İTÜ İŞLETME FAKÜLTESİ
İŞLETME MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI-I DERS NOTLARI

Doç. Dr. Demet BAYRAKTAR – Yard. Doç. Dr. Ferhan ÇEBİ

Eylül 2003-Istanbul

1. KARAR VERMEDE YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

1.1. Yöneylem Araştırması Kavramı ve Tarihçesi

Yöneylem araştırması II. Dünya Savaşında İngilizler tarafından askeri amaçlar için kullanılmak üzere geliştirilmiş bir disiplindir. Daha sonra A.B.D.'de yaygın olarak kullanılmıştır. Yöneylem araştırmasının savaş döneminde kıt kaynakların etkin bir şekilde dağıtımı üzerinde yaptığı olumlu gelişme, bu disiplinin daha sonra işletmelerde karar alma aracı olarak kullanılmasına yol açmıştır.

O halde, yöneylem araştırması, bir karar probleminin kıt kaynaklar altında optimum çözümünü belirleyen bilimsel yöntemlere dayanan bir disiplindir. Literatürde yaygın olan diğer tanımlar ise aşağıda verilmiştir[1]:

a) Yöneylem araştırması, rakama dökülmüş sağ duyudur.
b) Yöneylem araştırması, işletme için araştırmadır.
c) Yöneylem araştırması, yönetim bilimidir.
d) Yöneylem araştırması, bir karar analizidir.
e) Yöneylem araştırması, bir tasarım analizidir.
f) Yöneylem araştırması, eldeki olanaklardan en çok yararlanmayı sağlamak için bilimsel tekniklerin problemlere uygulanışıdır.
g) Yöneylem araştırması, problemlerin çözümüne kötü yanıt verme yerine daha az kötü veya daha iyi yanıt verme sanatıdır.
h) Yöneylem araştırması, insan, makine, para ve malzemeden oluşan endüstriyel, ticari, resmi ve savunma sistemlerinin yönetiminde karşılaşılan problemlere modern bilimi kullanarak çözüm bulup sistemi bulunduğu konumdan daha iyi bir konuma getirmeyi amaçlayan bilim dalıdır.
i) Yöneylem araştırması, kıt kaynakların dağıtımını gerektiren koşullar altında, bir sistemin en iyi bir şekilde tasarlanmasını ve işletimini araştıran bilimsel yaklaşımdır.

---

[1] Öztürk, A. (1997), Yöneylem Araştırması, 5. Baskı, Ekin Kitabevi Bursa, s.7.

1.2. Yöneylem Araştırması Kapsamında Ele Alınan Başlıca Konular[2]

Deterministik Modeller

- Doğrusal Programlama
    - Simpleks Yöntem
    - Ulaştırma Modelleri
    - Şebeke Modelleri
    - Tamsayılı Programlama
    - Düzeltilmiş Simpleks Yöntem
    - İki-Faz Yöntemi
    - Parametrik Programlama
- Doğrusal Olmayan Programlama
    - Klasik Optimizasyon Kuramı
    - Langrange Çarpanları Yöntemi
    - Kuhn-Tucker Koşulları
    - Kuadratik Programlama
    - Ayrılabilir Programlama
- Oyun Kuramı
- Envanter Modelleri
- Dinamik Programlama
- Çok Amaçlı Karar Verme

Probalistik Modeller

- Belirsizlik Altında Karar Verme
- Oyun Kuramı
- Envanter Kuramındaki Yeni Gelişmeler
- Markov Zincirleri
- Dinamik Programlama
- Kuyruk Kuramı
- Benzetim
- Tahmin Modelleri
- Çok Amaçlı Karar Verme

---

[2] Winston, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston.

1.3. Yöneylem Araştırmasında Bilimsel Yöntem

Yöneylem araştırması uygulamalarındaki temel evreler aşağıdaki gibi sıralanabilir[3]:

1- Problemin Tanımlanması

Problemin tanımlanması evresi, ele alınan problemin incelenip izlenerek tanımlanmasını kapsar. Bu aşamada çalışmanın amacı/amaçları, bu amaca/amaçlara ulaşmada etkili olan sistem kısıtları ve karar seçenekleri belirlenmelidir.

2- Model Kurma

Problem tanımlandıktan sonra problemi etkileyen parametre değerlerinin belirlenerek problemin matematiksel modeli kurulur. Bir başka deyişle problem matematik diline tercüme edilir.

3- Modelin Çözümü

Model kurulduktan sonra optimizasyon algoritmaları kullanılarak çözümlenir. Bu evrede aynı zamanda, model çözümlendikten sonra duyarlılık analizleriyle parametrelerdeki değişimlerin optimal çözüm üzerindeki değişimleri incelenir.

4- Modelin Geçerliliği

Bu aşamada çözümlenen modelin gerçeği doğru bir şekilde temsil edip etmediği araştırılır. Modelden elde edilen sonuçlarla sistemin gözlenmesiyle elde edilen sonuçlar karşılaştırılır. Böylece modelin beklenen davranışları sergileyip sergilemediği incelenir.

---

[3] . TAHA, H. (2000), Yöneylem Araştırması, 6. Basımdan Çeviri, (Çeviren ve Uyarlayanlar: Ş. Alp Baray ve Şakir Esnaf), Literatür Yayınları:43, İstanbul.

2. DOĞRUSAL PROGRAMLAMA (DP)

2.1. DP'nin Tanımı ve Bazı Temel Kavramlar

Model: Bir sistemin değişen koşullar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında varsayımlarda bulunmak amacı ile sistemin elemanları arasındaki bağıntıları kelimeler ya da matematik formüllerle belirleyen ifadeler topluluğuna "model" adı verilir.

Matematiksel Model: Bir sistemin elemanlarının simgeler ile tanımlanıp bunlar arasındaki ilişkilerin fonksiyonlar ile gösterimine "matematiksel model" adı verilir.

Karar Modeli: Sistemin yöneticisinin kontrolü altında olup, karar değişkeni olarak isimlendirilen değişkenlere, hangi değerlerin verilmesi gerektiğini belirlemek amacıyla kullanılan matematiksel modellere "karar modeli" adı verilir.

İşte YA'da en yaygın kullanım alanı bulan tekniklerden bir tanesi olan Doğrusal Programlama (DP), doğrusal karar modelleriyle ilgili kavram ve teknikler bütünüdür. Doğrusal programlama, bütün model parametrelerinin kesin olarak bilindiğini varsayan deterministik bir tekniktir.

Bir doğrusal programlama problemi (DPP) üç bölümden oluşur:

1- Bir DP problemi, karar değişkenlerinin (x_1, x_2, ...,x_n) doğrusal bir fonksiyonu olan amaç fonksiyonu içerir. Amaç fonksiyonu maksimizasyon ya da minimizasyon amaçlı olabilir.

2- Bir DP problemi, karar değişkenlerinin alacağı değerleri sınırlayan kısıtlar seti içerir. Her bir kısıt seti doğrusal eşitlik ya da eşitsizlik şeklinde ifade edilmelidir.

3- Bir DP problemi, karar değişkenlerinin negatif olmama gerekliliğini belirleyen bir kısıt içerir. $x_j \geq 0$, (j=1,.....,n).

Değişkenler: Bir problemin modeli kurulduktan sonra değeri hesaplanacak olan bilinmeyen simgelerdir.

Karar Değişkenleri: Bir karar modelinin çözümlenmesi sürecinde değeri hesaplanacak olan karar unsurlarıdır. Örneğin bir işletmede A ve B tipinde iki farklı ürün üretilmek istenilsin.

Karar değişkenleri x_1 ve x_2 sırasıyla, üretilecek olan A ve B tipindeki iki farklı ürünün üretim miktarlarını gösterirler.

Sapma Değişkenleri: Faktör ve kapasite arasındaki dengesizliği gidermeye çalışırlar. Bir başka deyişle, kullanılan hammadde ve onun kapasitesi arasındaki dengeyi kurmaya çalışırlar.

Faktör < Kapasite $\Rightarrow$ negatif sapma değişkeni (atıl kapasite)
Faktör > Kapasite $\Rightarrow$ pozitif sapma değişkeni (artık-fazla kapasite)

Bu bağlamda sapma değişkenlerini iki sınıfta toplamak mümkündür:

1. **Gölge Değişkenler:** Atıl kapasiteyi temsil ederler. "$\leq$" şeklindeki bir kısıt denklemini (=) şeklinde ifade etmek amacıyla kullanılırlar.

Örnek:

$$X_1 + X_2 \leq 5$$
$$X_1 + X_2 + S_1 = 5$$

2. **Artık Değişkenler:** Fazla kapasiteyi temsil ederler. "$\geq$" şeklindeki bir kısıt denklemini (=) şeklinde ifade etmek amacıyla kullanılırlar.

Örnek:

$$X_1 + X_2 \geq 5$$
$$X_1 + X_2 - E_1 = 5$$

Yukarıda sözü edilen sapma değişkenlerinin yanı sıra Simpleks Çözüm Yönteminde kullanılan bir başka değişken çeşidi "yapay değişken"dir. Yapay değişkenler Büyük M Yöntemi (Bölüm 3.2.2.) incelenirken açıklanacaktır.

Parametreler: DP modelinin davranışını etkileyen sabit katsayılardır. DP modelindeki c_j, b_i ve a_{ij} (i=1 ....m; j=1 .... n) katsayıları parametreler olarak adlandırılırlar.

Amaç Fonksiyonu: Karar değişkenlerinden ve bu değişkenlerin parametrelerinden oluşan en iyi çözümün (maksimum ya da minimum) elde edilmesini sağlayan doğrusal bir fonksiyondur.

Kısıtlar: Bir modeldeki karar değişkenleri ya da karar değişkenleri ile parametreler arasındaki zorunlu ilişkilerin her birine "kısıt" adı verilir. Kullanılan faktör ya da hammadde miktarlarıdır.

Teknolojik Katsayılar: Her faaliyet için gerekli olan kaynak miktarıdır.

Sağ Taraf Sabitleri: Mevcut kaynak miktarlarını gösteren, problemdeki kısıt denklemlerinin sağ taraflarında yer alan parametrelerdir.

Bu bilgilere bağlı olarak bir DP problemi simgesel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

Amaç Fonksiyonu:

$$Z_{maks/min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

Kısıt Denklemleri:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \; \overset{\leq}{>} \; b_i \qquad (i=1,.....m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,.......n)$$

Örnek: Maksimizasyon amaçlı ve 2x2 boyutlu bir DP problemi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Z_{max} = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$$

$$x_1 , x_2 \geq 0$$

Optimal Çözüm: Bir DP modelinin karar değişkenlerinin, mevcut kısıtlar altında amaç fonksiyonunun en iyilenmesi (optimum kılınması) sonucunda aldığı değerler "optimal çözüm" olarak adlandırılır.

<u>Optimal Değer:</u> Optimal çözüme bağlı olarak amaç fonksiyonun aldığı değer "optimal değer" olarak adlandırılır.

2.2. DP'nin Bazı Uygulama Alanları

- Üretim Programı
- Beslenme Programı
- Reklam Ortamı Seçimi
- Sermaye Bütçeleme
- Dağıtım Pogramı
- Stok Kontrol
- Üretim Hattı Dengelemesi

2.3. DP'nin Varsayımları

DP'nin altı temel varsayımı vardır. Bu varsayımlar aşağıda verilmiştir:

- Belirlilik (Certainity)
- Doğrusallık (Linearity)
- Bölünebilirlik (Divisibility)
- Toplanabilirlik (Additivity)
- Orantısallık (Proportionality)
- Negatif olmama (Non-negativity)

Belirlilik Varsayımı: Bir DP modelinde yer alan parametrelerin bilindiği ve değişmediği kabul edilir. Yani, birim başına kar ya da maliyetlerin (c_j), her faaliyet için gerekli olan kaynak miktarlarının (a_{ij}) ve mevcut kaynak miktarlarının (b_i) sabit olduğu varsayılır. Bu varsayımın kabul edilmesiyle DP problemlerinin çözümü kolaylaşmaktadır. Ancak, uygulamada bu parametrelerin sık sık değişme eğiliminde olması, DP'nin pratik faydasını azaltmaktadır. Ancak, problemin optimum çözümü elde edildikten sonra duyarlılık analizi başlığı altında parametrelerdeki değişmelerin etkileri incelenerek DP'ye dinamik bir yapı kazandırılabilir.

Bölünebilirlik Varsayımı: Belirlilik varsayımı ile karar değişkenlerinin sürekli değerler alabileceği kabul edilir. Örneğin herhangi bir DP modelinin çözümünde 4.6 adet araba üretileceği gibi bir üretim çıktısı sonucuna ulaşılabilir. Optimal çözüme ulaşıldıktan sonra kesirli değerler “Tam Sayı Programlama” algoritmalarıyla tamsayılaştırılabilir.

Doğrusallık Varsayımı: Bir DP modelinin amaç fonksiyonu ve kısıt denklemleri doğrusal olmalıdır. Bir başka deyişle x_j’ler birinci dereceden olmalıdır.

Toplanabilirlik Varsayımı: Amaç fonksiyonunun ve kısıt denklemlerinin değerlerine yapılan toplam katkı, her bir katkının ayrı ayrı toplanması ile elde edilir.

Örneğin, bir iş iki iş-gücü saat ile diğer bir iş üç iş-gücü saat ile yapılıyorsa iki işi birden yapmak beş iş-gücü saati gerektirir.

Orantısallık Varsayımı: Her bir karar değişkeninin amaç fonksiyonuna ve kısıt denklemlerinin sol tarafına yapacağı katkı karar değişkeninin değeri ile orantılıdır. Örnek olarak 1 adet A tipi oyuncağın amaç fonksiyonu katkısı 800.000 TL ise 4 adet A tipi oyuncağın amaç fonksiyonuna toplam katkısı bunun dört katı olan 3.200.000 TL (4x800.000) olacaktır.

Bir adet A tipi oyuncak plastik departmanında 4 dakikada işleniyorsa, 5 adet A tipi oyuncak bunun beş katı olan 20 dakikada (4x5=20) işlenecektir.

Negatif Olmama Varsayımı: DP’deki tüm değişkenlerin negatif olmayan değerler alması gerekmektedir. Negatif üretimden söz edilemeyeceği için değişkenlerin pozitif ya da en azından sıfıra eşit olması gerekmektedir.

