

BÖLÜM 7 TÜRBÜLANSLI SINIR TABAKALAR

sabit-yoğunluklu, sabit-özellikli, harici,
türbülanslı sınır tabaka akımları

TÜRBÜLANSLI SINIR TABAKALAR

Türbülans analizindeki gereksinimler

Türbülanslı akımlar *zamana bağlı* ve *üç-boyutlu*dur.
Zamana bağlılığın *frekansı* ve *ölçeği* çeşitli büyüklük mertebelerinde dağılır.

Bu nedenlerle türbülanslı akımın bütün ayrıntılarıyla analizi, düz levha üzerindeki gibi basit bir akım olsa bile çok hacimli bir problemdir.

Türbülanslı hareketin ölçeği çeşitli büyüklük mertebelerinde dağılım gösterdiğine göre sayısal bir hesaplama için (Δx , Δy) hücre genişliklerinin uygun seçimi önemlidir.

Hücre büyüklüğü hareketin önemli bir kısmının ölçeğinden büyük ise sonuçlar çok kaba olur.

Bu bakımdan genel olarak türbülanslı bir sınır tabakanın *bir istasyonunda* 10^3 - 10^4 ağ noktası ve *toplam* 10^6 - 10^7 ağ noktasına gereksinim duyulmaktadır.

Pratikteki bir türbülanslı akımın *bütün ayrıntıları* için günümüzde genel bir analiz yöntemi geliştirmek henüz mümkün olmamıştır. Komple bir simülasyonun hesaplama maliyeti Re^3 ile değişmektedir. Dolayısıyla çok büyük miktarda bilgisayar süreleri harcansa bile günümüz imkanlarıyla ancak *çok düşük Re sayılarındaki* akımlar incelenebilir.

TÜRBÜLANSLI SINIR TABAKALAR

Türbülans analizindeki gereksinimler

Genel değerlendirme karamsar olmakla birlikte tasarım için türbülanslı akım analizinden beklenen bilgi sınırlı olup, laminar halde olduğu gibi sınır tabaka analizinden beklenen bilgi öncelikle $C_f(x)$ yüzey sürtünme katsayısı, daha sonra da $\delta(x)$, $\delta^*(x)$ ve $\theta(x)$ gibi sınır tabaka kalınlıklarıdır. Tasarımda çoğu halde ayrıntılı hız ve sıcaklık profili gibi bilgilerin kullanımı daha kısıtlıdır.

Ayrıca türbülanslı akım için örneğin $C_f(x)$ in ne anlama geldiğini düşünmekte yarar vardır.

Örnek olarak sabit hızdaki bir gemi için sürtünme direncinin tahmini problemi göz önüne alınırsa, bunun için yüzey üzerindeki herhangi bir noktada yüzey gerilmesinin çalkantı değerlerinin bilinmesi gerekmez. Daha ziyade bu gemiye çekmek için gerekli pervane kuvvetinin bilinmesine ihtiyaç vardır. Bunun için de $C_f(x)$ in zaman ortalamasının bilinmesi yeterlidir.

Buna göre türbülanslı akımın analizinde ihtiyaç daha ziyade sadece zaman-ortalaması veya ortalama değerlerin bulunması olarak gözükmektedir.

Bu gibi büyüklükler daimi veya zamana bağlı, iki-boyutlu veya üç-boyutlu olabilir.

TÜRBÜLANSLI SINIR TABAKALAR

Türbülans analizindeki gereksinimler

Tasarımcı açısından yeterli gözüken, sadece ortalama büyüklüklerin tahminini amaçlayan bir türbülans analizinin günümüz analitik ve sayısal imkanları içerisinde kalacağı görülebilir. Ancak bu güne kadar türbülanslı akımların güvenilir ve etkin tahmini yolunda sadece sınırlı bir başarı elde edilebilmiştir.

Pratikteki bazı durumlarda akımın ayrıntılı çalkantı karakteristiğinin bilinmesi önemlidir. Buna bir örnek yakıt-yakıcı karışımı şeklindeki akımın tutuşma ve yanması olayıdır. Alev içerisinde kimyasal enerjinin ısı enerjisine dönüşüm hızı anlık lokal sıcaklıklara hayli non-lineer bir biçimde bağlıdır. Buna göre herhangi bir noktadaki daimi ısı üretimini tahmin etmek için sadece $T(x,y)$ nin bilinmesi yeterli olmaz, $T(x,y,z,t)$ nin hesaplanması ve sonuçların zaman ortalamasının alınması gerekir.

Ortalama akım analizine girmeden önce mevcut ampirik bilgilerin bir kısmını gözden geçirmekte yarar bulunmaktadır. Zira bu bilgiler analitik geliştirmelerin tabanını oluşturacaktır. Anlık çalkantı hareketinin bütün ayrıntılarını dikkate almadan ortalama akımın incelenebilmesi için daha ziyade deneysel veri tabanına ağırlık vermek gerekecektir. Böylece ampirik bilgiler hareket denklemleri çerçevesinde kullanılarak yarı-ampirik bir analiz geliştirilecektir

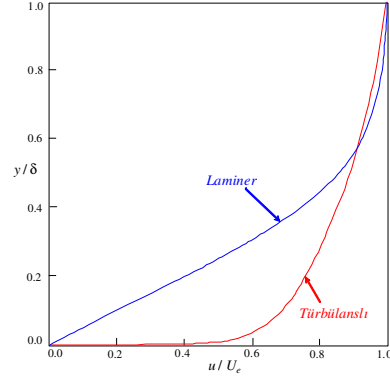
Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Bir *düz levha* üzerinde *laminer* ve *türbülanslı* hallerde ölçülen boyutsuz *hız profilleri*, arasında önemli bir farklılık vardır.

Türbülanslı halde şekilde gösterilen boyutsuz *ortalama hız profili* duvarı sıfırdan daha büyük bir hızda kesiyor gibi gözükmemektedir. Aslında hız duvar yakınında yavaş bir değişme gösterirken çok kısa bir aralıkta aniden sıfıra gitmektedir.

Bu hız profili iki farklı tabakaya sahip,

- $0.05 \leq y/\delta \leq 1.00$ aralığında yüksek viskoziteli
- $0 \leq y/\delta \leq 0.05$ aralığında daha düşük viskoziteli



bir akışkanın yer aldığı *laminer* bir sınır tabakaya benzetilebilir.

Bu iki tabakanın birleştiği yüzeyde kayma gerilmeleri eşit olduğundan

$$\mu_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{arakesit}} = \mu_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{arakesit}}$$

Bu durumda hız gradyanının arakesiti geçerken μ_2/μ_1 gibi bir oranla ani bir değişim göstermesi gerekir. Bu husus türbülanslı sınır tabaka modellemesindeki en önemli fikirlerden birinin esasıdır

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

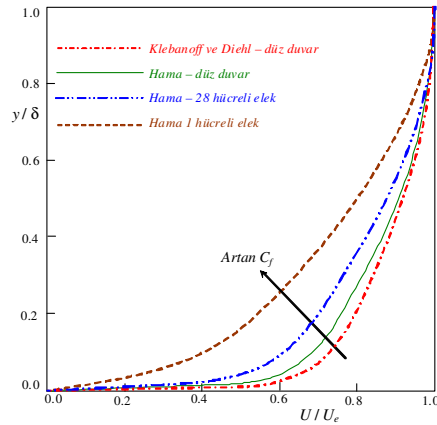
Düz levha üzerindeki *laminer* ve *türbülanslı* sınır tabakalar arasında *önemli bir fark* daha vardır. Şöyle ki: *Laminer* sınır tabakada *akışkan cinsi*, *Reynolds sayısı*, *pürüzlülük* vs ne olursa olsun *boyutsuz hız profilleri aynıdır*.

Buna karşılık *türbülanslı* sınır tabakada *Reynolds sayısı* ve/veya *pürüzlülükteki değişim C_f yi değiştirir*. Bu da boyutsuz hız profilinin şeklini etkiler. Hız profillerinin bu tabiatı sınır tabakaların analizinde doğrudan önem kazanmaktadır.

Farklı koşullarda oluşan hız profillerinin şeklini tanımlamak üzere

$$H = \delta^* / \theta \text{ - şekil parametresinden}$$

yararlanmak istenebilir. Bir *düz levha* üzerindeki *laminer sınır tabaka* için *H* büyüklüğü *daima 2.6* dir.



Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Ancak *türbülanslı* sınır tabakada H büyüklüğünün C_f ye *bağlı* olacağı tahmin edilebilir.

Buna göre belli bir dP/dx *basınç dağılımına* sahip *herhangi bir cisim* üzerindeki *türbülanslı* sınır tabakada oluşacak *hız profillerinin şeklini* H parametresi ile belirlemek mümkün değildir.

Mevcut ampirik bilgilerin olabilen en kısa biçimde sunumu ve kullanımı açısından güçlü ve kapsamlı korelasyon değişkenleri geliştirilmesi çok önemlidir.

Problem karmaşık olup çok miktarda da veri bulunmaktadır. Bu yüzden mevcut verileri en basit biçimde dikkate almak faydalı olacaktır.

Düz levha üzerindeki basit türbülanslı sınır tabaka halinde bile korelasyon için u/U_e ve y/δ değişkenlerini almanın yeterli olmayacağı açıktır.

Varılacak sonuca bir çok araştırmacının katkısı olmakla birlikte en açık ve en kapsamlı katkı *Clouser (1956)* tarafından yapılmıştır.

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

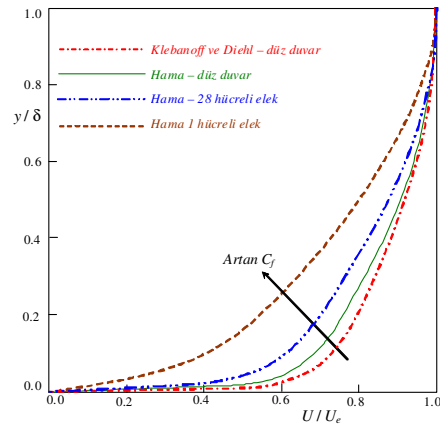
Şekil de yer alan hız profillerinin herhangi bir ölçek faktörü ile çarpılarak tek bir eğriye dönüştürülmesi beklenemez.

Bununla birlikte, sınır tabaka içerisinde kenar hızına nazaran meydana gelen

($U-U_e$) hız kayıpları

dikkate alınırsa, şekle göre C_f değeri büyükçe daha büyük hız kaybı oluşmaktadır.

Daha büyük bir C_f , sınır tabaka içindeki akışkana daha büyük bir yavaşlatıcı kuvvet etkimesi ve dolayısıyla *hızda* (ve *momentumda*) daha büyük bir kayıp olması anlamına gelmektedir.



Buna göre kenar hızıyla boyutsuzlaştırılmış hız kayıplarının yüzey sürtünme katsayısıyla orantılı olduğu söylenebilir

$$\frac{U_e - U}{U_e} = 1 - \frac{U}{U_e} \propto \sqrt{C_f}$$

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Bu iki büyüklüğün oranıyla tanımlanan bir değişkenle bütün eğrilerin korelasyonu sağlanabilir:

$$\frac{U/U_e - 1}{\sqrt{C_f/2}} = \frac{U - U_e}{U_e \sqrt{\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}}/2} = \frac{U - U_e}{\sqrt{\tau_w/\rho}}$$

Sağ taraftaki ifadenin paydası hız boyutunda bir büyüklüktür

$$u_* = \sqrt{\tau_w/\rho}$$

sürtünme hızı

Böylece düz levha üzerindeki sınır tabakada hız profillerinin ordinatı için korelasyon değişkeni

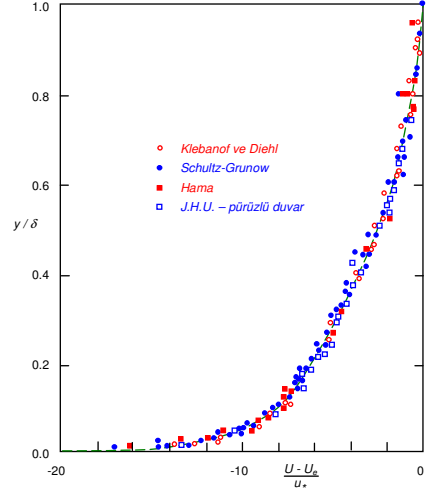
$$\frac{U/U_e - 1}{\sqrt{C_f/2}} = \frac{U - U_e}{u_*}$$

Diğer eksen için y/δ oranının kullanılması yeterli olacaktır. Böylece:

$$\frac{U - U_e}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

kayıp kanunu

Türbülanslı sınır tabaka hız profilleri için koordinatların bu şekildeki seçiminin ne denli başarılı olduğu şekilden görülmektedir.



UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M. Adil Yükselen

9

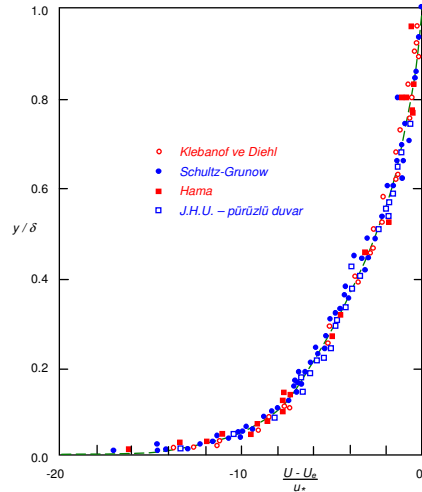
Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Ancak bu korelasyonun genel başarısı y/δ nın küçük değerlerinde yani duvara yakın bölgede görülmektedir.

Bu bölgede hız çabuk bir biçimde değişmekte olup çesitli haller arasındaki farklılık bu şekilde sunulan bir grafikten kolay anlaşılabilir.

Bu grafikte, sınır tabakanın üst kısımlarındaki lokal ortalama hızların sınır tabaka kenar hızına göre büyüklüklerinin, $(U - U_e)$, önemli olduğu görülürken lokal ortalama hızların duvar üzerindeki sıfır hız değerine kıyasla durumu doğrudan dikkate alınmamıştır. Oysa duvara yakın en alt tabakada bu karşılaştırma önemli olacaktır.

Duvar bölgesinde hızlar için ölçekleyici büyüklük olarak yine sürtünme hızının alınması uygun gözükmemektedir.



$$\frac{U}{u_*} = u^+$$

UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M. Adil Yükselen

10

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Sınır tabakanın üst bölgesindeki korelasyonlarda y konumu

$$\frac{y}{\delta}$$

şeklinde bir oranla temsil edilmiştir.

Duvarın etkisinin baskın olduğu alt bölgede ise δ sınır tabaka kalınlığının öneminin daha az olduğu kabul edilebilir.

Bu alt bölge sınır tabakanın toplam kalınlığının sadece küçük bir kısmını (≈ 10) teşkil etmekte olup $y=\delta$ civarında oluşan değişikliklerin etkisi alt bölgede çok az hissedilir.

Bu durumda y büyüklüğünün duvara yakın bölgede bir başka biçimde boyutsuzlaştırılması daha uygun olacaktır.

$$y^+ = \frac{yu_*}{\nu}$$

Bu korelasyon büyüklüğü sürtünme hızı cinsinden yazılmış bir tür lokal *Reynolds* sayısıdır

Bu değişkenler kullanılarak

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right)$$

veya

$$u^+ = f(y^+)$$

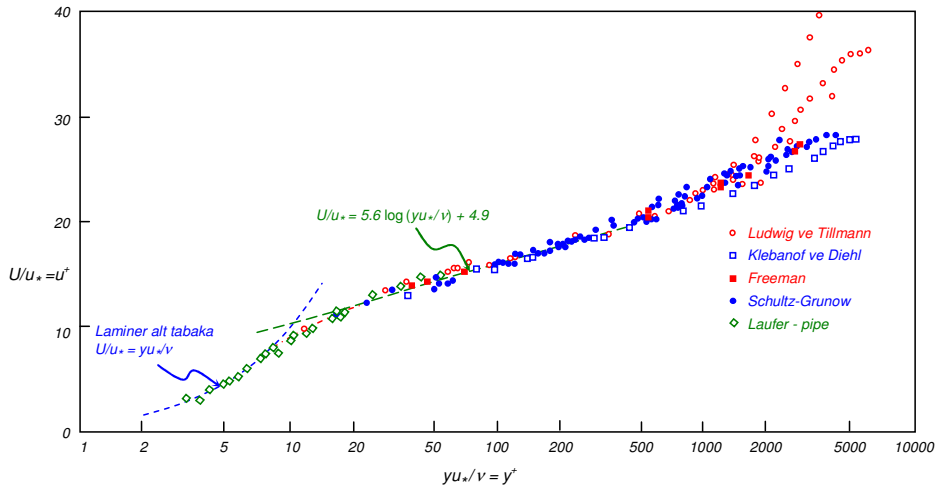
duvar kanunu

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

duvar kanunu

$$u^+ = f(y^+)$$

$$u^+ = \frac{U}{u_*}, \quad y^+ = \frac{yu_*}{\nu}$$



Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Bu noktada belirtmelidir ki, u^* büyüklüğü hız profillerinin anlaşılmasında böylesine kilit bir rol oynadığı için τ_w duvar gerilmesinin *doğru tespiti* önem kazanmaktadır.

Yüzey gerilmesi ilk kez 1950 li yıllarda başarılı yüzey gerilmesi balanslarının geliştirilmesiyle ölçülebilir hale gelmiştir (Dhawan, 1953). Bu tip bir cihaz yüzeyin ilgilenilen kısmında yüzeye temas etmeyen küçük bir parça şeklinde olup, böylece yüzeyin bu küçük alanındaki gerilme kuvveti doğrudan ölçülür. Daha önceki araştırmacılar τ_w yi tespit etmek için hız profiline yüzey üzerindeki eğimini kullanmayı denemişler, ancak profilin duvar yakınındaki şekli nedeniyle doğru sonuçlara ulaşamamışlardır

Tekrar duvar bölgesine dönecek olursa, düzgün katı bir yüzeyin çok yakınındaki hız çalkantıları, tam duvar üzerinde $u'=v'=w'=0$ olması nedeniyle *kuvvetli biçimde sönümlenir*.

Buna göre türbülanslı sınır tabakanın duvar yakın çok ince bir kısmındaki akım laminer yapıdadır. Bu bölge literatürde "*laminer alt tabaka*" olarak adlandırılır.

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

y^+ duvar bölgesindeki akımı tanımlayan bir *lokal Reynolds sayısı* olduğuna göre bu Reynolds sayısının, hakim akımın laminer olduğunu belirleyen, bir alt sınır değeri olmalıdır. Bu alt sınırla belirlenecek bir y yüksekliğinin altında kalan sınır tabaka bölgesi *laminer alt tabaka* olacaktır

Duvar üzerinde $\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$ olduğundan laminer alt bölgede

$\tau = \tau_w$ olduğu varsayılabilir.

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_w \neq f(y) \quad U(0)=0 \text{ olmak üzere} \quad U = \frac{y\tau_w}{\mu}$$

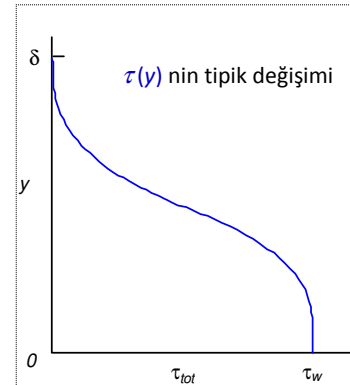
integre edilerek

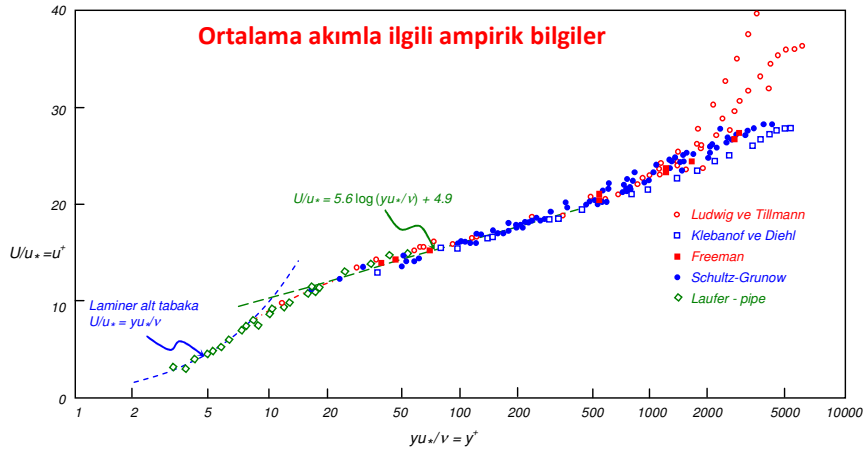
u_* ile boyutsuzlaştırılarak

$$\frac{U}{u_*} = \frac{y\tau_w}{\mu} \frac{u_*}{u_*^2} = \frac{y\tau_w}{\mu} \frac{u_*}{\tau_w/\rho} = \frac{yu_*}{\mu/\rho} \Rightarrow \frac{U}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}$$

veya duvar kanunu
değişkenleri cinsinden

$$u^+ = y^+$$





Yukarıdaki şekilden $u^+ = y^+$ bağıntısını $y^+ \approx 5 \div 7$ değerlerine kadar izlediği deneysel verilerin görülmektedir

Bu görüntü laminar bir alt tabakanın varlığını doğrulamaktadır. Tabakanın kalınlığı δ^+ 'nin %1 'inden daha küçüktür.

Sınır tabakanın kalınlığı kabaca $\delta^+ = O(5000)$ mertebesinde olup $y^+ \approx 5-7$ büyüklüğü de δ^+ 'nın $1/1000$ i civarındadır.

UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

15

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Böylece biri **alt tabakaya** diğeri de **dış tabakaya** ait olmak üzere başarılı iki korelasyon kanunu ortaya konulmuştur.

$$\frac{U - U_e}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right); \quad \frac{U}{u_*} = g\left(\frac{yu_*}{\nu}\right)$$

Fizik gereği bu iki bölge arasındaki geçiş ani olamaz. Aksine arada ortak bir birleşme bölgesi yer almalıdır ve bu bölgede her iki bölgedeki bağıntılar geçerli olmalıdır.

Bu bağıntılar yeniden düzenlenerek

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{U_e}{u_*}; \quad \frac{U}{u_*} = g\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)\left(\frac{\delta u_*}{\nu}\right)\right]$$

Verilmiş bir sınır tabaka hız profili için

$$\frac{U_e}{u_*}; \quad \frac{\delta u_*}{\nu}$$

büyüklikleri birer sabit olup y ile değişmez.

Buna göre, g fonksiyonu içindeki

$$\frac{\delta u_*}{\nu}$$

sabit çarpanı fonksiyonun dışında toplam şeklindeki bir sabitle aynı etkiye sahip olmalıdır.

Böyle bir özellik sadece bir logaritma fonksiyonunda vardır. Çünkü çarpımın logaritması iki logaritmanın toplamı şeklinde yazılabilir.

UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

16

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Buna göre, duvar bölgesindeki ve dış bölgedeki hız profilleri için logaritmik bağıntılar tanımlanarak:

$$\frac{U - U_e}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{U - U_e}{u_*} = A \log\left(\frac{y}{\delta}\right) + B$$

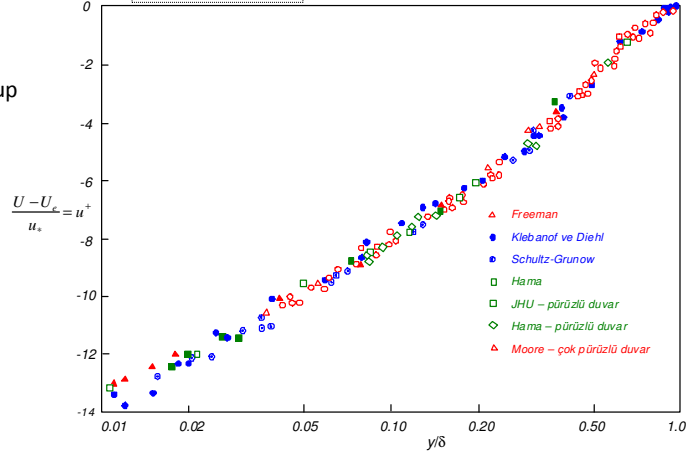
$$\frac{U}{u_*} = g\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{U}{u_*} = A \log\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C$$

Düz levhaya ait verilerle daha önce sunulan, duvar kanununa ait grafik logaritmik ölçekte tekrar çizilmiş olup şekilde görülmektedir.

Clauser (1956) bu şekilde çizilen veriyi dikkate alarak logaritmik bağıntılardaki sabitler için

$$A=5.6, B=-2.5 \text{ ve } C=4.9$$

değerlerini önermiştir.



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M. Adil Yükselen

17

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Bazı araştırmacılar aynı veri için Clauser'inkinden çok az farklı başka sabit değerleri elde etmiştir.

Başka araştırmacılar bağıntıları tabii logaritma ile yazarak A sabitine $K=\ln(10)/A$ şeklinde bağlı olan bir başka K sabiti kullanmışlardır.

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C \quad A=5.6 \text{ için } K=0.41$$

Coles (1956) *sınır tabakanın dış bölgesindeki hız profillerini* tanımlamak için "*iz kanunu*" kavramını ortaya koymuştur.

Coles, hızlarda logaritmik kanuna göre görülen sapmaların, $y=\delta$ *daki maksimum sapma* ile normalize edildiği takdirde sadece y/δ *nın fonksiyonu* olduğunu dikkate almıştır.

Bu normalize edilmiş sapmaları, bir $W(y/\delta)$ *iz fonksiyonu* ile belirterek $W(0)=0$ ve $W(1)=2$ olmak üzere korelasyon gerçekleştirmiştir.

$$\frac{U/u_* - \left[\frac{1}{K} \ln\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C \right]}{U_e/u_* - \left[\frac{1}{K} \ln\left(\frac{\delta u_*}{\nu}\right) + C \right]} = \frac{1}{2} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{Coles iz fonksiyonu}$$

UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M. Adil Yükselen

18

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Coles (1956) W fonksiyonunu

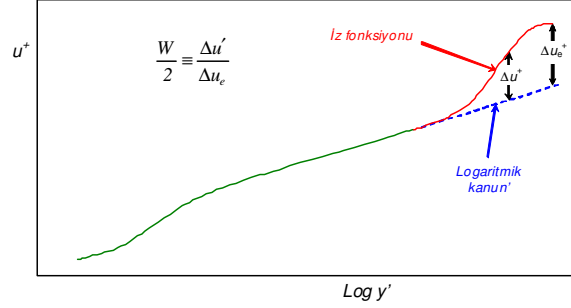
$$W\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right)$$

şeklinde önermiştir.

Sonuç olarak iz kanunu birleşme bölgesini ve üst bölgeyi birlikte tanımlayacak biçimde

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C + \frac{\Pi}{K} W\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

Burada $\Pi = -KB/2$ bir iz parametresi olup, $B = -2.5$, için $\Pi = 0.51$ dir (Coles 0.55 değerini tavsiye etmiştir).



Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Sonuç olarak türbülanslı sınır tabakanın tamamı *dört bölge*den oluşmuş gibi düşünülebilir. Kovaszný'e (1967) göre her bir bölgenin kendi uzunluk ve hız skalası vardır.

- En alttaki *laminer alt-tabaka*nın uzunluk skalası ν/u_* , hız skalası ise u_* dir.
- *İç bölge*nin uzunluk ve hız skalaları sırasıyla y ve u_* dir.
- *Dış bölge*nin uzunluk skalası δ , hız skalası ise U_e dir.
- Corrsin ve Kistler (1955) "*süper-tabaka*" adında dördüncü bir tabaka daha tanımlamıştır.

Süper tabaka sınır tabakanın dış kenarındaki viskoz tabaka ile viskoz olmayan dış akım arasında yer alan ince ve kıvrımlı bir geçiş bölgesidir.

Bu bölgede hız skalası olarak "*katılım hızı*" alınabilir. Bu, dış akımdan sınır tabaka içerisine birim zamanda giren akım debisi ile orantılı bir hızdır. Aynı zamanda türbülans ara-yüzünün türbülanslı olmayan dış akıma nazaran ilerleme hızını ifade eder.

Kovaszný (1967)
katılım hızını

$$V_0 = U_e \frac{d}{dx} (\delta - \delta^*)$$

şeklinde tanımlayıp
süper-tabaka için

$$\frac{10\nu}{V_0}$$

şeklinde bir uzunluk
skalası oluşturmuştur

Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

Alt ve dış bölgeler için yazılan logaritmik bağıntılardan U ve y elimine edilerek

$$\left. \begin{aligned} \frac{U - U_e}{u_*} &= A \log\left(\frac{y}{\delta}\right) + B \\ \frac{U}{u_*} &= A \log\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C \end{aligned} \right\} \frac{U_e}{u_*} = A \log\left(\frac{\delta u_*}{\nu}\right) + C - B \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \log\left(R_\delta \sqrt{\frac{C_f}{2}}\right) + C - B$$

şeklinde bir *yüzey sürtünme kanunu* bulunabilir

Bu bağıntı **yaklaşık biçimde yazılarak** veya **ampirik verilere eğri uydurularak** başka, daha basit açık formüller de türetilmiştir.

En basit birisi *Blasius*'un, *Schultz-Grunow* (1940) tarafından da doğrulanan bağıntısıdır

$$C_f = 0.0456 (R_\delta)^{-1/4}$$

(yaklaşık $R_x = 10^7$ değerine kadar geçerli)

Çoğu kimse tarafından kullanılan bir başka bağıntı

$$\frac{1}{C_f} = 4.15 \log(R_x C_f) + 1.7$$

Schoenherr (1932)

L uzunluğunda bir düz levha üzerinde türbülanslı sınır tabaka halinde sürtünme direnci katsayısı, C_D için bu iki araştırmacı şu bağıntıları elde etmiştir:

$$C_D = \frac{0.427}{(\log R_L - 0.407)^{2.64}} \quad \frac{1}{C_D} = 4.13 \log(R_L C_D)$$

UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M. Adil Yükselen

21

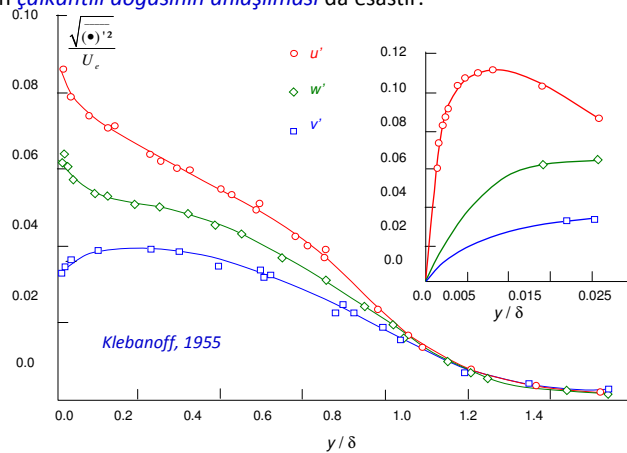
Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Önceki kısımda yapılan analizin amacı her ne kadar *ortalama akımın genel özelliğinin anlaşılması* olarak ortaya konulmuş olsa da türbülanslı akımın *çalkantılı doğasının anlaşılması* da esastır.

Şekilde bir *düz levha* üzerindeki *türbülanslı* sınır tabakada üç doğrultudaki *türbülans şiddeti dağılımları* yer almaktadır.

Akım doğrultusunda türbülans şiddetinin en büyük olduğu, yanal yöndeki türbülans şiddetinin de dikey yönden daha büyük olduğu görülmektedir:

$$\frac{\sqrt{u'^2}}{U_e} > \frac{\sqrt{w'^2}}{U_e} > \frac{\sqrt{v'^2}}{U_e}$$



Bunun nedeni akımın yanal doğrultularda salınım serbestisi olmasına karşın duvarın direkt kısıtlayıcı etkisi nedeniyle aynı serbestinin dikey doğrultuda olmayışındır.

UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M. Adil Yükselen

22

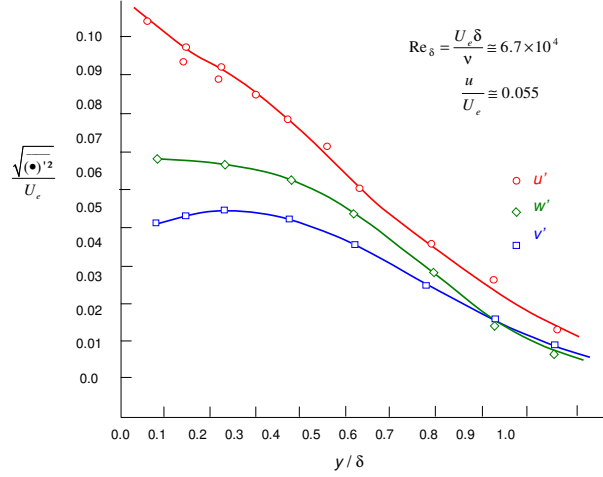
Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Pürüzlü bir düz levha üzerindeki akım için *Corrsin ve Kistler (1954)* tarafından elde edilen *türbülans şiddeti profilleri* de şekil de yer almaktadır.

Buradaki pürüzlülük *buruşturulmuş kağıt* biçiminde olup *iki-boyutlu* ve yaklaşık *sinüzoidal*dir.

Pürüz yüksekliği *0.2 cm* olup bu yükseklik akımı tamamen pürüzlü rejime sokmak için yeterlidir.

Bulunan *türbülans şiddeti* düzeyleri düzgün duvar halindeki çok daha fazladır. Fakat üç bileşenin birbirine göre sıralaması aynıdır.



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

23

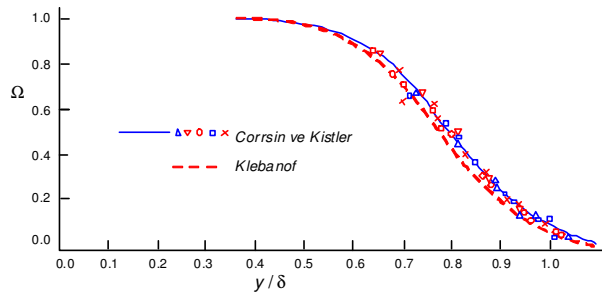
Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Türbülanslı bir sınır tabakanın *dış* kenarı *zamana bağlı, düzgün olmayan bir sınırla* karakterize edilir. Bunu anlamak için $y=\delta$ ortalama konumuna bir sıcak-tel anemometresi yerleştirilirse anemometrenin *aralıklı* olarak *türbülanslı akım* ve *viskoz olmayan akım* ölçtüğü görülür.

Bu durum "*aralıklılık* (intermittency)" adı verilen ve $(0 \div 1)$ arasında değişen bir Ω büyüklüğü ile yansıtılır. Ω büyüklüğü akımın ne kadar süre ile türbülanslı olduğunu oransal olarak belirtmektedir.

Bazı ölçme sonuçları şekilde sunulmuştur.

Sınır tabakanın dışına yaklaşıldıkça aralıklılığın 1 değerinden hayli küçük kaldığı görülmektedir.



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

24

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Sınır tabaka içinde akışkanın x-doğrultusundaki momentumunun türbülans tarafından dikey doğrultuda taşındığı bilinen bir husustur.

