]^2 R d\theta$$

olur. Castigliano'nun ikinci teoremi kullanılırsa;

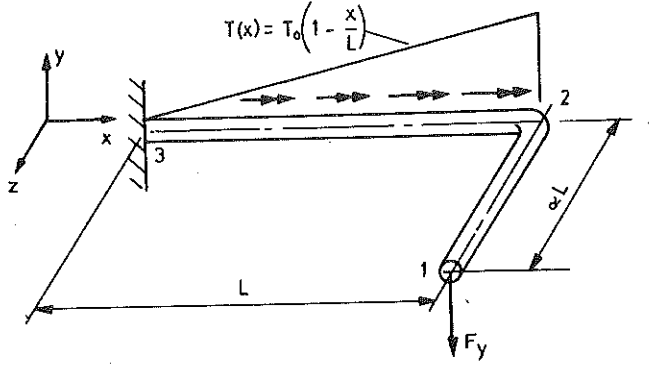
$$\delta_x = \frac{\partial U}{\partial F_x} \Big|_{F_x=0} = \frac{2}{EI} \int_0^{\pi/2} \left[ R(1-\cos\theta) \frac{P}{2} \right] R^2 \sin\theta d\theta$$

veya

$$\delta_x = \frac{PR^3}{2EI}$$

bulunur.

**Örnek 6.4** Şekilde gösterilen yapının 1 noktasındaki düşey deplasman ile 2 noktasındaki açılma burulmayı hesaplayınız. Kayma deformasyonlarını ihmal ediniz.



**ÇÖZÜM** Yapıda depolanan şekildeğiştirme enerjisi;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha L} \frac{M_{12}^2}{EI} dz + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{23}^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T_{23}^2}{GJ} dx$$

şeklindedir. Burada;

$$M_{12} = F_y z$$

$$M_{23} = F_y x$$

$$T_{23} = T_F + T_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + \alpha L F_y$$

$T_F$  = 2'ye uygulanan hayali burulma

$$\delta_y^{(1)} = \frac{\partial U}{\partial F_y} = \int_0^{\alpha L} \frac{M_{12}}{EI} \frac{\partial M_{12}}{\partial F_y} dz$$

$$+ \int_0^L \frac{M_{23}}{EI} \frac{\partial M_{23}}{\partial F_y} dx + \int_0^L \frac{T_{23}}{GJ} \frac{\partial T_{23}}{\partial F_y} dx$$

ve

$$\theta_x^{(2)} = \frac{\partial U}{\partial T_F} = \int_0^{\alpha L} \frac{M_{12}}{EI} \frac{\partial M_{12}}{\partial T_F} dz + \int_0^L \frac{M_{23}}{EI} \frac{\partial M_{23}}{\partial T_F} dx + \int_0^L \frac{T_{23}}{GJ} \frac{\partial T_{23}}{\partial T_F} dx$$

dir. Yukarıdaki denklemdeki kısmi türevler kolayca hesaplanabilir ve bunlar;

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{12}}{\partial F_y} &= z & \frac{\partial M_{23}}{\partial F_y} &= x & \frac{\partial T_{23}}{\partial F_y} &= \alpha L \\ \frac{\partial M_{12}}{\partial T_F} &= 0 & \frac{\partial M_{23}}{\partial T_F} &= 0 & \frac{\partial T_{23}}{\partial T_F} &= 1 \end{aligned}$$

değerlerindedir. Bunlar integrallerde yerlerine konulup integrasyonlar yapılırsa,

$$\delta_y^{(1)} = \left( \frac{\alpha^3 + 1}{3EI} + \frac{\alpha^2}{GJ} \right) F_y L^3 + \frac{T_o \alpha L^2}{2GJ}$$

$$\theta_x^{(2)} = \left( \frac{T_o L}{2} + \alpha L^2 F_y \right) / GJ$$

elde edilir.

## 6.7. YAPILARIN DEPLASMAN ANALİZİNDE RAYLEIGH-RİTZ YÖNTEMİ

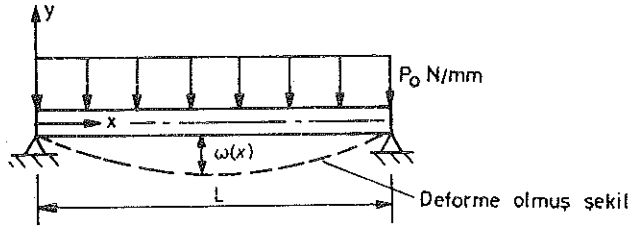
Tersinir, elastik bir yapı sisteminde deplasmanların Rayleigh-Ritz yöntemi ile bulunması, daha önce gösterildiği gibi enerjinin sakınımı prensibine dayanır. Yönteme göre yapının şekildeğiştiğinin bilindiği farzedilir ve bu

$$q = \sum_{n=1}^N \beta_n \Phi_n \quad (6.53)$$

şeklinde alınabilir. Burada  $q$ , genelleştirilmiş koordinat deplasmanı,  $\beta_n$  ise belirsiz sabit parametrelerdir ve bunlar sistemin toplam potansiyeli minimum olacak şekilde seçilir.  $\Phi_n$  'ler ise ele alınan yapının yalnızca deplasman sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilen fonksiyon dizisidir.

Denklem (6.53) ile farzedilen deplasman şekline minimum potansiyel prensibinin uygulanması ile belirsiz  $\beta_n$  sabitleri bir cebirsel lineer denklem takımının çözümü şeklinde elde edilir. Yöntem aşağıdaki örneklerle en iyi şekilde anlatılabilir.

**Örnek 6.5.** Aşağıda gösterilen basit kirişin deplasmasını Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak elde ediniz. Yalnızca eğilme deplasmasını gözönünde bulundurunuz.



**ÇÖZÜM** Kirişin sınır şartları şunlardır:

$$\text{Deplasman} = \omega(0) = \omega(L) = 0$$

$$\text{Eğilme momenti} = M(0) = M(L) = EI \frac{d^2 \omega}{dx^2} \quad (6.54)$$

Böylece Denklem (6.53)'teki  $\Phi_n$ ,  $n$  tamsayı olmak üzere  $\sin(n\pi x/L)$  olarak alınırsa, her iki sınır şartının sağlanmış olacağı açıktır. Kirişin deforme olmuş uygun bir hali;

$$\omega(x) = \sum_{n=1}^N \beta_n \sin \frac{n \pi x}{L} \quad (a)$$

şeklinde alınabilir. Toplam potansiyelin minimumu prensibi;

$$\frac{\partial}{\partial \beta_n} (U + P) = 0$$

olduğunu söyler. Burada;

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx$$

ve

$$P = -W = - \int_0^L P_o(x) \omega(x) dx$$

dir. Eğilme momenti,  $\omega$  cinsinden şu şekilde ifade edilebilir:

$$M = EI \frac{d^2 \omega}{dx^2} = -EI \sum_{n=1}^N \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Uygun yerlere yukarıdaki ve (a) ifadesi yerleştirilirse, Denklem (c) ve (d) sırasıyla;

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left[ \sum_{n=1}^N \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]^2 dx$$

ve

$$P = - \int_0^L P_o \sum_{n=1}^N \beta_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

şeklini alır. İntegrasyonlar gerçekleştirilirse;

$$U = \frac{L}{4EI} \sum_{n=1}^N \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 \beta_n^2 \quad (g)$$

ve

$$P = -\frac{2L}{\pi} \sum \frac{\beta_n}{n} \quad (n = 1,3,5,\dots) \quad (h)$$

elde edilir.

Denklem (b)'den

$$\frac{\partial}{\partial \beta_n} (U + P) = 0 = \frac{L \alpha_n^2}{2EI} \beta_n - \frac{2L}{\pi n}$$

$$\beta_n = \frac{4P_0 L^4}{\pi n^5 EI} \quad (i)$$

bulunur. Denklem (a)'dan deformasyon

$$\omega = \frac{4P_0 L^4}{\pi EI} \sum_{n=1,3,5,\dots}^N \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (j)$$

şeklinde elde edilir. Yukarıdaki serilerin yakınsaması çok hızlıdır ve birçok durumda yeterli hassasiyette bir deplasman çözümü bulmak için birkaç terim almak yeterlidir. Örneğin serinin yalnızca ilk terimi gözönüne alınırsa ve en büyük deplasmanın gerçek değeri olan  $0,0130P_0 L^4/(EI)$  ile bu değer karşılaştırılırsa bunun  $0,01331P_0 L^4/(EI)$  olduğu görülür.

## 6.8. YAPILARIN DEPLASMAN ANALİZİNDE SONLU FARKLAR YÖNTEMİ

Bir yapı sistemi deformasyonlarını, kapalı şekilde diferansiyel denklem çözümleri ile temsil etmek her zaman mümkün olmaz. Bu nedenle bazı yaklaşık sayısal yöntemlerin kullanılmasına yalnızca izin verilmeyip bunların kullanılması arzu da edilebilir. En çok kullanılan yöntemlerden biri sonlu farklardır. Yöntem, diferansiyel alma işlemini sonlu farklarla yaklaşık olarak yapar; netice olarak bu yöntem bir diferansiyel denklem takımını kolayca çözülebilecek bir cebirsel denklem takımına dönüştürür.

Sonlu farkların temel bağıntıları real, sürekli ve basit bir

$$\Phi = f(x) \quad (6.55)$$

fonksiyonunun gözönünde bulundurulması ile oluşturulabilir. Şek.6.4, eşdeğer  $\Delta x$  aralıklarındaki değerleri ile grafik olarak böyle bir fonksiyonu temsil etsin. Herhangi bir  $i$  noktasında  $\Delta x$ 'in küçük değerleri için  $\Phi$ 'nin birinci türevi;

$$\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_i \approx \frac{\Delta \Phi_i}{\Delta x} \quad (6.56)$$

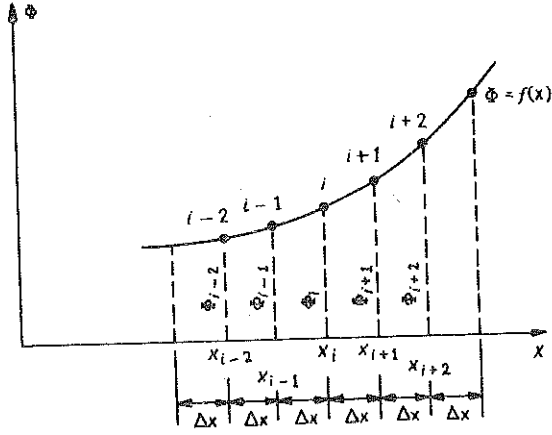
şeklinde yazılabilir. Burada  $\Delta \Phi_i$ ,  $i$  ile  $i+1$  veya  $i-1$  noktaları gözönünde bulundurulurken bulunabilir:

$$\Delta \Phi_i^{(\delta)} \approx \Phi_{i+1} - \Phi_i \quad (6.57)$$

veya

$$\Delta \Phi_i^{(g)} \approx \Phi_i - \Phi_{i-1} \quad (6.58)$$

$\Delta \Phi_i^{(\delta)}$  farkı birinci öne farklar yaklaşımını temsil ederken  $\Delta \Phi_i^{(g)}$  birinci geriye farkları temsil eder.



Şekil 6.4 Bir boyutlu sonlu farklar yaklaşımı

İki uç noktasının ortalama değeri

$$\Delta \Phi_i^{(m)} \approx \frac{\Delta \Phi_i^{(\delta)} + \Delta \Phi_i^{(g)}}{2}$$

veya

$$\Delta \Phi_i^{(m)} \approx \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2} \quad (6.59)$$

ile ifade edilebilir. Burada  $\Delta \Phi_i^{(m)}$  birinci merkezi farklar yaklaşımı olarak bilinir.

Denklem (6.59) kullanılarak Denklem (6.56);

$$\left. \frac{d\Phi}{dx} \right|_i \approx \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (6.60)$$

şeklini alır. Denklem (6.60) merkezi farklar cinsinden  $\Phi$ 'nin  $i$  noktasındaki birinci türevi için yaklaşık değeri verir. Diğer mertebeli türevler benzer şekilde elde edilir:



$$\left. \frac{d^2\Phi}{dx^2} \right|_i \approx \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

$$\left. \frac{d^3\Phi}{dx^3} \right|_i \approx \frac{\Phi_{i+2} - 2\Phi_{i+1} + 2\Phi_{i-1} - \Phi_{i-2}}{2(\Delta x)^3} \quad (6.61)$$

$$\left. \frac{d^4\Phi}{dx^4} \right|_i \approx \frac{\Phi_{i+2} - 4\Phi_{i+1} + 6\Phi_i - 4\Phi_{i-1} + \Phi_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

v.b.

Şek.6.5'te gösterildiği gibi iki boyutlu bir fonksiyon için bir boyutlu fonksiyonlarda olduğu gibi kısmi türevler elde edilebilir:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right|_{ij} \approx \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{ij} \approx \frac{\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j-1}}{2\Delta z}$$

$$\left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right|_{ij} \approx \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta x)^2} \quad \left. \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right|_{ij} \approx \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{(\Delta z)^2}$$

$$\left. \frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} \right|_{ij} \approx \frac{\Phi_{i+2,j} - 2\Phi_{i+1,j} + 2\Phi_{i-1,j} - 2\Phi_{i-2,j}}{2(\Delta x)^3}$$

$$\left. \frac{\partial^3\Phi}{\partial z^3} \right|_{ij} \approx \frac{\Phi_{i,j+2} - 2\Phi_{i,j+1} + 2\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j-2}}{2(\Delta z)^3}$$

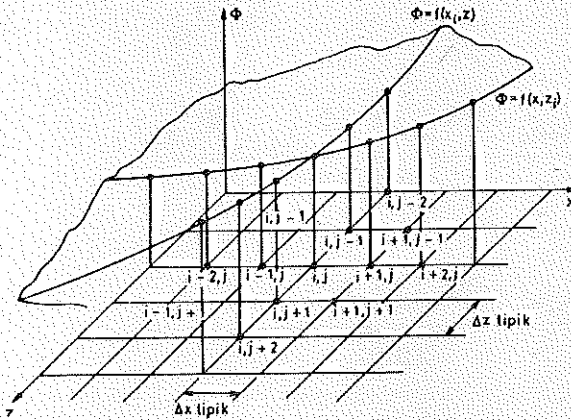
$$\left. \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} \right|_{i,j} \approx \frac{\Phi_{i+2,j} - 4\Phi_{i+1,j} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i-1,j} + \Phi_{i-2,j}}{(\Delta x)^4} \quad (6.62)$$

$$\left. \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4} \right|_{i,j} \approx \frac{\Phi_{i,j+2} - 4\Phi_{i,j+1} + 6\Phi_{i,j} - 4\Phi_{i,j-1} + \Phi_{i,j-2}}{(\Delta z)^4}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} \right|_{i,j} \approx \frac{\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i-1,j+1} - \Phi_{i+1,j-1} + \Phi_{i-1,j-1}}{4 \Delta x \Delta z}$$

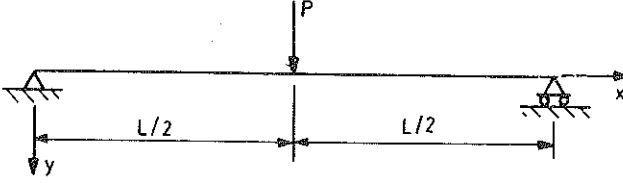
$$\left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right|_{i,j} \approx \frac{\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i+1,j-1} - 2\Phi_{i,j+1} + 2\Phi_{i,j-1} - \Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i-1,j-1}}{2(\Delta x)^2 \Delta z}$$

$$\left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right|_{i,j} \approx \frac{\Phi_{i+1,j+1} - \Phi_{i-1,j+1} - 2\Phi_{i+1,j} + 2\Phi_{i-1,j} - \Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i+1,j}}{2\Delta x (\Delta z)^2}$$



Şekil 6.5 İki-boyutlu sonlu-farklar yaklaşığı

**Örnek 6.6** Sonlu farklar yöntemi kullanılarak şekilde gösterilen kirişin orta açıklığındaki düşey deplasman ile sol uç mesnetteki eğimi bulunuz.



**ÇÖZÜM** Yapı analizinde sonlu farklar yöntemini kullanabilmek için şu yolun izlenmesi gerekir:

1. Yapının davranışını tanımlayan bütün temel diferansiyel denklemleri formüle ediniz.
2. Temel diferansiyel denklemleri ve sınır şartlarını tanımlayan denklemleri sonlu farklar cinsinden ifade ediniz.
3. Yapı üzerinde sonlu farklı noktalarda ikinci adımda elde edilen sonlu farklar denklemlerini sağlayan simültane cebirsel denklem takımını elde ediniz.
4. Sonlu farklar değerleri için bunları çözünüz.

Bu örnekte basit bir kiriş yapısı için deformasyonun esas diferansiyel denklemi, cisimlerin mukavemetinden elde edilebilir ve

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p \quad (a)$$

ile belirtilir. Burada

$w$  = kirişin düşey deplasmanı

$EI$  = kirişin eğilme rijitliği

$p$  = yayılı yanal yük

Herhangi bir noktada kirişin eğimi

$$\theta = \frac{dw}{dx} \quad (b)$$

şeklindedir. Denklem (a) ve (b) sonlu farklar terimleri ile ifade edilirse;

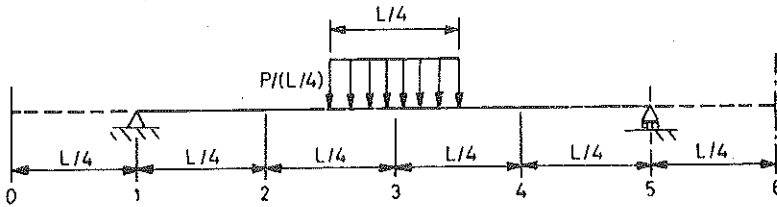
$$w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2} = \frac{p_i(\Delta x)^4}{(EI)_i} \quad (a)$$

ve

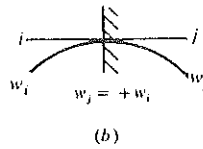
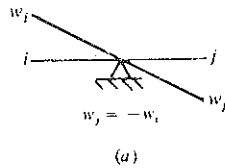
$$\theta_i = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (b)$$

olur. Burada  $i=1,2,3,\dots,N$  giriş açıklığı boyunca noktalar.

Denklem(a)' incelenirse uygun bir sonuca ulaşabilmek için yalnızca sonlu sayıda noktada sağlama olabileceği sonucuna varılabilir. Böylece, basitlik açısından aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi giriş dört eşit parçaya bölünür.



Alınan eleman sayısı arttığında, kesinliğin artacağına dikkati çekmek gerekir. Denklem (a)'den görülebileceği gibi girişin, mesnetleri dışında hayali olarak uzatılması gerekmektedir. 0 ve 6 noktalarının deplasmanlarının sırasıyla 2 ve 4 noktaları deplasmanlarının negatifine eşit olduğu farzedilecektir. Sabit mesnetler için bu deplasmanların işaret ve şiddetleri aynıdır. Aşağıdaki (a) ve (b) çizimlerine bakınız. Aynı zamanda tekil P yükünün her iki yandaki elemanların yarısına kadar üniform olarak yayıldığına dikkati çekmek gerekir. Denklem (a)'deki yük fonksiyonunun yayılı yük olmasından dolayı buna gerek duyulmuştur.



2,3 ve 4 noktaları için Denklem (a) yazılırsa

$$w_4 - 4w_3 + 6w_2 - 4w_1 + w_0 = 0$$

$$w_5 - 4w_4 + 6w_3 - 4w_2 + w_1 = \frac{PL^3}{64EI} \quad (c)$$

$$w_6 - 4w_5 + 6w_4 - 4w_3 + w_2 = 0$$

olur. Sınır şartları ve simetriden şu deplasmanlar bilinmektedir:

$$w_1 = w_5 = 0 \quad w_2 = w_4$$

Aynı zamanda mesnetler üzerinde deformasyonların sürekli olabilmesi için

$$w_0 = -w_2 \quad \text{ve} \quad w_6 = -w_4$$

(c) denklemlerindeki birinci ve üçüncünün simetriden dolayı aynı olduğuna dikkati çekmek gerekir, bu nedenle bunların birini ihmal ederek yukarıdaki şartlar kullanılırsa Denklem (c),

$$6w_2 - 4w_3 = 0$$

$$-4w_2 + 3w_3 = \frac{PL^3}{128EI}$$

halini alır veya matris formunda,

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{PL^3}{128EI} \end{bmatrix} \quad (d)$$

şeklinde yazılabilir.  $w_2$  ve  $w_3$  değerleri için Denklem (d) çözümlerse:

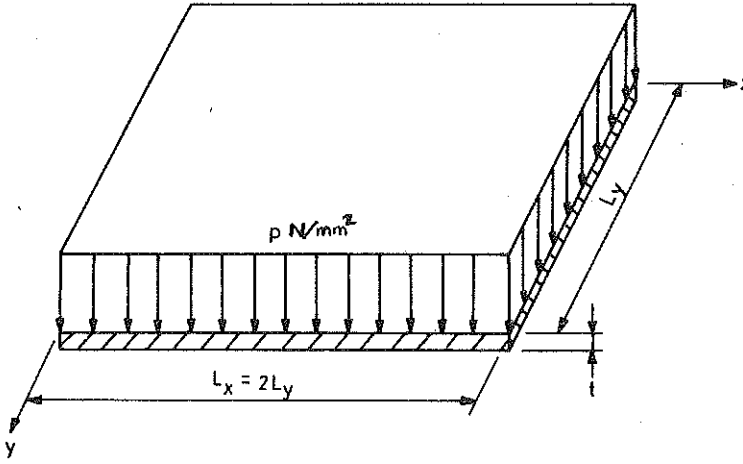
$$w_2 = \frac{0,0156PL^3}{EI} \quad \left( \text{kesin: } \frac{0,0143PL^3}{EI} \right)$$

$$w_3 = \frac{PL^3}{42,7 EI} \quad \left( \text{kesin: } \frac{PL^3}{48 EI} \right)$$

Denklem (b)'den eğim:

$$\theta_1 = \frac{w_2 - w_0}{2 \Delta x} = \frac{w_2}{\Delta x} = \frac{0,0624PL^2}{EI} \quad \left( \text{kesin: } \frac{0,0625PL^2}{EI} \right)$$

**Örnek 6.7** Sonlu farklar yöntemini kullanarak şekilde gösterilen plak yapısındaki en büyük eğilme momentini ve düşey deplasmanı bulunuz. Plâğın basit mesnetlendiğini ve üzerinde sabit yayılı  $p$  basıncı olduğu farzedilecektir. Aynı zamanda plak kalınlığının sabit ve  $t$  değerinde olduğu farzedilecektir.



Düz plâğın esas diferansiyel denklemi

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (a)$$

şeklinde verilir<sup>25</sup>. Burada  $D = Et^3/[12(1-\nu^2)]$  ve  $\nu$  = Poisson oranıdır. Eğilme momentleri,

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

(b)

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

ile verilir<sup>25</sup>.