2.4. DP’nin Özellikleri ve Düzenleniş Biçimleri

2.4.1. DP’nin Özellikleri

Bir DP probleminin modeli, doğrusal eşitlikler ve/veya eşitsizlikler şeklindeki kısıt denklemleri çerçevesinde en iyilenecek (optimum kılınacak) bir doğrusal amaç fonksiyonu içerir. Bu durumda bir DP problemi genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Z_{maks./min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i=1,\ldots\ldots\ldots\ldots,m$$

j=1 >

$x_j \geq 0 \quad j= 1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,n$

DP'nin özellikleri kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1) DP problemlerinde uygun çözüm birden çoktur. Fakat genelde optimum çözüm bir tanedir (alternatif çözüm olabilir).
2) Kaynak miktarları sınırlıdır. Amaca ulaşmak için sonsuz miktarda kaynak kullanılamayacağı gibi, miktar olarak en kıt olan kaynak çözüm alanını belirler.
3) Problemde verilen bilgiler, amaç ve kaynaklar ile ilgili sınırlayıcı koşullar, matematiksel olarak eşitlikler ya da eşitsizlikler şeklinde ifade edilmelidir. İfadeler doğrusal olmalıdır.
4) Karar değişkenleri (x_j) negatif olmamalıdır. x_j- ≥0 (j=1, ...,n)
5) c_j, b_i ve a_j (i=1,..........,m ve j=1, ..., n) değerleri önceden belirlenmiştir. Her bir model için sabit oldukları varsayılır ve parametreler olarak adlandırılırlar.

2.4.2. DP'nin Düzenleniş Biçimleri

DP modelleri değişik amaçlarla değişik biçimlerde düzenlenirler. DP modellerinin biçimleri aşağıdaki gibidir*.

*-ÖZDEN, K. (1989), Yöneylem Araştırması, Hava Harp Okulu Yayınları, s.186.

1) Primal (özgün) form
2) Kanonik form
3) Standart form
4) Dual (ikiz) form

1.) Primal (Özgün) Form:

Herhangi bir DP problemi temel alınarak kurulan ilk modele primal (özgün) problem adı verilir.

Primal modelin matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$$Z_{maks./min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

n

$$\sum_{j=1} a_{ij}x_j \; \underset{>}{\leq} \; b_i \quad i=1,\ldots\ldots\ldots m$$

$$x_j \underset{<}{\geq} 0 \qquad j=1,\ldots\ldots\ldots n$$

x_j- serbest

Buna göre primal modelde,

a.) En büyüklenecek ya da en küçüklenecek bir amaç fonksiyonu vardır.

b.) Kısıt denklemlerinin işaretleri (≥), (=), (≤) şeklinde olabilir.

c.) Amaç fonksiyonunda parametreler, kısıt denklemlerinde ise parametreler ve sağ taraf sabitleri yer alır.

d.) Karar değişkenleri sıfıra eşit, sıfırdan büyük ya da serbest işaretli olabilirler.

Örnek:

$$Z_{maks.} = 3x_1 + 5x_2 + 2x_3$$

$$x_1 + 5x_2 - 2x_3 \leq 25$$

$$4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 80$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

2.) Kanonik Form:

Bir DP problemi, kanonik formda aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$Z_{maks.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i \qquad i=1,\ldots\ldots\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j=1,\ldots\ldots\ldots, n$$

Kanonik formun özellikleri aşağıdaki gibidir.

a.) Amaç fonksiyonu maksimizasyon amaçlı olmalıdır.

b.) Kısıt denklemleri $\leq$ şeklinde ifade edilmelidir.

c.) Tüm değişkenler negatif olmayan değerler almalıdır.

Bu forma uymayan DP problemleri aşağıdaki işlemlerle kanonik forma dönüştürülürler:

1) Bir f(x) fonksiyonunun minimizasyonu, bu fonksiyonun negatif işaretlisinin (-f(x)) maksimizasyonuna eşittir.
2) Herhangi bir yöndeki eşitsizlik ($\leq$ ya da $\geq$) (-1) ile çarpılarak karşıt yöndeki eşitsizliğe ($\geq$ ya da $\leq$) dönüştürülebilir.

Örnek:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$

$$-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$$

3) Eşitlik şeklinde verilen bir kısıt denklemi zıt yönde iki eşitsizlik olarak ifade edilebilir.

Örnek:

$a_{11}x_1+a_{12}x_2 = b_1$ eşitliği

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1 \quad \text{ve} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geq b_1$$

şeklinde iki eşitsizlik olarak yazılabilir. Buradan,

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1 \quad \text{ve} \quad -a_{11}x_1-a_{12}x_2 \leq -b_1$$

şeklinde iki tane $\leq$ yönlü eşitsizlik elde edilir.

4) Sol tarafı mutlak değer şeklinde verilen bir eşitsizlik iki eşitsizliğe dönüştürülebilir.

Örnek:

$|a_{11}x_1+a_{12}x_2| \leq b_1$ eşitsizliği

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2 \geq -b_1 \quad \text{ve} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2 \leq b_1$$

şeklinde iki eşitsizlik olarak yazılabilir. Buradan,

$$-a_{11}x_1-a_{12}x_2 \le b_1 \quad \text{ve} \quad a_{11}x_1+a_{12}x_2 \le b_1$$

şeklinde iki tane ≤ yönlü eşitsizlik elde edilir.

5) İşareti belirli olmayan bir değişken, iki tane negatif olmayan değişkenin farkı olarak tanımlanabilir. Örneğin x_1'in işareti belirsiz ise, $x_1^{II} \ge 0$ ve $x_1^{I} \ge 0$ koşuluyla $x_1= (x_1^{II} - x_1^{I})$ şeklinde yazılabilir.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini kanonik formda yazınız.

$$
\begin{aligned}
Z_{min.} &= 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \\
& 10x_1+16x_2 + 8x_3 \le 1500 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1000 \\
& 2x_1 + 2x_2 +10x_3 \le 120 \\
& x_2 \ge 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0 \text{ ve } x_3 \text{ - serbest}
\end{aligned}
$$

3.) Standart Form:

Bir DP problemi, standart formda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$Z_{maks./min.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad i=1,\ldots\ldots\ldots\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \quad j= 1,\ldots\ldots\ldots\ldots,n$$

Standart formun özellikleri aşağıdaki gibidir.

a.) Amaç fonksiyonu maksimizasyon ya da minimizasyon amaçlı olabilir.

b.) Tüm kısıt denklemleri (=) şeklinde ifade edilmelidir.

c.) Sağ taraf sabitleri negatif olmayan değerler almalıdır .

d.) Tüm değişkenler negatif olmayan değerler almalıdır.

Bu forma uymayan DP problemleri aşağıdaki işlemlerle standart forma dönüştürülürler:

1) ($\leq$) şeklindeki bir kısıt denklemi, denkleme negatif sapma değişkeninin eklenmesi ile (=) şeklinde ifade edilebilir. Eklenen bu değişkene "gölge değişken" adı verilir.

Örnek:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 30$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 30$$

2) ($\geq$) şeklindeki bir kısıt denklemi, denkleme pozitif sapma değişkeninin eklenmesi ile (=) şeklinde ifade edilebilir. Eklenen bu değişkene "artık değişken" adı verilir.

Örnek:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1000$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - E_1 = 1000$$

3) Sağ taraf sabiti (-) değerli olan eşitlik ya da eşitsizlik şeklindeki bir kısıt denklemi, (-1) ile çarpılıp sağ taraf sabitinin (+) değer alması sağlanır.

Örnek:

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 \geq -1000$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 1000$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 + S_1 = 1000$$

4) İşareti belirli olmayan bir değişken, iki tane negatif olmayan değişkenin farkı olarak tanımlanabilir. Örneğin x_1'in işareti belirsiz ise, $x_1^{11} \geq 0$ ve $x_1^{1} \geq 0$ koşuluyla $x_1 = (x_1^{11} - x_1^{1})$ şeklinde yazılabilir.

Örnek: Aşağıda verilen DP problemini standart formda yazınız.

$$Z_{min.} = 3x_1 + x_2$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 - x_2 = 3$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2\text{-serbest}$$

4.) Dual (İkiz) Form:

Her DP probleminin ilişkili olduğu bir ikiz problemi vardır. DP probleminin asıl şekline primal problem, bununla ilişkili ikinci şekline dual (ikiz) problem adı verilir. Gerçekten de bir DP problemi, kendisiyle içsel bağlantılı başka bir DP problemine dönüştürülebilir: Örneğin, DP'de maksimizasyon (minimizasyon) problemi, aynı verileri içeren benzer bir minimizasyon (maksimizasyon) problemi olarak yazılabilir. DP'de bu ikili yapı DUALİTE (İKİLİLİK) olarak adlandırılmaktadır.

Dual problemin çözümü önemli ekonomik yorumlar sağlar. Primal ve dual modeller arasındaki ilişkileri aşağıdaki gibi sıralamak olasıdır:

1) Primal ve dual modelin optimal çözümleri için

Primal		Dual	
maks. Z	=	min. G	
min. G	=	maks. Z	eşitliği geçerlidir

2) Primal modelin amaç fonksiyonu katsayıları (cj), dual modelin sağ taraf sabitlerini (bi) oluştururlar.

Primal	Dual	
cj	bi	(j=1,.........,n) (i=1,..........,m)

3) Primal modelin sağ taraf sabitleri (bi), dual modelin amaç fonksiyonu katsayılarını (cj) oluştururlar.

Primal	Dual		
bi	cj	(j=1,.............,n)	(i=1,............,m)

4) Primal modelde kısıt katsayılarının oluşturduğu teknolojik katsayılar satırı, dual modelde teknolojik katsayılar sütun vektörünü oluştururlar.

Primal	Dual		
a_{ij}	a_{ij}	(j=1...n),	(i=1...m)
n-değişken	n-kısıt denklemi		
m-kısıt denklemi	m-değişken		

O halde, primal model n adet değişken, m adet kısıt denklemi içeriyorsa, dual model m adet değişken n adet kısıt denklemi içerecektir.

5) Dual problemin duali primaldir.
6) Primal ve dual problemin karar değişkenleri negatif olmayan değişkenlerdir. $x_j \geq 0$, $y_i \geq 0$

Primal	Dual
$x_j \geq 0$	$y_i \geq 0$

7) Primal problemdeki kısıt denklemleri, dual problemde yön değiştirirler.

Primal	Dual
$\leq$	$\geq$

≥ ≤

A-) Normal Maksimum / Minimum Problemlerin Dualinin Alınması

a) Normal Maksimum Problemi

Asıl Model	Dual Model
$Z_{maks} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$G_{min} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j$
$x_j \geq 0$	$y_i \geq 0$
(i=1,...........,m) (j=1,............,n)	(j=1,.............,n) (i=1,...........,m)

Normal maksimum probleminin duali kanonik formdan ve standart formdan yararlanılarak alınabilir.

i) Kanonik Form

Normal maksimum problemi, maksimizasyon amaçlı ve ≤ yönlü kısıt denklemli olacağı için zaten kanonik formda olacaktır. O halde, dual problem minimizasyon amaçlı ve ≥ yönlü kısıt denklemli olacaktır.

Örnek: Aşağıdaki verilen DP probleminin kanonik formdan yararlanarak dualini alın.

$$Z_{maks.} = 60x_1 + 30x_2 + 20x_3$$
$$8x_1 + 6x_2 + x_3 \leq 48$$
$$4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 \leq 20$$
$$2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ii) Standart Form

Normal maksimum problemi standart forma dönüştürülerek duali alınır.

Örnek: Yukarıda verilen DP probleminin standart formdan yararlanarak dualini alınız.

b) Normal Minimum Problemi

Asıl Model — Dual Model

$$G_{min.} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \qquad Z_{maks.} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geq c_j \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$y_j \geq 0 \qquad x_j \geq 0$$

(i=1,............,m) (j=1,...........,n) (j=1,..............,n) (i=1,...............,m)

Normal minimum probleminin dual problemi maksimizasyon amaçlı ve ≤ yönlü kısıt denklemli olacaktır.

Örnek: Aşağıda verilen DP probleminin dualini alınız.

$$\begin{aligned}
G_{min.} = \ & 50y_1 + 20y_2 + 30y_3 + 80y_4 & \\
& 400y_1 + 200y_2 + 150y_3 + 500y_4 & \geq 500 \\
& 3y_1 + 2y_2 & \geq 6 \\
& 2y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 4y_4 & \geq 10 \\
& 2y_1 + 4y_2 + y_3 + 5y_4 & \geq 8 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4 & \geq 0
\end{aligned}$$

i- Standart Form

Normal minimum problemi standart forma dönüştürüldükten sonra duali alınır.

Örnek: Yukarıda verilen DP probleminin standart formdan yararlanarak dualini alınız.

O halde, normal maksimum ve minimum problemlerinin standart formdan duali alınırken aşağıdaki kurallar geçerlidir.

1. Maksimizasyon amaçlı normal DP problemi standart forma dönüştürüldükten sonra duali alındığı zaman, dual problem minimizasyon amaçlı ve '$\geq$' yönlü kısıt denklemli olacaktır.

2. Minimizasyon amaçlı normal DP problemi standart forma dönüştürüldükten sonra duali alındığı zaman, dual problem maksimizasyon amaçlı ve '$\leq$' yönlü kısıt denklemli olacaktır.

B.) Asimetrik DP Probleminin Dualinin Alınması

DP problemi normal forma (Normal Maksimum/Normal Minimum) dönüştürüldükten sonra duali alınır.

Tablo-Primal-Dual Problem Arasındaki İlişki

Primal Problem (Dual Problem)	Dual Problem (Primal Problem)
Maksimizyon Z(G)	Minimizasyon G(Z)
i. kısıt denklemi $\leq$ şeklinde = şeklinde $\geq$ şeklinde	y_i - değişken $y_i \geq 0$ sınırlandırılmamış $y_i \leq 0$
x_j-değişken $x_j \geq 0$ sınırlandırılmamış $x_j \leq 0$	j.kısıt denklemi $\geq$ şeklinde = şeklinde $\leq$ şeklinde

Kaynak: HILLIER, F.S. ve LIEBERMAN, G.J. (1995), Introduction to Mathematical Programming, McGraw-Hill Publishing Company, p.213.

