# BÖLÜM 3
# LAMİNER SINIR TABAKANIN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ VE TAM ÇÖZÜMLERİ

- Navier Stokes denklemleri
- Navier Stokes denklemlerinin tam çözümleri
- Daimi, iki-boyutlu, laminer sınır tabaka denklemleri
- Daimi, iki-boyutlu, laminer sınır tabaka için benzerlik çözümleri
- Düz levha üzerindeki daimi, iki-boyutlu, basınç gradyantsız, laminer sınır tabaka için benzerlik çözümü

# Navier-Stokes denklemleri

Sıkıştırılamaz, sabit viskoziteli, bünye kuvvetlerinin olmadığı akımlar için

Süreklilik $\boxed{\nabla\vec{V}=0}$

Momentum $\boxed{\dfrac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\vec{V}=-\dfrac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{V}}$

İki-boyutlu halde bir (x,y) kartezyen koordinat sisteminde

Süreklilik $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

*x* - momentum $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

*y* - momentum $$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial v}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

## Paralel akımlar

$\boxed{u = u(y,t)}$ $\quad -\infty < x < +\infty$

Akımın *x* doğrultusunda sonsuz geniş bir bölgede ve paralel olduğu varsayılmaktadır.

$$\Downarrow$$

$\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0}$ Süreklilik denklemi $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0} \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow v = sb$

Akımda *geçirgen olmayan bir sınır yüzeyi* varsa $\quad v_w = 0 \Rightarrow v = 0$

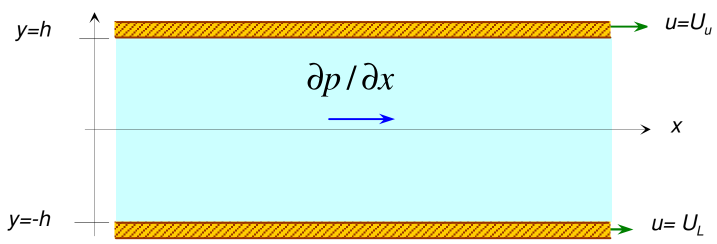
*x* – momentum denklemi

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

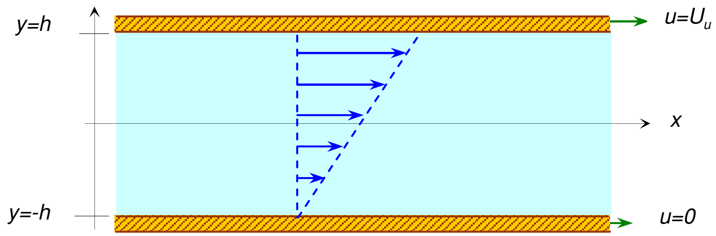
## Paralel levhalar arasında daimi akım

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}=0} \Rightarrow \boxed{u=u(y)} \Rightarrow \boxed{0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{d^2u}{dy^2}}$$




**Birinci hal**: ***Alt levha durağan, üst levha sabit, basınç gradyantı yok***

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}=0} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dy^2}=0} \Rightarrow \boxed{u(y)=C_1y+C_0}$$




Sınır koşullarından

$$\boxed{\begin{matrix}(y=-h\,, & u=0)\\ (y=+h\,, & u=U_w)\end{matrix}} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}-C_1h+C_0=0\\ C_1h+C_0=U_w\end{matrix}} \Rightarrow \boxed{C_0=\frac{U_w}{2}\,,\quad C_1=\frac{U_w}{2h}}$$

$$\boxed{\frac{u(y)}{U_w}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right)}$$