Denklemler (6.62)'den yararlanılarak Denklem (a) kolayca sonlu farklar terimleri ile ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} & + Cw_{i,j-2} \\ & + Ew_{i-1,j-1} + Fw_{i,j-1} + Ew_{i+1,j-1} \\ Aw_{i-2,j} + Bw_{i-1,j} + w_{i,j} + Bw_{i+1,j} + Aw_{i+2,j} = \bar{P} \\ & + Ew_{i-1,j+1} + Fw_{i,j+1} + Ew_{i+1,j+1} \\ & + Cw_{i,j+2} \end{aligned} \quad (c)$$

Burada

$$A = \frac{1}{H}$$

$$B = -\frac{4(1+\alpha^2)}{H}$$

$$C = \frac{\alpha^4}{H}$$

$$E = \frac{2\alpha^2}{H}$$

$$F = \frac{4\alpha^2(1+\alpha^2)}{H}$$

$$\bar{P} = \frac{P(\Delta x \Delta y \alpha)^2}{DH}$$

$$\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$H = 6 + 8\alpha^2 + 6\alpha^4$$

Kiriş örneğinde olduğu gibi basitlik açısından şekilde gösterildiği gibi plak x ve y eksenleri boyunca dört eşit parçaya bölünebilir. Simetriden yalnızca 1,2,4 ve 5 noktaları gözönünde bulundurulabilir. Bu noktalar için Denklem (c) yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} 1,0 & -0,149 & -0,597 & 0,0597 \\ -0,149 & 0,5 & 0,0597 & -0,299 \\ -0,597 & 0,0597 & 0,5 & -0,075 \\ 0,0597 & -0,299 & -0,075 & 0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \frac{10^{-4} PL_y^4}{D} \begin{bmatrix} 4,664 \\ 2,332 \\ 2,332 \\ 1,166 \end{bmatrix} \quad (d)$$

bulunur. Denklem (d) çözümlirse:

$$w_1 = 0,00559 \frac{PL_y^4}{D}$$

$$w_2 = 0,00723 \frac{PL_y^4}{D}$$

$$w_4 = 0,00778 \frac{PL_y^4}{D}$$



$$w_5 = w_{\text{maks}} = 0,01008 \frac{PL_y^4}{D} \quad \left( \text{Kesin: } 0,01013 \frac{PL_y^4}{D} \right)$$

Deplasmanlar bulunduğunda momentler şu şekilde hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} M_{x,\text{maks}} = M_{x,5} &= -D \left( \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \nu \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right) \\ &= -\frac{16D}{L_y^2} \left[ \frac{1}{2} (w_6 - 2w_5 + w_4) + 0,3(w_8 - 2w_5 + w_2) \right] \\ &= 0,0454PL_y^2 \quad (\text{kesin: } 0,0479 PL_y^2) \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$M_{y,\text{maks}} = M_{y,5} = 0,966PL_y^2 \quad (\text{kesin: } 0,0948PL_y^2)$$

## 6.9. STATİKÇE BELİRSİZ YAPILAR VE BİRİM-YÜK YÖNTEMİ

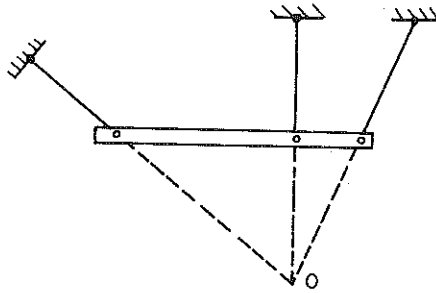
Statikçe belirsiz sistem, dış tepkiler veya iç yüklerin statik denge şartlarıyla tamamen belirlenemediği bir sistemdir. Kararlı ve statikçe belirli yapılar kararlılık için yalnızca yeterli sayıda dış nesnelere veya yapı elemanlarına sahiptir ve bütün tepkileri veya eleman iç yüklerini bulmak için statik denge denklemleri yeterlidir. Eğer bir eleman veya tepki kaldırılırsa yapı kararsız hale gelir ve uygulanan yükleri taşımaz. Eğer sisteme bir eleman veya tepki ilave edilirse yapı birinci mertebeden hiperstatik hale gelir ve tepkiler ve eleman iç yükleri statik denge şartlarıyla birlikte yapının deformasyonunu gözönünde bulundurularak elde edilir.

Normal olarak düzlemsel bir katı yapının kararlı olması için üç dış tepkiye

ihtiyaç vardır. Bunlar da üç adet statik denge denklemi ile hesaplanabilir, fakat tepki sayısı kararlılık için yegane kriter değildir. Yapının her bir kısmının kararlılığı veya kararsızlığı ve statikçe belirliliği araştırılmalıdır. Örneğin yatay konumdaki basit bir kirişin üç tepki bileşeni bulunması gerekir fakat bu kiriş açıklığı boyunca üç noktadan kayıcı mafsalla mesnetlenmiş ise kiriş yüklerle dayanmada kararsızlık gösterecektir ve dış yüklerin bulunması halinde statikçe belirsizdir. Benzer şekilde basit kirişin düzlem içerisindeki üç tepkisi bir noktada kesişiyorsa bu noktaya nazaran momentler, tepkilerin şiddetine bağlı olmaksızın sıfır olacaktır ve tepkileri bulmak için moment denklemi kullanılamayacaktır. Şek.6.6'da gösterilen böyle bir yapı, anlık merkez olan O etrafında bir miktar hareket edebilen, dönme serbestisi olan bir mekanizmadır. Böylece O'dan geçmeyen yüklere dayanmada kararsızlık gösterir. Eğer yük O'dan geçecek şekilde uygulanırsa, yapı statikçe belirsizdir.

Birçok yapının kararlılık durumunu belirlemek için statik denklem sayısı, yapının hareketinin kısıtlanma sayısı ile karşılaştırılır. Şek.6.6'da gösterilen yapı gibi özel yapılarda üç adet statik denklemle bilinmeyen üç tepkinin bulunmaya teşebbüs edilmesi birbirinden bağımsız olmayan (denklemlerden biri diğerinden elde edilebilir) denklemler verir. Bir yapıyı statik denklemlerle analiz ederken böyle bir durumla karşılaşıldığında yapının kararsızlığı veya kısıtlanma durumu incelenmelidir. Hiperstatik basit yapılarda burada gösterildiği gibi genelde birim-yük yöntemi kullanılır.

Bir yapının kararlı olması için gerekli olandan bir fazla elemanın veya tepkisinin olması, yapının birinci dereceden hiperstatik olduğunu gösterir. Birçok durumda elemanlardan veya tepkilerden birinin kaldırılması kararsızlığa yol açmaz. Bu gibi yapıların analizinde statik denklemlere ilave olarak bir de deplasman denklemi kullanılmalıdır. Bir yapıda, kararlılık için gerekenden çok fazla eleman veya tepki varsa bu yapı yüksek mertebeden hiperstatik bir yapıdır. Hiperstatiklik mertebesi, fazla eleman sayısına eşittir ve bu da analiz için gerekli olan deplasman şartı sayısını verir.



Şekil 6.6.

## 6.10. BİRİNCİ MERTEBEDEN HİPERSTATİK YAPILAR

Elastik elemanlardan oluşan ve birinci mertebeden hiperstatik bir kafes yapı ele alınacaktır. Böyle bir tipik kafes yapı, Şek.6.7a'da gösterilmiştir. Mesnetlerin rijit olduğu ve yük uygulanmadan önce elemanlarda gerilme olmadığı farzedilecektir. Dört adet dış tepki vardır ve bunlardan üçü kararlılık için yeterlidir. Yatay tepki bileşeni  $X_1$ , hiperstatik olarak farzedilecek ve yatay mesnet deplasmanı  $\delta$ 'nın sıfır olma şartından şekildeğiştirme denklemi elde edilecektir. Denklem (6.34)'ten

$$\delta = \sum \frac{SsL}{AE} \quad (6.63)$$

olduğu gösterilebilir. Burada  $S$  Şek.6.7a'daki yapının herhangi bir elemanındaki kuvveti ve  $s$  Şek.6.7c'de gösterildiği gibi arzu edilen deplasman yönünde etkiyen birim yükten dolayı yapının herhangi bir elemanındaki kuvveti temsil eder.

Herhangi bir elemandaki  $S$  kuvveti Şek.6.7b ve d'de gösterilen yükleme şartlarının süperpozisyonundan elde edilir. Hiperstatik kuvvet kaldırıldığında oluşan statikçe belirli yapı Şek.6.7b'de gösterilmiştir ve uygulanan yükler herhangi bir elemanda  $S_0$  kuvveti doğurur. Eğer yalnızca hiperstatik  $X_1$  kuvveti etkiyor ise, bu herhangi bir elemanda Şek.6.7d'da gösterildiği gibi  $X_1s$  kuvveti oluşturur; çünkü  $s$  kuvvetleri  $X_1$ 'in birim değerinde alındığı durumdaki kuvvetlerdir. Toplam  $S$  kuvveti, iki durumda elde edilen kuvvetlerin toplamıdır:

$$S = S_0 + X_1s \quad (6.64)$$

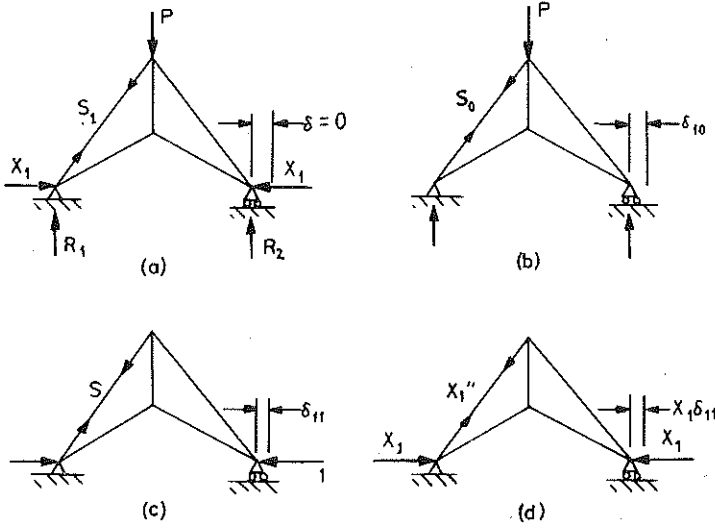
Denklem (6.64), denklem (6.63)'te yerine konulursa;

$$\delta = \sum \frac{S_0sL}{AE} + X_1 \sum \frac{s^2L}{AE} \quad (6.65)$$

elde edilir veya  $\delta = 0$  olduğunda

$$X_1 = - \frac{\sum S_0 s L / (AE)}{\sum s^2 L / (AE)} \quad (6.66)$$

bulunur. Bu denklemin sağ tarafında bulunan bütün terimler yapının yüklenme durumundan veya geometrisinden bulunur.



Şekil 6.7

Hiperstatik mesnet yönünde deplasmanın sıfır olduğu birinci mertebeden hiperstatik herhangi bir elastik kafes yapıya Denklem (6.66) uygulanabilir. Hiperstatik  $\Delta$  doğrultusundaki deplasman sıfır değil de başka bir bilinen değer ise, bu değer Denklem (6.65)'de yerine konulur ve bu durumla ilgili  $X_0$  değeri belirlenir.

Statikçe belirsiz yapıların davranışlarını canlandırabilmek için Denklem (6.65) ve (6.66)'daki terimlerin fiziksel anlamları açıklanacaktır. Eğer hiperstatik kuvvet kaldırılırsa, yapı statikçe belirli olur ve uygulanan yükler altında hiperstatiklik doğrultusunda deplasman,

$$\delta_{10} = \sum \frac{S_0 sL}{AE} \quad (6.67)$$

değerindedir. Hiperstatiklik yönünde bu deplasmanın pozitif olduğu farzedilmiştir. Birim değerinde bir hiperstatik kuvvet yapıya

$$\delta_{11} = \sum \frac{s^2 L}{AE} \quad (6.68)$$

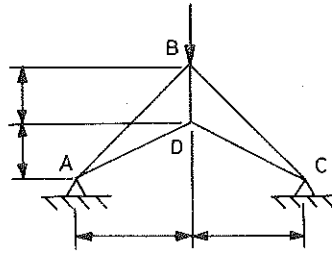
deplasmanını yaptırır. Hiperstatiklik yönünde bu pozitifdir. Sıfır deplasman verecek olan  $X_1$ , uygulanan yüklerden elde edilen deplasmanın birim yükten dolayı oluşan deplasmana bölünmesi ile elde edilir. Yapılan işaret kabulüne göre bu negatif olacaktır:

$$X_1 = - \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (6.69)$$

Denklem (6.66)'da kullanılan toplam şeklindeki terimler yerine Denklem (6.69)'da kullanılan deplasman terimlerini ayırdetmek daha kolaydır. Denklem (6.69) birinci dereceden hiperstatik çerçevelerde de aynı şekilde uygulanabilir, yalnız  $\delta_{11}$  ve  $\delta_{10}$ 'ın tanımları farklı olacaktır.

**Örnek 6.8.** Şek.6.8'deki yapının tepkilerini ve elemanlarındaki gerilmeleri bulunuz. AB, BC ve BD elemanlarının alanları  $400 \text{ mm}^2$  ve AD ve DC elemanlarının alanları  $360 \text{ mm}^2$ 'dir. Mesnetlerin rijit olduğu ve  $E = 100 \text{ GPa}$  olduğu farzedilecektir.

**ÇÖZÜM** Denklem (6.66)'nın sayısal çözümü, Şek.6.7'deki notasyonla Tablo 6.1'de gösterilmiştir. Yatay tepki bileşeni  $X_1$ , hiperstatik olarak düşünülmüştür. Hiperstatiklik kaldırıldıktan sonra çubuklardaki  $S_0$  kuvvetleri birinci sütunda tablolanmış. Çeşitli elemanların uzunlukları Şek.6.8'de gösterilen boyutlardan çıkarılmıştır ve bunlar alan ve elastisite modülüne bölünmüştür.  $L/(AE)$  değerleri 2'nci sütunda bulunmaktadır. Şek.6.7c'de gösterildiği gibi etkiyen birim değerdeki  $X_1$ 'den dolayı  $s$  kuvvetleri 3'üncü sütunda tablolanmış. Pozitif işaret çekmeyi, negatif işaret basıncı belirtir. Denklem (6.66)'daki toplam işlemleri yapılırsa bunlar 4. ve 5. sütunların toplamını verir.



Şekil 6.8

$$X_1 = - \frac{\sum S_0 s L / (AE)}{\sum s^2 L / (AE)} = \frac{5,150}{0,2008} = 25,6 \text{ kN}$$

Bu değer  $X_1$ s değerlerini elde etmek için sütun 3'deki terimlerle çarpılır. Elemanlardaki S çubuk kuvvetleri sütun 7'de sıralandığı gibi 1'inci ve 6'ıncı sütunlardaki değerlerin cebirsel toplamından elde edilir.

**Örnek 6.9** Örnek 6.8'deki yapının C noktasındaki mesnedi sağa doğru 2,5mm deplasman yaptırıldığında ve sıcaklık  $20^\circ\text{C}$  düşürüldüğünde yapı elemanlarında oluşan kuvvetleri bulunuz. Isıl genişleme katsayısı  $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ m/m}^\circ\text{C}$  olarak farz edilecektir.

**ÇÖZÜM** Bir sıcaklık azalması Şek.6.7b'de gösterilen statikçe belirli yapının sağ ucunun sola doğru  $(\alpha L)\Delta T$  kadar hareket etmesini sağlar. Burada  $L(=800 \text{ mm})$  mesnetler arası mesafedir;

$$\alpha L(\Delta T) = 2 \times 10^{-5} \times 800 \times 20 = 0,32 \text{ mm}$$

C mesnedine ilave olarak sağa doğru 2,5 mm deplasman yaptırılmaktadır. Böylece kafes sistemin sağ mesnedine şekildeğiştirmelerle yaptırılacak toplam deplasman,

$$\delta = -0,32 - 2,5 = -2,82 \text{ mm}$$

olur. Burada negatif işaret, gerilmelerden dolayı olacak deplasmanların  $X_1$ 'in tersi yönünde olduğunu gösterir. Denklem (6.65)'ten

$$\delta = \sum \frac{S_0 s L}{AE} + X_1 \sum \frac{s^2 L}{AE} = -2,82$$

olur. Burada toplam işareti altındaki terimlerin değerleri Tablo 6.1'de elde edilmiş ve

$$-5,1474 + 0,2008X_1 = -2,82$$

$$X_1 = 11,59 \text{ kN}$$

olur. Nihai çubuk kuvvetleri  $S = S_0 + X_1 s$  şeklinde Tablo 6.2'de belirtilmiştir. Burada  $S_0$  ve  $s$  Örnek 6.8'deki değerlerin aynıdır.

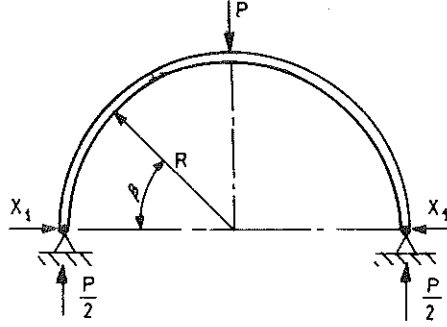
**Tablo 6.1**

Eleman	$S_0, \text{kN}$	$\frac{L}{AE}$	$s$	$\frac{S_0 s L}{AE}$	$\frac{s^2 L}{AE}$	$X_1 s$	$s$
		mm/kN		mm	mm/kN		
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
AB	-56,57	0,014142	1,4142	-1,1314	0,0283	36,25	-20,32
BC	-56,57	0,014142	1,4142	-1,1314	0,0283	36,25	-20,32
AD	44,72	0,012423	-2,2361	-1,2423	0,0621	-60,52	-15,80
DC	44,72	0,012423	-2,2361	-1,2423	0,0621	-60,52	-15,80
BD	40,00	0,00500	-2,0000	-0,4000	0,0200	-51,27	11,27
Toplam				-5,1474	0,2008		

**Tablo 6.2**

Eleman	$S_0$	$X_1 s$	$S$
AB	-56,57	16,39	40,18
BC	-56,57	16,39	40,18
AD	44,72	-25,92	18,80
DC	44,72	-25,92	18,80
BD	40,00	23,18	63,18

**Örnek 6.10** Şek.6.9'da gösterilen yarım daire kemerin mesnetleri sabit ise herhangi bir noktadaki eğilme momentini bulunuz. Bütün kesitlerdeki EI değerleri aynıdır. Eksenel şekildeğişimi ihmal edilecektir.



Şekil 6.9

**ÇÖZÜM** Yapı düşey ortay çizgisine göre simetrik ve bütün integraller kemerin sol yarısı için alınmış ve 2 ile çarpılmıştır. Yatay  $X_1$  tepkisi hiperstatik olarak farzedilmekte ve  $M_0$  değeri kemerin bir mesnedinin kayıcı alınması ile statikçe belirli hale getirilmiş yapı için hesaplanmıştır:

$$M_0 = \frac{PR}{2} (1 - \cos\beta)$$

m değeri  $X_1$  yönünde etkiyen birim yük için hesaplanmıştır:

$$m = -R \sin\beta$$

Denklem (6.34) kullanılıp  $M = M_0 + X_1 m$  ve  $d\zeta = R d\beta$  olduğuna dikkat edilirse

$$X_1 = - \frac{\int (M_0 m / EI) ds}{\int (m_0 / EI) ds} = - \frac{2 \int_0^{\pi/2} [PR / (2EI)] (1 - \cos\beta) (-R \sin\beta) R d\beta}{2 \int_0^{\pi/2} [(-R \sin\beta)^2 R / (EI)] d\beta} = \frac{P}{\pi}$$



Nihai eğilme momenti, uygulanan yükler için elde edilen  $M_0$  değerleri üzerine statikçe belirsiz durumun  $X_1$  m değerlerinin süperpoze edilmesi ile elde edilir:

$$M = M_0 + X_1 m$$

$$M = \frac{PR}{2} (1 - \cos\beta) - \frac{PR}{\pi} \sin\beta$$

Bu denklem  $0 < \beta < \pi/2$  için geçerlidir ve eğilme momenti diyagramı simetri eksenine göre simetriktr.

**Örnek 6.11** Şek.6.10a'da gösterilen yapı yatay düzlemde bulunmakta ve ucu doksan derece eğilmiş, yuvarlak tüpten yapılmıştır. Serbest uç 2kN'lık bir yükü taşımakta ve yapı aynı zamanda düşey bir kablo ile desteklenmektedir. Kablodaki gerilmeyi bulunuz ve tüpün eğilme ve burulma momenti diyagramlarını çiziniz.

**ÇÖZÜM** Kablo hiperstatik eleman olarak farz edilmektedir. Tüpün serbest ucunun düşey deplasmanı, kablunun yok farzedildiği durum için hesaplanır ve bu halde statikçe belirli yapı 2kN taşımaktadır. Yük altındaki tüpte eğilme momenti ve burulma sırasıyla  $M_0$  ve  $T_0$  ile gösterilmekte ve bunlar Şek.6.10b'de çizilmiştir. Eğilme ve burulma deformasyonlarından ileri gelen yerdeğişimi Denklem (6.34)'ten;

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 m}{EI} ds + \int \frac{T_0 m_t}{JG} ds$$

şeklinde dir. Statikçe belirli yapıda  $X_1 = 1$  için eğilme ve burulma momentleri olan sırasıyla  $m$  ve  $m_t$  değerleri Şek.6.10c'de çizilmiştir. Yukarıdaki denklemin integrallerinin alınmasından sonra

$$\delta_{10} = - \frac{60 \times 60 \times 40 + 90 \times 90 \times 60}{100.000} - \frac{120 \times 60 \times 90}{80.000} = - 14,4 \text{ mm}$$

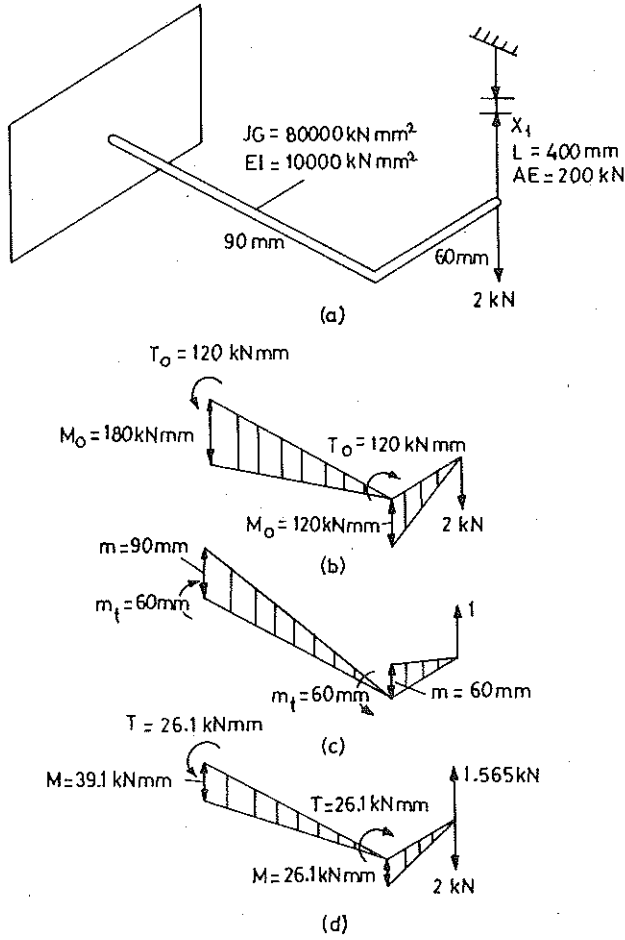
bulunur. Negatif işaret, deplasmanın birim yükün ters yönünde veya aşağı doğru olduğunu gösterir.

Birim değerde  $X_1$  kuvvetinden dolayı kesilen kabloda oluşan  $\delta_{11}$  deplasmanı

tüpün eğilmesi, burulması ve kablunun uzaması kısımlarından oluşur:

$$\delta_{11} = \int \frac{m^2}{EI} ds + \int \frac{m_1^2}{JG} ds + \frac{s^2 L}{AE}$$

Kablodaki çekme kuvveti 1'dir ve m ile m<sub>t</sub> değerleri Şek.6.10c'de gösterilmiştir:



Şekil 6.10

$$\delta_{11} = \frac{3600 \times 20 + 8100 \times 30}{100.000} + \frac{60 \times 60 \times 90}{80.000} + \frac{1^2 \times 400}{200} = 9,2 \text{ mm/kN}$$

Bu değer 1-kN'luk çekme kuvvetinin kesilen kablo uçlarını yaklaştıracak miktarı gösterir. Kesilen kablo uçlarını  $-\delta_{10}$  kadar hareket ettirecek  $X_1$  kuvveti, Denklem (6.69)'dan bulunur:

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{14,4}{9,2} = 1,565 \text{ kN}$$

Tüpün statik denklemleri kullanılarak hesaplanmış eğilme ve burulma momenti diyagramları Şek.6.10d'de gösterilmiştir.