2.5. DP Problemlerinin Modelinin Kurulması

ÖRNEK 1: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ

Bir oyuncak üreticisi plastik ve montaj departmanlarından oluşan atölyesinde A ve B tipinde iki farklı oyuncak üretmektedir. Her iki departmanda ikişer iş-gören çalışmaktadır. Her iş-gören günde 7.5 saat çalışmaktadır. Bir adet A tipi oyuncağın plastik departmanında işlenmesi için gerekli süre 4 dakika, montaj departmanında işlenmesi için gerekli süre 2 dakikadır. Benzer bir şekilde bir adet B tipi oyuncağın plastik departmanında işlenmesi için gerekli süre 1 dakika, montaj departmanında işlenmesi için gerekli süre 3 dakikadır. Oyuncakların birim katkıları sırasıyla 800.000 TL ve 1.200.000 TL'dır. Üretici yukarıdaki koşullara uygun olarak üründen en yüksek katkıyı sağlamayı amaçlamaktadır. Yukarıdaki verilere bağlı olarak oyuncak üreticisinin karar probleminin doğrusal programlama (DP) modelini kurunuz.

ÖRNEK 2: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ

Bir cam fabrikası alüminyum çerçeveli cam kapı (ürün1) ve ahşap çerçeveli pencere (ürün2) olmak üzere iki farklı tipte ürün üretmektedir. Fabrikada üç farklı departman bulunmaktadır. Alüminyum çerçeveler birinci departmanda, ahşap çerçeveler ikinci departmanda üretilmektedir. Cam üretimi ve montaj işlemleri ise üçüncü departmanda gerçekleşmektedir. Buna bağlı olarak; ürün1, sadece birinci ve üçüncü departmanlardan, ürün 2'de sadece ikinci ve üçüncü departmanlardan geçmektedir. Pazarlama bölümü, fabrikanın üretebildiği kadar ürün satabileceğini savunmaktadır.

Öte yandan, her bir ürün çeşidi 20'şer adetlik partiler halinde üretilmektedir. Buna bağlı olarak, üretim oranı, haftalık parti sayısı olarak belirlenmelidir. Fabrikadaki yöneylem araştırması grubunun derlediği veriler Tablo 1'de verilmiştir. Bu verilere bağlı olarak, mevcut kısıtlar altında iki ürünün toplam katkısını en büyükleyen DP probleminin modelini kurunuz.

Tablo 1. Cam Fabrikası Örneğine İlişkin Veriler

Departmanlar	Her Bir Parti İçin Gerekli Olan Üretim Süresi (saat)		Her Bir Departmanın Haftalık Üretim Kapasitesi (Saat/Hafta)
	Ürünler		
	1	2	
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Her bir partinin katkısı (TL)	3.000.000	5.000.000	

ÖRNEK 3: MEDYA ORTAMI SEÇİMİ PROBLEMİ

KOTOSAN araba ve kamyonet almak üzere iki farklı tipte ürün üretmektedir. Firma, potansiyel müşterilerinin yüksek gelir düzeyli bay ve bayan müşteriler olduğunu belirlemiştir. KOTOSAN yöneticileri, bu kitleye ulaşmak için komedi programlarında ve futbol maçı yayınlarında 1 dakikalık reklam vermeyi planlamaktadır. Her bir komedi programının 7 milyon yüksek gelir düzeyli bayan ve 2 milyon yüksek gelir düzeyli bay müşteri tarafından izlendiği tespit edilmiştir. Öte yandan, her bir futbol maçının 2 milyon yüksek gelir düzeyli bayan, 12 milyon yüksek gelir düzeyli bay tarafından izlendiği tespit edilmiştir. Komedi programlarında yayına girecek olan bir adet 1 dakikalık reklamın maliyeti 5 milyar TL, futbol maçlarında yayına girecek olan bir adet 1 dakikalık reklamın maliyeti ise 10 milyar TL'dir. Firma, reklamların en azından 28 milyon yüksek gelir düzeyli bayan ve 24 milyon yüksek gelir düzeyli bay müşteriler tarafından izlenmesi amaçlanmaktadır. Bu verilere bağlı olarak KOTOSAN'ın reklam maliyetini en küçükleyen DP probleminin modelini kurunuz.

ÖRNEK 4: DİYET PROBLEMİ

Bir üniversitenin kantininde kakaolu kek, elmalı kek, dondurma ve lokma olmak üzere dört çeşit tatlı satılmaktadır. Her tatlı çeşidinin fiyatı sırasıyla aşağıdaki gibidir:

1 dilim kakaolu kek	300.000 T.L.
1 dilim elmalı kek	200.000 T.L.
1 kepçe dondurma	180.000 T.L.
1 kutu lokma	140.000 T.L.

Ayşe her gün en azından 500 kalorilik tatlı yemek istemektedir. Ayrıca günde en azından 180 gram kakaolu, 300 gram şekerli ve 240 gram yağlı besin almak istemektedir. Her bir tatlının besin değeri Tablo 2’de verilmiştir. Ayşe'nin en az maliyetle yiyebileceği günlük tatlı miktarını belirleyen DP probleminin modelini kurunuz.

Tablo 2. Tatlı Çeşitlerinin Besin Değerleri

Tatlı Çeşitleri	Kalori	Kakaolu Besin (gr.)	Şekerli Besin (gr.)	Yağlı Besin (gr.)
Ç.K.	400	90	60	60
E.K.	150	0	120	30
D.	200	60	60	120
L.	500	0	120	150

ÖRNEK 5: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ

MOTOSAN araba ve kamyonet olmak üzere iki farklı tipte ürün üretmektedir. Her bir araba, boyama ve montaj departmanında işlenmektedir. Eğer boyama departmanında sadece kamyonetler boyanırsa, günde sadece 40 adet kamyonet boyanmaktadır. Eğer boyama departmanında sadece arabalar boyanırsa, günde sadece 60 adet araba boyanmaktadır. Eğer işleme departmanında sadece kamyonetler işlenirse günde sadece 50 adet kamyonet işlenmektedir. Eğer işleme departmanında sadece arabalar işlenirse günde sadece 50 adet araba işlenmektedir. Her bir kamyonetin birim katkısı 300.000.000 TL ve her bir arabanın birim katkısı 200.000.000 TL'dır. MOTOSAN'ın toplam katkısını en büyükleyen günlük üretim miktarını belirleyen DP probleminin modelini kurunuz.

ÖRNEK 6: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ

Bir firma, E1 ve E2 olmak üzere İki farklı tipte elektrikli mutfak eşyası üretmektedir. Her iki ürün işletmede bulunan işleme, montaj ve kalite kontrol departmanlarından geçerek üretilmektedir. Departmanların haftalık kapasiteleri sırasıyla 450 saat, 350 saat ve 300 saattir. Her bir adet E1 üretimi için 3 saat işleme departmanı süresi, 4 saat montaj departmanı süresi ve 3 saat kalite kontrol departmanı süresi gerekmektedir. Her bir adet E2 üretimi için 2 saat işleme departmanı süresi, 6 saat montaj departmanı süresi ve 3 saat kalite kontrol departmanı süresi gerekmektedir. Pazarlama departmanının verilerine göre haftada en fazla 75 adet E1 ve en fazla 50 adet E2 üretilmesi gerekmektedir. Ayrıca, yine pazarlama departmanının verilerine göre haftada 20 adetten daha az E1 ve 15 adetten daha az E2 üretilmemesi gerekmektedir. Son olarak, E1'in üretim miktarının en az E2'nin üretim miktarına eşit olması gerekmektedir. E1'in birim katkısı 10.000.000 TL, E2'nin birim katkısı ise 20.000.000

TL’dır. Bu verilere bağlı olarak üreticinin üretim planına ilişkin doğrusal programlama probleminin modelini kurunuz .

ÖRNEK 7: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ

Bir bisiklet üreticisi bis1, bis2 ve bis3 olmak üzere üç farklı tipte çocuk bisikleti üretmektedir. Bisikletlerin birim katkıları sırasıyla 4.000.000 TL, 2.000.000 TL ve 3.000.000 TL’dır. Her bir adet bis1, bis2 ve bis3 montaj ve boyama departmanında işlenerek üretilmektedir. Boyama departmanı günde en fazla 2.8 kilogram boya temin edilebilmektedir. Her bir kilogram boya ya on adet bis1’in, ya yirmi adet ya bis2’nin ya da beş adet bis3’ün boyanması için kullanılmaktadır. Eğer montaj departmanında sadece bis1 monte edilirse saatte en fazla 10 adet bis1 monte edilmektedir. Eğer montaj departmanında sadece bis2 monte edilirse saatte en fazla 5 adet bis2 monte edilmektedir. Eğer montaj departmanında sadece bis3 monte edilirse saatte en fazla 15 adet bis3 monte edilmektedir. Ayrıca pazarlama departmanının verilerine göre, bis3’ün günlük üretim miktarı en azından bis1’in günlük üretim miktarının bir buçuk katı kadar olmalıdır. Ek olarak; bis1’in günlük üretim miktarının en azından 6 adet olması gerekmektedir. Muhasebe departmanının verilerine göre ise, her bir adet bis1’in maliyeti 10.000.000 TL, her bir adet bis2’nin maliyeti 30.000.000 TL ve her bir adet bis3’ün maliyeti ise 20.000.000 TL’dır ve günlük toplam maliyetin 280.000.000 TL’yı aşmaması gerekmektedir. İşletmede bir günde 8 saat çalışılmaktadır. Bu verilere bağlı olarak bisiklet üreticisinin üretim planını belirleyen doğrusal programlama probleminin modelini kurunuz.

KAYNAKLAR:

HILLIER, F.S. ve LIEBERMAN, G.J. (1995), Introduction to Mathematical Programming, McGraw-Hill Publishing Company.

TAHA, H. (1997), Operations Research, Sixth Edition, Prentice Hall.

WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston.

HALLAÇ, O. (1983), Kantitatif Karar Verme Teknikleri, İ.Ü. Yayını.

ÖZDEN, K. (1989), Yöneylem Araştırması, Hava Harp Okulu Yayınları.

ÖZTÜRK, A. (1997), Yöneylem Araştırması, Genişletilmiş V. Basım, Ekin Kitapevi Yayınları, Bursa..

TAHA, H. (2000), Yöneylem Araştırması, 6. Basımdan Çeviri, (Çeviren ve Uyarlayanlar: Ş. Alp Baray ve Şakir Esnaf), Literatür Yayınları:43, İstanbul.

ÖRNEK 8: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ[4]

Bir fırıncının 90 kg unu ve 30 paket mayası bulunmaktadır. Bir paket ekmek üretimi için 0.5 kg una ve 1 paket mayaya gereksinim duyulmaktadır. Bir paket ekmeğin satış fiyatı 1 200 000 TL'dir. Fırıncı gün içinde ihtiyaç duyduğunda, ek olarak kilosu 400 000 TL'den un alabilmekte veya aynı fiyattan artan ununu satabilmektedir. Fırıncının kazancını en çoklayan doğrusal programlama probleminin modelini oluşturunuz.

ÖRNEK 9: İŞGÜCÜ ÇİZELGELEME PROBLEMİ[5]

Haftanın 7 günü faaliyetini sürdürmekte olan bir şirketin ihtiyaç duyduğu eleman sayısı günlere göre farklılık göstermektedir. Tam gün çalışacak şekilde her gün için ihtiyaç duyulan eleman sayısı aşağıdaki tabloda verildiği gibidir:

Gün	Eleman Sayısı
Pazartesi	17
Salı	13
Çarşamba	15
Perşembe	19
Cuma	14
Cumartesi	16
Pazar	11

Diğer yandan kurallar gereğince, tam gün çalışan kişiler bir haftalık bir sürede birbirini izleyen beş gün çalışmakta ve iki gün dinlenmektedirler. Örneğin, Pazartesi günü işe başlayan bir kişi Cuma günü de çalıştıktan sonra iki gün dinlenmektedir. Şirket günlük faaliyetlerini tam gün çalışacak bu kişilerle yürütmek istemektedir. Şirketin istihdam edeceği personel sayısını en aza indirecek doğrusal programlama modelini kurunuz.

ÖRNEK 10: İŞGÜCÜ ÇİZELGELEME PROBLEMİ[6]

Müşterilerine bakım ve onarım hizmeti vermekte olan bir şirket, gelecek beş ay için müşterilerinin gereksinim duyacağı hizmet sürelerini aşağıdaki gibi tahmin etmektedir:

---

[4] WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-Kent Publishing Company, Boston,s.-176

[5] WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-Kent Publishing Com., Boston,pp.74- 75

[6] WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-Kent Publishing Com., Boston,pp.109-111

Ocak: 6000 saat

Şubat: 7000 saat

Mart: 8000 saat

Nisan: 9500 saat

Mayıs:11000 saat

Bakım ve onarım faaliyetleri tecrübeli teknik elemanlar tarafından yerine getirilmekte ve her teknik eleman ayda 160 saat çalışmaktadır. Ocak ayı başında şirkette 50 tecrübeli teknik eleman bulunmaktadır.

Yönetim gelecek aylardaki müşteri gereksinimlerini karşılayabilmek için, yetiştirilmek üzere şirkete yeni elemanlar alınmasına karar vermiştir. Yeni elemanların yetiştirilmesi için bir aylık bir sürenin yeterli olacağı düşünülmektedir. Bu bir ay içinde her yeni eleman tecrübeli bir eleman tarafından 50 saatlik bir eğitime tabi tutulacaktır. Diğer yandan, her ayın sonunda tecrübeli elemanların % 5'inin işten ayrıldığı gözlenmektedir.

Şirket, tecrübeli elemanlara ayda 500 milyon TL., yetiştirilen elemanlara ise bu ilk ayında 250 milyon TL. ödemektedir. Şirketin müşteri gereksinimlerini karşılayacak şekilde toplam işgücü maliyetini en aza indirecek doğrusal programlama modelini kurunuz.

ÖRNEK 11: ÜRÜN KARMASI PROBLEMİ[7]

2000 hektarlık tarım alanına sahip olan bir kişi toprağının işlenmesi için üç çiftçiyle anlaşmakta ve çiftçilerin kapasitelerine göre bu alanı üç parçaya ayırmaktadır. Buna göre, 1.çiftçiye ayrılan toprağın genişliği 500, 2. çiftçiye ayrılan toprağın genişliği 800, 3. çiftçiye ayrılan toprağın genişliği 700 hektar'dır.

Toprak sahibi her bir çiftçi için ayrılan kısımda mısır, bezelye ve soya yetiştirilmesini istemektedir. Ancak, mısır için ayrılan toplam alanın 900, bezelye için ayrılan toplam alanın 700, soya için ayrılan toplam alanın 1000 hektar' dan fazla olmasını istememektedir. Hektar başına mısırdan elde edilecek kar 400 milyon TL., bezelyeden elde edilecek kar 300 milyon TL ve soyadan elde edilecek kar 200 milyon TL'dir.