*Couette akımı*

# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

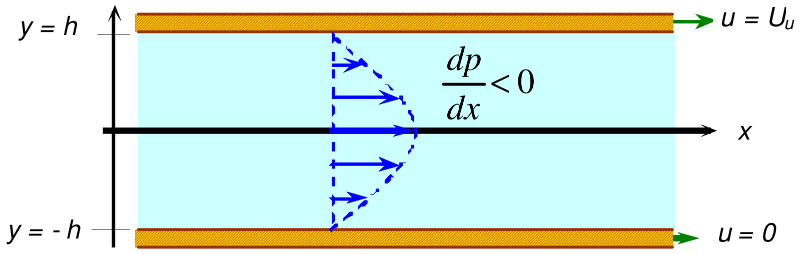
**İkinci hal**: ***Her iki levha durağan, sabit basınç gradyantı var***

$$\boxed{0=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\nu\frac{d^2u}{dy^2}} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=A} \Rightarrow \boxed{u(y)=\frac{A}{2}y^2+C_1y+C_0}$$

Sınır koşullarından

$$\boxed{\begin{array}{l}(y=-h\,, \quad u=0)\\ (y=+h\,, \quad u=0)\end{array}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\frac{A}{2}h^2-C_1h+C_0=0\\ \frac{A}{2}h^2+C_1h+C_0=0\end{array}} \Rightarrow \boxed{C_0=\frac{h^2A}{2}\,, \quad C_1=0}$$

$$\boxed{\frac{u(y)}{U_w}=-\frac{h^2}{2\mu U_w}\frac{dp}{dx}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)}$$



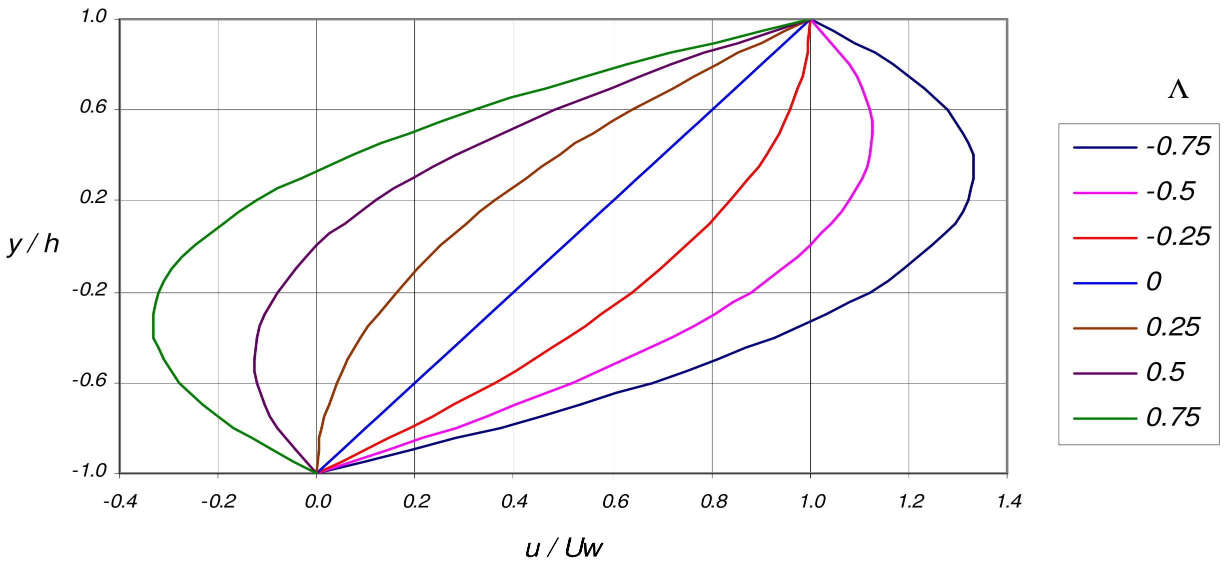
# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

## Üçüncü hal: *Birleşik çözüm*

$$\boxed{\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx} = A}$$

Denklem lineer olup önceki iki çözüm süperpoze edilebilir

$$\boxed{\frac{u(y)}{U_w} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{y}{h}\right) - \frac{h^2}{2\mu U_w}\frac{dp}{dx}\left(1-\frac{y^2}{h^2}\right)}$$




$$\left(\Lambda = \frac{h^2}{2\mu U_W}\frac{dp}{dx}\right)$$

$\boxed{dp/dx < 0}$ ise, $u(y)$ hızı her yerde $x$ yönündedir.