Bu olay boylamasına ve dikey doğrultudaki çalkantı hızlarının

$$-\overline{u'v'}$$

şeklindeki korelasyonu ile ilişkilidir.

Bu büyüklük akışkanın yoğunluğu ile çarpılırsa gerilme boyutunu alır

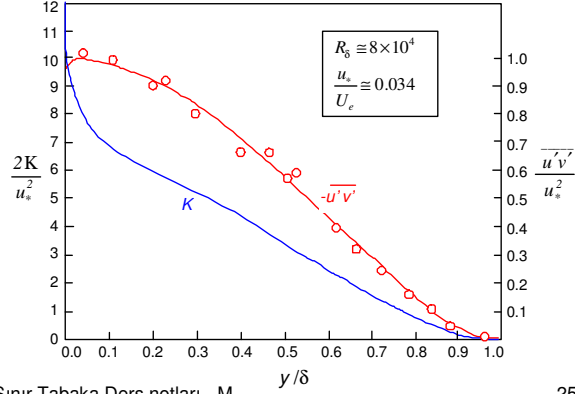
$$-\rho \overline{u'v'}$$

Türbülanslı kayma gerilmesi
Reynolds gerilmesi

Ölçülmüş Reynolds gerilmelerinin sürtünme hızıyla normalize edilmiş biçimdeki bir grafiği şekilde sunulmuştur.

Bu büyüklük duvar yakınında en büyük değerini almakta olup duvarın daha yakınındaki ince laminer alt-tabakanın içerisinde aniden sıfıra düşmektedir.

K : Türbülans kinetik enerjisi



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

25

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Laminer alt bölgedeki değişim şeklinde genişletilmiş olarak görülmektedir.

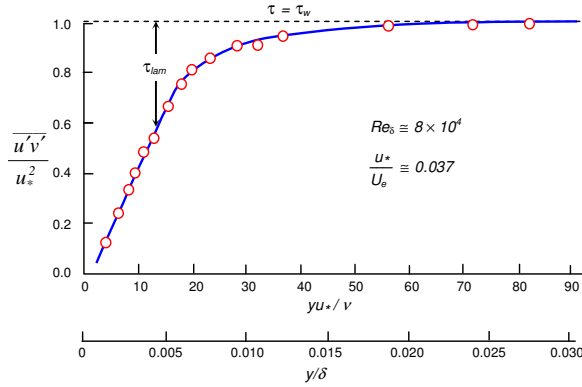
K : Türbülans kinetik enerjisi üç çalkantı hız bileşeninin birim kütle başına kinetik enerjisi olup

$$K' \equiv \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2}$$

$$K \equiv \frac{\rho}{2} \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{\rho}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Akımın ne kadar türbülanslı olduğunu tarif etmek için herhangi bir büyüklük kullanılması gerekirse, en mantıklı seçim türbülans kinetik enerjisi olacaktır.



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

26

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Türbülans çalkantılar geniş bir *zaman ölçeği aralığında* oluşur. Bunu göstermek üzere boylamasına türbülans çalkantılarının spektra ölçümlerinin bazıları dalga numarasının (k_1) fonksiyonu olarak şekilde sunulmuştur.

Burada

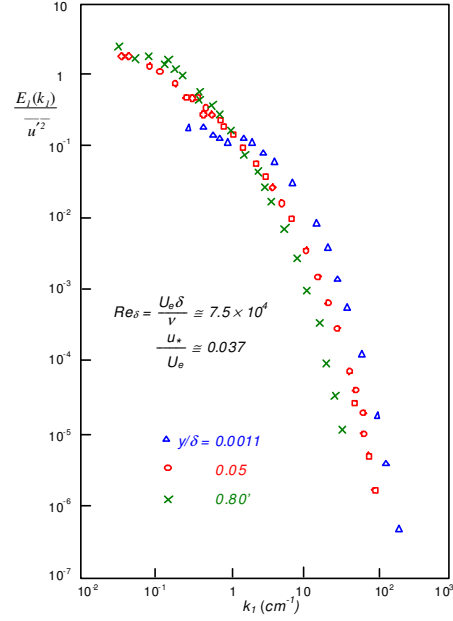
$$k_1 \equiv \frac{2\pi \times \text{frekans}}{\text{ortalama hız}}$$

$E_1(k_1)$ büyüklüğü de $(k_1) \div (k_1 + dk_1)$ bandındaki boylamasına türbülans enerjisinin miktarı olup

$$\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(k_1) dk_1$$

Dalga sayısının büyük değerlerinde farkedilir bir hareket görülmektedir.

Katı duvar büyük ölçekli hareketleri engellediği için duvara yaklaştıkça daha büyük ölçekli girdapçıklar (eddy) içerisindeki enerji azalmaktadır



UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

27

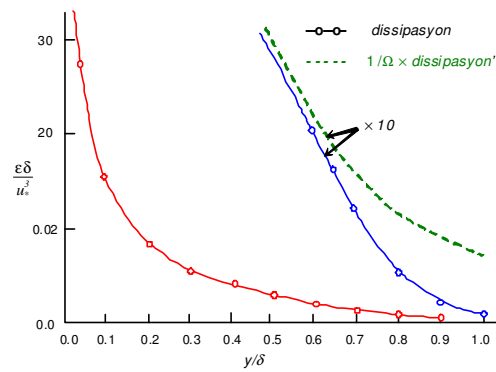
Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Herhangi bir türbülanslı kaymalı akımda türbülans enerjisinin üretimi, taşınımı, yayılımı ve dissipasyonu söz konusudur

Dissipasyon başlıca laminar viskozitenin daha küçük ediler üzerindeki etkisinden kaynaklanır.

Bu büyüklüğü ölçmek zordur. Fakat bazı sonuçlar şekilde gösterilmiştir.

Akımın tam türbülanslı bölgelerinde dağılımı görmek için bu gibi sonuçları aralıklılığın etkisine bağlamak alışlagelmiştir.



UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

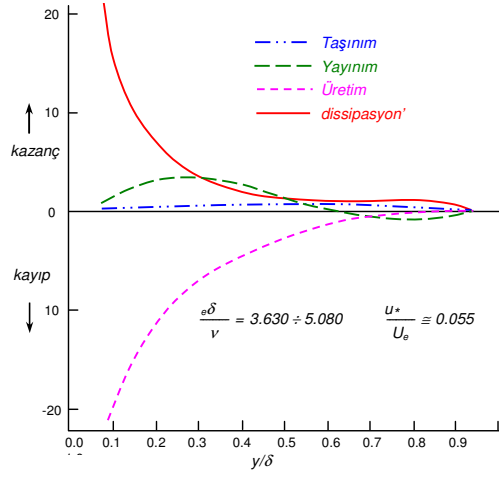
28

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Yukarıdaki belirtilen bütün proseslerin dağılımı şekilde sunulduğu gibi bir türbülanslı kinetik enerji dengesi biçiminde gösterilebilir.

Dış kenar yakınları hariç bütünsel dengeye ana katkılar üretim ve dissipasyondan kaynaklanmaktadır.

Bu ikisi hemen hemen birbirini dengelemektedir



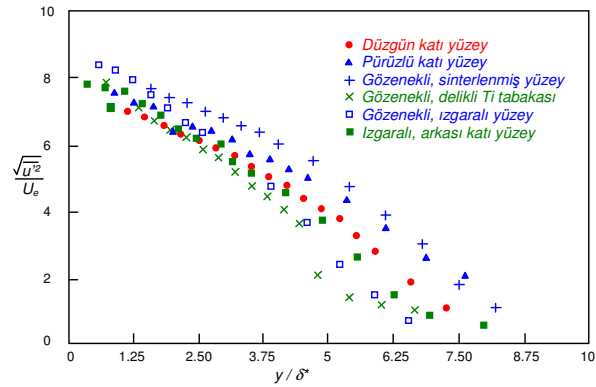
UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

29

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Geçirgen yüzeyler üzerindeki akımların türbülans büyüklükleriyle ilgili bilgi, ortalama akımla ilgili olanlardaki gibi katı yüzeydekilere kıyasla daha zayıftır.

Daha önce ortalama akımın tartışıldığı altı yüzey üzerinde (üçü katı üçü geçirgen) eksenel ve normal doğrultulardaki türbülans şiddetleri ve Reynolds gerilmelerine ait bir kısım veri izleyen şekillerde sunulmuştur.

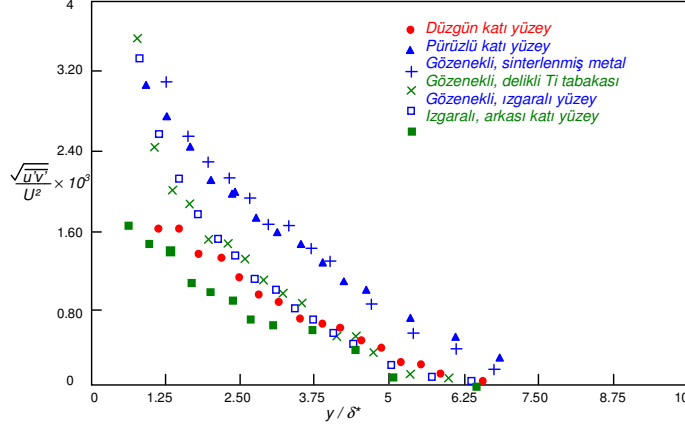


UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

30

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Geçirgen yüzeyler üzerindeki akımların türbülans büyüklükleriyle ilgili bilgi, ortalama akımla ilgili olanlardaki gibi katı yüzeydekilere kıyasla daha zayıftır.



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

31

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Türbülansın çalkantı doğasını yansıtan çeşitli büyüklüklere ilişkin ölçüm sonuçlarına ilaveten bu büyüklüklerle ilgili proseslerin fiziksel bir tasviri de faydalıdır.

Türbülans şiddetleri gibi bu büyüklükler de zaman üzerinde ortalamalardır.

Türbülanslı akımın gerçek fiziğini anlamak için ayrı, zamana bağlı türbülans olaylarının davranışını bilmeye ihtiyaç vardır. Buradaki kısa anlatım ana hatlarıyla Kline ve Robinson (1990) tarafından yapılan incelemeye dayanmaktadır.

Münferit edifi gerçekten açık ve özellikle yardımcı değildir. Zira türbülanslı akımda aynı zamanda ve aynı yerde çok çeşitli boyutlarda ediler mevcuttur. Bu bakımdan akışkan kümeleri ve girdap çizgileri düşünmek daha faydalıdır.

Bir türbülanslı akım içerisinde bir akışkan kümesinin bir konumdan diğerine hareket ettiği söylenebilir. Bu nosyon Reynolds gerilmesini tanımlamak için kullanılacaktır.

Türbülanslı akım kabaca girdap çizgilerinin süperpozisyonu olarak dikkate alınabilir.

UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

32

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Türbülanslı akım kabaca girdap çizgilerinin süperpozisyonu olarak dikkate alınabilir.

Buna göre d çapında, L uzunluğunda ve açılal hızı ω olan bir girdap çizgisi göz önüne alınırsa, bunun

kütlesi $\rho L d^2$ ile,
kinetik enerjisi $\rho L d^4 \omega^2$ ile,
açılal momentumu da $\rho L d^4 \omega$ ile orantılıdır.

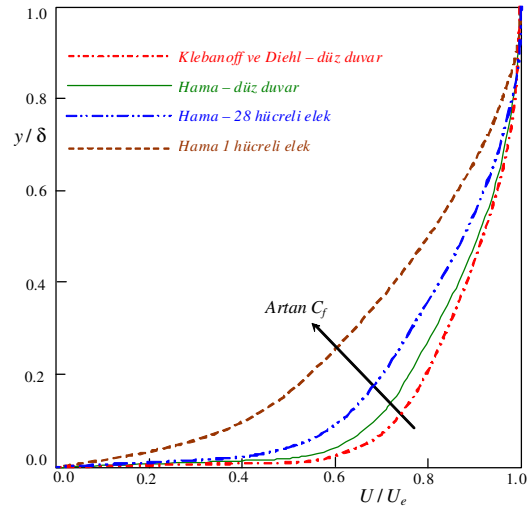
Bu girdap elemanı, kütlesi ve açılal momentumu sabit kalmak kaydıyla sündürülürse (ki bu düşük yayılım için iyi bir yaklaşımdır), L arttıkça çap azalacak ve açılal hız artacak bu da kinetik enerjiyi arttıracaktır.