## 6.11. YÜKSEK MERTEBEDEN HİPERSTATİK YAPILAR

İki veya daha yüksek mertebeden hiperstatik yapıların analiz işlemi hiperstatik bir elemanı veya tepkisi olan yapılara uygulanan işlemin benzeridir. Birinci adım hiperstatik elemanların veya tepkilerin kaldırılarak statikçe belirli bir temel yapının elde edilmesidir. Daha sonra statikçe belirli baz yapının hiperstatikler yönündeki deplasmanları, hiperstatik kuvvetler cinsinden hesaplanır ve genellikle sıfır olan, bilinen deplasmanlara eşitlenir. Bilinen deplasman şartları hiperstatikler sayısına eşit olmalıdır. n'inci mertebeden hiperstatik bir yapıda deplasman şartları hiperstatikler cinsinden çözülecek n adet denklem verir.

Şek.6.11a'da gösterilen kafes yapıda üç tepki bulunur ve bu yapı dış duruma göre statikçe belirlidir, fakat kararlılık için gerekli olandan iki fazla elemanı vardır; bu nedenle yapı iç duruma göre statikçe belirsizdir. Belirlenmesi gereken deplasman şartları, yapı yüksüzken yapıda gerilmelerin bulunmadığı veya yüksüz yapının iki elemanı kesilirse, kesilmiş uçların  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  bağıl deplasmanlarının sıfır olduğudur. Deplasmanlar hiperstatik elemanlardaki  $X_1$  ve  $X_2$  kuvvetleri cinsinden ifade edilmiştir. Burada bütün deplasmanların elastik olduğu farzedilmektedir.

Şek.6.11b'de gösterilen statikçe belirli temel yapı hiperstatik elemanların kesilmesi veya uzaklaştırılması ile oluşturulmuştur. Uygulanan yükler tarafından temel

yapının elemanlarında  $S_0$  kuvvetleri oluşturulur. Elemanlardaki  $s_1$  kuvvetleri yapıya gelen birim  $X_1$  yükü tarafından oluşturulur. Benzer şekilde Şek.6.11'de gösterildiği gibi  $X_2=1$  yükünün temel yapıya etkimesi ile elemanlarda  $s_2$  yükleri oluşur. Herhangi bir elemandaki nihai  $S$  kuvveti uygulanan yükler ve hiperstatik kuvvetler tarafından oluşturulan kuvvetlerin süperpozisyonu ile elde edilebilir:

$$S = S_0 + X_1 s_1 + X_2 s_2 \quad (6.70)$$

Kesilen elemanların uçlarındaki  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  deplasmanları sıfıra eşitlenirse:

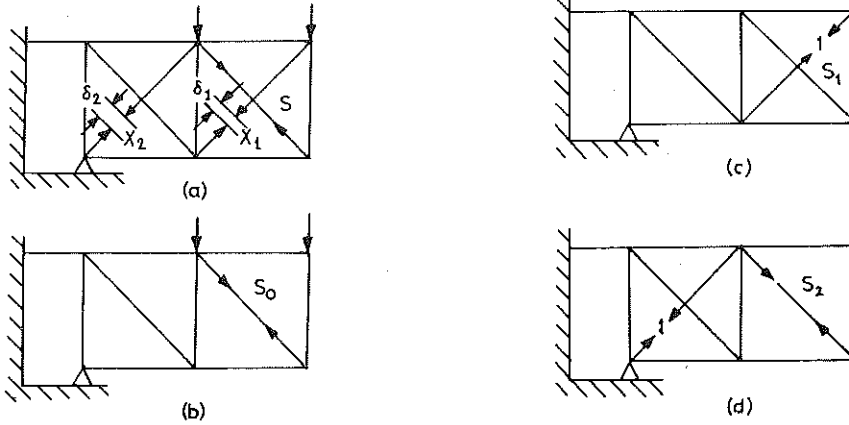
$$\delta_1 = \sum \frac{S s_1 L}{AE} = 0$$

$$\delta_2 = \sum \frac{S s_2 L}{AE} = 0$$

$$\delta_1 = \sum \frac{S_0 s_1 L}{AE} + X_1 \sum \frac{s_1^2 L}{AE} + X_2 \sum \frac{s_1 s_2 L}{AE} = 0$$

$$\delta_2 = \sum \frac{S_0 s_2 L}{AE} + X_1 \sum \frac{s_1 s_2 L}{AE} + X_2 \sum \frac{s_2^2 L}{AE} = 0$$

elde edilir.



Şekil 6.11

Bu denklemler  $X_1$  ve  $X_2$  için çözülebilir. S kuvvetlerinin nihai değerleri Denklem (6.70)'den elde edilebilir.

Denklem (6.70)'de belirtildiği gibi aşağıdaki denklemler gerilme şartlarının süperpozisyonlarından çıkarılmıştır. Bunlar deplasman şartlarının süperpozisyonundan da elde edilebilirdi. Uygulanan yükler hiperstatiklerde  $\delta_{10}$  ve  $\delta_{20}$  deplasmanları oluşturur. Birim değerdeki  $X_1$ ,  $X_1$ 'de  $\delta_{11}$  ve  $X_2$ 'de  $\delta_{21}$  deplasmanları oluşturur. Birim değerdeki  $X_2$ ,  $X_2$ 'de  $\delta_{12}$  ve  $X_1$ 'de  $\delta_{22}$  deplasmanları meydana getirir. Hiperstatikler doğrultularındaki toplam deplasmanlar çeşitli yüklerin tesirleri süperpoze edilerek elde edilebilir:

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12}$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22}$$

Birçok problemde  $\delta_1$  ve  $\delta_2$  deplasmanları sıfırdır, fakar bazı durumlarda yapıya mesnet deplasmanları gibi benzer deplasmanlar verilebilir.

n'inci mertebeden bir yapıda, n adet deplasman şartı kullanılmalıdır. Bunlar;

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n}$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{2n} \quad (6.71)$$

$$\delta_n = \delta_{n0} + X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{nn}$$

veya matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \vdots \\ \delta_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad (6.71a)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem (6.71)'deki terimler kafes yapıları için şu şekilde tanımlanabilir:

$$\delta_{n0} = \sum \frac{S_o s_n L}{AE} \quad \delta_{mn} = \sum \frac{s_m s_n L}{AE} \quad (6.72)$$

Yalnızca eğilme deformasyonlarının gözönünde bulundurulduğu rijit çerçeve yapılarda Denklem (6.71)'deki terimler,

$$\delta_{n0} = \sum \int \frac{M_o m_n}{EI} d\zeta \quad \delta_{mn} = \sum \int \frac{m_n m_m}{EI} d\zeta \quad (6.73)$$

şeklinde tanımlanır. Maxwell'in tersinirlik teoreminden  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$  'dir.

Herbir j elemanındaki iç yükler

$$S_j = S_0 + X_1 s_1 + X_2 s_2 + \dots + X_n s_n$$

veya

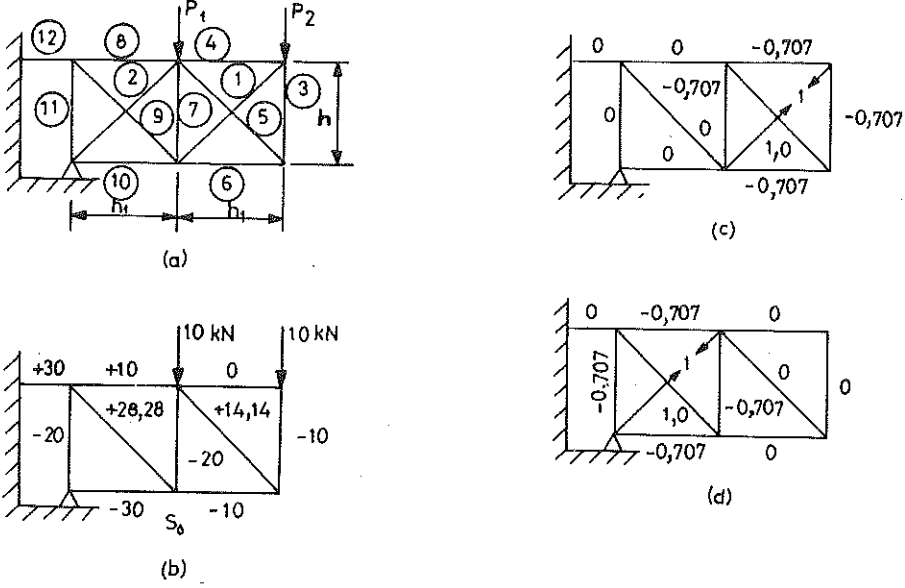
$$M_j = M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_n m_n \quad (6.74)$$

denklemlerinden elde edilebilir.

Bu denklemlerin uygulanması sayısal örneklerle gösterilecektir.

**Örnek 6.12**  $P_1 = P_2 = 10\text{kN}$ ,  $h = h_1$  ve  $L/(AE)$  değerinin herbir eleman için aynı olduğu farzedilerek Şek.6.12a'da gösterilen kafes yapının elemanlarındaki kuvvetleri bulunuz.  $P_1 = P_2 = 0$  olduğunda elemanlarda gerilme yoktur ve gerilmeler elastik sınırları aşmamaktadır.

**ÇÖZÜM** Elemanlar için  $L/(AE)$ 'nin sayısal değerleri yerine yalnızca bunların bağıl değerleri önem taşımaktadır.  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_n = 0$  olduğunda Denklem (6.71)'deki toplam terimleri herhangi bir sabit değerle çarpılabilir. Eğer herhangi bir  $\delta_n$  sıfır değilse bunun sayısal değerini bilmek gerekir. Böylece bütün elemanlar için  $L/(AE)$  değeri, birim farzedilmiştir. Toplam terimleri



Şekil 6.12

Tablo 6.3'de gösterilmiştir. Statikçe belirli temel yapının  $S_0$  eleman kuvvetleri Şek.12b'de gösterilmiştir ve 1'inci sütunda tablo haline getirilmiştir. Hiperstatiklerin birim değerlerinden dolayı  $s_1$  ve  $s_2$  değerleri Şek.6.12c ve d'de gösterilmiştir ve 2'nci ve 3'üncü sütunlarda tablolanmıştır. Denklem (6.72)'nin toplam terimleri 4., 5., 6., 7. ve 8. sütunların toplamları olarak elde edilmiştir. Bu toplamlar Denklem (6.71)'de yerine konulursa;

$$\begin{bmatrix} 4,0 & 0,5 \\ 0,5 & 4,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42,42 \\ -70,70 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrisin tersi alınarak bilinmeyenler elde edilir:

$$X_1 = -8,53 \quad \text{ve} \quad X_2 = -16,60$$

Herbir elemandaki iç yükler,

$$S_j = (S_0 - 8,53s_1 - 16,6s_2)_j$$

ile belirtilir. Burada j eleman numarasıdır.

$S_j$  değerleri Tablo 6.3'ün 9'uncu sütununda gösterilmiştir.

**Örnek 6.13** Şek.6.13a'daki kafes yapının çubuk kuvvetlerini bulunuz. Bütün elemanlar için  $L/(AE)$  değerlerinin  $0,1 \text{ mm/kN}$  olduğu farzedilecektir. Kafesin sağ mesnedi gerilmesiz durumdan itibaren  $5\text{mm}$  deplasman yapmaktadır.  $h=h_1$  farzedilecektir.

**ÇÖZÜM**  $X_1$  ve  $X_2$  hiperstatiklik kuvvetleri Şek.6.13a'da gösterildiği gibi seçilince geriye Örnek 6.12'de olduğu gibi statikçe belirli aynı temel yapı kalmıştır.  $S_0$  ve  $s_2$  değerleri Örnek 6.12'deki gibidir, fakat  $s_1$  değerleri Şek.6.13b'de gösterildiği gibi hesaplanmalıdır.  $S_0$  ve  $s_2$  ile ilgili terimler böylece Tablo 6.3'te hesaplandığı gibi aynıdır yalnız her eleman için  $L/(AE)$  değeri Tablo 6.3'te  $1,0$  olarak alınmışken şimdi  $0,1$  değerindedir. Bütün elemanlar için sabit  $L/(AE)$  değeri Denklem (6.71)'den;

$$\begin{bmatrix} 16,0 & -3,535 \\ -3,535 & 4,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 190,00 \\ -70,70 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir.

Bu denklemler  $X_1$  ve  $X_2$  için çözümlürse;

$$X_1 = 9,93 \quad \text{ve} \quad X_2 = -8,90$$

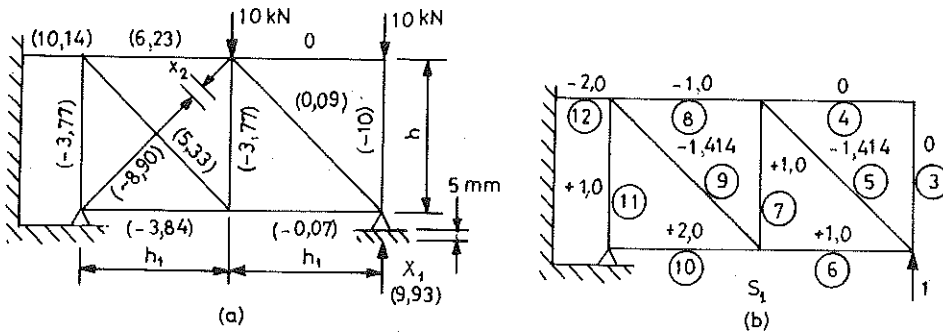
bulunur. Burada  $S_j = (S_0 + 9,93s_1 - 8,90s_2)_j$ 'dir.



Tablo 6.4, Denklem (6.71)'de kullanılan değerler için hesaplamaları göstermektedir. Aynı zamanda burada her bir elemandaki iç kuvvetler verilmiştir.

Tablo 6.3

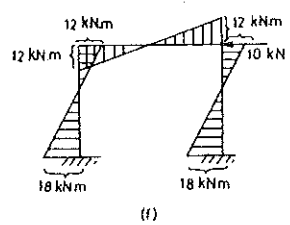
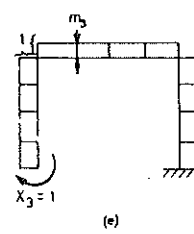
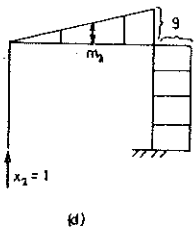
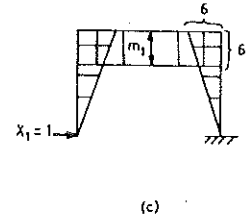
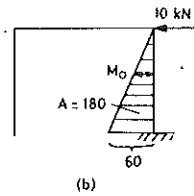
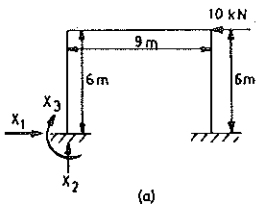
	$S_0$	$s_1$	$s_2$	$S_0 s_1 L$	$S_0 s_2 L$	$s_1^2 L$	$s_2^2 L$	$s_1 s_2 L$	S, kN
				AE	AE	AE	AE	AE	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	0	1,000	0	0	0	1,0	0	0	-8,53
2	0	0	1,000	0	0	0	1,0	0	-16,60
3	-10	-0,707	0	7,07	0	0,5	0	0	-3,97
4	0	-0,707	0	0	0	0,5	0	0	+6,03
5	14,14	1,00	0	14,14	0	1,0	0	0	+5,61
6	-10	-0,707	0	7,07	0	0,5	0	0	-3,97
7	-20	-0,707	-0,707	14,14	14,14	0,5	0,5	0,5	-2,24
8	10	0	-0,707	0	-7,07	0	0,5	0	+21,73
9	28,28	0	1,000	0	28,28	0	1,0	0	+11,68
10	-30	0	-0,707	0	21,21	0	0,5	0	-18,27
11	-20	0	-0,707	0	14,14	0	0,5	0	-8,27
12	30	0	0	0	0	0	0	0	+30,00
Toplam				42,42	70,70	4,0	4,0	0,5	



Şekil 6.13

Tablo 6.4

	$s_1$	$S_0 s_1$	$s_1 s_2$	$s_1^2$	$S, \text{ kN}$
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
2	0	0	0	0	-8,90
3	0	0	0	0	-10,00
4	0	0	0	0	0,00
5	-1,414	-20	0	2,0	0,09
6	1,0	-10	0	1,0	-0,07
7	1,0	-20	-0,707	1,0	-3,77
8	-1,0	-10	0,707	1,0	6,23
9	-1,414	-40	-1,414	2,0	5,33
10	20	-60	-1,414	4,0	-3,84
11	1,0	-20	-0,707	1,0	-3,77
12	-2,0	-60	0	4,0	10,14
<b>Toplam</b>		<b>-240</b>	<b>-3,535</b>	<b>16,0</b>	



Şekil 6.14

**Örnek 6.14** Şek.6.14a'da gösterilen çerçevenin eğilme momenti diyagramını bulunuz. EI değeri sabittir ve elemanlar mesnetlerde dönmeye karşı desteklenmiştir.

**ÇÖZÜM** Yapının üç hiperstatik tepkisi bulunmaktadır. Eğer çerçeve sol mesnetten kesilirse geriye kalan yapı kararludur ve statikçe belirlidir.  $X_1$  ve  $X_2$  kuvvet bileşeni ve  $X_3$  çifti hiperstatik tepki olarak ele alınmıştır. Uygulanan yükler altında temel yapının eğilme-momenti diyagramı Şek.6.14b'de gösterilmiştir. Bütün eğilme momentleri, pozitif veya negatif oldukları belirtilmeden, elemanların basınç bölgesine çizilmiştir. Eğer dağılımın her ikisi de elemanın aynı kenarına çizilmiş ise iki eğilme momentinin çarpımı pozitifdir. Hiperstatik kuvvetlerin birim değerlerinden dolayı  $m_1$ ,  $m_2$  ve  $m_3$  eğilme momentleri Şek.6.14c'de ve e'de çizilmiştir. Moment diyagramlarına dayanılarak çeşitli deplasman terimleri yarı grafiksel olarak irdelenmiştir.

$$EI\delta_{10} = \int M_o m_1 dx = 180 \times 2 = 360$$

$$EI\delta_{20} = \int M_o m_2 dx = -180 \times 9 = -1620$$

$$EI\delta_{30} = \int M_o m_3 dx = -180 \times 1 = -180$$

$$EI\delta_{11} = \int m_1^2 dx = 2 \times 18 \times 4 + 6 \times 9 \times 6 = 486$$

$$EI\delta_{22} = \int m_2^2 dx = 40,5 \times 6 + 54 \times 9 = 729$$

$$EI\delta_{33} = \int m_3^2 dx = 1 \times 1 \times 21 = 21$$

$$EI\delta_{12} = \int m_1 m_2 dx = -6 \times 40,5 - 18 \times 9 = -405$$

$$EI\delta_{13} = \int m_1 m_3 dx = -1 \times 18 \times 2 - 1 \times 54 = -90$$

$$EI\delta_{23} = \int m_2 m_3 dx = 1 \times 40,5 + 1 \times 54 = 94,5$$

Bunların Denklem (6.71)'e konulması ile

$$\begin{bmatrix} 468,0 & -405,0 & -90,0 \\ -405,0 & 729,0 & 94,5 \\ -90,0 & 94,5 & 21,0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -360,0 \\ 1620,0 \\ 180,0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Matrisin tersi alınır ve bilinmeyenler için çözülürse;

$$X_1 = 5,0 \quad X_2 = 2,667 \quad X_3 = 18,0$$

elde edilir.

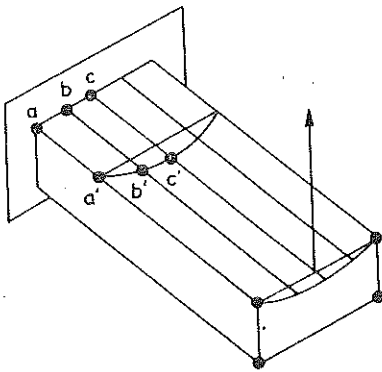
Her elemanın eğilme momenti artık Denklem (6.74)'ten elde edilebilir ve bunlar Şek.6.14f'de gösterilmiştir.

## 6.12. KAYMA GECİKMESİ

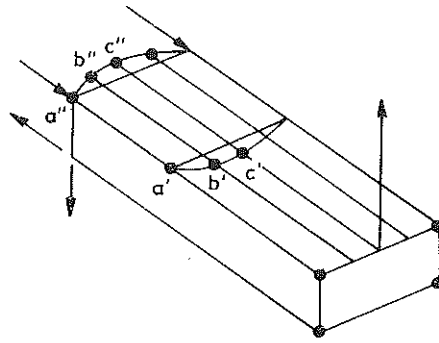
5.Bölümde basit kiriş eğilme teorisi çıkarılırken yapılan birçok varsayımın hatalara sebep olduğuna değinilmişti. Düzlemlerin eğilmeden sonra da düzlem kaldığı ve eğilme gerilmelerinin tarafsız eksenin uzaklıkla orantılı olduğu varsayımı, ağır yapılara nazaran yarı-monokok yapılarda daha az kesinlik taşır, çünkü ince perdelerdeki kayma deformasyonları her zaman ihmal edilemez.

Bir kutu kirişte eğilme gerilmesi, dağılımını değiştiren kayma deformasyonları etkisi kayma gecikmesi (shear lag) olarak bilinir. Bu tesir, Şek.6.15'te gösterilen konsol kutu kiriş gözönüne alınarak açıklanacaktır. Basitlik açısından kiriş kesidinin düşey ortay hattına nazaran simetrik olduğu ve yükün bu hat doğrultusunda etki ettiği farzedilmiştir. Böylece burulma deformasyonu da bulunmamaktadır. Basit kiriş teorisi kullanılarak yapılacak bir analizde, üst yüzde bulunan bütün takviyelerin bütün kesitlerde aynı kaldığını gösterir. Kayma gerilmeleri sonucunda yüklemeye önce düzlem olan kesit, a'b'c' doğrusu ile belirtildiği şekilde deforme olacaktır.

Mesnette ise, kesidin düzlem dışına çıkarak çarpılması önlenir ve Şek.6.15'deki abc doğrusu düz kalır. cc' mesafesi aa' mesafesinden daha büyük olduğundan c'deki takviye a'dakine nazaran daha küçük basınç gerilmesi taşır. Böylece a'daki eğilme gerilmesi basit eğilme teorisi ile hesaplanandan daha büyük, c'deki eğilme gerilmesi ise daha küçük değerde olmalıdır. Bu durumda mesnetten bir miktar uzaktaki bütün kesitler aynı miktarda çarpılır ve bütün takviyelerde aynı eğilme gerilmeleri ve şekildeğişimleri bulunur. Kayma gecikmesi tesiri mesnette en fazladır ve daha çok yerel etkilerden kaynaklanır.



Şekil 6.15



Şekil 6.16

Birçok kanat yapısı yalnızca kirişlerde parçalara ayrılmıştır, bu nedenle takviyeler ayrılma yerlerinde eğilme gerilmeleri taşımazlar. Şek.6.16'da, bu durumda olan bir kutu kiriş gösterilmiştir. Soldaki mesnette yalnızca kiriş başlıkları eksenel yükler taşır. Bu durumda mesnette, kesit a"b"c" çizgisi ile gösterildiği şekilde, mesnetten yeteri kadar uzaktaki kesitteki a'b'c' deformasyonunun aksine bir deformasyon gösterir. Orta takviyenin nihai c'c" uzunluğu köşe takviyenin a'a" uzunluğundan oldukça fazladır. Tüm kesidi desteklenmiş kirişe nazaran bu kirişte kayma salınımı daha fazladır. Mesnede yakın yerde tesir mevzileşir ve mesnetten belirli bir uzaklıkta takviyeler yaklaşık olarak basit kiriş teorisinden hesaplanabilecek eğilme gerilmelerine karşı koyarlar.