Diğer yandan , toprak sahibi her çiftçiye ayrılan kısmın en az % 60'ının ekilmesini şart koşmaktadır. Ayrıca, her bir parçadaki ekili alan oranının birbirine eşit olmasını istemektedir.

Yukarıda verilen bilgilerden yararlanarak toplam karı en çoklayacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

---

[7] LEE, S.M., MOORE L.J. ve TAYLOR, B.W., (1981),Management Science, Wm.C.Brown Company,U.S.A, s..35-38.

ÖRNEK 12: KARIŞIM PROBLEMİ[8]

Bir geri-dönüşüm merkezi olarak faaliyetini sürdürmekte olan bir şirket Madde 1, Madde 2, Madde 3 ve Madde 4 olmak üzere dört çeşit katı atık madde toplamaktadır. Toplanan bu maddeler önce ayrı ayrı kimyasal bir işleme tabi tutulmakta (1.İşlem) ve daha sonra bu maddelerin karışımından (2.İşlem) A, B ve C olmak üzere 3 çeşit ürün üretilmektedir. Ürün çeşitleri, karışımda kullanılan maddelerin oranlarına [(üründe kullanılan madde ağırlığı/ürünün ağırlığı)*100] göre farklılık göstermektedir.

Her ürün çeşidi için kullanılan madde oranlarında bir esneklik söz konusu olmakla birlikte , kalite spesifikasyonları bu oranlarla ilgili bazı alt ve üst limitler getirebilmektedir. Örneğin, ürün C'deki madde 1 oranının % 70'den daha fazla olmaması gerekmektedir. Bu spesifikasyonlar, her çeşit ürünün satış fiyatı ve 2. işlemin maliyeti aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Ürün	Madde	Spesifikasyonlar	2.İşlemin maliyeti (10^6 TL/kg)	Satış Fiyatı (10^6 TL /kg)
A	Madde 1 Madde 2 Madde 3 Madde 4	% 30'dan fazla olmamalı % 40'dan az olmamalı % 50'den fazla olmamalı % 20 olmalı	3.00	8.50
B	Madde 1 Madde 2 Madde 4	% 50'den fazla olmamalı % 10'dan az olmamalı %10 olmalı	2.50	7.00
C	Madde 1	% 70'den fazla olmamalı	2.00	5.50

Merkez üretimde kullandığı bu katı atık maddeleri düzenli olarak belirli kaynaklardan, toplayabilmekte ve 1.İşlem'den geçirebilmektedir. Her çeşit maddenin toplanabilen ve 1.İşlem'den geçirebilen haftalık miktarları ve 1.İşlemin maliyetleri Tablo 2'de yer almaktadır:

Madde	Miktar (kg/hafta)	1.İşlem'in maliyeti (10^6 TL/kg)
Madde 1	3000	3.00
Madde 2	2000	6.00
Madde 3	4000	4.00
Madde 4	1000	5.00

[8] HILLIER, F.S. ve LIEBERMAN, G.J.(1995), Introduction to Mathematical Programming, McGraw-Hill Publishing Company, s. 53-57.

Şirketin faaliyetleri çevreci bir örgüt tarafından desteklenmekte ve örgüt, tamamı, 1.İşlem ile ilgili maliyetlerin karşılanmasında kullanılmak üzere haftada 30 $.10^9$ TL'lık bir yardımda bulunmaktadır. Ancak örgüt bu paranın, tabloda verilen haftalık miktarların en az yarısının toplanacak ve 1.İşlem 'den geçirilecek şekilde maddeler arasında dağıtılmasını şart koşmaktadır.

Yukarıda verilen bilgilerden yararlanarak şirketin haftalık karını en çoklayacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

ÖRNEK 13: KARIŞIM PROBLEMİ[9]

Bir rafineride B1, B2 ve B3 olmak üzere üç çeşit benzin üretilmektedir. Bu benzinler üç farklı ham petrolün (P1, P2, P3) karışımından elde edilmektedir. Çeşitlerine göre bir varil benzinin satış fiyatı ve bir varil ham petrolün alış fiyatı aşağıdaki tabloda verildiği gibidir. Şirket bu üç çeşit ham petrolün her birinden günde 5000 varile kadar satın alabilmektedir.

	Satış fiyatı (10^6 TL/varil)		Alış fiyatı (10^6 TL /varil)
B1	70	P1	45
B2	60	P2	35
B3	50	P3	25

Şirketin ürettiği bu benzinler oktan indislerine ve sülfür miktarlarına göre farklılık göstermektedir. B1 üretimi için petrol karışımının oktan indisi en az 10 olmalı ve karışım en fazla % 1 sülfür içermelidir. B2 üretimi için petrol karışımının oktan indisi en az 8 olmalı ve karışım en fazla % 2 sülfür içermelidir. B3 üretimi için petrol karışımının oktan indisi en az 6 olmalı ve karışım en fazla % 1 sülfür içermelidir. Üretimde kullanılan üç çeşit ham petrol için oktan indisleri ve sülfür miktarları ise aşağıdaki tabloda verilmektedir. Bir varil petrolü bir varil benzine dönüştürmenin maliyeti 4 $.10^6$ TL'dır ve şirket günde 14 000 varile kadar benzin üretebilmektedir.

	Oktan indisi	Sülfür miktarı
P1	12	0.5%
P2	6	2.0%
P3	8	3.0%

---

9 WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-Kent Publishing Company, Boston, s.-93.

Şirket müşterilerinin ihtiyaç duyduğu günlük benzin miktarları ise; B1 için 3000 varil, B2 için 2000 varil, B3 için 1000 varildir. Yapılan anlaşmalar gereğince şirket bu taleplerin tamamını karşılamak zorundadır. Bununla birlikte, şirket yöneticileri ürünlerine olan talebi artırabilmek için reklam yapmayı düşünmekte ve belli bir ürün için yapılacak her 1.10^6TL / gün 'lık reklam harcamasının o ürünün günlük talebini 10 varil artıracağını hesaplamaktadır. Örneğin , B2 için yapılacak günlük $20 .10^6$ TL'lık reklam harcamasının B2'nin günlük talebini 20(10)=200 varil artıracağı öngörülmektedir.

Yukarıda verilen bilgilerden yararlanarak şirketin günlük karını en çoklayacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

ÖRNEK 14: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ[10]

Boytaş firmasının üç fabrikası bulunmakta ve her fabrikada üç ayrı boyda makina parçası üretilmektedir. Her makine parçasından elde edilen birim karlar ise , büyük boy için 800 TL., orta boy için 600 Tl. ve küçük boy için 540 TL.'dir. Emek ve makina kapasitelerine göre, 1 nolu fabrikada haftada en fazla 800 birim, 2 nolu fabrikada haftada en fazla 650 birim,3 nolu fabrikada ise haftada en fazla 450 birim ürün üretilebilmektedir.

Her fabrikanın stoklama alanı sınırlı olup, 1 nolu fabrikanın 1400 m^2 , 2 nolu fabrikanın 1250 m^2 , 3 nolu fabrikanın 800 m^2 lik stoklama alanı bulunmaktadır. Büyük boy parçanın haftalık üretiminde 2.5 m^2, orta boy parçanın üretiminde 2 m^2 ve küçük boy parçanın üretiminde 1.5 m^2 yere gerek duyulmaktadır.

Satış bölümünün tahminine göre haftada büyük boy parçadan 800, orta boy parçadan 900 ve küçük boy parçadan 600 birim satılabilmektedir. Öte yandan , yönetim üç fabrikada üretilen malların göreli sayısının emek ve makine kapasitelerine denk oranda olmasını istemektedir.

Yönetim karını en çoklayacak şekilde üç fabrikada her bir boydan ne kadar birimlik ürün üretilmesi gerektiğini saptamak istemektedir.

Yukarıda verilen bilgilerden yararlanarak problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

[10] ÖZTÜRK, A., (1997), Yöneylem Araştırması, Ekin Kitabevi, Bursa, s.33-35.

3. DP MODELLERİNİN ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

3.1. DP Modellerinin Grafik Yöntem ile Çözümü ve Duyarlılık Analizleri

ÖRNEK 1: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ[11]

Küçük bir atölyede masa ve sandalye olmak üzere iki çeşit ürün üretilmektedir. Masa ve sandalyelerin her biri önce marangozhanede daha sonra boyama ve cilalama bölümünde işlem görmektedir. Bir adet masa üretmek için gerekli olan işçilik süresi marangozhanede 4 saat, boyama ve cilalama bölümünde 2 saattir. Bir adet sandalye üretimi için gerekli olan bu süreler sırasıyla 3 saat ve 1 saattir. Atölyenin haftalık işgücü kapasitesi marangozhane için en fazla 240 saat, boyama ve cilalama bölümü için ise en fazla 100 saattir. Bir adet masadan elde edilen kar 7.10^7 TL. ve bir adet sandalyeden elde edilen kar $5\ 10^7$ TL. dir. Atölyenin haftalık karını maksimum yapan doğrusal programlama modelini kurunuz ve grafik yöntemden yararlanarak optimal çözümü bulunuz.

ÖRNEK 2: DİYET PROBLEMİ[12]

Bir çiftlikte yetiştirilen tavuklar için 2 farklı yem satın alınmakta ve bu iki yem karıştırılarak tavuklar beslenmektedir. Satın alınan yemler içerdiği besin maddelerine ve miktarlarına bağlı olarak farklılık göstermektedir. Özellikle 3 çeşit besin maddesi (A,B,C) tavukların beslenmesinde önem taşımaktadır. Tavukların her birinin ayda en az 5400 gr A besini, 2880 gr B besini ve 90 gr c besini alması gerekmektedir. 1. Tip yemin 1 kg'ında 300 gr A besini 240 gr b besini ve 30 gr C besini bulunmaktadır. 2. tip yemin 1 kg'ında 600 gr A besini ve 180 gr B besini bulunmaktadır. 2. tip yem C besini içermemektedir. 1. tip yemin kg'ı $4.\ 10^6$, 2.tip yemin kg'ı ise 6.10^6 TL. den satılmaktadır. Beslenme maliyetini minimum yapacak doğrusal programlama modelini kurunuz ve grafik yöntemden yararlanarak optimal çözümü belirleyiniz.

ÖRNEK 3: ÜRETİM PLANLAMA PROBLEMİ[13]

---

[11] RENDER, B. & STAIR R. M. (1997), Quantitive Analysis for Management, Allyn and Bacon, USA, pp.341.
[12] RENDER, B. & STAIR R. M. (1997), Quantitive Analysis for Management, Allyn and Bacon, USA.
[13] TAHA , H., (1992), Operations Research An Introduction,Fifth Edition, Macmillan Publishing Com., Singapore, pp.16-17.

Bir boya fabrikasında iç ve dış yüzeylerde kullanılmak üzere iki tip boya üretilmektedir. Bu boyaların üretiminde A ve B olmak üzere 2 çeşit hammaddeden yararlanılmaktadır. 1 ton dış yüzey boyası elde etmek için kullanılan Hammadde A miktarı 1 ton, Hammadde B miktarı ise 2 tondur. 1 Ton iç yüzey boyası elde etmek için ise 2 ton Hammadde A 'ya ve 1 ton Hammadde B'ye ihtiyaç duyulmaktadır. Hammadde A'dan günde en fazla 6 ton, Hammadde B' den ise günde en fazla 8 ton temin edilebilmektedir.

Diğer yandan yapılan pazar araştırmaları, iç yüzey boyasının günlük talebinin en fazla dış yüzey boyasının günlük talebinden 1 ton daha fazla olduğunu göstermektedir. Ayrıca araştırmalar iç yüzey boya talebinin günde en fazla 2 ton olduğunu ortaya koymaktadır. 1 ton dış yüzey boyasından elde dilen kar 3.10^8 TL ve 1 ton iç yüzey boyasından elde dilen kar 2.10^8 TL'dir. Fabrikanın günlük karını en çoklayan doğrusal programlama modelini kurunuz ve grafik yöntemden yararlanarak optimal çözümü belirleyiniz.

3.2. DP Modellerinin Simpleks Yöntem ile Çözümü

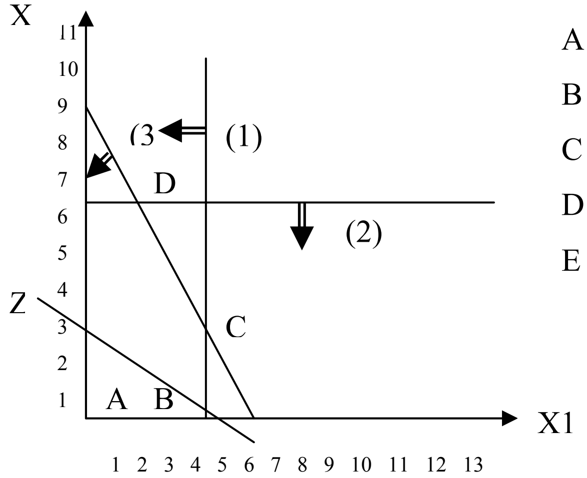
3.2.1. Primal Simpleks Yöntem

Grafik çözüm yönteminde gördüğümüz gibi optimal çözüm noktası, her zaman uygun çözüm alanının bir köşe noktası ya da uç noktası ile ilişkiliydi. Simpleks yöntem esas olarak işte bu temel fikre dayanmaktadır. Bir başka deyişle simpleks yöntem cebrik bir yöntem olmasına rağmen dayandığı temel fikir geometriktir. Bu nedenle simpleks yöntem grafik yöntem ile birlikte incelenecektir. Bunun için model kurma dersinde incelediğimiz cam fabrikası örneğini ele alacağız.

ÖRNEK: Cam Fabrikası örneğini ele alalım.

ÇÖZÜM: Simpleks yöntem evre evre grafik çözüm yöntemi ile birlikte açıklanacaktır.

$$Z_{max.} = 3x_1 + 5x_2$$
$$x_1 \le 4$$
$$2x_2 \le 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \le 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



A (0, 0)
B (4, 0)
C (4, 3)
D (2, 6)
E (0, 6)

Örneğimizde uygun çözüm alanı ABCDE'dir. Simpleks yöntem, uygun çözüm alanı içinde uygun bir köşe noktasından (orijinden) başlayarak sistematik olarak bir sonraki uygun köşe noktasına, bu noktadan yine bir sonraki uygun köşe noktasına ilerleyen ve optimal çözüm bileşenine ulaşıldığında sonuçlanan tekrarlamalı bir algoritmadır.