Böylece elemanı uzatmak için uçları üzerinde yapılan iş elemanın kinetik enerjisinde artış yaratmaktadır.

Bu durum daha önce belirtilen enerji kaskadının tasvirini sağlar. Enerji büyük ölçekli hareketlerden bunlar içindeki küçük ölçekli hareketlere doğru, küçük ölçekli hareketlerdeki girdap çizgilerinin büyük ölçekli hareketlerle sündürülmesi sonucu, akmaktadır.

Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

Ortalama hareketin iki-boyutlu olduğu türbülanslı bir akımda girdap çizgileri daha ziyade akımla çaprazdır. Sündürme de bu doğrultuda olacağından türbülans üç-boyutlu olacaktır. Ortalama girdaplılığın çoğu, ortalama hız profilinin şekline göre duvar civarında yoğunlaşmıştır (Şekil 7.2). Bu husus girdap sünmesinin bir başka sonucunu ortaya koyar: girdap elemanlarının duvar civarında rastgele yükselmesini ani çalkantılar ve patlama (bursting) ve dış bölgeye sıçramalar izler.



Türbülanslı akımların analizi

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Sabit özellikli akışkanın
daimi olmayan,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

sıkıştırılmaz akımı için
Navier-Stokes denklemleri

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Bu denklemler çıkartılırken rastgele çalkantılı bir hareket hariç tutulmamıştır.

Türbülans olayı üç-boyutlu, çok geniş bir aralıktaki ölçek ve frekanslara sahip çalkantılar içeren biçimde zamana rastgele bağlı, büyük bir hesaplama problemi yaratmakta olup, denklemler yukarıdaki şekliyle bu hesaplamaları kolaylaştırmamaktadır.

Türbülanslı akımların analizi

Türbülanslı sınır tabaka konusuna başlarken tasarım ve analiz amacı için ekseriyetle sadece zaman-ortalama akımla ilgilendiği belirtilmiştir.

Buna göre akıma ait her
bir büyüklük

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) + u'(x, y, z, t)$$

şeklinde bir ortalama büyüklük ile bir
çalkantı kısmına ayrılıp

denklemlerde yerleştirilir. Sonra her bir terimin zaman üzerinde ortalaması alınabilir.

Ortalama alma ile ilgili bazı kurallar

$$\begin{aligned} f &= F + f' \\ g &= G + g' \end{aligned}$$

şeklindeki iki
fonksiyon için

$$\overline{f'} \equiv 0 \quad \overline{f + g} \equiv F + G$$

$$\overline{F} \equiv F \quad \overline{f \cdot g} \equiv F \cdot G$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial s} \equiv \frac{\partial F}{\partial s} \quad \overline{\int f ds} \equiv \int F ds$$

ortalama kuralları
geçerlidir

Buradaki üst çizgi yer aldığı büyüklüğün ortalamasının alındığını belirtmektedir.

Türbülanslı akımların analizi

Burada sadece
2-B, türbülanslı sınır tabakalarla
ilgilenecektir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Süreklilik denklemini için ortalama

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Zaman ortalamasıyla}} \quad \overline{\frac{\partial u}{\partial x}} \equiv \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial v}{\partial y}} \equiv \frac{\partial V}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

Ayrıca

$$\frac{\partial(U + u')}{\partial x} + \frac{\partial(V + v')}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

Görüldüğü gibi ortalama akım için süreklilik denklemini laminer akımdakiyle aynıdır. Anlık çalkantılar da aynı biçimde bir süreklilik denklemini sağlamaktadır.

Türbülanslı akımların analizi

Momentum denklemini için ortalama

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Momentum denklemindeki non-lineer terimlerin
incelenmesi sırasında dikkatli olunmalıdır

Taşıma terimlerine süreklilik denklemini eklenerek

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_0 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}$$

Ortalama ve çalkantı büyüklükleri cinsinden ifadeler kullanılarak

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{\partial(U + u')^2}{\partial x} + \frac{\partial(U + u')(V + v')}{\partial y} = \frac{\partial(U^2 + 2Uu' + u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial(UV + Vu' + Uv' + u'v')}{\partial y}$$

Her bir terimin zaman ortalamaları alınarak

$$\left. \begin{aligned} \overline{\frac{\partial U^2}{\partial x}} &= \frac{\partial U^2}{\partial x} & \overline{\frac{\partial(2Uu')}{\partial x}} &= 0 & \overline{\frac{\partial u'^2}{\partial x}} &= \frac{\partial u'^2}{\partial x} \\ \overline{\frac{\partial UV}{\partial x}} &= \frac{\partial UV}{\partial x} & \overline{\frac{\partial Vu'}{\partial y}} &= \frac{\partial Vu'}{\partial y} & \overline{\frac{\partial Uv'}{\partial y}} &= \frac{\partial Uv'}{\partial y} \\ \overline{\frac{\partial u'v'}{\partial y}} &= \frac{\partial u'v'}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad \frac{\partial(U^2)}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}$$

Türbülanslı akımların analizi

Momentum denklemi için ortalama

İlk iki türev açılarak ve süreklilik denklemi kullanılarak

$$2U \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial V}{\partial y} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} = U \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)}_0 + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}$$
$$= U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}$$

Momentum denklemindeki diğer terimlerin ortalamaları da kolaylıkla alınır

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\overline{U + u'})}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial(\overline{P + p'})}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\overline{U + u'})}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Görüldüğü gibi viskoz terimde önemli bir değişiklik yoktur

Türbülanslı akımların analizi

Momentum denklemi için ortalama

Elde edilen bütün ortalama değerler momentum denkleminde yerleştirilerek

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

Şayet ortalama akım daimi ise ilk terim ortadan kalkacaktır

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

Ayrıca deneylerle doğrulanmıştır ki

$$\frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} \ll \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}$$

Sonuç olarak *daimi akımdaki türbülanslı sınır tabaka* denklemleri

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y}$$

Duvardan yeterince uzakta *laminer kayma gerilmesi* terimi *türbülansla momentum transportu* terimi yanında küçük kabul edilerek ihmal edilebilir.

Türbülanslı akımların analizi

Momentum denklemi için ortalama

Şüphesizdir ki momentum denkleminde momentum transportu terimi ihmal edilemez. Aksi halde denklem tamamıyla laminer akım halindeki döner.

Belirtilen bu terim denklemde türbülanslı akımın çalkantılı doğasının etkisini yansıtan tek terimdir.

Herhangi bir sınır tabaka probleminde olduğu gibi

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y}$$

denklemleriyle ifade edilen türbülanslı akım probleminde de *viskoz olmayan bir dış akım tarafından sınır tabaka üzerine etki eden P(x) basınç dağılımının* bilindiği kabul edilmektedir.

Buna göre bu iki denklemin iki bilinmeyen için (*U ve V*) çözülmesi beklenmektedir.

Bununla birlikte momentum denkleminin sağ taraftaki en son terim (momentum transport terimi) *ilave bir bilinmeyen* olarak yer almaktadır.

Türbülanslı akımların analizi

Reynolds gerilmesi

Momentum denkleminin sağ tarafında yer alan

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y}$$

terimi momentum transferi terimi olup, laminer akımdaki basit *Newtonien kayma* ile aynı rolü oynamaktadır.

Bu bakımdan $-\rho \overline{u'v'}$ { *türbülanslı kayma gerilmesi* veya *Reynolds gerilmesi* } olarak adlandırılmaktadır.

Bu türbülanslı kayma teriminin *laminer viskoz terimden* gelmediği, fakat *viskoz olmayan taşınım sal terimler*den geldiği belirtilmelidir.

Türbülanslı sınır tabaka denklemleriyle çalışırken denklem sisteminin *çözülebilir* hale gelmesi için *Reynolds gerilmesini* içeren terimin de *diğer bağımsız veya bağımlı değişkenler* cinsinden ifade edilmesi gereklidir.

Diğer değişkenlerin hepsi de ortalama değerler olarak dikkate alındığından böyle bir bağıntı *ortalama akım modeli* olarak nitelendirilir.

Türbülanslı akımların analizi

Kapama (closure) problemi

Belirtilen zorluğu yenmenin kolay bir yolu yoktur. Konu, bölümün sonunda daha karmaşık formülasyonlara varacak, fakat hep denklemlerden daha fazla bilinmeyen olacaktır.

Bu fazladan bilinmeyen(ler) hep

$$-\rho \overline{u'v'}$$

gibi türbülans büyüklükleri olacak,

ve *sistemi matematiksel olarak kapatmak* için hep fazladan, genellikle *yarı-ampirik* bağıntılara gerek olacaktır.

Bu durum *türbülanslı akımların "kapatma (closure) problemi"* olarak anılır.

Aslında ortalama akım ve çalkantı büyüklüklerini belirterek veya hareket denklemlerini kullanarak, ya da burada yapıldığı gibi zaman üzerinde ortalama olarak gerçekten önemli hiçbir şey yapılmadığı üzerinde düşünülürse bu şaşırtıcı duruma nasıl gelindiğini kavramak daha kolay olur.

Bu noktaya kadar, matematiksel formülasyonun geliştirilmesinde türbülanslı akımların gerçek doğası hakkında hiçbir şey söylenmemiştir. Formülasyonun tamamlanmasından önce bu konu üzerinde durulmalıdır.

Türbülanslı akımların analizi

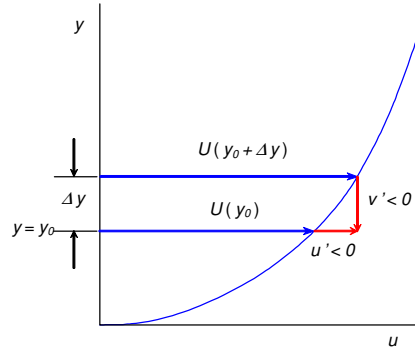
Kayma gerilmesi modeli

Türbülanslı kayma modeli geliştirme konusunda ilerlemeden önce *çalkantılarla momentum transferi* olgusunun fiziksel bir izahını hatırlatmakta yarar vardır.

Şekilde gösterildiği gibi sınır tabakanın $y_0 + \Delta y$ seviyesinde bulunan bir akışkan kümesi daha alt seviyedeki bir y_0 konumuna yer değiştirdiği takdirde eski konumundaki $U(y_0 + \Delta y)$ ortalama hızını koruma eğiliminde olacaktır.

Bu hız akışkan kümesinin yeni konumunda $U(y_0)$ ortalama hızına göre *pozitif işaretli bir u' çalkantı hızı* kadar artmış gözükcektir.

Bu durumda $y_0 + \Delta y$ konumundan $y = y_0$ düzlemine taşınan anlık kütle akımı $-\rho v'$ olup bu kütle yeni konumdaki u' çalkantı hızı ile $-\rho u'v'$ kadar bir momentum artışı yaratacaktır.



Şayet akışkan kümesi alt tabakadan daha üst bir tabakaya yer değiştirirse bunun tersi olacaktır.

Türbülanslı akımların analizi

Kayma gerilmesi modeli

Şayet zaman üzerinde bir ortalama alınırsa *hız çalkantıları vasıtasıyla boylamasına momentumda dikey doğrultuda oluşan momentum transferi* () olarak elde edilir. $-\rho \overline{u'v'}$

Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

Bir ortalama akım türbülans analizi geliştirmek için önceki incelemeler çerçevesinde

$$\tau_T \equiv -\rho \overline{u'v'} = f(x, y; U, V, P \text{ veya } U_e, \mu, \rho)$$

şeklinde bir bağıntı bulmaya çalışılmalıdır.