Kayma gecikmesi tesiri, basit eğilme teorisine göre hesaplanandan daha fazla nihai eğilme momenti taşınmasına imkan verdiği için arzu edilebilir. Kirişler arasındaki takviyelerdeki müsaade edilebilir eğilme gerilmeleri, köşe takviyelerdeki veya köşelerdeki kiriş başlıklarındakilerine nazaran daha düşüktür. Takviyeler, sınırlar arası açıklık uzunluğundaki kolonlar gibi yük taşımaya çalışır. Kiriş başlıkları düşey olarak kiriş perdesi, yatay olarak da takviyelerle desteklenir ve bunlar genelde yüksek basınç gerilmeleri taşır.

Bir kutu kiriş burulmaya zorlandığında kesitler orijinal düzlemlerine göre çarpılmaya başlar. Eğer kiriş ucu çarpılmaya karşı desteklenirse boşluklarda eksenel yükler oluşur ve sabit uç yakınında yeni bir kayma akısı dağılımı olur. Bu aynı zamanda kayma deformasyonu etkisidir ve bazan kayma gecikmesi tesiri olarak bilinir.

Bazı basit yükleme şartlarında ortaya çıkan gerilmeleri ele alarak ve daha sonra bunları diğer gerilme halleri ile süperpoze ederek kayma salınımı tesiri incelenebilir. Şek.6.17a'da gösterildiği gibi x doğrultusunda sonsuz uzunlukta olduğu farzedilen ve gösterildiği gibi yüklenen iki perdeli üç takviyeli kiriş ele alınsın. x doğrultusundaki yüklerin ve deformasyonların dağılımı araştırılmaktadır.

Orta takviyedeki P kuvveti x mesafesinin bir fonksiyonudur. Bir dx uzunluğunda kuvvet, dP kadar değişir ve perdedeki kayma deformasyonları da Şek.6.17b'de gösterildiği gibi dy kadar değişir. Bir takviyenin açıklık doğrultusundaki dengesinden dP yük artışı, perdedeki  $f_s$  kayma gerilmesinden dolayıdır:

$$dP = -2f_s t dx \quad (6.75)$$

Perde kayma gerilmelerinden dolayı meydana gelen  $\gamma$  deformasyonu:

$$f_s = G\gamma \quad (6.76)$$

Takviyelerin eksenele uzamasından dolayı  $\gamma$  açısında meydana gelen değişim:

$$bd\gamma = -\left(\frac{P}{AE} + \frac{P}{2A_1E}\right)dx \quad (6.77)$$

P için x'in fonksiyonu şeklinde bir diferansiyel denklem elde etmek için bu üç denklemden  $f_s$  ve  $\gamma$  değişkenleri çıkarılabilir. Denklem (6.76)'dan  $f_s$  değeri Denklem (6.75)'de yerine konulur ve bu x'e göre bir kere daha türetilirse

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -2tG \frac{d\gamma}{dx} \quad (6.78)$$

elde edilir.  $d\gamma/dx$  değeri Denklem (6.77)'den alınıp, burada yerine konulabilir:

$$\frac{d^2P}{dx^2} = k^2P \quad (6.79)$$

Burada

$$k^2 = \frac{2tG}{bE} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{2A_1} \right) \quad (6.80)$$

dir. Denklem (6.79)

$$P = C_1e^{kx} + C_2e^{-kx} \quad (6.81)$$

şeklinde integre edilebilir. Burada  $C_1$  ve  $C_2$  integrasyon sabitleridir. P yükü x'in büyük değerlerinde sifıra yaklaşıp; böylece  $x=\infty$  'da  $P=0$  ve  $C_1=0$  olur. Yüklü uçta,  $x=0$  ve  $P=P_0$  veya  $C_2=P_0$  'dır. Buradan Denklem (6.81) şu değeri alır:

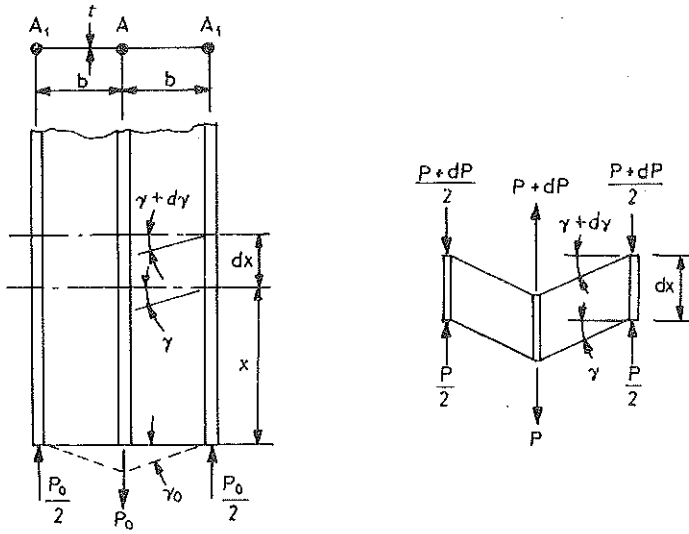
$$P = P_0 e^{-kx} \quad (6.82)$$

$f_s$  için bir ifade bulmak maksadıyla Denklem (6.82) türetilbilir ve Denklem (6.75)'e eşitlenebilir:

$$f_s = \frac{P_0 k}{2t} e^{-kx} \quad (6.83)$$

$P_0$  kuvvetinin  $\delta$  deplasmanı  $\gamma$ 'ye eşittir veya  $x=0$  için  $f_s b/G$ 'dir:

$$\delta = \frac{P_0 k b}{2tG} \quad (6.84)$$



Şekil 6.17

Şek.6.18'de gösterilen yapı Şek.6.17'de gösterilen yapıya benzer şekilde analiz edilebilir. Herhangi bir kesitteki  $P$  başlık kuvvetleri

$$P = P_0 e^{-kx} \quad (6.85)$$

ile tanımlanmıştır. Burada



$$k^2 = \frac{4G(1/b + 1/c)}{AE(1/t + 1/t_1)} \quad (6.86)$$

dir. Denklem (6.85)'in geçerli olabilmesi için sınırların sık aralıkla yerleştirilmiş olduğu farzedilir.  $q$  kayma akısı benzer şekilde

$$q = \frac{P_0 k}{2} e^{-kx} = q_0 e^{-kx} \quad (6.87)$$

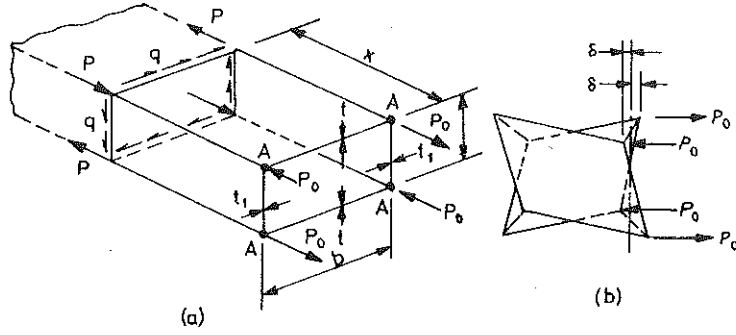
ile tanımlanır. Burada  $q_0$ ,  $x=0$  olduğu yerdeki kayma akısıdır. Kayma salınımı için, burulma momentlerinin dengede olabilmesi için dört perdedeki kayma akısının aynı olması gerekir.  $P_0$  kuvvetinden dolayı orijinal kesit düzleminden,  $\delta$  çarpılma deplasmanı Şek.6.18b'de gösterildiği gibi ölçülür.

$$\delta = \frac{q_0(1/t + 1/t_1)}{2G(1/b + 1/c)} = \frac{P_0 k(1/t + 1/t_1)}{4G(1/b + 1/c)} \quad (6.88)$$

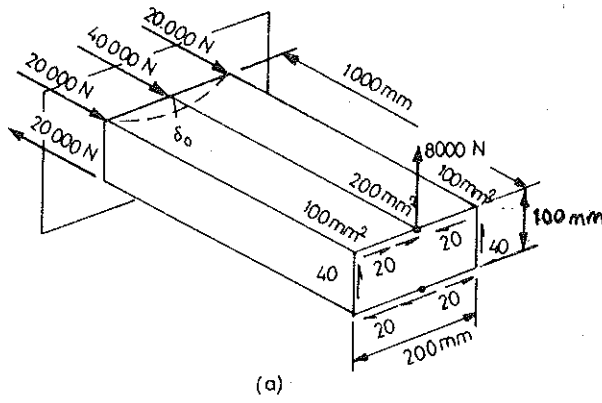
Kayma-salınımı hesaplarının gösterilmesi maksadıyla Şek.6.19a'daki kutu kiriş gözönüne alınsın. Bütün perdelerde kalınlık  $t=0,2$  mm,  $E=10^5$  MPa ve  $G=0,4E$  olsun. Basit kiriş teorisine göre açıklık boyunca sabit olan ve şekilde gösterilen değerlerdeki kayma akıları ve eksenel takviye yükleri elde edilir. Bu teorinin uygulanabilmesi için mesnetteki kesidin çarpılarak orta takviyenin ilk bulunduğu düzleme nazaran  $\delta_0$  deplasmanını yapması gerekir:

$$\delta_0 = \frac{f_s}{G} b = \frac{20 \times 100}{0,20 \times 40.000} = 0,25 \text{ mm}$$

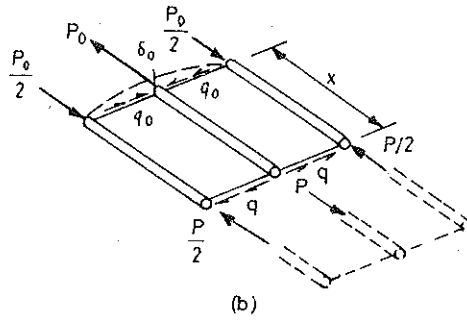
Eğer mesnette kesitin çarpılmaya karşı desteklenmiş olması söz konusu ise orta takviye 40.000N'dan daha küçük bir basınç yükü, takviyeler ise 20.000N'dan fazla basınç yükleri taşıyacaktır. Şek.6.19b'de gösterildiği gibi yapıya  $\delta_0$  deplasmanını yaptırabilecek  $P_0$  kuvveti Denklem (6.84)'den hesaplanır. Şek.6.19b'de gösterilen kuvvet sistemi



Şekil 6.18



(a)



(b)

Şekil 6.19

Şek.6.19'a'da gösterilen basit eğilme teorisinden elde edilenlerle süperpoze edilir.

Şek.6.19b'deki yapı Şek.6.17'dekine eşdeğerdir. Denklem (6.80)'den

$$k^2 = \frac{2 \times 0,2 \times 0,4}{100} \left( \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \right) = 16 \times 10^{-6}$$

veya

$$k = 0,004$$

olur.  $\delta = 2,5$  mm değeri Denklem (6.84)'de yerine konular ve  $P_0$  için çözülürse;

$$P_0 = \frac{2tG\delta}{kb} = \frac{2 \times 0,2 \times 4 \times 10^4 \times 0,25}{0,004 \times 100} = 10.000N$$

bulunur. Denklem (6.82)'den

$$P = 10.000^{-0,004x}$$

ve Denklem (6.83)'ten;

$$f_s = 100e^{-0,004x}$$

elde edilir.

Tablo 6.5

x	$e^{-0,004x}$	$P=10.000e^{-0,004x}$	$q=20e^{-0,004x}$
0	1	10.000	20
50	0,817	8.170	16,3
100	0,670	6.700	13,4
200	0,450	4.500	9,0
400	0,202	2.020	4,0
1000	0,019	190	0,4

veya  $q-f_s t=0$  bulunur. Böylece mesnette köşe takviyelerin herbiri 25.000N'luk basınç yükü taşıırken orta takviye 30.000N'luk basınç yükü taşıyacaktır. Bu kesitte kayma şekildeğişimi olmadığı varsayımının doğal sonucu olarak kayma akısı sıfırdır.

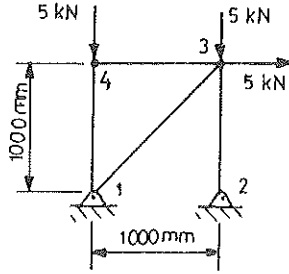
Sabit mesnetten çeşitli x uzaklıklarında P ve q değerleri Tablo 6.5'te hesaplanmıştır. Tablolanmış bu değerler Şek.6.19a'dakiler üzerine süperpoze edilmelidir.

Mesnetten 200 mm mesafedeki düzeltme kuvvet değerleri mesnettekilerin yarısından daha az değerdedir.

Şek.6.19'da gösterilen yükleme durumu normal bir uçak kanadında gerekli olandan fazla kayma gecikmesi düzeltilmesine ihtiyaç gösterir. Bir uçak kanadındaki kesme yükleri genelde gövde kenarları tarafından karşılanır, fakat gövdenin ortasındaki kesit çarpılmaya karşı desteklenmiştir. Kayma akısının en büyük değerde olduğu gövde kenarında çarpılmaya müsaade edilir ve kayma akıları basit eğilme teorisinde elde edilenlere çok benzer bir şekilde dağılır.

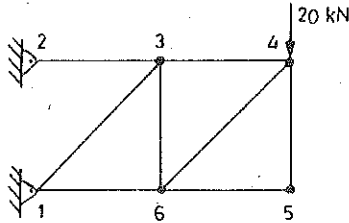
## PROBLEMLER

6.1. Şek.P6.1'de gösterilen kafes yapının 3 noktasının deplasmanlarını bulunuz. Her bir elemanın kesit alanının  $100 \text{ mm}^2$  ve  $E=10^5 \text{ MPa}$  olduğu farzedilecektir.



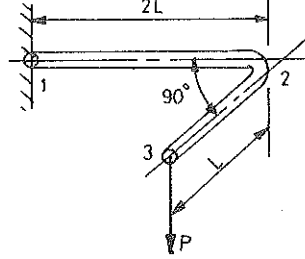
Şekil P6.1

6.2. Şek.P6.2'de gösterilen kafes yapının 4-5 elemanının dönmesini hesaplayınız. Bütün elemanlar için Alan= $100 \text{ mm}^2$  ve  $E=680 \text{ GPa}$ 'dir.



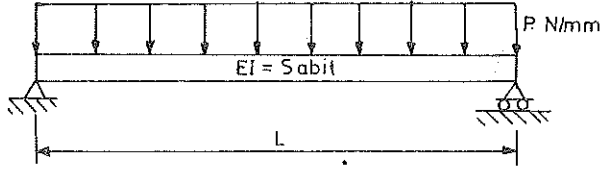
Şekil P6.2

6.3. Şek.P6.3'te gösterilen kiriş yapısının 2 ve 3 noktalarının (öteleme ve dönme) deplasmanlarını hesaplayınız. Kiriş kesit alanının sabit olduğu farzedilecektir.



Şekil P6.3

6.4. Şek.P6.4'te gösterildiği gibi basit mesnetli bir kiriş, sabit yayılı yük altındadır. Castigliano teoremini kullanarak orta açıklık deplasmanını bulunuz.



Şekil P6.4

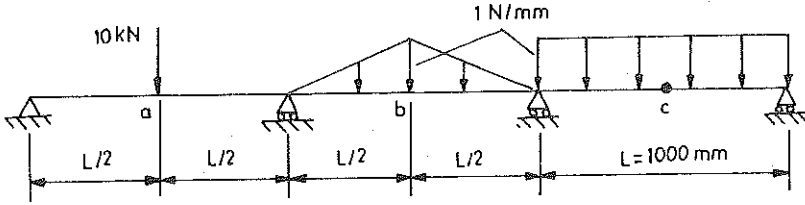
6.5. Prob.6.4'ü Rayleigh-Ritz yöntemini kullanarak çözünüz.

6.6. Prob.6.4'ü sonlu farklar yöntemini kullanarak çözünüz.

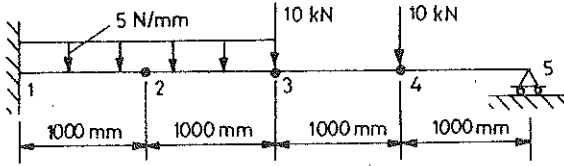
6.7. Prob.6.4'ü klasik kiriş diferansiyel denklemi  $EI d^4w/dx^4 = p(x)$ 'yi kullanarak çözünüz.

6.8. Şek.P6.8'de gösterilen çok açıklıklı kirişin a,b ve c noktalarındaki düşey deplasmanlarla sol ve sağ mesnetlerindeki eğimleri, sonlu farklar yöntemi ile çözünüz.  $EI=10^8$ .

6.9. Şek.P6.9'da gösterilen kiriş yapısının belirtilen noktalarındaki momentleri ve kesme kuvvetlerini sonlu farklar yöntemini kullanarak bulunuz.



Şekil P6.8



Şekil P6.9

6.10. Sabit bir  $t$  kalınlığında, kare şeklinde plak iki karşı uçlarından sabit, diğer karşı uçlarından ise basit mesnetlenmiştir. Sonlu farklar yöntemini kullanarak en büyük deplasmanı ve eğilme momentini bulunuz. Plakın sabit  $p$  düşey basıncı tesirinde olduğu farzedilecektir. Poisson oranı  $\nu=0,25$  alınacaktır.

6.11. Bütün elemanlar için  $L/(AE)$ 'nin sabit olduğunu farzederek Şek.6.8'deki kafes yapıyı analiz ediniz. Gösterilen düşey yüke ilave olarak B noktasında 20kN'lik bir yatay yükün bulunduğunu farzederek yapıyı analiz ediniz. Bütün elemanlarda  $AE$  sabit farzedilecektir.

6.12. Şek.6.8'deki kafes yapıda kesit alanı  $300 \text{ mm}^2$  olan ilave bir AC elemanının bulunduğunu farzederek analiz yapınız. BD hiperstatik eleman olarak alınacaktır.

6.13. BC elemanını hiperstatik farzederek Prob.6.12'yi tekrar ediniz.

6.14. BD elemanının 1mm fazla uzun imal edildiğini farzederek Pro.6.12'yi tekrar ediniz. Yapıya hiçbir dış yükün gelmediği farzedilecektir.

6.15. Şek.6.9'daki yapıyı, gösterilen yüklemeye göre mesnetlerin yatay olarak 5mm açıldığını farzederek analiz ediniz.  $R=500\text{mm}$ ,  $P=2\text{kN}$ ,  $I=10^4 \text{ mm}^4$  ve  $E=100\text{GPa}$  değerlerini kullanınız:

6.16. Şek.6.9'daki yapıyı, P yükünün aynı noktada yatay olarak etkimesi hali için analiz ediniz. EI'nin sabit değerde olduğu farzedilecektir.

6.17. Şek.6.10'daki yapıyı, 2 kN'luk yükün, tüpün eğildiği noktaya etkimesi hali için analiz ediniz.

6.18.  $h=400\text{mm}$ ,  $h_1=300\text{mm}$  ve herbir eleman için  $AE=10.000\text{kN}$  değerlerini kabul ederek Örnek 6.12'yi tekrar ediniz.

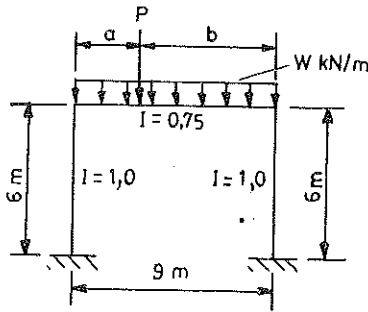
6.19. Eğer  $h=400\text{mm}$ ,  $h_1=300\text{mm}$  ve her eleman için  $AE=10.000\text{kN}$  değerlerinde ise Örnek 6.13'ü tekrar çözünüz. 12. elemanın uzunluğu  $100\text{mm}$ 'dir.

6.20.  $X_1$  tepkisi yerine 12 elemanın burada hiperstatik olarak bulunduğunu farzederek Prob.6.19'u tekrar ediniz.

6.21. Şek.6.14a'daki çerçeveyi, sol mesnedin mafsalsal ve sağ mesnedin sabit olması hali için analiz ediniz.

6.22. Şek.6.14a'daki çerçeveyi, yapının ortasına, aşağı yönde etkiyen  $20\text{kN}$ 'luk ilave bir yük gelmesi hali için analiz ediniz.

6.23. Şek.P6.23'den P6.25'e kadar gösterilen şekillerdeki çerçevelerin,  $P=0$  ve  $W=4,0\text{ kN/m}$  olması halinde eğilme-momentü diyagramlarını elde ediniz.



Şekil P6.23'den P6.25'e

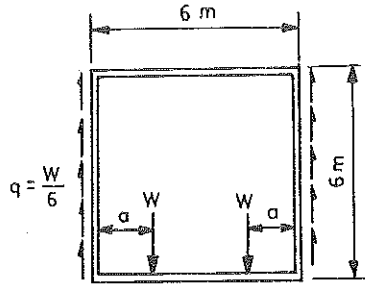
6.24. Şek.P6.23'den P6.25'e kadar gösterilen şekillerdeki çerçevelerin,  $W=0$ ,  $P=10\text{kN}$  ve  $a=b=4,5$  olması halinde eğilme-momenti diyagramlarını elde ediniz.

6.25. Şek.P6.23'ten P.6.25'e kadar gösterilen şekillerdeki çerçevelerin,  $W=0$ ,  $P=10\text{kN}$ ,  $a=3\text{m}$  ve  $b=6\text{m}$  olması halinde, eğilme-momenti diyagramlarını elde ediniz.

6.26. Şek.P6.26'dan P6.28'e kadar gösterilen şekillerde dikdörtgen kesitli bir uçak gövdesi bulunmaktadır.  $W=3\text{kN}$  ve  $a=1,5\text{m}$  olması hali için eğilme momentlerini hesaplayınız.  $EI$ 'nın sabit olduğu farzedilecektir.

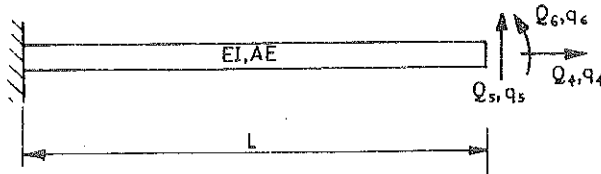
6.27. Prob.6.26'yı, alt çerçeve elemanının  $EI$  değerinin diğerlerinin 4 katı olması hali için tekrar ediniz.

6.28. Prob.6.26'yı,  $2W=6\text{kN}$ , ve  $a=30\text{m}$  olması hali için tekrar ediniz.



Şekil P6.26'den P6.28'e

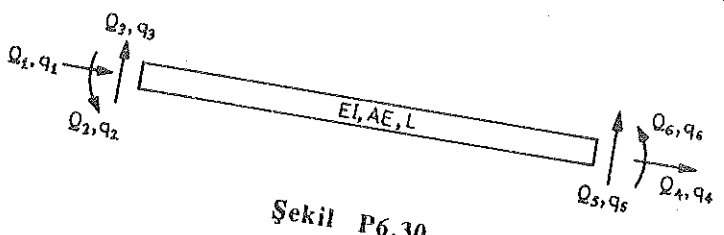
6.29. Şek.P6.29'da gösterilen kirişte uygulanan kuvvetlerle bunlara karşılık gelen deplasmanlar arasında bağıntı kurmak için vertüel deplasmanlar prensibini kullanınız. Bu bağıntı  $\{Q\} = [S] \{q\}$  şeklindedir.