Simpleks algoritması orijin --A (0,0)-- ile çözüme başlar ve bu nokta başlangıç çözüm noktası olarak ifade edilir. Algoritma daha sonra bitişik komşu köşe noktaya doğru ilerler. Algoritmanın ilerlediği nokta, B ya da E noktası olabilir. Özel olarak hangi noktanın seçileceği kararı, amaç fonksiyonundaki karar değişkenlerinin katsayılarına bağlıdır. x_2'nin amaç fonksiyonu katsayısı, x_1'in amaç fonksiyonu katsayısından (5>3) daha büyük olduğu için çözüm x_2'nin artarak ilerlediği köşe noktası olan E noktasına doğru ilerler. E noktasında, amaç fonksiyonunun değerini artıracak diğer bir komşu köşe noktası olup olmadığını belirlemek amacıyla süreç tekrarlanır. Benzer şekilde amaç fonksiyonunun değerini artıracak bir sonraki komşu köşe noktasına ilerlenir. Bu nokta D noktasıdır. D noktası optimal çözüm bileşenini verdiği için algoritma durur.

Simpleks yöntemde bir sonraki köşe noktasının seçimini belirleyen iki tane kural vardır. Bunlar:

1) Bir sonraki köşe noktası mevcut köşe noktasına komşu olmalıdır. Örnek olarak çözüm, A noktasından direkt olarak D noktasına ilerleyemez. Bu nedenle uygun çözüm alanındaki komşu köşe noktalarının sırayla izlenmesi gerekir.
2) Çözüm hiçbir zaman bir önceki çözüm noktasına doğru geri yönde ilerleyemez.

Simpleks algoritmasında aşağıdaki evreler izlenir:

Evre 1: DP Problemi Standart Formda Yazılır

Probleme gölge, artık ve yapay değişkenlerin eklenmesi ile eşitsizlik şeklindeki tüm kısıt denkleri (=) şeklinde ifade edilir.

$$Z_{maks.} = 3x_1 + 5x_2 + OS_1 + OS_2 + OS_3$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad + S_1 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\
2x_2 \qquad\quad + S_2 \qquad\quad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 \qquad\qquad\quad + S_3 &= 18 \\
x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \qquad &\geq 0
\end{aligned}$$

Evre 2: Başlangıç Simpleks Tablo Hazırlanır

Bu evrede problem bir tablo şeklinde özetlenir. Bu tablo Evre 1'deki standart DP problemini matris halinde ifade etmektedir ve aynı zamanda başlangıç çözümü temsil etmektedir. Bu tabloya başlangıç simpleks tablo adı verilmektedir. Tablonun bölümleri aşağıda açıklanmıştır:

	c_j **(1)**	3	5	0	0	0	
c_j **(4)**	**(2)**x_j / x_i**(3)**	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	**(6)** Ç.S.
0	S_1	1 **(5)**	0	1	0	0	4
0	S_2	0	[2]	0	1	0	12
0	S_3	3	2	0	0	1	18
	Z_j **(7)**	0	0	0	0	0	0
	c_j-Z_j **(8)**	3	5	0	0	0	

(1) c_j Amaç Satırı: Bu satırdaki sayılar, değişkenlerin (karar, gölge, artık ve yapay) amaç fonksiyonu katsayıları olan c_j değerlerinden oluşmaktadır.

(2) x_j Değişkenler Satırı: DP modelinde bulunan bütün değişkenlerin (karar, gölge, artık ve yapay) yazılması ile edilen satırdır.

(3) x_i Temel Değişkenler Sütunu: Bu sütun çözümde yer alan değişkenleri gösterir. Bu nedenle bu sütundaki değişkenlere "temel değişkenler" ya da "çözüme giren değişkenler" adı verilir. Başlangıç simpleks tabloda temel değişkenler kısıt denklemlerinin yönüne bağlı olarak gölge ya da yapay değişkenlerden oluşmaktadır.

Başlangıç tabloda,

--- (≤) şeklindeki bir kısıt denkleminin ifade edildiği satırın temel değişkenler sütununda gölge değişkenler yer alır.

--- (=) ya da (≥) şeklindeki bir kısıt denkleminin ifade edildiği satırın temel değişkenler sütununda yapay değişkenler yer alır.

Başlangıç tabloda yer alan gölge ve yapay değişkenler -temel değişkenler- tabloda birim matrisi oluşturmaktadırlar.

(4) c_j Amaç Sütunu: Temel değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarından (c_j) oluşan sütundur.

(5) Teknolojik Katsayılar Matrisi: Kısıt denklemlerinde yer alan teknolojik katsayılardan oluşan matristir. m tane kısıt denklemli n tane değişkenli bir DP modelinde teknolojik katsayılar matrisinin boyutu mxn'dir. Örneğimizde matrisin boyutu 3x5'dir.

(6) Çözüm Sütunu: Bu sütun temel değişkenlerin çözüm değerlerini verir. Bu sütundaki değerlerin ilk tablodan en iyi çözümü veren son tabloya kadar daima pozitif ya da "0" olması gerekir. Sütunda (-) bir değerin olması olanaksız çözümü ya da hatalı işlemi gösterir.

(7) Z_j Satırı: Z_j satırı, teknolojik katsayılar matrisindeki sütunlar ile amaç sütunundaki bilgilerden yararlanılarak elde edilir. Her sütun için ayrı ayrı hesaplanacak olan Z_j değerleri, o sütundaki teknolojik katsayılar ile amaç sütunundaki karşıt sayıların çarpımlarının toplamına eşittir.

Örnek:

$Z_1 = 0x1 + 0x0 + 0x3 = 0$

$Z_2 = 0x0 + 0x2 + 0x2 = 0$

**

**

$Z_{çs} = 0x4 + 0x12 + 0x18 = 0$ $\boxed{Z=0}$

(8) c_j-Z_j Satırı: Bu satır her sütun için hesaplanan Z_j değerlerinin amaç satırındaki o sütuna ait sayıdan çıkarılmasıyla elde edilir.

Örnek:

$c_1 - Z_1 = 3 - 0 = 3$

$c_2 - Z_2 = 5 - 0 = 5$

c_j-Z_j değerleri amacınızdaki net artışı gösterirler.

Bir birim 1 no'lu ürün üretirsek amaç fonksiyonunun değeri 3 birim artar.

Bir birim 2 no'lu ürün üretirsek amaç fonksiyonunun değeri 5 birim artar.

Evre 3: Optimallik Testi Yapılır

Bu evrede çözümün optimal olup olmadığı test edilir. Bir başka deyişle, karar değişkenlerinden herhangi bir tanesinin çözüme girmesi ile amaç fonksiyonunun değerinin artıp artmayacağı test edilir. Çözümün optimal olması için maksimizasyon amaçlı problemlerde c_j-Z_j değerlerinin negatif ya da sıfır, minimizasyon amaçlı problemlerde ise c_j-Z_j değerlerinin pozitif ya da sıfır olması gerekir. (Nedeni: c_j-Z_j'ler maksimizasyon amaçlı problemlerde net katkıları gösterirler. Maksimizasyon amaçlı problemlerde bu değerin (-) işaretli olması artık toplam katkının arttırılamayacağını, azaltılacağını gösterir. Minimizasyon amaçlı problemlerde tersi geçirlidir).

Çözüm optimal ise simpleks algoritması durdurulur ve optimal çözüm belirlenir. Çözüm optimal değilse Evre 4'e ilerlenir.

Evre 4: Çözüme Giren Değişken Seçilir

Maksimizasyon amaçlı problemlerde çözüme giren değişken, mevcut temel olmayan değişkenler arasından amaç fonksiyonu değerini en fazla artıracak değişken olarak belirlenir. Bir başka deyişle, en yüksek c_j-Z_j değerini veren x_j değişkeni öncelikle çözüme girer. Yukarıdaki örnekte x_2 değişkeni bu özelliğe sahiptir. Bu durumda en yüksek c_j-Z_j değerine sahip sütuna "anahtar sütun" adı verilir ve bu sütunda yer alan değişkene "çözüme giren değişken" adı verilir. O halde maksimizasyon amaçlı problemlerde c_j-Z_j satırındaki en büyük değere, minimizasyon amaçlı problemlerde ise c_j-Z_j satırındaki mutlak değerce en büyük (-) işaretli değere karşı gelen değişken, çözüme giren değişken olarak seçilir. Örneğimizde, x_2 çözüme giren değişken olarak seçilir.

Evre 5: Çözümden Çıkan Değişken Seçilir

Çözümden çıkarılacak değişkeni bulmak için çözüm sütunundaki değerler anahtar sütundaki karşıt sayılara bölünür. Bölme işlemi sonunda bulunan oranlar arasından en küçük negatif olmayan orana ait olan satır değişkeni "çözümden çıkan değişken" olarak belirlenir. Örneğimizde S_2 çözümden çıkan değişken olarak seçilir. Minimum oranlı değer aynı zamanda uygun çözüm alanı içindeki en dış noktadır. Bu oranlardan paydaya gelen değerler arasında "0" ya da negatif değerli oran dikkate alınmaz. Bu satıra "anahtar satır" denir. Anahtar satır ile anahtar sütunun keşistiği yerdeki öğeye de "anahtar eleman" adı verilir.

Evre 6: Yeni Katsayılar Hesaplanır ve Yeni Simpleks Tablo Oluşturulur

Yeni katsayılar hesaplanarak yeni simpleks tablo oluşturulur. Daha sonra Evre 3'e geri dönülür.

a) Yeni Temel Değişken Satırının (T_s)Hesaplanması

Anahtar satırdaki bütün elemanlar anahtar sayıya ayrı ayrı bölünür. Bu işlem sonunda elde edilen değişkenler ikinci tabloda yeni temel değişken satırına (x_2) yazılır.

$$\text{Yeni Temel Değişken Satırı} = \frac{\text{Anahtar satır}}{\text{Anahtar Sayı}} \Rightarrow \frac{(0 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 12)}{(2)} = (0 \quad 1 \quad 0 \quad ½ \quad 0 \quad 6)$$

b) Diğer Temel Değişken Satırlarının Hesaplanması

$$Y_s = E_s - (T_s x P)$$

Y_s- Yeni Satır

E_s- Eski Satır

T_s- Yeni Temel Değişken Satırı

P-(Eski satırın anahtar sütun ile kesiştiği yerdeki öge)

$$\begin{array}{rl} & (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 4) \\ - \; 0. & (0 \quad 1 \quad 0 \quad ½ \quad 0 \quad 6) \\ \hline & (1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 4) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & (3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 18) \\ - \; 2\,. & (0 \quad 1 \quad 0 \quad ½ \quad 0 \quad 6) \\ \hline & (3 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \quad 6) \end{array}$$

Elde edilen bu değerler ikinci tabloda mevcut temel değişkenler satırına (S_1 ve S_2 satırlarına) yazılır. Son olarak Z_j ve c_j-Z_j satırlarının yeni değerleri Evre 2'de anlatıldığı gibi hesaplanarak yeni simpleks tablodaki yerlerine yazılır.

	3 x_1	5 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	Ç.S.
0 S_1	1	0	1	0	0	4
5 x_2	0	1	0	1/2	0	6
0 S_3	3	0	0	-1	1	6
Z_j	0	5	0	5/2	0	30
c_j-Z_j	3	0	0	-5/2	0	

Evre 3'e geri dönülür. Optimallik testi yapılır. c_j-Z_j satırında hala (+) değerli öge vardır. Süreç yinelenir.

Evre 3: Optimallik Testi Yapılır; çözüm optimal değildir.
Evre 4: Çözüme Giren Değişken Seçilir; x_1 değişkeni.
Evre 5: Çözümden Çıkan Değişken Seçilir; S_3 değişkeni.
Evre 6: Yeni Katsayılar Hesaplanır ve Yeni Simpleks Tablo Oluşturulur;

	3 x_1	5 x_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	Ç.S.
0 S_1	0	0	1	1/3	-1/3	2
5 x_2	0	1	0	1/2	0	6
3 x_1	1	0	0	-1/3	1/3	2
Z_j	3	5	0	3/2	1	36
c_j-Z_j	0	0	0	-3/2	-1	

Optimal çözüme ulaşıldığı için algoritma durur. Problem çözülmüştür.

KAYNAKLAR:

HILLIER, F.S. ve LIEBERMAN, G.J. (1995), Introduction to Mathematical Programming, McGraw-Hill Publishing Company.

TAHA, H. (1992), Operations Research, Fifth Edition, MacMillan International Company, New York.

WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston.

3.2.2. Büyük M Yöntemi

Bir DP probleminde (≥) ve / veya (=) şeklinde kısıt denklem(ler)i varsa bu problem "Büyük M" yöntemi ile çözümlenir. Bu yöntemin temel fikri simpleks yöntem ile aynıdır. Bir başka deyişle aynı çözüm evreleri izlenir. Ancak Büyük M yönteminde kısıt denklemlerinin yönüne bağlı olarak yapay değişkenlerin probleme eklenmesi ile "M" katsayıları, başlangıç tabloda ve ilerleyen ilk tablolarda yer alırlar. Bu yöntemdeki temel amaç mümkün olduğu kadar ilk evrelerde M katsayılı yapay değişkenleri çözümden çıkarmaktır. Büyük M yöntemi aşağıdaki örnek ile irdelenecektir.

i. Minimizasyon Amaçlı Problemlerde M Yönteminin Uygulanması

ÖRNEK: BISKO Bisküvi Fabrikası örneğini ele alalım.

$$Z_{min.} = 4x_1 + 5x_2$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 27 \\ 5x_1 + 5x_2 &= 60 \\ 6x_1 + 4x_2 &\geq 60 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Evre 1: DP Problemi Standart Formda Yazılır

$$Z_{min.} = 4x_1 + 5x_2 + 0S_1 + MA_1 + MA_2 + OE_1$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + S_1 &= 27 \\ 5x_1 + 5x_2 + A_1 &= 60 \\ 6x_1 + 4x_2 + A_2 - E_1 &= 60 \\ x_1, x_2, S_1, A_1, A_2, E_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

M > 0 ve çok büyük bir sayı olmak üzere, maksimizasyon amaçlı problemlerde yapay değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı (-M) olarak alınır. Minimizasyon amaçlı problemlerde ise bu katsayı (M) olarak alınır. Böylece bir ceza puanı atanarak yapay değişkenin ilk evrelerde problemden çıkartılması amaçlanır. Çünkü yapay değişkenlerin hiçbir ekonomik anlamı yoktur. Başlangıç simpleks tabloda birim matrisi oluşturmak amacıyla amaç "=" ve "≥" şeklindeki kısıt denklemlerine eklenirler.