Bu bağıntının ampirik bilgilere dayanması gerektiği açıktır. Bağıntının sağ tarafında türbülans büyüklüklerinin yer almadığı belirtilmelidir .

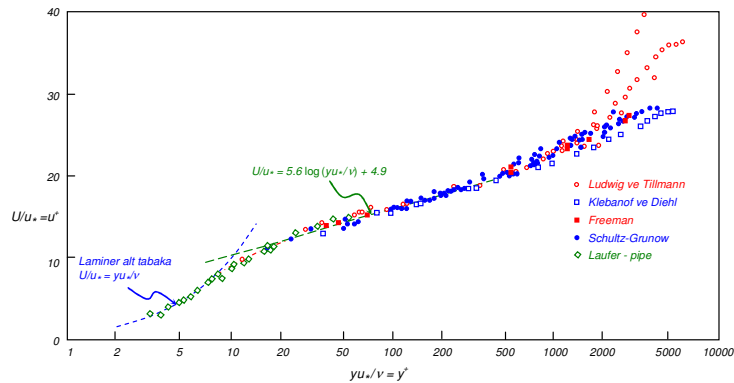
Bu noktada modelleme çabalarının amacını açıkça belirtmek için sınır tabaka alt bölgesini örnek olarak dikkate almak faydalı olacaktır.

Türbülanslı akımların analizi

Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

Biçimsel olarak $\tau_T \equiv -\rho \overline{u'v'} = f(x, y; U, V, P \text{ veya } U_e, \mu, \rho)$ ile belirtilen

bulunacak bağıntı sınır tabaka denklemlerinde kullanıldığında şekildeki veri arasından geçen dolu çizgi elde edilecektir.



Bu tipten bir analiz yarı-ampirik olarak nitelendirilir. Ampirik bir yaklaşım basitçe veriye uydurulmuş eğrileri kullanacaktır.

Türbülanslı akımların analizi

Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

Belirtilen amaç birbiriyle ilişkili iki formülasyonla başarılmıştır.

İlki Boussinesq (1877) tarafından, laminar akıma benzetme yoluyla ortaya konmuştur

$$\tau_T \equiv -\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y}$$

edi viskozitesi
formülasyonu

Buradaki μ_T edi viskozitesinin sadece akışkanın değil akımın durumuna bağlı olacağı beklenmelidir. Yani edi viskozitesi laminar viskozite gibi yalnızca akışkanın termofiziksel bir özelliği değildir.

İkinci formülasyon Prandtl (1925) tarafından önerilmiştir

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

karışım uzunluğu
formülasyonu

Karışım uzunluğu bir etkileşim mesafesi olarak, moleküller arası ortalama serbest yörüngeye benzetilebilir. Sadece, moleküller arasında değil de türbülans kümeleri arasında tanımlanmaktadır.

Türbülanslı akımların analizi

Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

Akışkan kümelerinin hareket mesafesi olarak Δy değil de şekilde gösterildiği gibi l_m alınır:

Şayet akışkan *üst* tabakadan *alt* tabakaya yer değiştiriyorsa, $v'(y_0) < 0$ dir ve

$$u'(y_0) = U(y_0 + l_m) - U(y_0) \approx l_m \frac{\partial U}{\partial y}$$

şeklinde bir bozuntu hızı tanımlanabilir.

Şayet akışkan kümesi aşağıdan yukarıya çıkıyorsa bu defa $v'(y_0) > 0$ olup, $u'(y_0)$ bozuntu hızı da

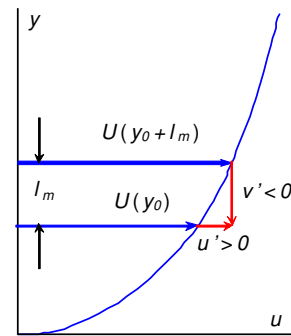
$$u'(y_0) = U(y_0 - l_m) - U(y_0) \approx -l_m \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{şeklinde dir.}$$

Süreklilik gereği, $v' \sim -\frac{\partial U}{\partial y}$ olup, bu son iki bağıntı doğrudan karışım uzunluğu bağıntısını verir.

Yalnız bu bağıntıda τ_T nin işaretini doğru verebilmek için

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \quad \text{yerine} \quad \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

yazmak daha doğru olur.



Türbülanslı akımların analizi

Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

Karışım uzunluğu formülasyonundaki l_m için de **bağımsız değişken veya parametrelerin** ya da **ortalama bağımlı değişkenlerin** fonksiyonu olan ilave bir bağıntıya ihtiyaç vardır. Bu bağıntı da edi viskozitesi gibi, **akışkanın değil akımın durumunun** bir fonksiyonu olacaktır.

Bu aşamada

$$\tau_T \equiv -\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

formülasyonlarıyla ilgili bazı gözlemler uygun olacaktır

İlkin, **edi viskozitesi** ve **karışım uzunluğu** formülasyonları, transport prosesini temsilen ilgili bağımlı değişkenin gradyantını ($\partial U/\partial y$) içermeleri nedeniyle **gradyan transport formülasyonları** olarak anılır.

Buna göre **laminer momentum** ve **ısı enerjisi transportu** için yazılan

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y}, \quad q = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

bağıntıları da **gradyan transport formülasyonları** olmaktadır. Türbülanslı kaymalı akımlar için bu gibi formülasyonların özel bir zafiyeti vardır

Türbülanslı akımların analizi

Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

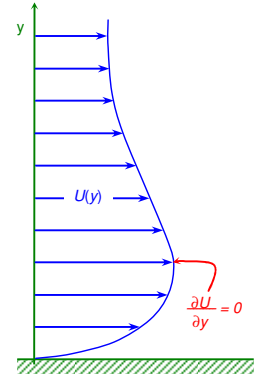
Bu zafiyeti şekildeki gibi bir hız profili halinde kolayca görmek mümkündür. Bu tip profiller, örneğin, duvardaki bir yarıktan türbülanslı akıma teğetsel doğrultuda yüksek hızla akışkan enjeksiyonu halinde elde edilir.

$U(x)$ ortalama hız profili bir maksimuma sahip olup $\partial U/\partial y=0$ olan bir nokta mevcuttur. Bu noktada her iki formülasyon da

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = 0 \quad \text{verir.}$$

Formülasyonların bu zayıflıklarını gidermenin basit bir yolu yoktur. Bununla birlikte çoğu sınır tabaka akımında bu şekildeki maksimum veya minimumlar bulunmamaktadır.

Bir iz bölgesinde olduğu gibi simetrik bir hız profili için simetri düzleminde $\partial U/\partial y=0$ olup yine aynı durum görülmektedir.



Türbülanslı akımların analizi

Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

İki formülasyonla ilgili ikinci genel gözlem de bu ikisinin esasen eşdeğer olmasıdır.

$$\tau_T \equiv -\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y}$$

formüllerine
bakılarak

$$\mu_T = \rho l_m^2 \frac{\partial U}{\partial y}$$

yazılabilir.

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$$

Dolayısıyla μ_T için bir bağıntı biliniyorsa bu son bağıntıdan l_m için mütakabil bağıntı bulunabilir.

Edi viskozitesi ve karışım uzunluğu için özel modeller ileride çıkartılacaktır.

Bundan önce, türbülanslı sınır tabakaların analizi için integral yöntemlere göz atılacaktır.

Türbülanslı akımların analizi

Ortalama akım integral yöntemleri

Türbülanslı akımların analizi için de **laminer akımlardaki integral yöntemlerinin** benzeri yöntemler mevcuttur.

Bunlar türbülanslı analizde kabaca, laminer haldeki gibi diferansiyel formülasyonlara dayanan bağıntıları kullanırlar.

Yöntemlerin uygulanması genellikle basit olup mühendislik çalışmaları için uygun sonuçlar vermektedir.

Burada yöntemlerden ikisi kısaca izah edilecektir.

Bunlardan daha eski olan Prandtl yöntemi sadece çok basit problemler için uygundur.

Daha yeni olanı ise Moses (1969) tarafından ortaya konmuş olup daha genel akımlar için kullanılabilir.

Her iki halde de gerekli türbülanslı kayma modellemesinin analize nasıl girdiği dikkati çekmektedir.

Türbülanslı akımların analizi

Prandtl yöntemi

İntegral yöntemin türbülanslı akımda ilk uygulaması Prandtl (1927) tarafında düz-levha problemi için yapılmıştır.

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{\nu_w}{U_e} = \frac{C_f}{2} \quad \text{Von Karman momentum-integral denklemi}$$

Bu denklem, türbülanslı daimi bir ortalama akım için, bütün bağımlı değişkenler "ortalama büyüklükler" şeklinde değerlendirilmek suretiyle kullanılabilir.

Geçirgen olmayan bir düz-levha üzerindeki akım için

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

Momentum kalınlığı $\theta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) \frac{U}{U_e} dy$ buradaki $U(y)$ ortalama hız profilidir

Çözüm için, laminer halde olduğu gibi, "kabul edilmiş" bir hız profiline ihtiyaç vardır

Türbülanslı akımların analizi

Prandtl yöntemi

Düz levha üzerindeki türbülanslı akım için ortalama hız profili kabaca

$$\frac{U}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$$

$$R_x \approx 10^6 \div 10^7 \quad \text{için} \quad n \approx 7$$

Bu hız profili ile öteleme ve momentum kalınlıkları

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{8}, \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{7}{72}$$

Bu hız profilinin izleyen aşamada duvar kaymasını hesaplamak için kullanılması beklenmektedir.

Ancak duvar kayma gerilmesi tanımı içerisinde $(\partial U / \partial y)_w$ türevi yer almakta olup, hız profili için verilen üssel bağıntıya göre

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{U_e} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n} = \frac{1}{\delta^{1/n}} \frac{\partial y^{1/n}}{\partial y} = \frac{1}{\delta^{1/n} n} y^{1/n} y^{-1} = \frac{1}{ny} \frac{y^{1/n}}{\delta^{1/n}} = \frac{1}{ny} \frac{U}{U_e}$$

$n=7$ için duvar üzerinde $\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{U}{7y} \right)_{y=0} \rightarrow \infty$

Türbülanslı akımların analizi

Prandtl yöntemi

Buna göre türbülanslı akım hesabında kayma için ilave bir bilgiye gerek duyulacaktır .

Prandtl yönteminde, δ öncelikli bağımlı değişken olup, sadece duvar üzerindeki C_f kaymasının δ cinsinden $C_f(R_\delta)$ şeklinde bilinmesine ihtiyaç vardır.

Laminer analiz için duvar kayması farklı biçimde ele alınmış olmakla birlikte δ aynı rolü oynamıştır.

Prandtl (1927) gereken C_f için bağıntısını kullanmıştır.

$$C_f = 0.0456 (R_\delta)^{-1/4}$$

Böylece $\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} = \frac{0.0456}{2(R_\delta)^{1/4}} \Rightarrow \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{0.0456}{2} \left(\frac{v}{U_e \delta} \right)^{1/4}$

Düzenlenerek $\delta^{1/4} d\delta = 0.2345 \left(\frac{v}{U_e} \right)^{1/4} dx$

$\delta(0)=0$ olmak üzere $(0 \div x)$ aralığında integre edilerek $\frac{\delta^{5/4}}{5/4} = 0.2345 \left(\frac{v}{U_e} \right)^{1/4} x$

Türbülanslı akımların analizi

Prandtl yöntemi

$$\delta = (0.29314)^{4/5} \left(\frac{v}{U_e} \right)^{1/5} x^{4/5} = 0.375 \left(\frac{v}{U_e x} \right)^{1/5} x \Rightarrow \frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.375}{R_x^{1/5}}$$

Laminer sınır tabaka için Blasius çözümü

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5.0}{R_x^{1/2}}$$

Bu iki bağıntıya göre:	laminer halde	$\frac{\delta(x)}{x} \sim R_x^{-1/2}$	$\delta \sim x^{0.5}$
	türbülanslı halde	$\frac{\delta(x)}{x} \sim R_x^{-1/5}$	$\delta \sim x^{0.8}$

Bu sonuç türbülanslı sınır tabakanın laminer sınır tabakaya kıyasla daha çabuk şekilde kalınlaştığını göstermektedir.