Şekil P6.29



6.30. Kirişin Şek.P6.30'da gösterildiği gibi olması hali için Prob.6.29'u tekrar ediniz.



Şekil P6.30



## YEDİNCİ BÖLÜM

### YAPI ANALİZİNDE SONLU ELEMANLAR DEPLASMAN YÖNTEMİ

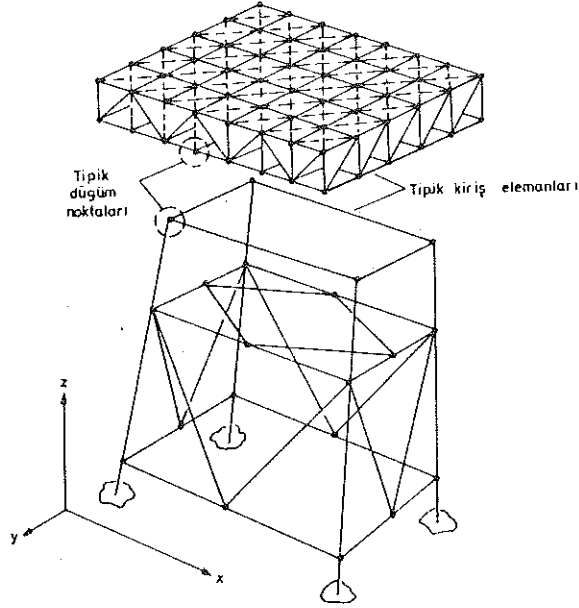
#### GİRİŞ

Gerçek bir dizayn işleminde ele alınan yapı sistemleri, genellikle kiriş, plak, veya bunların üçünün bileşimi gibi çeşitli yapı elemanlarının büyük sayılarda toplanmasıyla gelmesinden oluşur. Bunların genel geometrisi oldukça karmaşıktır ve bunlar matematiksel ifade ile temsil edilemezler. Bunlara ilave olarak biraraya getirilen elemanların oluşturduğu yapılarda, kesip-çıkarmalar, eleman kalınlık farkları gibi diğer malzeme süreksizlikleri ile birlikte, yükleme ve mesnet şartlarında da süreksizlikler bulunabilir. Böyle yapı geometrilerinin ve süreksizliklerin bulunması, esaslı bir diferansiyel denklem formülasyonu ve bunun çözümü olan klasik yöntemlerin kullanılamıyacağı açıktır. Bu nedenle yukarıda belirtilen hususların analizi halinde analizci, uygulamada zorluk göstermeyen daha genel yöntemler kullanmalıdır. Bu yöntemler, sonlu elemanlar deplasman ve sonlu elemanlar kuvvet yöntemleridir.

Yüksek hızlı, büyük bellekli sayısal bilgisayarların hizmete girmesiyle sonlu elemanlar, karmaşık yapı sistemlerinin analizinde en yaygın şekilde kullanılan bir teknik haline gelmiştir. Bu yöntemin esasını, yapıda seçilen sayıda kuvvetlerle buna karşılık gelen elemanlar (deplasman veya katılık yöntemi) veya deplasmanlarla bunlara karşılık gelen kuvvetler (kuvvet veya esneklik yöntemi) arasındaki bağıntılar kullanılarak lineer denklem takımlarının oluşturulması teşkil eder.

Bu yöntemlerin birçok avantajı vardır:

1. Tamamen otomatik hale getirilmeye uygundur.
2. Yapı geometrisi kolayca tanımlanabilir.
3. Gerçek yapı, birçok yapı elemanından oluşan bir matematik model ile kolayca temsil edilebilir.
4. İzotrop olmayan malzemeler gözönüne alınabilir.
5. Süreksizlikler gözönüne alınabilir.
6. Artık gerilmeler, öngerilmeli durumlar ve sıcaklık yükleri gözönünde bulundurulabilir.
7. Lineer olmayan yapı problemleri de ele alınabilir.
8. Birçok yükleme durumu kolayca ele alınabilir.



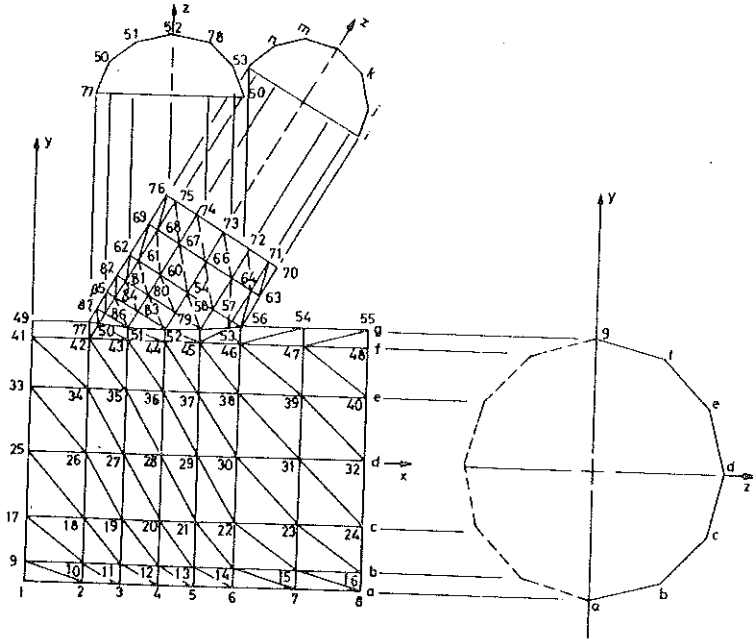
Şekil 7.1

sonlu elemanlar matris yöntemleri, büyük karmaşıklık gösteren dizayn problemlerinin çözümünde sınırsız uygulama olanakları ile endüstride büyük rağbet görmektedir. Sonlu elemanlar matris yöntemleri için okuyucunun Kay.10,24 ve 27'den yararlanabileceği kaynaklara başvurması takviye olunur.

## YAPININ MATEMATİK MODELİ

Yapı analizinde sonlu elemanlar matris yönteminin temel kavramı, Şek.7.1'den görüldüğü gibi, gerçek yapının sonlu sayıda yapı elemanından oluştuğunu gösterir. Her bir yapı elemanı bir matematik modelle temsil edilmiştir. Bu elemanların birbirinin yapısal olarak birleşmesi, yapı içinde gerilmelerin ve/veya şekil değişimlerinin sürekliliğinin sağlandığı matematik fonksiyonlarla tanımlanabilir.

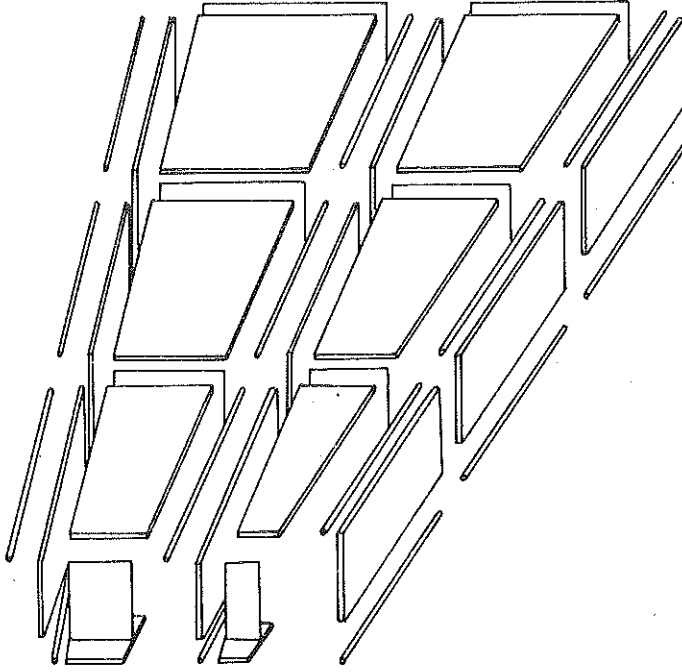
Yapıların idealleştirilmesinde genel olarak kullanılan eleman türleri çubuklar, plakalar, iki-boyutlu membranlar, kabuklar ve eğilen plakalar, ve üç boyutlu dolgu elemanlarıdır. Şek.7.4 ve 7.5'te her bir eleman, tipik düğüm noktası kuvvetleri ve giriş noktaları hakkında bunlara karşılık gelen deplasmanlar gösterilmektedir.



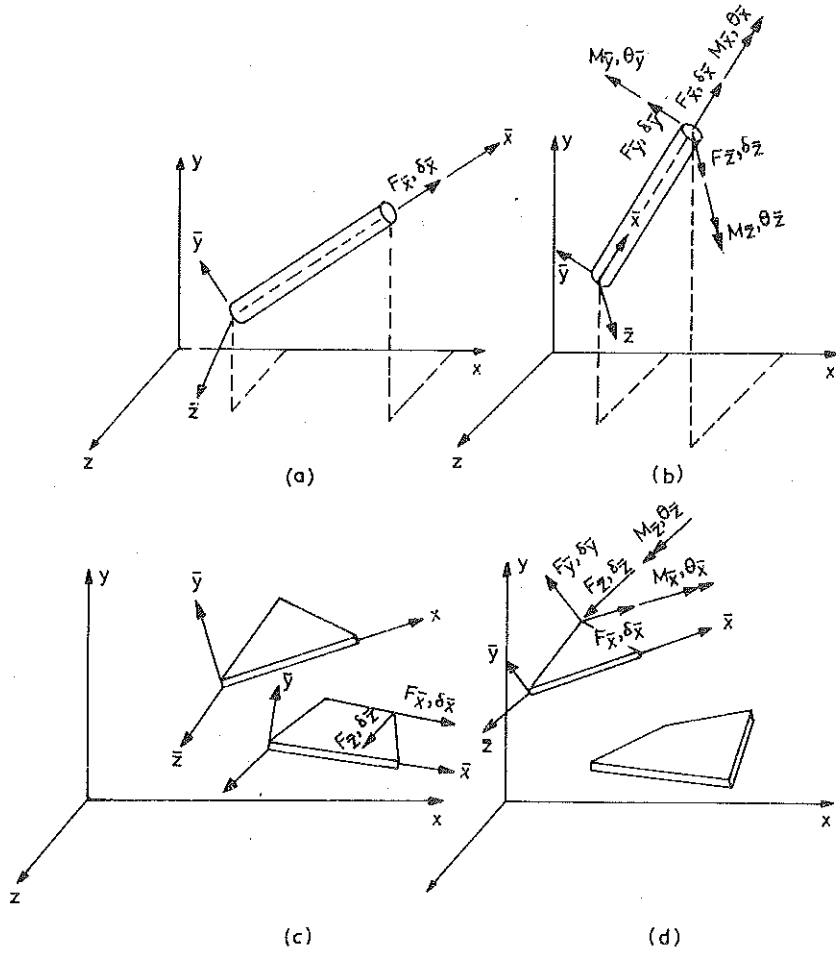
Şekil 7.2

### 7.3. ELEMEN AYRIKLAŞTIRILMASI

Bir elemanın yapısal davranışını yönlendiren matematik bağıntılar, idealleştirilmiş eleman modeli esasına dayanılarak çıkarılır. Örneğin eleman şekli seçildiğinde Şek.7.6'da gösterildiği gibi eleman, yapı yüzeyine sonlu sayıda düğüm noktası konularak ayrıklaştırılır. Genel olarak söylenirse bir elemanda, düşünülen düğüm noktası sayısının artmasıyla hassasiyet artar. Benzer şekilde eleman ebadı küçüldüğünde verilen bir yapı sistemi için analitik sonuçlar daha hassas olmaya başlar. Eleman düğüm noktası ve bir yapı için düşünülen eleman sayısı arttırıldığında Bilgisayar belleği gereksinimi hızla artar.



Şekil 7.3



Şekil 7.4 Yapı elemanları (a) Çubuk elemanı (b) Kiriş elemanı (c) Membran plak elemanı (d) Eğilen plak elemanı

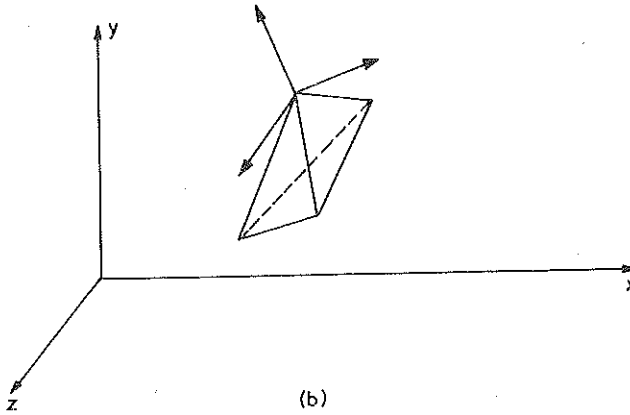
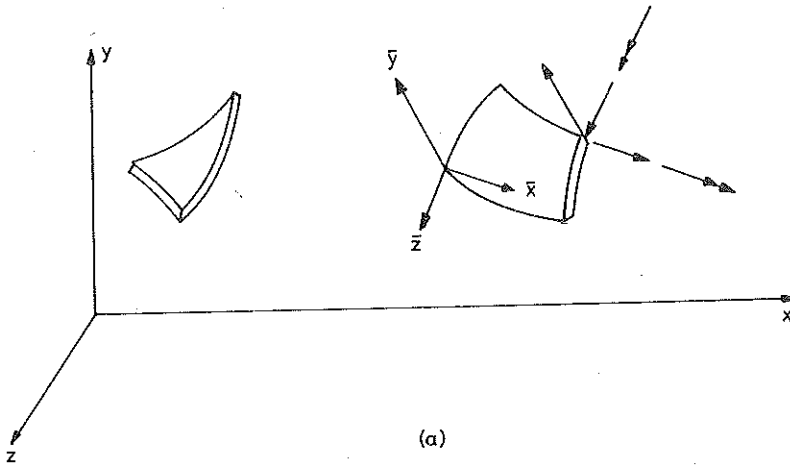
#### 7.4. SONLU ELEMANLAR MATRİS YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

Sonlu elemanlar matris yöntemlerinin yapı analizinde yaygın bir uygulaması vardır. Uzay yapılarından kara ve deniz yapılarına kadar her mühendislik alanında kullanımı yaygınlaşmıştır.

## 7.5. KOORDİNAT SİSTEMİ

Sonlu elemanlar matris yöntemiyle ilgili olarak burada kullanılan koordinat sistemi, Şek.7.6'a'da gösterildiği gibi bir  $x$ ,  $y$  ve  $z$  ortogonal eksen takımıdır. Eleman veya yapıya bağlı olarak bunlar sırasıyla yerel veya tümel eksenler olarak isimlendirilir.

Eleman bağıntılarının formülasyonunda; elemanın yerel eksenlerine göre düğüm noktalarının geometrisi, kuvvetleri ve deplasmanları belirlenir; fakat bağıntılar bir yapı için kullanılacak ise, yapının tümel (global) eksen takımına göre düğüm noktası geometrisi, kuvvetleri ve deplasmanları belirlenir. Şek.7.6b'ye bakınız.



Şekil 7.5 Yapı elemanları (a) Kabuk elemanlar (b) Üç boyutlu elemanlar



## 7.6. KUVVETLER, DEPLASMANLAR VE BUNLARIN İŞARET KABULÜ

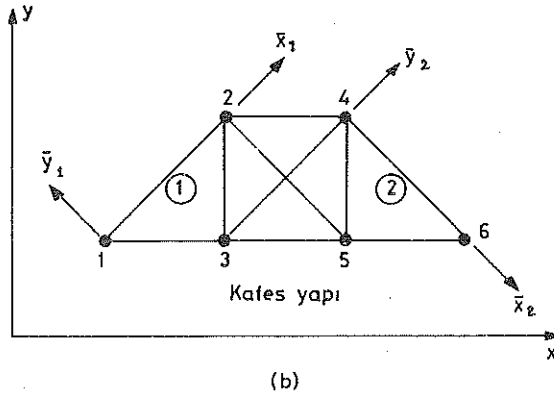
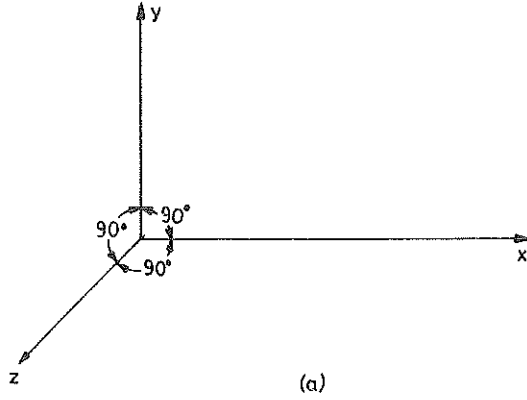
Burada kuvvet terimi, hem kuvvetler hem de momentler için kullanılacak, benzer şekilde deplasman terimi ise hem öteleme hem de dönme için kullanılacaktır. Şek.7.7'de gösterildiği gibi kuvvetler ve bunlara karşılık gelen deplasmanlar, ilgili eksen takımının pozitif yönlerinde etkiyorlarsa pozitif farzedilecektir. Momentler için ise sağ el kuralı kullanılacaktır.

Eleman bağıntılarının formülasyonunda genelleştirilmiş kuvvetler ve deplasmanlar kavramının şu şekilde uygulanması uygundur:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Örnek olarak Şek.7.8'de gösterilen eleman gözönüne alınsın. Kuvvet ve deplasman vektörleri şu şekilde temsil edilir:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{kx} \\ F_{ky} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \delta_{kx} \\ \delta_{ky} \end{bmatrix}$$



Şekil 7.6 Tümel ve yerel eleman eksenleri (a) Koordinat sistemi (b)  $x, y$  = yapının tümel eksenleri;  $x_1, y_1$  = 1 elemanın yerel eksenleri;  $x_2, y_2$  = 2 elemanın yerel eksenleri

### 7.7. DEPLASMAN YÖNTEMİ KAVRAMI

Deplasman yöntemi veya genellikle bununla kastedilen katılık yöntemi, deplasmanların süperpozisyonu prensibi esasına dayanır. Şek.7.9'da gösterilen düzlem gerilme problemi gözönüne alınsın. Bu cismin  $i, j$  ve  $k$  gibi herbir düğüm noktasının,  $x$

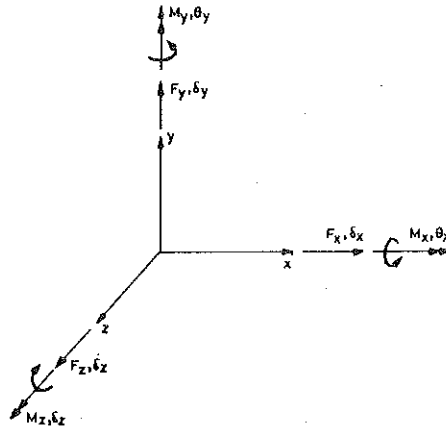
ve y doğrultularında mümkün olabilen iki deplasmanı bulunur. Herbir deplasmana karşılık, herbir düğüm noktasında oluşan bir dizi kuvvetler vardır. Lineer yapılar için süperpozisyon yöntemi, bir cismin bir düğüm noktasının belirli bir doğrultuda yapabileceği deplasmandan dolayı oluşacak toplam kuvvet, basit bir cebirsel toplama ile elde edilebilir:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= f_1^1 + f_1^2 + f_1^3 + f_1^4 + f_1^5 + f_1^6 \\
 f_2 &= f_2^1 + f_2^2 + f_2^3 + f_2^4 + f_2^5 + f_2^6 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f_6 &= f_6^1 + f_6^2 + f_6^3 + f_6^4 + f_6^5 + f_6^6
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

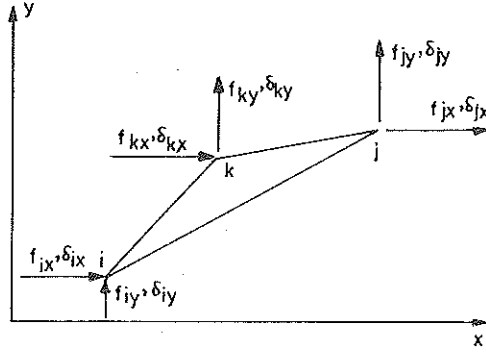
veya

$$f_m = \sum_{n=1}^6 f_m^n = \sum_{n=1}^6 f_{mn} \quad (m = 1, 2, \dots, 6) \tag{7.3}$$

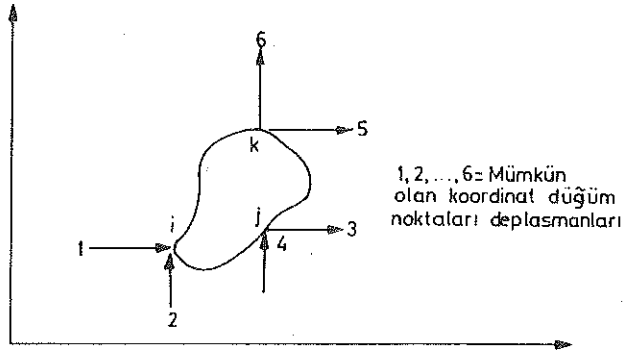
Burada  $f_{mn} = f_m^n = n$  düğüm noktası koordinat deplasmanı sonucunda  $m$  doğrultusunda meydana gelen kuvettir ve  $f_m$  ise Şek.7.9'da gösterildiği gibi, muhtemele bütün  $\delta_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) koordinat deplasmanından dolayı ortaya çıkan kuvettir.



Şekil 7.7 Pozitif kuvvetler ve deplasmanlar



Şekil 7.8 Eleman kuvvet ve deplasman notasyonu



Şekil 7.9 Mümkün olan bütün  $\delta_n$  ( $n = 1, 2, \dots, 6$ ) düğüm noktası koordinat deplasmanlarının gösterildiği üç düğüm noktalı düzlemsel cisim

Lineer elastik yapılarda, kuvvetler deplasmanlarla doğru orantılıdır:

$$f = k\delta$$

(7.4)

burada  $f$  = kuvvet

$\delta$  = deplasman  
 $k$  = orantı sabiti

dir. Denklem (7.4) esas bağıntısından yararlanarak, Denklem (7.3)

$$f_m = \sum_{n=1}^6 k_{mn} \delta_n \quad (m = 1, 2, \dots, 6) \quad (7.5)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $k_{mn}$  birim deplasman başına sabit katılık katsayısıdır ve  $n$  düğüm noktası koordinatı doğrultusunda uygulanan birim deplasmandan dolayı  $m$  koordinatı doğrultusunda oluşan kuvvettir.

Denklem (7.5) matris formunda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & & \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

veya kapalı matris formunda;

$$\{f\} = [k] \{\delta\} \quad (7.7)$$

şeklinde olur. Burada  $\{f\}$  ve  $\{\delta\}$ , sırasıyla kuvvet ve deplasman vektörleri ve  $[k]$ , katılık katsayıları kare matrisidir.

Denklem (7.7) deplasman yönteminin esasını teşkil eder ve statik denge şartlarını oluşturur.

Eleman bağıntıları için Denklem (7.7);

$$\{f_m\} = [k] \{\delta_m\} \quad (7.8)$$

formunu alır. Burada

$\{f_m\}$  = m elemanı için düğüm noktaları iç kuvvetlerini

$\{\delta_m\}$  = m elemanının düğüm noktaları deplasmanlarını

$[k_m]$  = m'inci elemanın katılık matrisini

gösterir.

Şek.7.10a'ya bakınız.

Şek. 7.10b'de gösterildiği gibi bir yapı sistemi için Denklem (7.7),

$$\{F\} = [K] \{\Delta\} \quad (7.9)$$

şeklini alır. Burada

$\{F\}$  = yapıya gelen düğüm noktaları dış kuvvetleri ve/veya tepkiler

$\{\Delta\}$  = yapının düğüm noktaları deplasmanları

$[K]$  = yapının katılık matrisi

dir.

Denklem (7.9), eleman iç kuvvetleri toplamı  $[K]\{\Delta\}$ 'yı düğüm noktalarına etkileyen genelleştirilmiş  $\{F\}$  kuvvetlerine eşitler. Genel yapı katılık matrisi  $[K]$ , eleman katılık matrisleri  $[k_m]$ 'lerin doğrudan toplanması ile oluşturulabilir:

$$[K] = \sum_{m=1}^N [k_m] \quad (7.10)$$

Burada N = gözönüne alınan yapıdaki toplam eleman sayısıdır.