Evre 2: Başlangıç Simpleks Tablo Hazırlanır

	4 x_1	5 x_2	0 S_1	M A_1	M A_2	0 E_1	Ç.S.
$0S_1$	3	1	1	0	0	0	27
MA_1	5	5	0	1	0	0	60
MA_2	6	4	0	0	1	-1	60
Z_j	11M	9M	0	M	M	-M	120M
c_j-Z_j	(4-11M)	(5-9M)	0	0	0	M	

Evre 3: Optimallik Testi Yapılır; çözüm optimal değildir.
Evre 4: Çözüme Giren Değişken Seçilir; x_1 değişkeni.
Evre 5: Çözümden Çıkan Değişken Seçilir; S_1 değişkeni.

Evre 6: Yeni Katsayılar Hesaplanır ve Yeni Simpleks Tablo Oluşturulur

	4 x_1	5 x_2	0 S_1	M A_1	M A_2	0 E_1	Ç.S.
$4x_1$	1	1/3	1/3	0	0	0	9
MA_1	0	10/3	-5/3	1	0	0	15
MA_2	0	2	-2	0	1	-1	6
Z_j	4	(4/3+16/3 M)	(4/3-11/3 M)	M	M	-M	36+21M
c_j-Z_j	0	(11/3-16/3 M)	(-4/3+11/3 M)	0	0	M	
$4x_1$	1	0	2/3	0	-1/6	1/6	8
MA_1	0	0	5/3	1	-5/3	5/3	5
$5x_2$	0	1	-1	0	1/2	-1/2	3
Z_j	4	5	(-7/3+5/3 M)	M	(11/6-5/3M)	(-11/6+5/3 M)	47+5M
c_j-Z_j	0	0	(7/3-5/3 M)	0	·(-11/6+8/3 M)	(11/6-5/3 M)	

	4 x_1	5 x_2	0 S_1	M A_1	M A_2	0 E_1	Ç.S.
$4x_1$	1	0	1/2	-1/10	0	0	7 ½
OE_1	0	0	1	3/5	-1	1	3
$5x_2$	0	1	-1/2	3/10	0	0	4 ½
Z_j	4	5	-1/2	11/10	0	0	52 ½
c_j-Z_j	0	0	1/2	(M-11/10)	M	0	

İkinci simpleks tablo oluşturulduktan sona süreç yinelenir, üçüncü ve dördüncü simpleks tablo oluşturularak optimal çözüm elde edilir.

ii. Maksimizasyon Amaçlı Problemlerde M Yönteminin Uygulanması

ÖRNEK: BISKO Bisküvi Fabrikası örneğinde amaç fonksiyonunun maksimizasyon amaçlı olduğunu varsayarak problemi Büyük M yöntemi ile çözümleyin. (ÖDEV)

Yukarıdaki evreler izlenerek problem çözümlenir.

$$Z_{maks.} = 4x_1 + 5x_2 + 0S_1 - MA_1 - MA_2 + OE_1$$

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 + S_1 &= 27 \\
5x_1 + 5x_2 + A_1 &= 60 \\
6x_1 + 4x_2 + A_2 - E_1 &= 60 \\
x_1, x_2, S_1, A_1, A_2, E_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

	4 x_1	5 x_2	0 S_1	-M A_1	-M A_2	0 E_1	Ç.S.
$0S_1$	3	1	1	0	0	0	27
$-MA_1$	5	5	0	1	0	0	60
$-MA_2$	6	4	0	0	1	-1	60
Z_j	-11M	-9M	0	-M	-M	M	120M
c_j-Z_j	(4+11M)	(5+9M)	0	0	0	-M	

Not: Diğer tablolar ödev olarak yapılıp bir sonraki hafta teslim edilecektir.

KAYNAKLAR:

HILLIER, F.S. ve LIEBERMAN, G.J. (1995), Introduction to Mathematical Programming, McGraw-Hill Publishing Company.

TAHA, H. (1992), Operations Research, Fifth Edition, MacMillan International Company, New York.

WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston.

3.2.3. Simpleks Yöntem Uygulamalarında Karşılaşılan Özel Durumlar

Bu bölümde simpleks yöntem uygulamalarında ortaya çıkabilecek bazı özel durumlar incelenecektir. Böylece, gerçek hayatta bu gibi durumlarla karşılaşıldığında ne anlama geldiklerini yorumlayabilmek amaçlanmaktadır.

1. Çoklu Çözüm (Alternatif Çözüm, Seçenekli Optimal Çözümler)
2. Sınırlandırılmamış Çözüm
3. Sınırlandırılmamış Çözüm Alanı, Sınırlandırılmış Amaç Değeri
4. Uygun Çözüm Bulunmama
5. Bozulma (Yozlaşma)

1. **Çoklu çözüm**

$$Z_{maks.} = 8X_1 + 5X_2$$
$$8/5X_1 + X_2 \leq 8$$
$$X_1 + 5/4X_2 \leq 6$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Modelin standart formu:

$$Z_{maks.} = 8X_1 + 5X_2 + 0S_1 + 0\,S_2$$
$$8/5X_1 + X_2 + S_1 = 8$$
$$X_1 + 5/4X_2 + S_2 = 6$$
$$X_1 , X_2 , S_1, S_2 \geq 0$$

Tablo 1. Başlangıç Simpleks Tablo

	8	5	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	
0 S_1	8/5	1	1	0	8
0 S_2	1	5/4	0	1	6
Z_j	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	8	5	0	0	

Tablo 2. Yineleme1

	8 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	
8 X_1	1	5/8	5/8	0	5
0 S_2	0	5/8	-5/8	1	1
Z_j	8	5	5	0	40
C_j-Z_j	0	0	-5	0	

Tablo 3. Yineleme2

	8 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	
8 X_1	1	0	5/4	-1	4
5 X_2	0	1	-1	8/5	8/5
Z_j	8	5	5	0	40
C_j-Z_j	0	0	-5	0	

2. Sınırlandırılmamış Çözüm

Sınırlandırılmamış Çözüm Alanı, Sınırlandırılmamış Amaç Değeri

$$Z_{maks.} = X_1 + 2X_2$$

$$X_1 + X_2 \geq 1$$

$$X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Modelin standart formu:

$$Z_{maks.} = X_1 + 2X_2 + 0E_1 - MA_1 + 0\,S_1$$

$$X_1 + X_2 - E_1 + A_1 = 1$$

$$X_2 + S_1 = 4$$

$$X_1 , X_2 , E_1, A_1 , S_1 \geq 0$$

Tablo 1. Başlangıç Simpleks Tablo

	1 X_1	2 X_2	0 E_1	-M A_1	0 S_1	
-M A_1	1	1	-1	1	0	1
0 S_1	0	1	0	0	1	4
Z_j	-M	-M	M	-M	0	-M
C_j-Z_j	1+M	2+M	-M	0	0	

Tabló 2. Yineleme1

	1	2	0	-M	0	
	X_1	X_2	E_1	A_1	S_1	
2 X_2	1	1	-1	1	0	1
0 S_1	-1	0	1	-1	1	3
Z_j	2	2	-2	2	0	2
C_j-Z_j	-1	0	2	-M-2	0	

Tablo 3. Yineleme2

	1	2	0	-M	0	
	X_1	X_2	E_1	A_1	S_1	
2 X_2	0	1	0	0	1	4
0 E_1	-1	0	1	-1	1	3
Z_j	0	2	0	0	2	8
C_j-Z_j	1	0	0	-M	-2	

3. Sınırlandırılmamış Çözüm Alanı, Sınırlandırılmış Amaç Değeri

$$Z_{maks.} = 6X_1 - 2X_2$$

$$2X_1 - X_2 \leq 2$$

$$X_1 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

Modelin standart formu:

$$Z_{maks.} = 6X_1 - X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$2X_1 - X_2 + S_1 = 2$$

$$X_1 + S_2 = 4$$

$$X_1 , X_2 , S_1, S_2 \geq 0$$

Tablo 1. Başlangıç Simpleks Tablo

	6	-2	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	
0 S_1	2	-1	1	0	2
0 S_2	1	0	0	1	4
Z_j	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	6	-2	0	0	

Tablo 2. Yineleme1

	6 X_1	-2 X_2	0 S_1	0 S_2	
6 X_1	1	-1/2	1/2	0	1
0 S_2	0	1/2	-1/2	1	3
Z_j	6	-3	3	0	6
C_j-Z_j	0	1	-3	0	

Tablo 3. Yineleme2

	6 X_1	-2 X_2	0 S_1	0 S_2	
6 X_1	1	0	0	1	4
-2 X_2	0	1	-1	2	6
Z_j	6	-2	2	2	12
C_j-Z_j	0	0	-2	-2	

4. Uygun Çözüm Bulunmama

$Z_{maks.}= \quad 3X_1 + 2X_2$

$2X_1 + X_2 \leq 2$

$3X_1 + 4X_2 \geq 12$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Modelin standart formu:

$Z_{maks.}= 3X_1 + 2X_2 + 0S_1 + 0E_1 - MA_1$

$2X_1 + X_2 + S_1 = 2$

$3X_1 + 4X_2 - E_1 + A_1 = 12$

$X_1 , X_2 , E_1, A_1 , S_1 \geq 0$

Tablo 1. Başlangıç Simpleks Tablo

	3 X_1	2 X_2	0 E_1	0 S_1	-M A_1	
0 S_1	2	1	0	1	0	2
-M A_1	3	4	-1	0	1	12
Z_j	-3M	-4M	M	0	-M	-12M
C_j-Z_j	3+3M	2+4M	-M	0	0	

Tablo 2. Yineleme1

	3	2	0	0	-M	
	X_1	X_2	E_1	S_1	A_1	
2 X_2	2	1	0	1	0	2
-M A_1	-5	0	-1	-4	1	4
Z_j	4+5M	2	M	2+4M	-M	4-4M
C_j-Z_j	-1-5M	0	-M	-2-4M	0	

5. Bozulma, Yozlaşma

$Z_{maks.} = 3X_1 + 9X_2$

$X_1 + 4X_2 \leq 8$

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Modelin standart formu:

$Z_{maks.} = 3X_1 + \ 9X_2 + 0S_1 + 0\ S_2$

$X_1 + \ 4\ X_2 + S_1 = 8$

$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$

$X_1 , X_2 , S_1, S_2 \geq 0$

Tablo 1. Başlangıç Simpleks Tablo

	3	9	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	
0 S_1	1	4	1	0	8
0 S_2	1	2	0	1	4
Z_j	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	3	9	0	0	

Tablo 2. Yineleme1

	3	9	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	
9 X_2	1/4	1	1/4	0	2
0 S_2	1/2	0	-1/2	1	0
Z_j	9/4	9	9/4	0	18
C_j-Z_j	3/4	0	-9/4	0	

Tablo 3. Yineleme2

	3 X_1	9 X_2	0 S_1	0 S_2	
9 X_2	0	1	1/2	-1/2	2
3 X_1	1	0	-1	2	0
Z_j	3	9	3/2	3/2	18
C_j-Z_j	0	0	-3/2	-3/2	

KAYNAKLAR

TAHA, H. (1997), Operations Research, Sixth Edition, Prentice Hall.

WINSTON, W.L. (1994), Operations Research, Second Edition, PWS-KENT Publishing Company, Boston.

TAHA, H. (2000), Yöneylem Araştırması, 6. Basımdan Çeviri, (Çeviren ve Uyarlayanlar: Ş. Alp Baray ve Şakir Esnaf), Literatür Yayınları:43, İstanbul.

3.2.4. Simpleks Yöntemde Duyarlılık Analizleri

Duyarlılık analizinde doğrusal programlama modelinin parametrelerindeki değişikliklerinin optimal çözüm üzerindeki etkileri araştırılmaktadır. Herhangi bir parametredeki değişimin optimal çözüme etkisi diğer tüm parametrelerin değerleri sabit tutularak incelenir. Modelde kullanılan parametrelere (c_j, b_i,a_{ij}) bağlı olarak duyarlılık analizinde

a)Sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmelerin

b)Amaç fonksiyonu katsayılarındaki değişmelerin

c)Teknolojik katsayılarda meydana gelen değişmelerin

optimal çözüme olan etkileri problemi yeniden çözmeksizin incelenebilir.

a)Sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmeler

Bir doğrusal programlama modelinde yer alan kısıtların sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmeler optimal çözümdeki çözüm sütunu değerlerini etkiler. Optimal tablodaki çözüm sütunu değerleri negatif değerli olmadığı sürece, mevcut çözüm uygun ve optimal bir çözüm olarak kalır. Dolayısıyla, sağ taraf sabitlerindeki değişmelerin etkileri, çözümün uygun ve optimal bir çözüm olarak kaldığı, değişim aralığı belirlenerek

incelenebilir. Belirlenen aralık ilgili kaynağın gölge fiyatı değişmeksizin ne kadar artırılıp azaltılabileceğini de gösterir.

[14]Aşağıdaki problem bu amaçla ele alınmıştır:

Örnek 2. $Z_{maks.} = 4X_1 + 5X_2$

$X_1 + 2X_2 \leq 10$ (işgücü, saat/gün)
$6X_1 + 6X_2 \leq 36$ (Hammadde1, kg/gün)
$8X_1 + 4X_2 \leq 40$ (Hammadde2, kg/gün)
$X_1, X_2 \geq 0$

Tablo 4. Örnek 2 'ye ait Başlangıç Simpleks Tablosu

	4	5	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	1	2	1	0	0	10
0 S_2	6	6	0	1	0	36
0 S_3	8	4	0	0	1	40
Z_j	0	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	4	5	0	0	0	

Tablo 5. Örnek 2 'ye ait Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	4	5	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
5 X_2	0	1	1	-1/6	0	4
4 X_1	1	0	-1	1/3	0	2
0 S_3	0	0	4	-2	1	8
Z_j	4	5	1	1/2	0	28
C_j-Z_j	0	0	-1	-1/2	0	

İşgücü kapasitesindeki değişimler

$Z_{maks.} = 4X_1 + 5X_2$

$X_1 + 2X_2 \leq 10 + \Delta$ (işgücü, saat/gün)
$6X_1 + 6X_2 \leq 36$ (Hammadde1, kg/gün)
$8X_1 + 4X_2 \leq 40$ (Hammadde2, kg/gün)

$X_1, X_2 \geq 0$

---

[2] LEE, S.M., MOORE L.J. ve TAYLOR, B.W., (1981),Management Science, Wm.C.Brown Company,U.S.A..