Türbülanslı akımların analizi

Prandtl yöntemi

Prandtl yönteminden elde edilen sonuç nispeten kabardır. Zira:

- Türbülanslı bir sınır tabaka için **en iyi bir değişken gruplaması** üzerine **oturmayan** bir hız profili kullanmaktadır.
- Yöntem geçişi ve levhanın başlangıcındaki laminar akım bölgesini tamamiyle ihmal etmektedir.

Bu yöntemle daha fazlasını yapmak mümkün değildir.

Örneğin, basınç gradyanlı içeren problemler çözülmek istenseydi dP/dx türevinin genel halleri için $C_f(R_\delta, dP/dx)$ şeklinde bilgiye ihtiyaç olacaktır.

Ama, şayet bu fazla bilgi mevcut olsaydı, zaten bu analize de ihtiyaç olmayacaktı

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Moses yöntemi (1969) momentum denkleminin daha genel bir halini kullanmaktadır:

$$\frac{U(y_1/\delta)}{U_e} \frac{d}{dx} \left[R_\delta \int_0^{y_1/\delta} \frac{U}{U_e} d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] - \frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} \left[U_e R_\delta \int_0^{y_1/\delta} \left(\frac{U}{U_e}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] = \frac{\tau_w - \tau(y_1/\delta)}{\mu U_e} - \frac{(y_1/\delta) R_\delta}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$$

Burada y_1/δ büyüklüğü 0 - 1.0 arasında herhangi bir değer olabilir.

$y_1/\delta=1.0$ için bu denklem alışlagelen momentum integral denklemine dönüşür.

$$\frac{d}{dx} \left[R_\delta \int_0^1 \frac{U}{U_e} d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] - \frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} \left[U_e R_\delta \int_0^1 \left(\frac{U}{U_e}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] = \frac{\tau_w}{\mu U_e} - \frac{\delta}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

y_1/δ nın başka değerleri için, ayrı, ilave denklemler elde edilir.

Daha sonra $y_1 < \delta$ olmak üzere ($dx:y1:1$) boyutlarındaki bir kontrol hacmine kütle ve momentumun korunumu ilkeleri uygulanacaktır (ki daha önce $H \geq \delta$ olmak üzere ($dx:H:1$) boyutlarındaki bir kontrol hacmi kullanılmıştı). Sonuçlar arasındaki en büyük farklılık, daha önceki incelemelerde $y = H$ da kayma sıfır olup denklemlerde gözüküyor iken buradaki incelemelerde $y = y_1$ de kaymanın gözükmesidir.

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Moses $y_1/\delta = 1.0$ ve $y_1/\delta = 0.3$ kullanarak iki denklem elde etmiştir. İkinci değer kabaca tabaka boyunca momentum kaybının ikiye bölünmesine karşılık gelmektedir.

Gereken hız profili için Moses iz kanununun yaklaşık bir biçimini kullanmıştır. $W(y/\delta)$ büyüklüğünün tanımıyla birlikte

$$\frac{U/u_* - \left[\frac{1}{K} \ln(yu_*/\nu) + C \right]}{U_e/u_* - \left[\frac{1}{K} \ln(\delta u_*/\nu) + C \right]} = \frac{1}{2} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{denklemini ve}$$

$$\frac{u_*}{U_e} = \sqrt{\frac{C_f}{2}} \quad \text{büyüklüğünü kullanarak} \quad \frac{U}{u_*} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C = \frac{\Pi}{K} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad \text{denklemini yeniden yazmış}$$

ve iz fonksiyonun $W\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \left[3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right]$ şeklinde yaklaşık biçimini elde etmiş

sonuçta $\frac{U}{U_e} \cong 1 + \frac{\sqrt{C_f/2}}{K} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{2\Pi}{K} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left[1 - \frac{1}{2} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \right]$ ifadesine erişmiştir

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Moses, laminer alt tabaka için bir başka polinom kullanmış, yüksek Reynolds sayısındaki akımlarda integral yöntem için bu ince tabaka içerisinde profilin seçiminin önemli olmadığını belirtmiştir. Bu seçim integrallerin değerini önemli ölçüde etkilememektedir.

$$\frac{U}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \quad \text{yerine böyle birleşik bir hız profili almak daha doğrudur}$$

Türbülanslı kayma modeli $\tau_T \cong -\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y}$ edi-viskozitesi modeli

Moses'in kullandığı momentum denkleminde sadece $\tau(y_1/\delta)$ büyüklüğü geçtiğinden bu integral yöntemi için türbülanslı kaymanın bir tek $y/\delta = y_1/\delta$ noktasında modellenmesi yeterlidir. Bu husus yöntemin kuvvetli tarafıdır. Zira türbülans modellemesi sadece gerçekte problemin çıktısı olan yüzey sürtünmesini basitçe almak yerine çok daha temel bir seviyede yapılmıştır.

Moses, Coles (1962) tarafından verilen bir kısım veriye eğri uydurarak elde ettiği $\frac{\mu_T + \mu}{\rho U_e \theta} \Big|_{y_1/\delta} = 0.0225 + \frac{125}{Re_\delta}$

şeklinde tamamiyle ampirik bir edi-viskozitesi modeli kullanmıştır.

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Bütün bunlarla birlikte sistem momentum denkleminin $y_1/\delta = 1.0$ ve $y_1/\delta = 0.3$ de

$$\frac{U}{U_e} \cong 1 + \frac{\sqrt{C_f/2}}{K} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{2\Pi}{K} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left[1 - \frac{1}{2} W\left(\frac{y}{\delta}\right)\right]$$

hız profiliyle birlikte değerlendirilmesi sonucu elde edilen iki adi diferansiyel denklemden oluşmaktadır.

Denkleminin iki bilinmeyenli olup bunlar Re_δ ile ifade edilen $\delta(x)$ ve C_f dir. Bu iki denklem adi-diferansiyel denklem çözümünde kullanılan herhangi bir sayısal yöntemle çözülebilir.

Moses (1969), yöntemini bazı deneysel haller için uygulamış, mevcut integral yöntemlerinden herhangi biri kadar uygun sonuçlar elde etmiştir.

Genel olarak uyum C_f ve $\delta(x)$ gibi bütünsel büyüklükler için en iyi diferansiyel yöntemlerle elde edilenler kadar iyidir.

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Çeşitli hesap yöntemlerinin performansını ortaya koyabilmek için, giderek artan karmaşıklıkta üç adet ters-basınç-gradyantlı akım örnek olarak seçilmiştir.

Ele alınan yöntemlerin hepsi düz levha halinde (sıfır basınç gradyantı) iyi performans sergilemektedir. Olumlu basınç gradyantı halinde performans biraz daha iddiasızdır.

Sözü edilen üç örnek halde

- (1) Clauser'in (1956) daha önce belirtilen denge (equilibrium) hali,
- (2) Schubauer ve Klebanof'un (1950) klasik deneyi,
- (3) Newman'ın (1951) kanat profili ele alınmıştır.

Bu üç akımla ilgili bilgiler de anlamsız hesaplamalara yol açmayacak ve veri ile karşılaştırmaya imkan verecek biçimde yeterince iyi bir şekilde dokümanite edilmiştir.

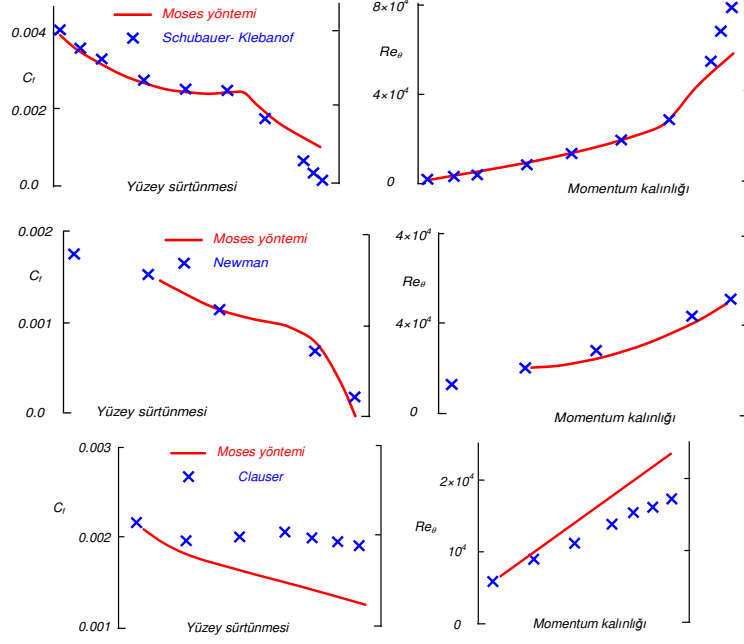
Bu akımlar 1968 de Stanford'da gerçekleştirilen AFOSR-IFP konferansında sınır tabaka hesaplama yöntemleri için test hali olarak seçilmiş en karmaşık akımlardan üçüdür (Kline ve arkadaşları, 1969).

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Moses'in (1969) hesaplama sonuçları $\theta(x)$ ve $C_f(x)$ büyüklükleri için bu üç halde elde edilen verilerle karşılaştırılmıştır.

Schubauer- Klebanof ile Newman hallerinde ayrılmaya kadar uyum iyi iken, Clauser'in denge hali için uyumun zayıf olduğu görülmektedir.



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

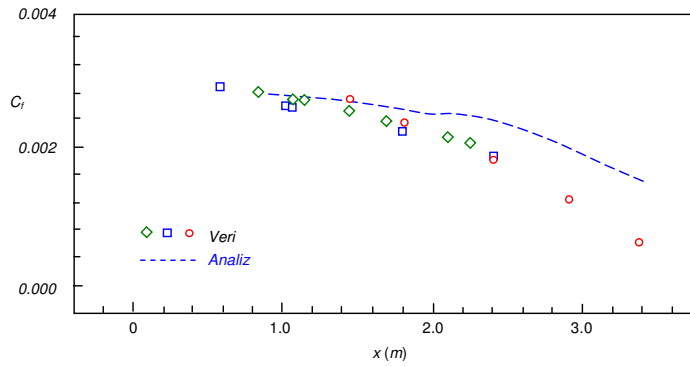
63

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Çeşitli yöntem ve modellerin performansını göstermek için, 1981 de Stanford'da gerçekleştirilen bir başka konferanstaki bazı haller daha ele alınmıştır (Kline ve arkadaşları, 1982).

Samuel ve Joubert (1974) tarafından düşük-hızda ters-basınç gradyantlı halde gerçekleştirilen deney sonuçlarıyla Moses yöntemi sonuçları karşılaştırılmış olup uyum genel olarak iyi gözükmektedir.



UZH 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

64

Türbülanslı akımların analizi

Moses yöntemi

Burada incelenen Moses integral yöntemi laminar akım için daha ince izah edilen Thwaites-Walz integral yöntemiyle birlikte kullanılabilir.

Komple akımı çözecek bir yöntem elde etmek için geçişsel bölgede de Dey ve Nararshima (1990) tarafından önerilen aralıklılık dağılımı alınabilir.

Buradaki temel fikir γ aralıklılık faktörü olmak üzere geçişsel bölgede öteleme kalınlıkları için

$$(1 - \gamma) \delta_{lam}^* + \gamma \delta_{turb}^*$$

şeklinde bir dağılım almaktır.