Denklem (7.9) bütün düğüm noktaları kuvvetleri ile bunlara karşılık gelen deplasmanlar arasındaki bağıntıyı temsil ettiğinden, bunu kısımlara ayrılmış matris formunda yeniden yazmak uygun olabilir:



2 elemanı:

$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix} = 6,8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & 0 & \text{Simetrik} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \end{bmatrix} \quad (b)$$

(a) ve (b) denklemleriyle belirlenen eleman katılık matrislerine, matris toplama işlemi uygulanırsa tüm yapının katılık matrisi;

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \\ \text{-----} \\ 10000 \\ 0 \end{bmatrix} = 6,8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & \text{Simetrik} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \text{-----} \\ -0,5 & -0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 & 0 & -1 & 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \text{-----} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{bmatrix} \quad (c)$$

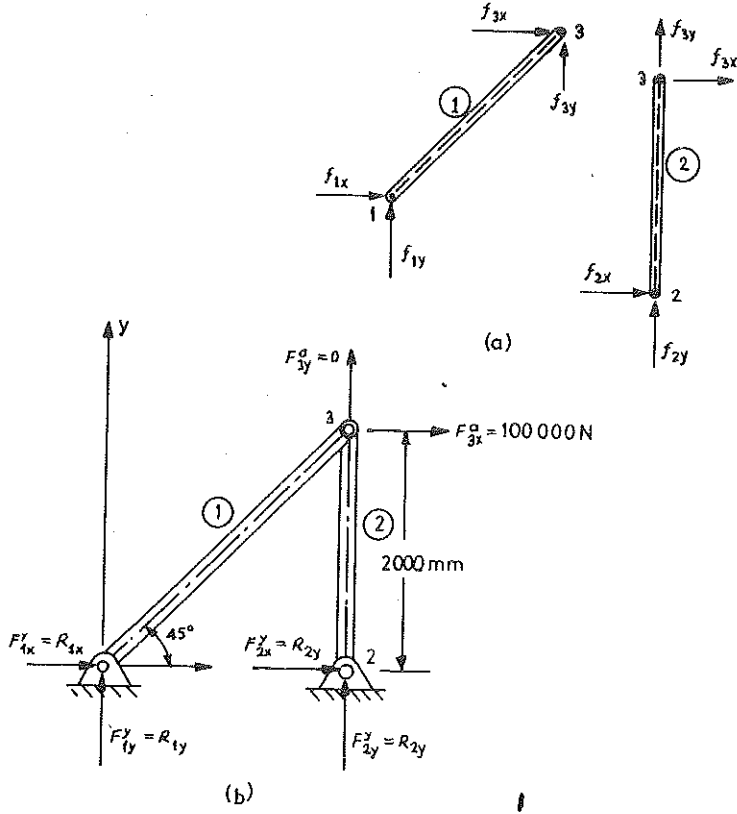
şeklinde olur Denklem(c)

$$\begin{bmatrix} 10000 \\ 0 \end{bmatrix} = 6,8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{bmatrix} \quad (d)$$

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} \\ R_{2y} \end{bmatrix} = 6,8 \times 10^4 \begin{bmatrix} -0,5 & -0,5 \\ -0,5 & -0,5 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{bmatrix} \quad (e)$$

şeklinde açılabilir.





Şekil 7.10 Eleman ve yapı bağlantıları

Denklem (d)'deki rijitlik matrisinin tersi alınırsa deplasmanlar,

$$\Delta_{3x} = 0,441 \text{ mm}$$

$$\Delta_{3y} = -0,147 \text{ mm}$$

olarak bulunur.

Bilinmeyen deplasmanlar belirlendikten sonra Denklem (e)'den tepkiler hesaplanır:

$$\begin{aligned} R_{1x} &= -10000 \text{ N} & R_{2x} &= 0 \\ R_{1y} &= -10000 \text{ N} & R_{2y} &= 10000 \text{ N} \end{aligned}$$

Herbir elemana gelen iç yükler Denklem (a) ve (b)'den,

1 elemanı	2 elemanı
$f_{1x} = -10000 \text{ N}$	$f_{2x} = 0$
$f_{1y} = -10000 \text{ N}$	$f_{2y} = 10000 \text{ N}$
$f_{3x} = 10000 \text{ N}$	$f_{3x} = 0$
$f_{3y} = 10000 \text{ N}$	$f_{3y} = -10000 \text{ N}$

olarak elde edilir.

### 7.8. ELEMANLARIN YAPI BAĞINTILARI FORMÜLASYONU

Eleman katılık matrisi bağıntıları farklı yaklaşımlarla çıkarılabilir. Bunların hepsi

$$\{\bar{f}\} = [\bar{k}] \{\bar{\delta}\} \quad (7.14)$$

şeklinde simultane cebirsel denklemlerdir. Buradan  $\{\bar{f}\}$  eleman kuvvetlerini,  $[\bar{k}]$  eleman katılık matrisini ve  $\{\bar{\delta}\}$  eleman deplasmanlarını temsil eder.

Gözönüne alınan eleman türüne bağlı olarak, sonlu elemanlar analizinde temel eleman bağıntılarını teşkil etmek için varyasyonel prensipler ile doğrudan yöntem, ağırlıklı artıklar yöntemi ve enerji yöntemlerinden biri uygun bir şekilde seçilir. Burada kuramın geliştirilmesinin gözden geçirilmesi amaçlandığından, birinci ve üçüncü yöntemlerin açıklaması kısaca yapılacaktır.

## Doğrudan Yöntem

Sonlu elemanlar formülasyonunun doğrudan yöntemi şu adımlardan ibarettir:

1. Eleman deplasmanlarını düğüm noktaları deplasmanları cinsinden tanımlamak için bir  $q$  dizisi seçilir.

2. Elemanın temel şekildeğiştirme-deplasman bağıntıları ile eleman şekildeğişimleri, seçilen deplasman fonksiyonları terimleri cinsinden ifade edilir.

3. Elemanın temel şekildeğişimi-gerilme bağıntıları ile eleman gerilmeler, deplasman fonksiyonları cinsinden ifade edilir.

4. Eleman düğüm noktaları kuvvetleri, eleman sınır gerilmelerinin statik eşdeğerleri ile eleman gerilmeleri cinsinden ifade edilir.

Bunu göstermek için Şek.7.11'de gösterilen basit eleman ele alınsın. Şek.7.11'de gösterildiği gibi aksenal çubuk elemanın deplasmanları, düğüm noktaları deplasmanı olan  $\delta_{ix}$  ve  $\delta_{jx}$  ile tanımlanır.  $q_x(x)$  deplasman fonksiyonu düğüm noktaları, sınır koşulları sağlayacak bir polinom olarak seçilebilir:

$$q_x(0) = \delta_{ix} \quad \text{ve} \quad q_x(L) = \delta_{jx} \quad (a)$$

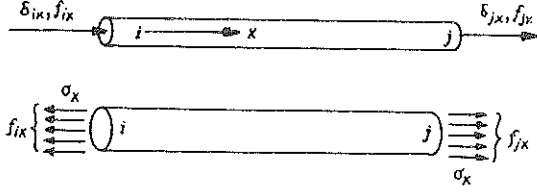
Dolayısı ile polinom,  $x$ 'in lineer bir fonksiyonu olmalıdır; yani

$$q_x(x) = c_1 + c_2x \quad (b)$$

$$q_x = [1 \ x] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (c)$$

Denklem (c)'deki  $q_x$  deplasman fonksiyonu, Denklem (a)'daki eleman düğüm noktaları deplasmanları terimleri kullanılarak ifade edilebilir:

$$q_x = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \ \frac{x}{L} \right] \begin{bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{jx} \end{bmatrix} \quad (d)$$



Şekil 7.11 Eksenel çubuk elemanı

Denklem (e)'nin genel yazılımı şu şekildedir:

$$\{q\} = [N_i \ N_j \ \dots \ N_m] \begin{bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_m \end{bmatrix} \quad (7.15)$$

veya

$$\{q\} = [N] \{\delta\} \quad (7.15a)$$

Burada

$$\{\delta_i\} = [\delta_{ix} \ \delta_{iy} \ \dots]^T \quad (7.16)$$

dır.

Eksenel çubuk elemanı için lineer şekildeğişimi-deplasman bağıntısı

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial q_x}{\partial x} \quad (f)$$

ile verilir. Denklem (d) ve (f)'den yararlanılarak

$$\epsilon_{xx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{jx} \end{bmatrix} \quad (g)$$

şeklını alır. Denklem (g)'nin genel yazılıını

$$\{\epsilon\} = [G] \{\delta\} \quad (7.17)$$

şeklinde olabilir.

[N] şekil fonksiyonu matrisi belirlendikten sonra [G] matrisi kolayca hesaplanabilir.

İzotrop bir malzeme için tek eksenli gerilmede şekildeğişimi-gerilme bağıntısı:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

veya

$$\sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \quad (h)$$

olarak gösterilebilir.

İki eksenli gerilme hali için Denklem (h),

$$\{\Sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (7.18)$$

şeklını alır. Burada

$$\{\Sigma\} = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T$$

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{xy}]^T \quad (7.19)$$

ve [D] elastisite matrisidir. Denklem (7.19)'daki üstel T, dönüşümü gösterir.

Gerilmeleri düğüm noktaları deplasmanları cinsinden ifade etmek için Denklem (g), Denklem (h)'da yerine konulursa:

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{ix} \\ \sigma_{jx} \end{bmatrix} \quad (i)$$

Genel formda Denklem (i)

$$\{\Sigma\} = [D] [G] \{\delta\} = [S] \{\delta\} \quad (7.20)$$

şeklinde yazılabilir. Burada [S] gerilme matrisidir.

Son adım olarak, gerilmeler eşdeğer düğüm noktaları kuvvetlerine dönüştürülür. Bu, basitçe gerilmelerin çubuk kesit alanı A ile çarpılması ile yapılır:

$$\begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{jx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ A \end{bmatrix} [\sigma_x] \quad (j)$$

veya genel formda

$$\{f\} = [H] \{\Sigma\} \quad (7.21)$$

olur. Burada [H], sınır gerilmelerini eleman düğüm noktası eşdeğer kuvvetleriyle irtibatlandıran bir matristir.

Denklem (i) Denklem (j)'de yerine konulduğunda nihayet

$$\begin{bmatrix} f_{ix} \\ f_{jx} \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{jx} \end{bmatrix} \quad (k)$$

sonucu elde edilir. Denklem (k) genel olarak

$$\{f\} = [H] [D] [G] \{\delta\}$$

veya

$$\{f\} = [k] \{\delta\} \quad (7.22)$$

ve

$$[k] = [H] [D] [G] \quad (7.23)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$[k]$  = eleman katılık matrisi

$[H]$  = düğüm noktaları kuvvetleri ile eleman sınır gerilmelerini irtibatlandıran matris

$[D]$  = gerilmeleri şekildeğişimleri ile irtibatlandıran matris

$[G]$  = şekildeğişimlerini deplasmanlarla irtibatlandıran matris

### Enerji Yöntemleri

Sonlu elemanlar formülasyonunda enerji yöntemleri, varyasyonel hesaplarla (1) iş ve şekildeğiştirme enerjisi ve (2) bütünleyici iş ve bütünleyici şekildeğiştirme enerjisine dayanır. Birinci halde yöntem, eleman katılık matrisini verirken, ikincisinde eleman esneklik matrisini verir. Bu kısımda yalnızca eleman katılık matrisi formülasyonu açıklanacaktır.

Virtüel iş ve virtüel şekildeğiştirme prensibinden, sonlu elemanlar formülasyonu şu şekilde geliştirilir. Eleman esas bağıntıları:

$$\{q\} = [N] \{\delta\} \quad (7.15a)$$

$$\{\Sigma\} = [D] \{\epsilon\} \quad (7.18)$$

$$\{\epsilon\} = [G] \{\delta\} \quad (7.17)$$

şeklinde dir.

Şekildeğiştirme ve iş ifadeleri;

$$U = \frac{1}{2} \int_v [\epsilon] \{\Sigma\} dV \quad (7.24)$$

ve

$$W = \frac{1}{2} [\delta] \{f\} \quad (7.25)$$

'dir.

Virtüel deplasmanlar prensibinden

$$\partial U = \frac{1}{2} \int_V [\partial \epsilon] \{\Sigma\} dV \quad (7.26)$$

$$\partial W = \frac{1}{2} [\partial \delta] \{f\} \quad (7.27)$$

$$\{\partial \epsilon\} = [G] \{\partial \delta\} \quad (7.28)$$

Burada  $\partial$  birinci varyasyonu belirtir.

Denklemler (7.17), (7.18) ve (7.28)'den yararlanılarak Denklem (7.26)

$$\partial U = \frac{1}{2} \int_V [\partial \delta] [G]^T [D] [G] \{\delta\} dV \quad (7.29)$$

şeklini alır. Virtüel iş, virtüel şekildeğiştirme enerjisine eşitlenirse;

$$[\partial \delta] \left( \int_V [G]^T [D] [G] \{\delta\} dV - \{f\} \right) = 0 \quad (7.30)$$

$$[k] \{\delta\} = \{f\} \quad (7.31)$$

elde edilir. Burada  $[k]$  katılık matrisidir ve



$$[k] = \int_v [G]^T [D][G] dV \quad (7.32)$$

ile verilmiştir.

Bir uygulama için Şek.7.11'deki çubuk eleman gözönüne alınsın; burada

$$[G] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (a)$$

$$[G]^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (b)$$

$$[D] = [E] \quad (c)$$

dir.

Böylece Denklem (7.32)'den katılık matrisi

$$[k] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} [E] \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dV$$

$$= \int_0^L \int_A \begin{bmatrix} \frac{E}{L^2} & -\frac{E}{L^2} \\ -\frac{E}{L^2} & \frac{E}{L^2} \end{bmatrix} dAdx$$

$$= \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

şekli ile daha önceki soncun aynısını verir.

## 7.9. ELEMEN ŞEKİL FONKSİYONLARI

Deplasman şekil fonksiyonlarının sonlu-elemanlar formülasyonu bağıntılarında önemli bir rol oynadığı gösterilebilir. Gerilme ve şekildeğiştirme ile ilgili olarak şekil fonksiyonları seçilebilmesine rağmen, burada yalnızca deplasman alanı ile ilgili olanlara değinilecektir.

Deplasman şekil fonksiyonlarının seçilme esasları şunlardır:

1. Seçilen fonksiyonların eleman içinde sürekliliği korunmalı
2. Katı-cisim hareketinde elemanın şekildeğiştirmesiz halde olma şartı bulunmalı
3. Seçilen fonksiyonlar dizisi şartlarında, sabit şekildeğiştirme veya gerilme bileşenleri bulunmalıdır.

Şekil fonksiyonlarını elde etmek için iki yol izlenebilir; Polinom serileri ve interpolasyon tekniği ile doğrudan formülasyon.

### Polinom Yöntemleri:

Herhangi bir  $\Phi$  fonksiyonu şu şekildeki bir polinom serisi ile temsil edilebilir:

$$\Phi = \sum_{n=0}^N P_n = [P_n] \{c\} \quad (7.33)$$

Burada herhangi bir n dereceli  $P_n$  polinomu iki boyutlu olarak

$$P_n = \sum_{i=0}^N C_{ni} x^{n-i} y^i \quad (7.34)$$

şeklinde yazılabilir.

$C_{ni}$  katsayıları genelleştirilmiş parametrelerdir ve bunların toplam sayısı en azından elemanın düğüm noktaları deplasmanı sayısına eşit olmalıdır. Örneğin aksenal bir çubuk elemanında yalnızca iki düğüm noktası deplasmanı bulunabilir. Bu durumda deplasman fonksiyonları

$$\begin{aligned}
q_x(x) &= P_0 + P_1 = C_{00} + C_{10}x + \cancel{C_{11}y}^0 \\
&= C_{00} + C_{10}x = [1 \ x] \begin{bmatrix} C_{00} \\ C_{10} \end{bmatrix} \quad (a)
\end{aligned}$$

şeklinde seçilmelidir. Burada  $q_x$ ,  $y$ 'nin fonksiyonu olamayacağından  $C_{11}$  sıfır yapılmıştır.

Denklem (7.33), genel deplasman fonksiyonları terimleri ile

$$\{q\} = [p_n] \{c\} \quad (7.35)$$

şeklinde yazılabilir.  $\{c\}$  kolon matrisi bütün düğüm noktalarındaki  $\{\delta\}$  deplasmanlarını sağlanacak şekilde seçilmelidir; yani

$$\{\delta\} = [\lambda] \{c\} \quad (7.36)$$

$$\{c\} = [\lambda]^{-1} \{\delta\} \quad (7.37)$$

dir. Burada  $\{\delta\}$  = düğüm noktaları koordinat deplasmanları

$[\lambda]$  = düğüm noktaları koordinatlarının sabit fonksiyonları olan katsayılar matrisi

$\{c\}$  = kabul edilen polinomun aranan katsayıları

Dolayısı ile Denklem (7.35);

$$\{q\} = [P_n] [\lambda]^{-1} \{\delta\} = [N] \{\delta\} \quad (7.38)$$

şeklini alır Burada  $[N]$  şekil fonksiyonu matrisidir.

Deplasman fonksiyonu polinomlarının seçimine, örnekler vermeye devam edilirse, Şek.7.12'de gösterilen düzlem gerilme üçgeni gözönünde bulundursun. Elemanın, toplam koordinat deplasman sayısı 6 olan üç düğüm noktası bulunduğu düşünülün. Elemanın üzerindeki bir noktada  $x$  ve  $y$  doğrultusundaki deplasmanlar sırasıyla  $q_x(x,y)$  ve  $q_y(x,y)$  ile tanımlanır. Altı adet düğüm noktaları deplasmanı bulunduğundan  $q_x$  ve  $q_y$  için seçilecek polinomların  $C_{ij}$  katsayı parametreleri toplam sayısı herbir durumda üç sabiti aşmamalıdır, yani:

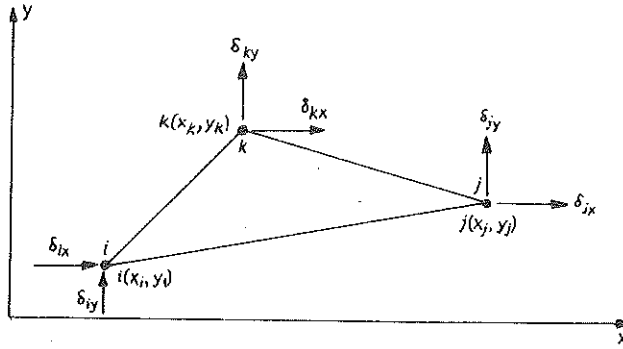
$$\Phi = C_{00} + C_{10} x + C_{11} y$$

Böylece  $q_x$  ve  $q_y$  ;

$$q_x = C_1 + C_2 x + C_3 y$$

$$q_y = C_4 + C_5 x + C_6 y$$

şeklinde olacaktır.



Şekil 7.12 Düzlem gerilme üçgen elemanı

Şekil fonksiyonları Denklem (7.37) ve (7.38)'e göre belirlenmelidir.

### 7.10 ELEMAN KATILIK MATRİSLERİ

Şekil 7.13'te gösterilen genel kiriş elemanının katılık matrisi, daha önce bahsedilen enerji yöntemlerinden uygun biri kullanılarak elde edilebilir. Bunlardan biri Castigliano'nun ikinci kuramıdır:

$$\delta_i = \frac{\partial \bar{U}}{\partial f_i} \quad (7.39)$$

- Burada  $\bar{U}$  = bütünleyici şekildeğiştirme enerjisi  
 = lineer elastik yapılarda şekildeğiştirme enerjisi  
 $\delta$  = düğüm noktaları deplasmanı  
 $f_i$  =  $\delta_i$ 'lere karşılık gelen düğüm noktaları kuvvetleri

Gösterilen kiriş için şekildeğiştirme enerjisi

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_x^2}{GJ} + \frac{S^2}{AE} + \frac{V^2}{A_e G} \right) dx \quad (7.40)$$

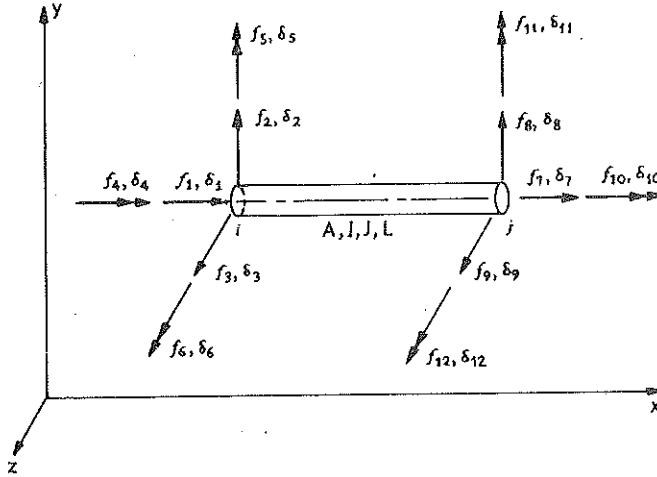
ile belirtilir. Burada M, S ve V sırasıyla iç momentler, aksel kuvvet ve kesme kuvvetleridir. Bu iç yükler, kiriş elemanın her iki ucundaki düğüm noktaları kuvvetleri cinsinden ifade edilebilir:

$$M = y_1 (f_i) \quad S = y_2 (f_i) \quad V = g_3 (f_i)$$

ve

$$U = G (f_i)$$

Katılık katsayıları, her seferinde bir düğüm noktası deplasmanına sistematik olarak birim değer verilerek diğerleri sabit tutulur ve bunlar oluşan tepkilerle hesaplanır. Böylece  $\delta_1, 1$ 'e eşit kılınp diğer bütün  $\delta$ 'lar 0 yapılırsa oluşacak tepkiler, katılık katsayıları  $k_{i1}$  ( $i = 1, 2, \dots, 12$ ) olur.  $k_{i1}$  katsayıları 1 koordinatına yaptırılan birim deplasmandan dolayı  $i$  koordinatı doğrultusunda oluşan kuvvet olarak tanımlanır. Bu işlem mümkün olan bütün deplasmanlar için yapılırsa, kiriş katılık matrisi:



Şekil 7.13 Genel kiriş eleman



$k_{ij}$  ifadeleri yukarıdaki tanımlarda  $z$ 'ler  $y$  ile değiştirilerek elde edilir. Denklem (7.41a)'da görülen çizgiler bunların eleman yerel eksenleri ile ilgili olduğunu belirtir.

Denklem (7.41)'in geçerli olması için malzeme ve/veya geometrik lineersizliğin bulunmaması gerekir. Büyük deplasmanların bulunması halinde yapı davranışının geometrik olarak lineer olmaması şeklinde nitelendirilir. Bu durumda kuvvet denge denklemleri yapının deforme olmuş durumuna göre formüle edilmelidir. Geometrik lineersizliğin bulunduğu bir kiriş elemanı davranışı için katılık matrisi, lineer olmayan şekildeğişimi-deplasman bağıntılarıyla birlikte, daha önce tanımlanan yöntemlerden biri kullanılarak çıkarılabilir.

### 7.11 ELEMANDAN SİSTEM FORMÜLASYONLARINA

Eleman formülasyonları, yerel eleman koordinat dizisi  $x$ ,  $y$  ve  $z$  referans alınarak yürütülür. Böyle bir elemanın katılık matrisi bağıntısı;

$$\{\bar{f}\} = [\bar{k}] \{\bar{\delta}\} \quad (7.42)$$

şeklinde. Burada çizgiler yerel eksenlere göre tanımlamaların yapıldığını belirtir.

Yapı sistemleri, uzayda çeşitli şekillerde yönelmiş yapı elemanlarının biraraya getirilmesi ile oluşturulan yapı şeklinde tanımlanır. Yapı sistemlerinin kuvvet-deplasman denklemlerini formüle etmek için Denklem (7.42)'de gösterildiği şekildeki bütün eleman bağıntıları, belirli bir ortak tümel eksen takımı  $x$ ,  $y$  ve  $z$ 'ye dönüştürülmelidir.