Tablo 6. Örnek 2'ye ait Başlangıç Simpleks Tablosu (b_1=10+Δ)

	4 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3		
0 S_1	1	2	1	0	0	10	+ 1Δ
0 S_2	6	6	0	1	0	36	+ 0Δ
0 S_3	8	4	0	0	1	40	+ 0Δ
Z_j	0	0	0	0	0		0
C_j-Z_j	4	5	0	0	0		

Tablo 7. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b_1=10+Δ)

	4 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3		
5 X_2	0	1	1	-1/6	0	4	+ 1Δ
4 X_1	1	0	-1	1/3	0	2	- 1Δ
0 S_3	0	0	4	-2	1	8	+ 4Δ
Z_j	4	5	1	1/2	0	28+Δ	
C_j-Z_j	0	0	-1	-1/2	0		

Farklı b_1 Değerleri için Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks ÇözümTabloları

Tablo 8. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu (b_1=12)

	4 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	
5 X_2	0	1	1	-1/6	0	6
4 X_1	1	0	-1	1/3	0	0
0 S_3	0	0	4	-2	1	16
Z_j	4	5	1	1/2	0	30
C_j-Z_j	0	0	-1	-1/2	0	

Tablo 9. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks ÇözümTablosu (b_1=9)

	4 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	0 S_3	
5 X_2	0	1	1	-1/6	0	3
4 X_1	1	0	-1	1/3	0	3
0 S_3	0	0	4	-2	1	4
Z_j	4	5	1	1/2	0	27
C_j-Z_j	0	0	-1	-1/2	0	

Tablo 10. Örnek 2'ye ait Optimal Simpleks ÇözümTablosu(b_1=11)

	4	5	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
5 X_2	0	1	1	-1/6	0	5
4 X_1	1	0	-1	1/3	0	1
0 S_3	0	0	4	-2	1	12
Z_j	4	5	1	1/2	0	29
C_j-Z_j	0	0	-1	-1/2	0	

b)Amaç fonksiyonu katsayılarındaki değişmeler

Bir doğrusal programlama modelinin amaç fonksiyonunda yer alan katsayılarda meydana gelen değişmeler optimal çözümdeki C_j-Z_j satırındaki değerleri etkiler. Optimal tablodaki C_j-Z_j satırındaki değerler maksimizasyon amaçlı problemde pozitif, minimizasyon amaçlı problemde negatif değerler olmadığı sürece, mevcut çözüm optimal bir çözüm olarak kalır. Amaç fonksiyonu katsayılarında meydana gelen değişmelerin etkileri, mevcut çözümün optimal bir çözüm olarak kaldığı, değişim aralığı belirlenerek incelenebilir. Amaç fonksiyonu katsayılarındaki değişmeler, karar değişkeninin optimal tabloda temel dışı değişken ve temel değişken olma durumuna göre incelenebilir.

[15]Aşağıdaki problem bu amaçla ele alınmıştır:

Örnek 3

$Z_{maks.}$= $6X_1 + 4X_2$

$2X_1 + 6X_2 \leq 12$ (işgücü, saat/gün)

$4X_1 + 4X_2 \leq 16$ (Hammadde, kg/gün)

$X_1 , X_2 \geq 0$

[15] LEE, S.M., MOORE L.J. ve TAYLOR, B.W., (1981), Management Science, Wm.C.Brown Company, U.S.A.

Tablo 11. Örnek 3’e ait Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	6 X_1	4 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
6 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	6	6	0	3/2	24
C_j-Z_j	0	-2	0	-3/2	

i. Temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısındaki değişmeler

Bir temel dışı değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişim aralığı, değişkenin optimal simpleks tablodaki C_j-Z_j satırındaki değerinden yararlanılarak belirlenebilir. Bu değere Δ ilave edilerek optimallik şartı aranır.

$Z_{maks.} = 6X_1 + (4 + \Delta)X_2$

$2X_1 + 6X_2 \leq 12$

$4X_1 + 4X_2 \leq 16$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Tablo 12. Örnek 3’e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu (C_2=4 + Δ)

	6 X_1	4+ Δ X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
6 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	6	6	0	3/2	24
C_j-Z_j	0	-2 + Δ	0	-3/2	

ii. Temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısındaki değişmeler

Bir temel değişkenin amaç fonksiyonu katsayısının değişim aralığı, değişkene ait satırdaki temel olmayan değişken değerlerinin Δ ile çarpıldıktan sonra karşı gelen C_j-Z_j satırındaki değerlerden çıkarılarak ve optimallik şartı sağlanarak belirlenebilir.

$Z_{maks.} = (6 + \Delta_1)X_1 + 4X_2$

$2X_1 + 6X_2 \leq 12$
$4X_1 + 4X_2 \leq 16$

$X_1 , X_2 \geq 0$

Tablo 13. Örnek 3'e ait Başlangıç Simpleks Tablosu
(C_1=6 + Δ_1)

	$6+\Delta_1$ X_1	4 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	2	6	1	0	12
0 S_2	4	4	0	1	16
Z_j	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	$6+\Delta_1$	4	0	0	

Tablo 14. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks ÇözümTablosu
(C_1=6 + Δ_1)

	$6+\Delta_1$ X_1	4 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
$(6+\Delta_1)X_1$	1	1	0	1/4	4
Z_j	$6+\Delta_1$	$6+\Delta_1$	0	$3/2+\Delta_1/4$	$24+4\Delta_1$
C_j-Z_j	0	$-2-\Delta_1$	0	$-3/2-\Delta_1/4$	

Farklı C_1 ve C_2 Değerleri için Örnek 3'e ait
Optimal Simpleks Çözüm Tabloları

Tablo 15. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks ÇözümTablosu
Δ_2=2, (C_2=6)

	6 X_1	6 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
6 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	6	6	0	3/2	24
C_j-Z_j	0	0	0	-3/2	

Tablo 16. Örnek 3'e Optimal Simpleks ÇözümTablosu

$\Delta_2=1$, ($C_2=5$)

	6 X_1	5 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
6 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	6	6	0	3/2	24
C_j-Z_j	0	-1	0	-3/2	

Tablo 17. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

$\Delta_1= -2$, ($C_1=4$)

	4 X_1	4 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
4 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	4	4	0	1	16
C_j-Z_j	0	0	0	-1	

Tablo 18. Örnek 3'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

$\Delta_1=3$, ($C_1=9$)

	9 X_1	4 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
9 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	9	9	0	9/4	36
C_j-Z_j	0	-5	0	-9/4	

Örnek 4. Aşağıda verilen problemin amaç fonksiyonu katsayılarında ve sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkilerini inceleyiniz.

$$Z_{min.} = 14X_1 + 10X_2 + 4X_3 + 8X_4$$

$$\begin{aligned}
X_3 &\geq 40 \\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 85 \\
2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 &\leq 320 \\
3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4 &\leq 410 \\
X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

Tablo 19. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	14 X_1	10 X_2	4 X_3	8 X_4	0 E_1	M A_1	M A_2	0 S_1	0 S_2	
4 X_3	0	½	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	75
14 X_1	1	½	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10
0 E_1	0	½	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	35
0 S_2	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	5
Z_j	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	440
C_j-Z_j	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Farklı b Değerleri için Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tabloları

Tablo 20. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu (b_1=39)

	14 X_1	10 X_2	4 X_3	8 X_4	0 E_1	M A_1	M A_2	0 S_1	0 S_2	
4 X_3	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	75
14 X_1	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10
0 E_1	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	36
0 S_2	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	5
Z_j	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	440
C_j-Z_j	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Tablo 21. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu (b_2=84)

	14 X_1	10 X_2	4 X_3	8 X_4	0 E_1	M A_1	M A_2	0 S_1	0 S_2	
4 X_3	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	76
14 X_1	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	8
0 E_1	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	36
0 S_2	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	6
Z_j	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	416
C_j-Z_j	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Tablo 22. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu (b_3=319)

	14 X_1	10 X_2	4 X_3	8 X_4	0 E_1	M A_1	M A_2	0 S_1	0 S_2	
4 X_3	0	½	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	74½
14 X_1	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10½
0 E_1	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	34½
0 S_2	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	6
Z_j	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	445
C_j-Z_j	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Tablo 23. Örnek 4'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu (b_4=409)

	14 X_1	10 X_2	4 X_3	8 X_4	0 E_1	M A_1	M A_2	0 S_1	0 S_2	
4 X_3	0	1/2	1	3/2	0	0	-1	1/2	0	75
14 X_1	1	1/2	0	-1/2	0	0	2	-1/2	0	10
0 E_1	0	1/2	0	3/2	1	-1	-1	1/2	0	35
0 S_2	0	0	0	0	0	0	-1	-1	1	4
Z_j	14	9	4	-1	0	0	24	-5	0	440
C_j-Z_j	0	1	0	9	0	M	M-24	5	0	

Örnek 5. Aşağıda verilen problemin amaç fonksiyonu katsayılarında ve sağ taraf sabitlerinde meydana gelen değişmelerin optimal çözüm üzerindeki etkilerini inceleyiniz.

$Z_{maks.} = 14X_1 + 10X_2 + 4X_3 + 8X_4$

$$\begin{aligned} X_3 &\geq 40 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &= 85 \\ 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 5X_4 &\leq 320 \\ 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4 &\leq 410 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tablo 24. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	14 X_1	10 X_2	4 X_3	8 X_4	0 E_1	-M A_1	-M A_2	0 S_1	0 S_2	
4 X_3	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 X_1	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	45
0 S_1	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	70
0 S_2	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	75
Z_j	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	790
C_j-Z_j	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

KAYNAKLAR

LEE, S.M., MOORE L.J. ve TAYLOR, B.W., (1981), Management Science, Wm.C.Brown Company,U.S.A.

RENDER, B. & STAIR, R. M., (1992), Introduction to Management Science, Allyn and Bacon, U.S.A.

WALKER,R.,C.,(1999), Introduction to Mathematical Programming, Prentice Hall, U.S.A.

WINSTON, W., (1991), Operations Reseach Applications and Algorithms, 2nd Edit., PWS-KENT Publishing Com., U.S.A

Farklı b Değerleri için Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tabloları

Tablo 25. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b_1=39)

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X_1	X_2	X_3	X_4	E_1	A_1	A_2	S_1	S_2	
4 X_3	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	39
14 X_1	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	46
0 S_1	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	72
0 S_2	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	77
Z_j	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	800
C_j-Z_j	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

Tablo 26. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b_2=84)

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X_1	X_2	X_3	X_4	E_1	A_1	A_2	S_1	S_2	
4 X_3	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 X_1	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	44
0 S_1	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	72
0 S_2	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	78
Z_j	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	776
C_j-Z_j	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

Tablo 27. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b_3=319)

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X_1	X_2	X_3	X_4	E_1	A_1	A_2	S_1	S_2	
4 X_3	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 X_1	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	45
0 S_1	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	69
0 S_2	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	75
Z_j	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	790
C_j-Z_j	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

Tablo 28. Örnek 5'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu(b_4=409)

	14	10	4	8	0	-M	-M	0	0	
	X_1	X_2	X_3	X_4	E_1	A_1	A_2	S_1	S_2	
4 X_3	0	0	1	0	-1	1	0	0	0	40
14 X_1	1	1	0	1	1	-1	1	0	0	45
0 S_1	0	1	0	3	2	-2	-2	1	0	70
0 S_2	0	1	0	3	2	-2	-3	0	1	74
Z_j	14	14	4	14	10	-10	14	0	0	790
C_j-Z_j	0	-4	0	-6	-10	-M+10	-M-14	0	0	

3.2.5. Simpleks Tablonun Ekonomik Yorumu

Bu bölümde aşağıda verilen problemden yararlanılarak problemin çözümüne ilişkin her aşamadaki simpleks tabloda yer alan elemanların ekonomik anlamı üzerinde durulacaktır.

[16]Örnek1: Bir işletmede A ve B olmak üzere 2 çeşit ürün montaj ve cilalama departmanlarından geçirilerek üretilmektedir. Montaj departmanının haftalık üretim kapasitesi 60 saat, cilalama departmanın haftalık üretim kapasitesi ise 48 saattir. Bir adet A ürünü için gerekli olan montaj süresi 4 saat, cilalama süresi ise 2 saattir . Bir adet B ürünü için bu süreler sırasıyla 2 saat ve 4 saattir. Bir adet A ürününden elde edilen kar 8 pb, bir adet B ürününden elde edilen kar ise 6pb'dir. İşletmenin amacı toplam karı maksimum kılacak şekilde her üründen ne kadar üreteceğini belirlemektir.

Problemin doğrusal programlama modeli:

$Z_{maks.} = 8X_1 + 6X_2$ (kar, pb/hafta)

$4X_1 + 2X_2 \leq 60$ (Montaj, saat/hafta)

$2X_1 + 4X_2 \leq 48$ (Cilalama, saat/hafta)

$X_1 , X_2 \geq 0$

Modelin standart formu:

$Z_{maks.} = 8X_1 + 6X_2 + 0S_1 + 0\,S_2$ (kar, pb/hafta)

$4X_1 + 2X_2 + S_1 = 60$ (Montaj, saat/hafta)

$2X_1 + 4X_2 + S_2 = 48$ (Cilalama, saat/hafta)

$X_1 , X_2 , S_1, S_2 \geq 0$

[16] LEVIN,R.I.,RUBIN, D.S., STINSON, J.P.& GARDNER, E.S.(1992), Quantitative Approaches to Management, 8th Edit., McGraw-Hill, Inc.

Tablo 1. Örnek 1'e ait Başlangıç Simpleks Tablosu

	8 X_1	6 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	4	2	1	0	60
0 S_2	2	4	0	1	48
Z_j	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	8	6	0	0	

Tablo 2. Örnek 1'e ait 2. Simpleks Tablo

	8 X_1	6 X_2	0 S_1	0 S_2	
8 X_1	1 (12)	1/2 (16)	1/4 (4)	0 (8)	15 (1)
0 S_2	0 (13)	3 (17)	-1/2 (5)	1 (9)	18 (2)
Z_j	8 (14)	4 (18)	2 (6)	0 (10)	120 (3)
C_j-Z_j	0 (15)	2 (19)	-2 (7)	0 (11)	

Tablo 3. Örnek 1'e ait Optimal Simpleks Çözüm Tablosu

	8 X_1	6 X_2	0 S_1	0 S_2	
8 X_1	1	0	1/3	-1/6	12
6 X_2	0	1	-1/6	1/3	6
Z_j	8	6	5/3	2/3	132
C_j-Z_j	0	0	-5/3	-2/3	

Bir simpleks tablo, dört ana bölüme bakılarak yorumlanabilir. Aşağıda, Örnek 1'e ait 2. simpleks tablo ele alınarak elemanların nasıl yorumlanacağına ilişkin genel ifadeler verilmektedir.