Türbülanslı akımların analizi

Örnek problem

5m uzunluğundaki bir düz levha $U_\infty = 10 \text{ m/s}$ hızdaki akıma maruz olup düz levhanın bitiminden itibaren yer alan rampa $U_e(x) = 15 - x \text{ m/s}$ şeklinde değişen bir dış akım yaratmaktadır. Akışkanın viskozitesini $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ olarak bu yüzey boyunca $x = 7.0 \text{ m}$ mesafesine kadar türbülanslı sınır tabakanın gelişimini inceleyiniz. Sınır tabaka ayrılır mı, belirleyiniz.

Akımın ilk kısmı düz levha üzerinde ve basınç gradyantsız olup bu bölgede basit bir integral çözümü uygulanarak $x=5$ de δ , θ ve C_f büyüklükleri hesaplanabilir. Hesaplanan bu değerler yüzeyin kalan rampa kısmındaki hesaplar için başlangıç değerleri olarak kullanılacaktır.

Levhanın düz kısmındaki hesaplar için Prandtl yöntemi uygulanırsa

$$R_x = \frac{U_e x}{\nu} \quad \left\{ \begin{array}{l} U_\infty = 10 \text{ m/s} \\ x = 5 \text{ m} \\ \nu = 0.00001 \text{ m}^2/\text{s} \end{array} \right\} \Rightarrow R_x = \frac{10 \times 5}{0.00001} \Rightarrow R_x = 5 \times 10^6$$
$$\delta = \frac{0.375 x}{R_x^{1/5}} \quad \left\{ \begin{array}{l} U_\infty = 10 \text{ m/s} \\ x = 5 \text{ m} \\ \nu = 0.00001 \text{ m}^2/\text{s} \end{array} \right\} \Rightarrow \delta = \frac{0.375 \times 5}{(5 \times 10^6)^{0.2}} \Rightarrow \delta = 0.0857447$$

Türbülanslı akımların analizi

Örnek problem

$$\boxed{R_\delta = \frac{U_e \delta}{\nu}} \quad \Rightarrow \quad R_\delta = \frac{10 \times 0.0857447}{0.00001} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_\delta = 85744.7}$$

$$\boxed{C_f = 0.0456 (R_\delta)^{-1/4}} \quad \Rightarrow \quad C_f = \frac{0.0456}{(857447)^{0.25}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C_f = 0.002665}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} = \frac{0.0456}{2 (R_\delta)^{0.25}} = \frac{0.0228}{\left(\frac{U_e \delta}{\nu}\right)^{0.25}} = \left(\frac{U_e}{\nu}\right)^{-0.25} \frac{0.0228}{\delta^{0.25}} = \left(\frac{U_e}{\nu}\right)^{-0.25} \frac{0.0228}{\left(\frac{0.375 x}{R_x^{0.2}}\right)^{0.25}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \left(\frac{U_e}{\nu}\right)^{-0.25} \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \frac{R_x^{0.05}}{x^{0.25}} = \left(\frac{U_e}{\nu}\right)^{-0.25} \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \frac{\left(\frac{U_e x}{\nu}\right)^{0.05}}{x^{0.25}} = \left(\frac{U_e}{\nu}\right)^{-0.2} \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \frac{x^{0.05}}{x^{0.25}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0.2} \frac{1}{x^{0.2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^\theta d\theta = \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0.2} \int_0^x \frac{dx}{x^{0.2}}$$

UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

67

Türbülanslı akımların analizi

Örnek problem

$$\theta = \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0.2} \frac{x^{1-0.2}}{1-0.2} = \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \left(\frac{\nu}{U_e}\right)^{0.2} \frac{x^{0.8}}{0.8} = \frac{0.0228}{(0.375)^{0.25}} \left(\frac{\nu}{U_e}\right) \left(\frac{U_e x}{\nu}\right)^{0.8} \frac{1}{0.8}$$

$$\frac{U_e \theta}{\nu} = \frac{0.0228}{(0.8)(0.375)^{0.25}} R_x^{0.8} \quad \Rightarrow \quad R_\theta = \frac{0.0228}{(0.8)(0.375)^{0.25}} R_x^{0.8} = 0.0364198 R_x^{0.8}$$

$$R_\theta = (0.0364198) (5 \times 10^6)^{0.8} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_\theta = 8327.5}$$

Buna göre rampa başlangıcında $C_f = 0.002665$ ve $Re_\theta = 8327.5$ değerleri elde edilmektedir.

Hesaplamalar $x=7 m$ noktasına erişinceye kadar $\Delta x=0.10 m$ aralıklarla 21 adımda gerçekleştirilmiştir.

Hesaplamalar Schetz tarafından verilen bir FORTRAN programı [VBASIC diline uyarlanarak](#) gerçekleştirilmiş olup elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

UZB 386 Sınır Tabaka Ders notları - M.
Adil Yükselen

68

Türbülanslı akımların analizi

Örnek problem

X	U_e	C_f	δ	θ	Re_δ	H
5.0	10.0	0.00266	0.0771	0.00834	8336.4	1.337
5.1	9.9	0.00260	0.0792	0.00876	8667.5	1.347
5.2	9.8	0.00253	0.0814	0.00919	9004.7	1.356
5.3	9.7	0.00247	0.0837	0.00964	9348.9	1.365
5.4	9.6	0.00241	0.0862	0.01010	9700.5	1.374
5.5	9.5	0.00235	0.0888	0.01059	10060.3	1.383
5.6	9.4	0.00230	0.0916	0.01109	10429.0	1.392
5.7	9.3	0.00224	0.0945	0.01162	10807.2	1.401
5.8	9.2	0.00219	0.0975	0.01217	11195.7	1.410
5.9	9.1	0.00213	0.1007	0.01274	11595.2	1.419
6.0	9.0	0.00208	0.1040	0.01334	12006.6	1.428
6.1	8.9	0.00203	0.1075	0.01397	12430.7	1.438
6.2	8.8	0.00198	0.1111	0.01462	12868.5	1.448
6.3	8.7	0.00192	0.1149	0.01531	13320.9	1.458
6.4	8.6	0.00187	0.1188	0.01603	13789.1	1.469
6.5	8.5	0.00182	0.1229	0.01679	14274.1	1.481
6.6	8.4	0.00176	0.1272	0.01759	14777.3	1.493
6.7	8.3	0.00171	0.1317	0.01843	15299.9	1.506
6.8	8.2	0.00165	0.1364	0.01932	15843.5	1.519
6.9	8.1	0.00160	0.1413	0.02026	16409.8	1.534
7.0	8.0	0.00154	0.1465	0.02125	17000.4	1.550

Görüldüğü gibi sınır tabaka kalınlığı giderek artmaktadır.

Nispeten kuvvetli sayılabilecek bu ters basınç gradyanı altında sınır tabaka $x=7m$ mesafesine kadar ayrılmamaktadır ($C_f > 0$).

Ancak sınır tabaka kalınlığı neredeyse ikiye katlanmakta ve sürtünme katsayısı da %40 azalmaktadır.

Türbülanslı akımların analizi

Head yöntemi

Head integral yöntemi, momentum ve süreklilik integral denklemlerinin eş zamanlı olarak integrasyonu esasına dayanır.

Von Karman momentum integral denklemi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} - \frac{\theta}{U_e} (2 + H) \frac{dU_e}{dx}$$

Süreklilik integral (katılım) denklemi

$$\frac{d\delta_E}{dx} = C_E - \frac{\delta_E}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \quad \delta_E = \delta - \delta_1$$

Bu iki denklemde toplam 5 bilinmeyen ($\theta, \delta_E, C_f, C_E, H$) bulunmakta olup çözüm için ilave ampirik bağıntılar aşağıdaki gibi verilmiştir (Cousteix)

$$C_f = \frac{0.246 \times 10^{-0.678H}}{R_\theta^{0.268}}$$

Ludwig-Tillman bağıntısı

$$C_E = \frac{0.0306}{(H^* - 3)^{0.653}}$$

$$H = \left(\frac{1.535}{H^* - 3.3} \right)^{\frac{1}{2.715}} + 0.7$$

Burada $\left\{ \begin{array}{l} H^* = \frac{\delta_E}{\theta} \\ R_\theta = \frac{\theta U_e}{\nu} \end{array} \right\}$

Türbülanslı akımların analizi

Head yöntemi

Bu iki adi diferansiyel denklemin çözümü herhangi standart bir yöntemle (örneğin Runge-Kutta yöntemi) gerçekleştirilebilir.

Daha basit bir çözüm yolu ise 1. dereceden Taylor açılımına dayanan Euler yöntemidir

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_i \Delta x_i$$

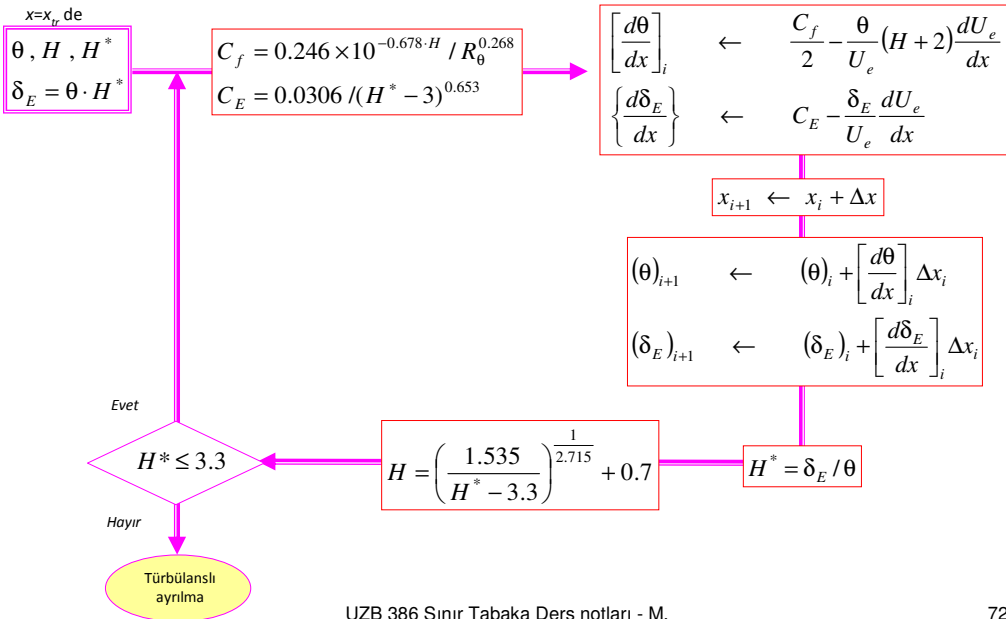
$$\delta_{Ei+1} = \delta_{Ei} + \left[\frac{d\delta_E}{dx} \right]_i \Delta x_i$$

Çözüm için başlangıç değerleri $x=x_{tr}$ deki laminar sınır tabaka çözümlerinden alınacaktır.

Türbülanslı akımların analizi

Head yöntemi

Akış şeması



Türbülanslı akımların analizi

Örnek problem

Daha önce Moses yöntemi ile incelenen Levha+rampa üzerindeki türbülanslı sınır tabakayı Head yöntemi ile inceleyiniz.

Hatılatma: $Xl=5m$, $Xl=7m$, $U_{\infty}=10m/s$, $U_e(x)=15-x$ m/s, $\nu = 10^{-5}m^2/s$

Levhanın düz kısmında Prandtl yöntemi ile yapılan hesaplama sonuçları:

$$R_x = \frac{U_e x}{\nu} = 5 \times 10^6$$

$$\delta = \frac{0.375 x}{R_x^{1/5}} = 0.0857447$$

$$\theta = \frac{0.0228}{(0.8)(0.375)^{0.25}} \left(\frac{\nu}{U_e} \right)^{0.2} x^{0.8} = 0.008327$$

Ayrıca

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{1}{8}$$



$$\delta^* = \frac{\delta}{8} = \frac{0.0857447}{8} = 0.0107181$$

$$\delta_E = \delta - \delta^* = 0.0857447 - 0.0107181 = 0.0750266$$

$$H^* = \frac{\delta_E}{\theta} = \frac{0.0750266}{0.008327} = 9.0095$$