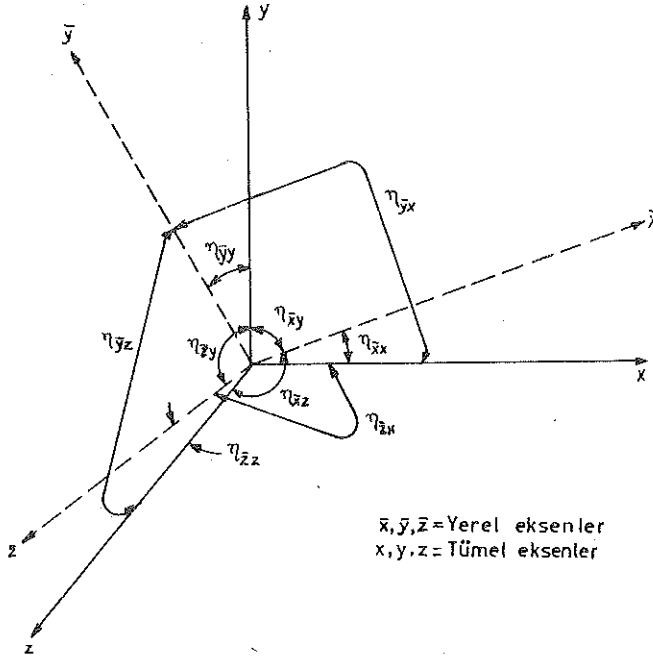
Vektörel matematikten, herhangi bir  $x$ ,  $y$  ve  $z$  ortogonal üç eksen diğer bir  $x$ ,  $y$  ve  $z$  ortogonal eksen takımı cinsinden ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_{xx} & \eta_{xy} & \eta_{xz} \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} & \eta_{yz} \\ \eta_{zx} & \eta_{zy} & \eta_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (7.43)$$

Burada  $\eta_{xx}$ , Şek.7.14'den görülebileceği gibi  $x$  ve  $\bar{x}$  eksenleri arasındaki açının kosinüsüdür.

Genelde Denklem (7.43), yerel koordinatlardaki herhangi bir  $\{\bar{f}\}$  üçlü vektör dizisinin tümel koordinatlardaki bir  $\{f\}$  vektörüne;

$$\{\bar{f}\} = [\eta] \{f\} \quad (7.44)$$



Şekil 7.14 Yerel ve tümel eksenler

şekline dönüştürülebileceğini belirtir. Burada  $[\eta]$  Denklem (7.43)'te belirtilen  $3 \times 3$ 'lük dönüşüm matrisidir.

Denklem (7.44)'le ilgili olarak herhangi bir  $\{\bar{f}\}$  kuvvet ve  $\{\bar{\delta}\}$  deplasman vektörüne



$$\{\bar{f}\} = [T] \{f\} \quad \text{ve} \quad \{\bar{\delta}\} = [T] \{\delta\} \quad (7.45)$$

dönüşümlerinin uygulanabileceğini söyleyebiliriz. Burada  $[T]$ , köşegenel elemanları  $[\eta]$  altmatrislerinden oluşan bir matristir. Köşegenel altmatrislerdeki eleman sayıları,  $\{\bar{f}\}$  ve  $\{\bar{\delta}\}$  matris vektörlerinin mertebesine bağlıdır.

Denklem (7.45)'ten yararlanılarak Denklem (7.42);

$$[T] \{f\} = [\bar{k}] [T] \{\delta\}$$

veya

$$\{f\} = [T]^{-1} [\bar{k}] [T] \{\delta\} = [k] \{\delta\} \quad (7.46)$$

olur. Burada  $[k]$  eleman tümel katılık matrisidir ve

$$[k] = [T]^{-1} [\bar{k}] [T] = [T]^{-1} [\bar{k}] [T] \quad (7.47)$$

ile tanımlanır. Burada  $[T]$  'nin tersi  $[T]$  'nin transpozesidir:

$$[T]^{-1} = [T]^T$$

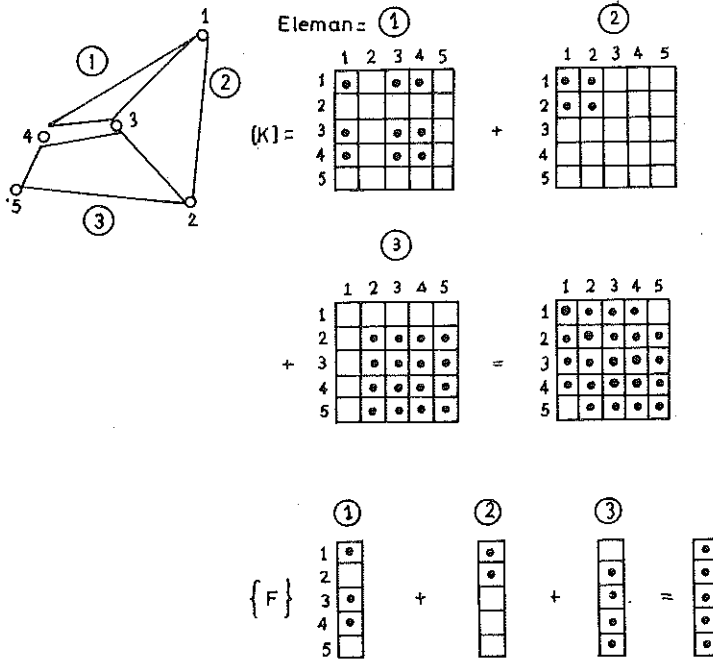
Bu özellik herhangi bir ortogonal kare matris için geçerlidir.

Elemanın tümel katılık matrisi bulunduktan sonra basit cebirsel toplamlarla tümel yapı katılık matrisi inşa edilebilir:

$$[K] = \sum_{i=1}^m [k_i] \quad (7.48)$$

Burada  $m$ , yapıyı meydana getiren elemanların toplam sayısıdır. Denklem (7.48)'deki toplamı yapabilmek için  $[k_i]$ 'nin mertebesinin amaçlanan  $[K]$  yapı matrisi derecesi ile uygun olması gerekir. Bu da gözönüne alınan elemanla ilgisi bulunmayan bütün düğüm noktası kuvvetleri ve bunların deplasmanları için sıfır dizileri doldurularak yapılabilir.

Bunu göstermek için Şek.7.15'te gösterilen yapı gözönüne alın. Her elemanın katılık matrisi denklemi, Denklem (7.46)'ya göre formüle edilir. Her eleman, bağlantıları veya düğüm noktaları ile ayırt edilir. Örneğin 1 elemanının 1, 3 ve 4 bağlantıları, 2 elemanının 1 ve 2; v.b. Her elemanın [k] katılık matrisi tümel matriste bağlantı noktaları ile ilgili olarak uygun yerlere yerleştirilir. Her nokta bir tek katsayıyı veya düğüm noktalarında birden fazla serbestlik derecesi gözönüne alınmışsa, katsayılar altmatrisini temsil eder. Her eleman için bu yapıldıktan sonra, yapının katılık matrisi denklemini vermek üzere basit bir cebirsel toplama yapılır. Sınır şartları uygulandığında bilinmeyen deplasmanlara göre çözümlenebilecek indirgenmiş katılık matrisi haline gelir. Bu deplasmanların, herbir eleman denkleminde yerlerine konulması ile eleman iç kuvvetleri elde edilir.



Şekil 7.15 Eleman bağlantılarından yapı bağlantılarının oluşturulması

## 7.12 ÖZEL KİRİŞ ELEMANLARI İÇİN TÜMEL KATILIK MATRİSLERİ

Uzay kafes elemanlar Şek.7.16a'da gösterilmiştir. Bunun tümel katılık matrisi,

$$[k]_{st} = \frac{AE}{L} \begin{array}{c|ccc|ccc} & \delta_{ix} & \delta_{iy} & \delta_{iz} & \delta_{jx} & \delta_{jy} & \delta_{jz} \\ \hline R_{11}^2 & & & & & & \\ R_{11}R_{12} & R_{12}^2 & & & & & \\ R_{11}R_{13} & R_{12}R_{13} & R_{13}^2 & & & & \\ -R_{11}^2 & -R_{11}R_{12} & -R_{11}R_{13} & R_{11}^2 & & & \\ -R_{11}R_{12} & -R_{12}^2 & -R_{12}R_{13} & R_{11}R_{12} & R_{11}^2 & & \\ -R_{11}R_{13} & -R_{12}R_{13} & -R_{13}^2 & R_{11}R_{13} & R_{11}R_{12} & R_{12}^2 & \\ & & & R_{11}R_{13} & R_{11}R_{12} & R_{12}R_{13} & R_{13}^2 \end{array} \quad (7.49)$$

şeklindedir. Burada  $R_{11} = \frac{x_j - x_i}{L}$

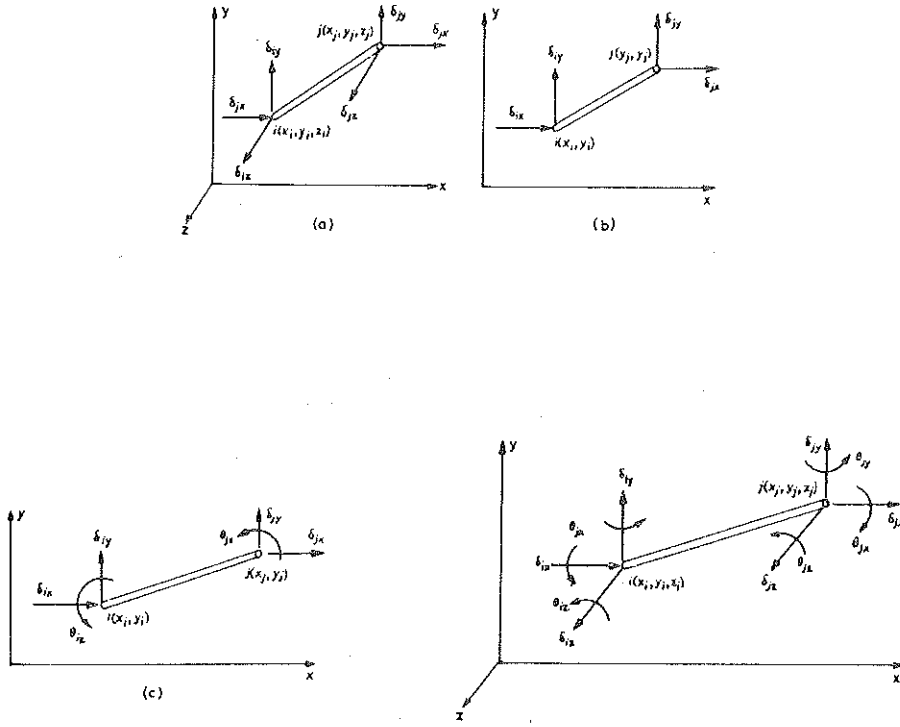
$$R_{12} = \frac{y_j - y_i}{L}$$

$$R_{13} = \frac{z_j - z_i}{L}$$

$$L = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2]^{1/2} \quad (7.49a)$$

A = elemanın kesit alanı

E = Young modülü



Şekil 7.16 Kiriş elemanları (a) Uzay çubuk elemanı, (b) Düzlem çubuk elemanı; (d) Uzay kiriş elemanı

Düzlem kafes elemanı Şek.7.16b'de gösterilmiştir. Bunun tümel katılık matrisi

$$[k]_{dk} = \frac{AE}{L} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline R_{11}^2 & \text{Simetrik} & & \\ \hline R_{11} R_{12} & R_{12}^2 & & \\ \hline -R_{11}^2 & -R_{11} R_{12} & R_{11}^2 & \\ \hline R_{11} R_{12} & -R_{12}^2 & R_{11} R_{12} & R_{12}^2 \\ \hline \end{array} \quad (7.50)$$

şeklini alır.

Düzlem kiriş elemanı Şek.7.16c'de gösterilmektedir. Bunun tümel katılık matrisi

$$[k]_{dk} = \begin{matrix} & \delta_{ix} & \delta_{iy} & \delta_{iz} & \delta_{jx} & \delta_{jy} & \delta_{jz} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ -a \\ -b \\ c \end{matrix} & \begin{matrix} \\ d \\ e \\ -b \\ -d \\ e \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ f \\ -c \\ -e \\ g \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ a \\ b \\ -c \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ d \\ -e \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ f \end{matrix} \end{matrix} \quad (7.51)$$

Simetrik

şekindedir. Burada

$$a = R_{11}^2 \alpha_1 + R_{21}^2 \alpha_{4z}$$

$$b = R_{11} R_{12} \alpha_1 + R_{21} R_{22} \alpha_{4z}$$

$$c = R_{21} \alpha_{2z}$$

$$d = R_{12}^2 \alpha_1 + R_{22}^2 \alpha_{4z}$$

$$e = R_{22} \alpha_{2z}$$

$$f = \alpha_{3z} \quad g = \alpha_{6z}$$

$$R_{21} = -\frac{y_j - y_i}{L}$$

$$R_{11} = \frac{x_j - x_i}{L}$$

$$R_{22} = \frac{x_j - x_i}{L}$$

$$R_{12} = \frac{y_j - y_i}{L}$$

$$L = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2]^{1/2}$$

$$\alpha_1 = \frac{AE}{L}$$

$$\alpha_{2z} = \frac{6EI_z}{L^2}$$

$$\alpha_{3z} = \frac{4EI_z}{L}$$

$$\alpha_{4z} = \frac{12EI_z}{L^3}$$

$$\alpha_{6z} = \frac{2EI_z}{L}$$

$I_z = z$  eksenine göre kesit atalet momenti

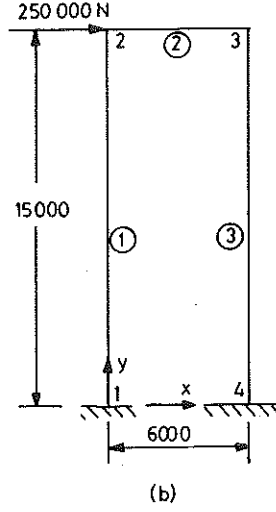
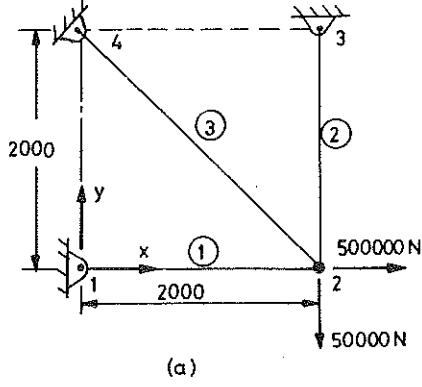
**Örnek 7.1** Şek.7.17'de gösterilen yapıların sonlu elemanlar deplasman yöntemi ile analizini yapınız.

1. Hal Düzlem Kafes problem. Düğüm noktaları ve geometriler:

Düğüm noktası no.	x koordinatı mm	y koordinatı mm
1	0	0
2	2000	0
3	2000	2000
4	0	2000

Elemanlara ilgili şu bilgiler verilmiştir:

Eleman no (ve düğüm noktaları)	A, mm <sup>2</sup>	E, N/mm <sup>2</sup>	L, mm
1 (1-2)	1200	$6,8 \times 10^4$	2000
2 (2-3)	1200	$6,8 \times 10^4$	2000
3 (2-4)	$1200\sqrt{2}$	$6,8 \times 10^4$	$2000\sqrt{2}$



1 elemanın dönüştürülmüş matris katsayıları:

$$R_{11} = \frac{x_2 - x_1}{L} = \frac{2000}{2000} = 1$$

ve

$$R_{12} = \frac{y_2 - y_1}{L} = 0$$

2 elemanı düşey  $y_3 - y_2 = 2000 - 0 > 0$  ile,

$$R_{11} = 0 \quad \text{ve} \quad R_{12} = 1$$

3 elemanı

$$R_{11} = \frac{x_4 - x_2}{L} = \frac{0 - 2000}{2000\sqrt{2}} = -1/\sqrt{2}$$

$$R_{11} = \frac{x_4 - x_2}{L} = \frac{2000 - 0}{2000\sqrt{2}} = 1/\sqrt{2}$$

Bilinen sınır şartları şunlardır:

$$\text{Deplasmanlar : } \delta_{4x} = \delta_{4y} = \delta_{1x} = \delta_{1y} = \delta_{3x} = \delta_{3y} = 0$$

$$\text{Dış kuvvetler : } F_{2x} = 50 \text{ kN} \quad F_{2y} = -50 \text{ kN}$$

Tümel katılık matrisleri [Denklem (7.50)]

$$1 \text{ elemanı : } 40800 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a})$$

$$2 \text{ elemanı : } 40800 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{b})$$

$$3 \text{ elemanı : } 40800 \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (\text{c})$$



Yapıda iki serbestlik dereceli dört düğüm noktası bulunduğundan, yapının katılık matrisi 8x8 mertebesindedir. Her elemanın matrisi, elemana ait düğüm noktaları haricindekiler için satır ve kolonlara sıfırlar konularak 8x8 matrise genişletilerek tümel matrise uygun boyutlara çıkarılır ve matris toplamı yapılırsa

$$[k]^{8 \times 8} = \sum_{i=1}^3 [k_i]^{8 \times 8}$$

1

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

2

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

3

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 & 0 & \text{simetrik} \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} =$$

$$[k] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 & 0 & \text{simetrik} \\ -1 & 0 & 1,5 \\ 0 & 0 & -0,5 & 1,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \quad (d)$$

Yapının matris denklemleri :

$$\frac{1}{40800} \begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \hline 50000 \\ -50000 \\ \hline R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \text{simetrik} \\ \hline -1 & 0 & 1,5 & & & & & & \\ 0 & 0 & -0,5 & 1,5 & & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & & \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,5 & 0 & 0 & -0,5 & 0,5 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c)$$

olur. Bilinmeyenler  $\delta_{2x}$  ,  $\delta_{2y}$  ve tepkilerin hepsi  $R_{1x}$  ,  $R_{1y}$  v.b'dir. Böylece yukarıda üçüncü ve dördüncü denklemler çıkarılırsa:

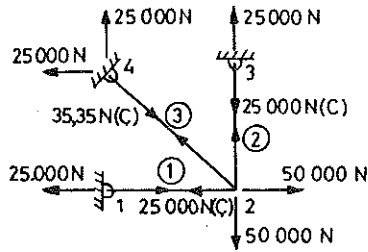
$$\frac{1}{40800} \begin{bmatrix} 50000 \\ -50000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,5 & -0,5 \\ -0,5 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \end{bmatrix}$$

bulunur. Matrisin tersi:

$$\begin{bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \end{bmatrix} = \frac{1}{40800} \begin{bmatrix} 0,75 & 0,25 \\ 0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ -50000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,613 \\ -0,613 \end{bmatrix} \text{ mm.}$$

Denklem (e)'den tepkiler şu şekildedir (alttaki şekle bakınız):

$$\begin{aligned} R_{1x} &= - (40800) (\delta_{2x}) = - 25000 \text{ N} & R_{3x} &= 0 \\ R_{1y} &= 0 & R_{3y} &= 25000 \text{ N} \\ R_{4x} &= -25000 \text{ N} & R_{4y} &= 25000 \text{ N} \end{aligned}$$

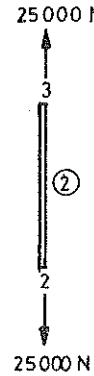


Eleman bağıntularından iç yükler bulunabilir :

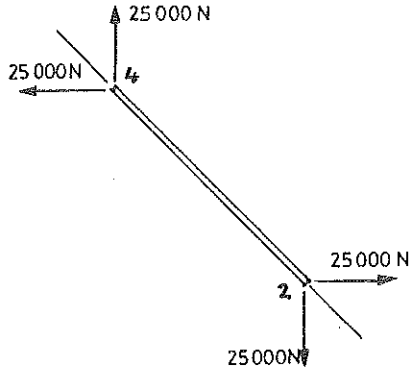
$$\begin{bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \end{bmatrix} = 40800 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,613 \\ -0,613 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25000 \\ 0 \\ 25000 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{bmatrix} = 40800 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,613 \\ -0,613 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -25000 \\ 0 \\ 25000 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \end{bmatrix} = 40800 \begin{bmatrix} 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ 0,5 & -0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,613 \\ -0,613 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25000 \\ -25000 \\ -25000 \\ 25000 \end{bmatrix}$$



## 2. Hal Düzlem çerçeve yapı

Düğüm noktaları ve bunların geometrileri şu şekildedir:

Düğüm noktası no.	x koordinatı mm	y koordinatı mm
1	0	0
2	0	15000
3	6000	15000
4	6000	0

Elemanlarla ilgili şu bilgiler verilmiştir :

Eleman no. (ve düğüm noktaları)	A, mm <sup>2</sup>	I <sub>Z</sub> , mm <sup>4</sup>	E, N/mm <sup>2</sup>	L, mm
1 (1-2)	13000	1,5x10 <sup>8</sup>	20x10 <sup>4</sup>	15000
2 (2-3)	13000	1,5x10 <sup>8</sup>	20x10 <sup>4</sup>	6000
3 (3-4)	13000	1,5x10 <sup>8</sup>	20x10 <sup>4</sup>	15000

Dönüştürülmüş matris katsayıları şu şekildedir :

1 elemanı :

$$R_{11} = \frac{x_2 - x_1}{L} = 0$$

$$R_{12} = \frac{y_2 - y_1}{L} = 1$$

$$R_{21} = -\frac{y_2 - y_1}{L} = -1$$

$$R_{22} = \frac{x_2 - x_1}{L} = 0$$

2 elemanı :

$$R_{11} = \frac{x_3 - x_2}{L} = 1$$

$$R_{12} = \frac{y_3 - y_2}{L} = 0$$

$$R_{21} = 0$$

$$R_{22} = 1$$

3 elemanı:

$$R_{11} = \frac{x_4 - x_3}{L} = 0$$

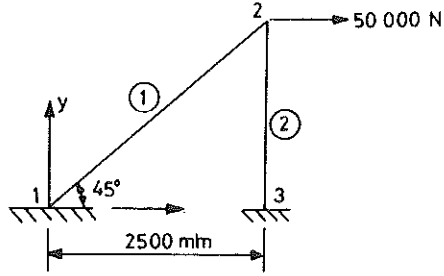
$$R_{12} = \frac{y_4 - y_2}{L} = -1$$

$$R_{21} = 1$$

$$R_{22} = 0$$

Problemin diğer kısmı öğrenciye alıştıрма için bırakılmıştır.

**Örnek 7.2** Şekilde gösterilen kafes yapının deplasmanlarını ve iç yüklerini bulunuz. Her iki çubuk için  $E = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $A$  (1. çubuk) =  $2500 \sqrt{2} \text{ mm}^2$  ve  $A$  (2. çubuk) =  $2500 \text{ mm}^2$  kabul ediniz.