Çözüm Sütunu [(1),(2),(3)]

(1),(2): Temel değişkenlerin çözüm değerlerini verir.

Çözüm sütununda değerleri yer almayan değişkenler temel dışı değişkenler olup çözüm değerleri 0'dır.

(3): Çözüm kümesine karşı gelen amaç fonksiyonunun değerini gösterir.

Marjinal İkame Oranları**[(4),(5),(8),(9),(12),(13),(16),(17)]**

Temel değişkenler ile sütun değişkenleri arasındaki marjinal ikame oranlarıdır.

Pozitif değerli sayılar, sütun değişkeninin bir biriminin çözüme girmesi halinde ona karşı gelen temel değişkenin çözüm değerinde meydana gelecek azalışı gösterir.

Negatif değerli sayılar, sütun değişkeninin bir biriminin çözüme girmesi halinde ona karşı gelen temel değişkenin çözüm değerinde meydana gelecek artışı gösterir.

Z_j Satırı **[(6),(10),(14),(18)]**

Sütun değişkeninin bir birimin çözüme girmesi halinde yitirilen karı gösterir.

$C_j - Z_j$ Satırı **[(19),(15),(11),(7)]**

Sütun değişkeninin bir birimin çözüme girmesi halinde amaç fonksiyonu değerinde meydana gelecek net değişimi ifade eder.

$C_j - Z_j > 0$ ise, amaç fonksiyonu değerinde artış,

$C_j - Z_j < 0$ ise, amaç fonksiyonu değerinde azalış söz konusudur.

KAYNAKLAR

LEVIN,R.I.,RUBIN, D.S., STINSON, J.P.&GARDNER, E.S.(1992),Quantitative Approaches to Management, 8th Edit., McGraw-Hill, Inc.

ÖZDEN, K., (1989), Yöneylem Araştırması, Hava Harp Okulu Yayınları

3.2.6. Dual Problem ve Ekonomik Yorumu

<u>Primal Model</u>

$Z_{maks.} = \quad 4X_1 + 5X_2$ (kar, pb/gün)

$X_1 + 2X_2 \leq 10$ (işgücü, saat/gün)

$6X_1 + 6X_2 \leq 36$ (Hammadde1, kg/gün)

$8X_1 + 4X_2 \leq 40$ (Hammadde2, kg/gün)

$X_1 , X_2 \geq 0$

Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	4	5	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
5 X_2	0	1	1	-1/6	0	4
4 X_1	1	0	-1	1/3	0	2
0 S_3	0	0	4	-2	1	8
Z_j	4	5	1	1/2	0	28
C_j-Z_j	0	0	**-1**	<u>-1/2</u>	0	

Dual Model

$Z_{min.} = 10y_1 + 36y_2 + 40y_3$

$y_1 + 6y_2 + 8y_3 \geq 4$

$2y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 5$

$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$

Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	10	36	40	0	0	**M**	M	
	y_1	y_2	y_3	E_1	E_2	A_1	A_2	
36 y_2	0	1	2	-1/3	1/6	1/3	-1/6	<u>1/2</u>
10 y_1	1	0	-4	1	-1	-1	1	**1**
Z_j	10	36	32	-2	-4	2	4	28
C_j-Z_j	0	0	8	2	4	M-2	M-4	

Primal Model

$Z_{maks.} = 6X_1 + 4X_2$

$2X_1 + 6X_2 \leq 12$ (işgücü, saat/gün)

$4X_1 + 4X_2 \leq 16$ (Hammadde, kg/gün)

$X_1 , X_2 \geq 0$

Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	6 X_1	4 X_2	0 S_1	0 S_2	
0 S_1	0	4	1	-1/2	4
6 X_1	1	1	0	1/4	4
Z_j	6	6	0	3/2	**24**
C_j-Z_j	0	**-2**	0	-3/2	

Dual Model

$Z_{min.} = 12y_1 + 16y_2$

$2y_1 + 4y_2 \geq 6$

$6y_1 + 4y_2 \geq 4$

$y_1 , y_2 \geq$

Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	12 y_1	16 y_2	0 E_1	0 E_2	M A_1	M A_2	
0 E_2	-4	0	-1	1	1	-1	**2**
16 y_2	1/2	1	-1/4	0	1/4	0	3/2
Z_j	8	16	-4	0	4	0	**24**
C_j-Z_j	4	0	4	0	M-4	M	

Optimal Primal- Optimal Dual Tablo Arasındaki İlişkiler

1)Amaç fonksiyonunun optimal değeri primal ve dual problemler için aynıdır.

$Z_{maks.}=G_{min.}$

2).Eğer dual optimal çözümde herhangi bir dual değişken temel değişken olarak yer alırsa ,onun primal problemdeki karşılığı olan gölge/ artık değişkenin değeri sıfır olur.

$Y_2=3/2$; $S_2=0$

Eğer primal optimal çözümde,herhangi bir primal kısıtlayıcının gölge/artık değişkeni temel değişken olarak pozitif bir değere sahip ise,onun karşılığı olan dual değişkenin optimal değeri ‘0’ olur.
$S_1=4$; $y_1=0$

3).Dual problemin temel değişkenlerinin optimal çözüm değerleri primal simpleks tablosunda gölge değişkenlerin altındaki cj-zj satırında ters işaretli olarak bulunur. Primal değişkenlerin optimal değerleri dual optimal simpleks tabloda artık değişkenlerin altındaki cj-zj satırında bulunur.

4).Eğer dual değişken yapay değişken içeren primal kısıtlayıcıya karşılıksa dual değişkenin optimal değeri optimal primal simpleks tabloda yapay değişkenin altındaki cj-zj satırındaki elemanın ters işaretlisi olarak bulunur (M için ‘0’ değeri verilir).

<u>Primal Model</u>

$Z_{maks.}= \quad 6X_1 + 5X_2+3X_3$ (kar, pb/gün)

$2X_1 + 4X_2 +X_3 \le 19$ (HammaddeA, kg/gün)
$X_1 + 2X_2 +X_3 \le 9$ (HammaddeB, kg/gün)
$2X_1 + X_2 \le 16$ (işgücü, saat/gün)

$X_1 , X_2 , X_3 \ge 0$

Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	6	5	3	0	0	0	
	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
0 S_1	0	3/2	0	1	-1	-1/2	2
3 X_3	0	3/2	1	0	1	-1/2	1
6 X_1	1	1/2	0	0	0	1/2	8
Z_j	6	15/2	3	0	3	3/2	51
C_j-Z_j	0	-5/2	**0**	**0**	-3	-3/2	

Dual Model

$$Z_{min.} = 19y_1 + 9y_2 + 16y_3$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 6$$
$$4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5$$
$$y_1 + 2y_2 \geq 3$$

$$y_1 , y_2 , y_3 \geq 0$$

Optimal Simpleks ÇözümTablosu

	19	9	16	0	0	0	**M**	**M**	M	
	y_1	y_2	y_3	E_1	E_2	E_3	A_1	A_2	A_3	
16y_3	½	0	1	-1/2	0	½	½	0	-½	3/2
9y_2	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	**3**
0E_2	-1/2	0	0	-1/2	1	-3/2	½	-1	3/2	**5/2**
Z_j	17	9	16	-8	0	-1	8	0	1	51
C_j-Z_j	2	0	0	8	0	1	M-8	M	M-1	

3.2.6. Dual Simpleks Yöntem

Doğrusal programlama problemlerinin çözümünde kullanılan diğer bir yöntem 'Dual Simpleks Yöntem'dir. Bu yöntem çözümün optimal ancak uygun olmadığı durumlarda kullanılır. Maksimizasyon amaçlı bir probleme ait tablonun C_j-Z_j satırındaki değerler "0" veya "-" değerli iken çözüm sütunundaki değerlerin en az biri "-" işaretliyse veya minimizasyon. amaçlı bir probleme ait tablonun C_j-Z_j satırındaki değerlerin tümü "+" veya "0" iken çözüm sütununda yer alan değerlerin en az biri "-" işaretli ise dual simpleks yöntemine başvurulur.

Dual Simpleks yöntem, primal simpleks yöntemde olduğu gibi çözüme giren ve çözümden çıkan değişkenlerin seçimiyle başlar. Ancak, dual simpleks yöntemde önce çözümden çıkacak değişken, daha sonra çözüme girecek değişken belirlenir.

Temelden çıkacak değişken çözüm sütununda negatif değere sahip değişkenler arasından seçilir. Çözüm sütununda mutlak değerce en büyük "– "değerli değişken temelden çıkacak olan değişkendir (anahtar satır).

Eğer çözüm sütunundaki tüm değişkenler "+" ise çözüm uygun bir çözümdür. Ancak çözümün optimal bir çözüm olup olmadığını belirlemek için $C_j - Z_j$ satırına bakılır.

Temele girecek değişken çözümde bulunmayan değişkenler arasından seçilir. Bunun için $C_j - Z_j$ satırındaki değerler anahtar satırdaki karşı gelen değerlere bölünür. Paydaya gelen sayılar arasında "0" veya "+" değerli olanlar dikkate alınmaz.

Problem maksimizasyon amaçlı bir problem ise, en küçük oranın elde edildiği sütuna ait değişken çözüme girecek değişken olarak seçilir(anahtar sütun).

Problem minimizasyon amaçlı bir problem ise, mutlak değerce en küçük oranın elde edildiği sütuna ait değişken çözüme girecek değişken olarak seçilir(anahtar sütun).

Çözümle ilgili diğer işlemler primal simpleks yöntemdeki gibidir.

Bir sonraki tabloda $C_j - Z_j$ satırı optimallik şartını sağlarken çözüm sütunundaki değerlerin en az biri "-" işaretli ise dual simpleks yönteme devam edilir.. Elde edilen tablonun çözüm sütunundaki değerlerin hiçbiri "-" işaretli değilse ve $C_j - Z_j$ satırı optimallik şartını sağlıyorsa optimal ve uygun çözüm elde edilmiş demektir.

Dual Simpleks yöntem, çoğunlukla,

-sağ taraf sabitlerindeki değişikliklerden sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde

-modele yeni bir kısıt ilave edildikten sonra yeni optimal çözümün elde edilmesinde ve

-normal minimizasyon problemlerinin çözümünde

kullanılmaktadır.

Örnek1[17]: $Z_{min.} = 3X_1 + 2X_2$

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

[17] TAHA, H. (1992), Operations Reseach, 5^{th} Edit., Mac Millan International Com, New York,

Örnek2[18]: $Z_{min.} = X_1 + 2X_2$

$X_1 - 2X_2 + X_3 \geq 4$

$2X_1 + X_2 - X_3 \geq 6$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Örnek3[19]: $Z_{min.} = 5X_1 + 4X_2$

$X_1 + 2X_2 \geq 12$

$5X_1 + X_2 \geq 31$

$3X_1 + X_2 \geq 21$

$X_1, X_2 \geq 0$

KAYNAKLAR

TAHA, H. (1992), Operations Reseach, 5th Edit., Mac Millan International Com, New York,

WALKER, R.,C.,(1999), Introduction to Mathematical Programming, Prentice Hall Inc., U.S.A.

WINSTON, W.,(1991), Operations Reseach Applications and Algorithms, 2nd Edit., PWS-KENT Publishing Com., U.S.A.

---

[18] WINSTON, W.,(1991), Operations Reseach Applications and Algorithms, 2nd Edit., PWS-KENT Publishing Com., U.S.A.

[19] WALKER, R.,C.,(1999), Introduction to Mathematical Programming, Prentice Hall Inc., U.S.A.

Örnek1:

$Z_{min.} = 3X_1 + 2X_2$

$3X_1 + X_2 \geq 3$

$4X_1 + 3X_2 \geq 6$

$X_1 + X_2 \leq 3$

$X_1 , X_2 \geq 0$

	3	2	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
$0S_1$	-3	-1	1	0	0	-3
$0S_2$	-4	-3	0	1	0	-6
$0S_3$	1	1	0	0	1	3
Z_j	0	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	3	2	0	0	0	

	3	2	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
$0S_1$	-5/3	0	1	-1/3	0	-1
$2X_2$	4/3	1	0	-1/3	0	2
$0S_3$	-1/3	0	0	1/3	1	1
Z_j	8/3	2	0	-2/3	0	4
C_j-Z_j	1/3	0	0	2/3	0	

	3	2	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
$3X_1$	1	0	-3/5	1/5	0	3/5
$2X_2$	0	1	4/5	-3/5	0	6/5
$0S_3$	0	0	-1/5	2/5	1	6/5
Z_j	3	2	-1/5	-3/5	0	21/5
C_j-Z_j	0	0	1/5	3/5	0	

Örnek3:

$$Z_{min.} = 5X_1 + 4X_2$$

$$X_1 + 2X_2 \geq 12$$

$$5X_1 + X_2 \geq 31$$

$$3X_1 + X_2 \geq 21$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

	-5	-4	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
$0S_1$	-1	-2	1	0	0	-12
$0S_2$	-5	-1	0	1	0	-31
$0S_3$	-3	-1	0	0	1	-21
Z_j	0	0	0	0	0	0
C_j-Z_j	-5	-4	0	0	0	

	-5	-4	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
$0S_1$	0	-9/5	1	-1/5	0	-29/5
-5 X_1	1	1/5	0	-1/5	0	31/5
$0S_3$	0	-2/5	0	-3/5	1	-12/5
Z_j	-5	-1	0	1	0	-31
C_j-Z_j	0	-3	0	-1	0	

	-5	-4	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
-4 X_2	0	1	-5/9	1/9	0	29/9
-5 X_1	1	0	1/9	-2/9	0	50/9
$0S_3$	0	0	-2/9	-5/9	1	-10/9
Z_j	-5	-4	15/9	2/3	0	-122/3
C_j-Z_j	0	0	-15/9	-2/3	0	

	-5	-4	0	0	0	
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
-4 X_2	O	1	-3/5	0	1/5	3
-5 X_1	1	0	1/5	0	-2/5	6
$0S_2$	0	0	2/5	1	-9/5	2
Z_j	-5	-4	7/5	0	6/5	-42
C_j-Z_j	0	0	-7/5	0	-6/5	

İYİ ÇALIŞMALAR DİLERİZ- Doç. Dr. Demet BAYRAKTAR –Yard. Doç. Dr. Ferhan ÇEBİ