**ÇÖZÜM:** Sistem eksenleri gösterildiği gibi seçilirse her bir eleman için dönüşüm katsayıları Denklem (7.49a)'dan elde edilebilir:

1 elemanı :

$$R_{11} = \frac{x_2 - x_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_{12} = \frac{y_2 - y_1}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2 elemanı :

$$y_3 - y_2 < 0$$

böylece

$$R_{11} = 0 \quad R_{12} = -1$$

Eleman bağıntıları Denklem (7.50)'den

$$\text{Eleman 1 : } \alpha_1 = \frac{A_1 E}{L_1} = \frac{2500 \sqrt{2} \times 8 \times 10^4}{2500 \sqrt{2}} = 8 \times 10^4$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = 8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0,5 & & & & & & \\ 0,5 & 0,5 & & & & & \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & & & & \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \end{bmatrix}$$

$$\text{Eleman 2 : } \alpha_2 = \frac{A_2 E}{L_2} = \frac{2500 \times 8 \times 10^4}{2500} = 8 \times 10^4$$

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = 8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 0 & 1,0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \end{bmatrix} \quad (b)$$

Denklem (a) ve (b)'deki eleman matrislerinin toplamı yapılırsa tüm yapının katılık matrisi bağıntısı



$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \hline 50000 \\ 0 \\ \hline R_{3x} \\ R_{3y} \end{bmatrix} = 8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0,5 & & & & & & \\ 0,5 & 0,5 & & & & & \\ \hline -0,5 & -0,5 & 0,5 & & & & \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 1,5 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -1,0 & 0 & 1,0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hline \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c)$$

(c) 'de ortadaki iki denklem çıkarılırsa;

$$\begin{bmatrix} 50000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 10^4 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 12 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \end{bmatrix} \quad (d)$$

Bilinmeyen deplasmanlar çözümlürse

$$\begin{bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \times 10^4 & 4 \times 10^4 \\ 4 \times 10^4 & 12 \times 10^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50000 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (e)$$

bulunur. (e)'deki matrisin tersi

$$10^{-4} \begin{bmatrix} 0,375 & -0,125 \\ -0,125 & 0,125 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece deplasmanlar:

$$\delta_{2x} = 1,875 \text{ mm.}$$

$$\delta_{2y} = -0,625 \text{ mm.}$$

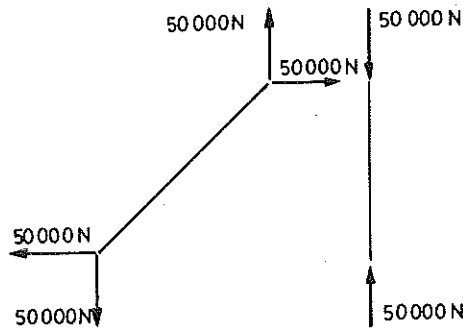
Deplasmanlar bulunduktan sonra yapıya gelen tepkiler ve eleman iç yükleri sırasıyla Denklem (c), (a) ve (b)'den bulunur:

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \times 10^4 & -4 \times 10^4 \\ -4 \times 10^4 & -4 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,875 \\ -0,625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7,5 \times 10^4 \\ -7,5 \times 10^4 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\begin{bmatrix} R_{3x} \\ R_{3y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -8 \times 10^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,875 \\ -0,625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \times 10^4 \end{bmatrix} \text{ N}$$

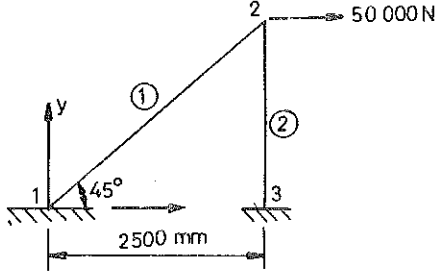
$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \end{bmatrix} = 8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0,5 & & & \\ 0,5 & 0,5 & \text{simetrik} & \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & \\ -0,5 & -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,875 \\ -0,625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50000 \\ -50000 \\ 50000 \\ 50000 \end{bmatrix} \text{ N}$$

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{bmatrix} = 8 \times 10^4 \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 1 & \text{simetrik} & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,875 \\ -0,625 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50000 \\ 0 \\ 50000 \end{bmatrix} \text{ N}$$



**Örnek 7.3** Örnek 7.2'deki yapının mafsallarının aşağıda gösterildiği gibi rijit olduğunu farzediniz. Deplasman ve iç yükleri bulunuz. Kayma deformasyonlarını ihmal ediniz. I

(kiriş 1) =  $4\sqrt{2} \times 10^6 \text{ mm}^4$ , I (kiriş 2) =  $4 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .



**ÇÖZÜM:**  $R_{ij}$  dönüşüm katsayıları Denklem (7.51)'den elde edilir:

$$\text{Kiriş 1 : } R_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad R_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$R_{21} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad R_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Kiriş 2 : } R_{11} = 0 \quad R_{12} = -1$$

$$R_{21} = 1 \quad R_{22} = 0$$

Denklem (7.51)'den eleman katılık matrisleri bağıntıları şu şekildedir:

Kiriş 1 :

$$\begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_{1z} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,40061 & & & & & \\ 0,39939 & 0,40061 & & & & \\ & & \text{simetrik} & & & \\ -1,536 & 1,536 & 2,048 & & & \\ -0,40061 & 0,40061 & -1,586 & 0,40061 & & \\ -0,39939 & 0,40061 & -1,536 & 0,39989 & 0,40061 & \\ -1,536 & 1,536 & 1,024 & 1,536 & -1,356 & 2,048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix} \quad (a)$$

Kiriş 2 :

$$\begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_{2z} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_{3z} \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,002 & & & & & \\ & 0 & 0,800 & & & \\ & & & \text{simetrik} & & \\ 3,072 & 0 & 5120 & & & \\ -0,002 & 0 & -3,072 & 0,002 & & \\ & 0 & -0,800 & 0 & 0 & 0,800 \\ 3,072 & 0 & 2160 & -3,072 & 0 & 5120 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_{2z} \\ \delta_{3x} \\ \delta_{3y} \\ \theta_{3z} \end{bmatrix} \quad (b)$$

Örnek 7.1'de olduğu gibi, tüm yapı için katılık matrisi Denklem (a) ve (b)'den kolayca teşkil edilebilir:

Burada FM sabit uç moment tepkilerini gösterir.

(c) denkleminde sıfır olmayan denklemleri çıkarırsak

$$\begin{bmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0,40081 & \text{simetrik} \\ 0,39939 & 1,20061 \\ 4,068 & -1,536 & 5122,048 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix}$$

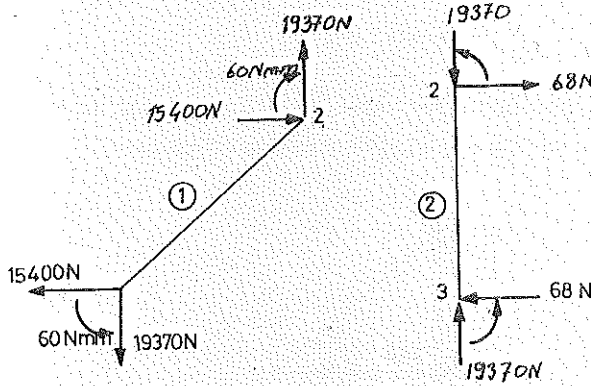
Matris tersini alma işlemini gerçekleştirsek bilinmeyen deplasmanlar :

$$\begin{bmatrix} \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{bmatrix} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 1,1598 & \text{simetrik} \\ -0,3873 & 0,3833 \\ -0,00116 & 0,0152 & 0,000061 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5799 \text{ mm} \\ -0,1937 \text{ mm} \\ -0,0006 \text{ rad.} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

Büyük yapı sistemlerinde matris mertebesi de oldukça büyük olacağından klasik matris tersi alma işleminden kaçınılmasında yarar vardır. Simültane cebirsel denklemlerin diğer tekniklerle çözülmesi mümkündür.

Denklem (a) ve (b)'den hesaplanan iç yükler aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



## PROBLEMLER:

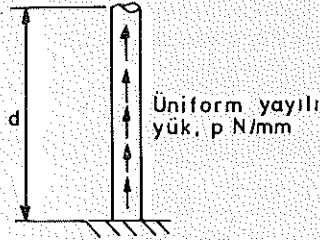
7.1 Aşağıdaki cebirsel denklem takımında  $R_1$ ,  $\delta_2$  ve  $\delta_3$  bilinmeyenlerdir. Bunu bir matris formuna koyarak bilinmeyenleri çözünüz. Yalnızca matris notasyonu ve işlemlerini kullanınız.

$$R_1 = \delta_1 - \delta_2$$

$$P = -\delta_1 + 1,5 \delta_2 - 0,5 \delta_3$$

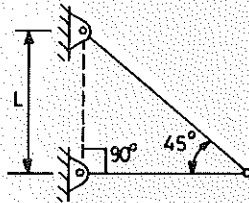
$$2P = \delta_1 - 0,5 \delta_2 + 0,5 \delta_3$$

7.2 Şekil P7.2'de gösterildiği gibi yapıya yükler etmektedir. Eğer malzeme davranışı  $\sigma = K\epsilon^2$  olarak verilmiş ise burada K bir sabittir, sistemde depolanan şekildeğiştirme enerjisini bulunuz. Yapının ağırlığını ihmal edip AE'nin sabit olduğunu farzediniz.



Şekil P7.2

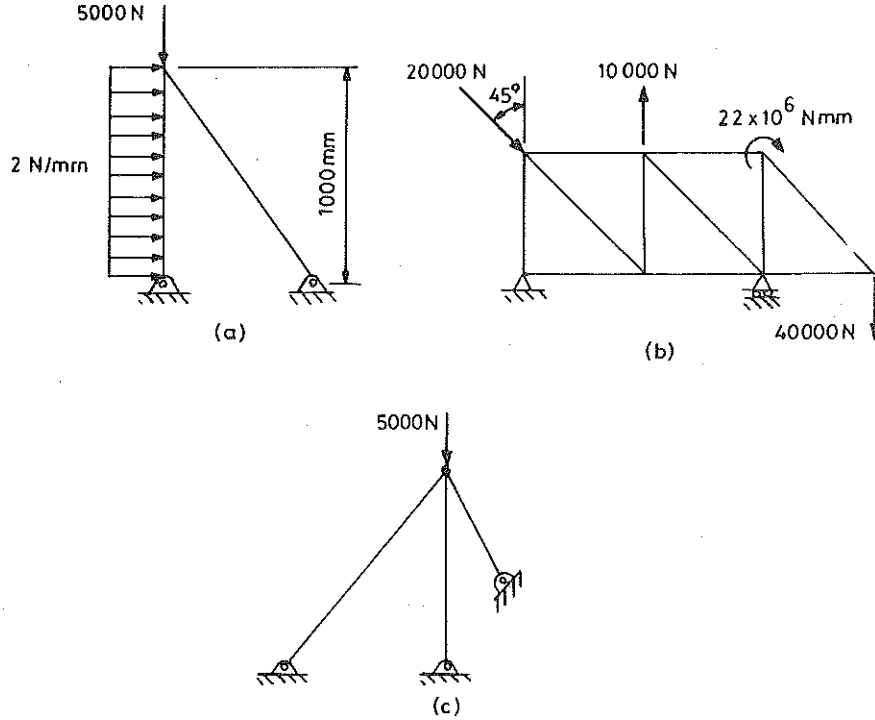
7.3 Şek.P7.3'te gösterilen kafes yapı için  $\{Q\} = [A] \{q\}$  matris bağıntısını bulunuz. Not : Her iki eleman için AE'nin sabit olduğu farzedilecektir.



Şekil P7.3

7.4 Şek.P7.4'te gösterilen kafes yapıların herbiri için şu bilgileri veriniz:

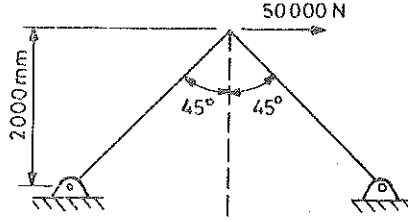
- Düğüm noktalarına uygulanan dış yükleri
- Bilinen deplasman sınır şartlarını
- Eleman katılık matrisi boyutunu
- Elemanın indirgenmiş katılık matrisinin boyutu



Şekil P7.4 (a) Düzlem kafes; (b) Düzlem kafes; (c) Uzay kafes

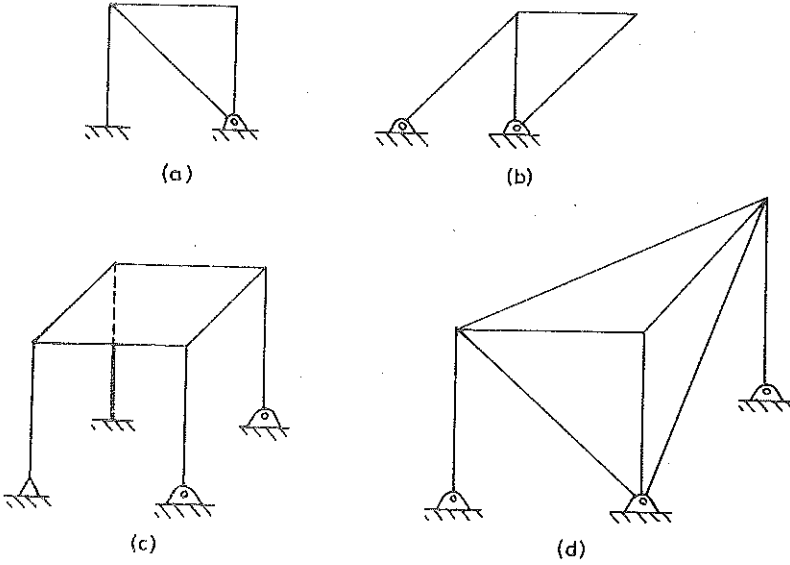
7.5 Sonlu elemanlar yöntemini kullanarak aşağıdaki şekilde gösterilen düzlem kafes için iç yükleri bulunuz. Bütün ayrıntıları gösteriniz.

Herbir elemanın kesit alanı =  $12,5 \text{ cm}^2$ ,  $E = 680 \text{ GPa}$



Şekil P7.5

7.6 Herhangi bir yapının (a) katılık matrisi mertebesini ve (b) indirgenmiş katılık matrisi mertebesini belirleyecek matematiksel ifadeleri yazınız. Bu ifadeyi kullanarak Şek.P7.6'da gösterilen yapılar için gösteriniz.

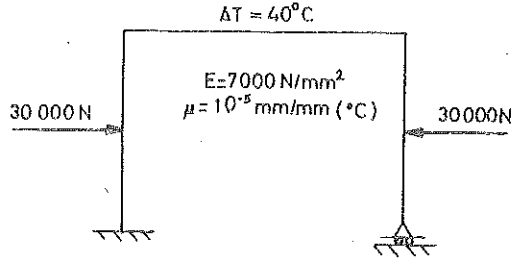


Şekil P7.6

(a) Düzlem çerçeve; (b) Düzlem kafes; (c) Uzak çerçeve; (d) Uzak kafes

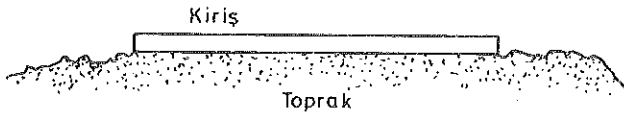
7.7 Şek.P7.7'de gösterilen çerçeve yapının sonlu-elemanlarla analizinde kullanılacak düğüm noktaları yüklerini bulunuz.





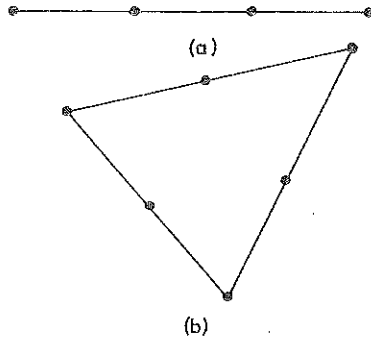
Şekil P7.7

7.8 Şek. P7.8'de gösterilen, sürekli bir elastik zemin üzerine oturan kirişin sonlu elemanlar tekniği ile analizinin nasıl yapılabileceğini gösteriniz.



Şekil P7.8

7.9 Şek.P7.9'da gösterilen elemanların herbiri için katılık matrisi bağlantısı elde etmede hangi deplasman fonksiyonlarını kullanırsınız?



Şekil P7.9 (a) Dört düğüm noktası ile idealize edilmiş aksenal çubuk;  
(b) altı düğüm noktalı plak eleman (yalnızca düzlem içi kuvvetler)

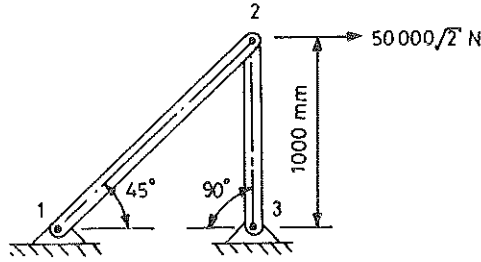
### 7.10 Gerilme-şekildeğiştirme bağıntısı

$$\sigma = c\varepsilon^n$$

şeklinde olan bir yapı elemanının birim hacmi için şekildeğiştirme enerjisi ifadesini bulunuz. Burada c ve n sabitlerdir.

7.11 Şek.P7.11'deki kafes yapının 2 noktasındaki toplam deplasmanı bulunuz.

$E = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$  ve her elemanın kesit alanı  $= 1,3 \times 10^3 \text{ mm}^2$  olarak farzedilecektir.



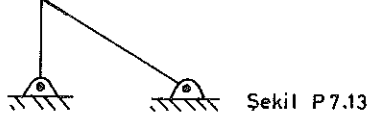
Şekil P7.11

7.12 Düzlem gerilme altındaki iki-boyutlu cismin deplasmanları;

$$q_x = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad q_y = b_1 + b_2 x + b_3 y$$

ile verilmiştir. Cismin birim hacmi için şekildeğiştirme enerjisini bulunuz. Cismin homojen ve izotrop olduğu farzedilecektir.

7.13 Şek.P7.13'te gösterilen yapının her bir elemanı için eleman eksenlerini ve tüm yapının tümel eksenlerini gösteriniz.



Şekil P7.13

7.14 Bir aksenal çubuk Şek.P7.14'te gösterildiği gibi idealleştirilmiştir.  $q(x)$  deplasman fonksiyonu

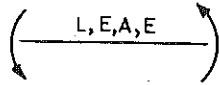
$$q(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

olarak farzedilmiştir. Eleman katılık matrisi denklemini nasıl elde edersiniz?



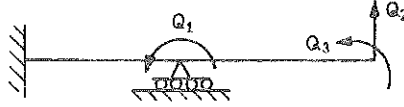
Şekil P7.14

7.15 Şek.P7.15'te gösterilen elemanın katılık matrisi katsayılarını çıkarınız.



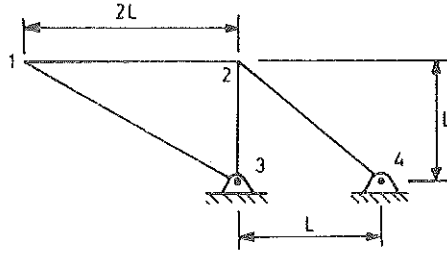
Şekil P7.15

7.16 Şek.P7.16'da gösterilen etkilere karşılık gelen katılık matrisi katsayılarının fiziksel varlığını çizimler yardımı ile gösteriniz.



Şekil P7.16

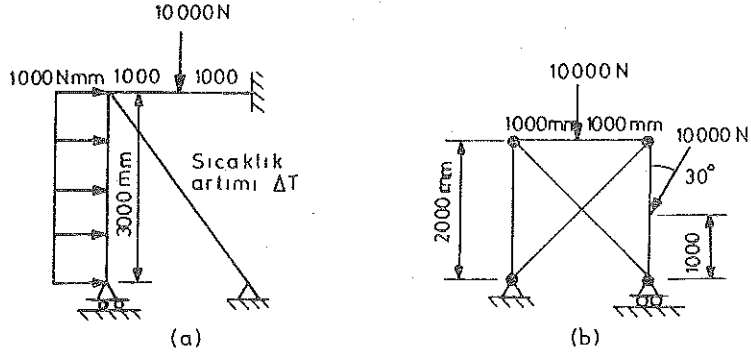
7.17 Şek.P7.17'de kafes yapı elemanlarının herbiri için dönüşüm matrisi katsayılarını bulunuz.



Şekil P7.17

7.18 Şek.P7.18'deki herbir yapının sonlu-elemanlar analizinde kullanılacak eşdeğer düğüm noktaları yüklerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \Delta T &= 40^{\circ}\text{C} & \alpha &= 10^{-5}\text{m}/(\text{m}^{\circ}\text{C}) \\ E &= 7 \times 10^4 \text{N}/\text{mm}^2 & A &= 6500 \text{mm}^2 & I &= 4 \times 10^7 \text{mm}^4 \end{aligned}$$



Şekil P7.18

7.19 Tüp şeklinde sivrilen bir milin yarıçapı

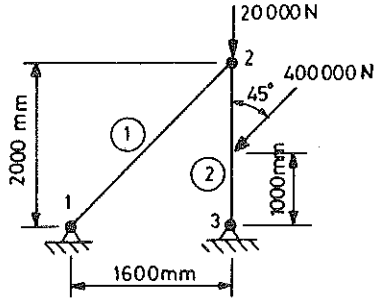
$$R = R_0 e^{\beta x} \quad R_0, \beta = \text{sabit}$$

şeklinde değişmektedir. Yalnızca burulma yüklerinin nakledildiğini farzederek elemanın katılık matrisini elde ediniz.

7.20 Şek.P7.20'de gösterilen kafes yapının sonlu elemanlarla bulunan düğüm noktaları deplasmanları;

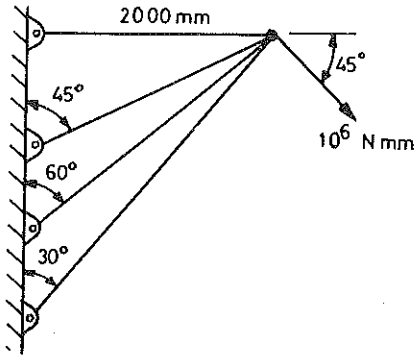
$$\delta_{2x} = -0,50 \text{ mm} \quad \delta_{2y} = -0,25 \text{ mm}$$

dır. Eleman 2'nin iç yüklerini bulunuz.  $AE = 10^8 \text{ N}$ .



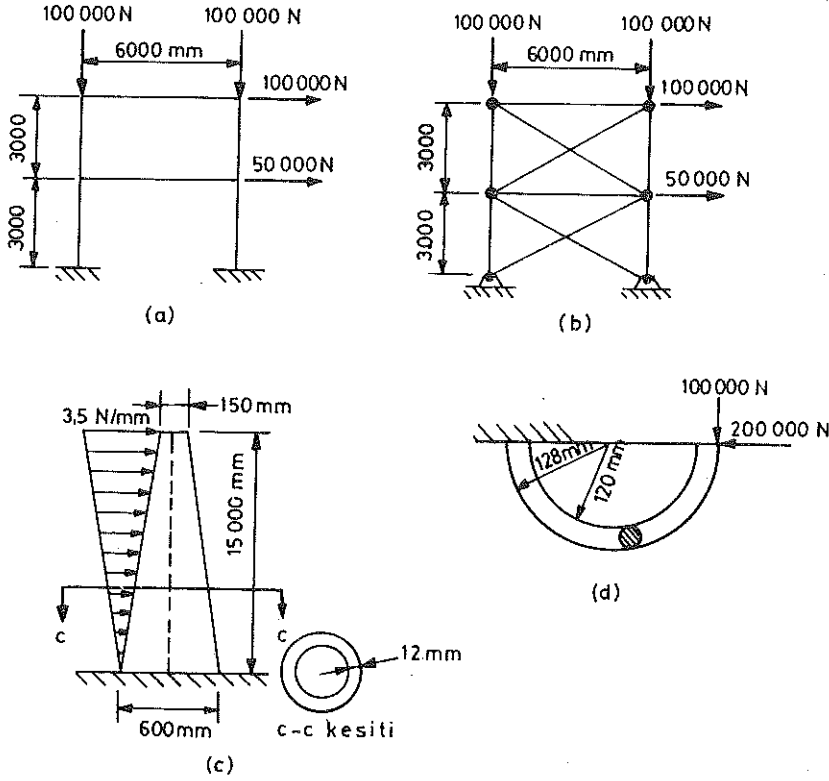
Şekil P.7.20

7.21 Şek.P7.21'de gösterilen kafes yapının deplasmanlarını ve iç yüklerini bulunuz. Her elemanın kesit alanı  $640 \text{ mm}^2$  ve elastisite modülü  $7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$  olarak farz edilecektir. Deplasman yöntemini kullanınız.



Şekil P7.21

7.22 Şek.P7.22'deki yapıların herbirindeki iç yükleri ve deplasmanları belirleyiniz. Deplasman matrisi yöntemini kullanınız.



Şekil P7.22

(a) Rijit çerçeve; bütün elemanlar 50 mm dış çaplı 10 mm et kalınlıklı borulardan oluşmaktadır; (b) Çerçeve: 50 mm çaplı, 10 mm et kalınlıklı