$\boxed{dp/dx > 0}$ ise (ters basınç gradyantı) akım hareketsiz olan alt duvar civarında ters yönlüdür

# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

## Sonsuz geniş levha üzerinde zamana bağlı akım (Stokes problemi)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = 0} \longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

### Birinci Stokes problemi : *Levhanın aniden sabit hızla hareket ettirilmesi hali*

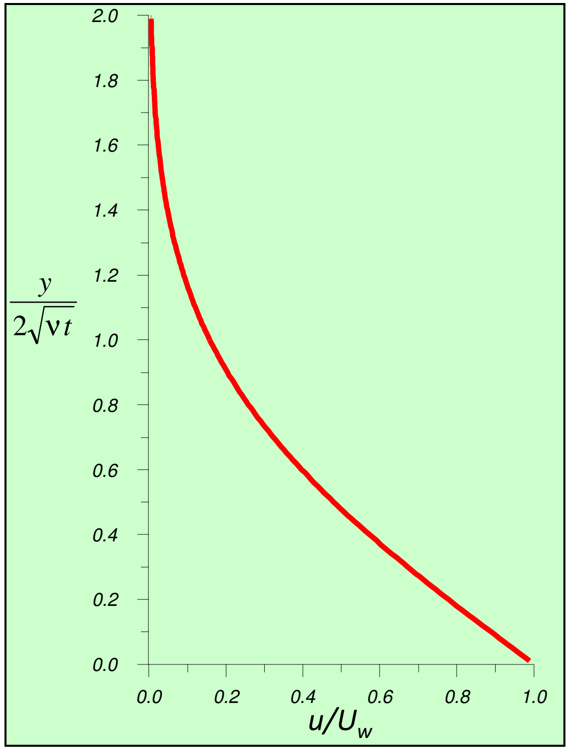
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} t \geq 0 \\ u = U_w \end{array}} \longrightarrow \boxed{\frac{u}{U_w} = erfc\left(\frac{y}{\sqrt{4\nu t}}\right)}$$

Hızın $u/U_w \approx 0.01$ değerine

yaklaşık $y = \sqrt{4\nu t}$ noktasında erişilmektedir.

Buna göre $\boxed{\delta \approx \sqrt{4\nu t}}$ büyüklüğünde

bir viskoz tabaka kalınlığı tanımlanabilir



# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

Birinci Stokes problemi : *Levhanın aniden sabit hızla hareket ettirilmesi hali*

$\boxed{\delta = \sqrt{4\nu t}}$ olmak üzere $\boxed{\dfrac{u}{U_w} = erfc\left(\dfrac{y}{\delta}\right)}$ veya $\boxed{f = \dfrac{u}{U_w}, \quad \eta = \dfrac{y}{\delta}}$ olmak üzere $\boxed{f = erfc(\eta)}$

Görüldüğü gibi boyutsuz hız profili $f$ zamandan bağımsız olup sadece boyutsuz bir $\eta$ büyüklüğünün fonksiyonudur.

Buna göre her bir *t* anında elde edilen hız profilleri boyutsuzlaştırıldığında diğer hız profilleriyle çakışmaktadır. Bu duruma akımların benzerliği denilmektedir. Bulunan boyutsuz hız profili de benzerlik çözümü olarak adlandırılmaktadır.

$\boxed{f = \dfrac{u}{U_w}, \quad \eta = \dfrac{y}{\delta}}$ değişken dönüşümleri $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$ Denklemine uygulanırsa

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{4\nu t}} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= -\frac{\eta}{2t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{4\nu t}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{U_e}{2t}\eta f'} \\ &\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_e}{4\nu t} f''} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

*Benzerlik denklemi*

$$\boxed{f'' + 2\eta f' = 0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\eta = 0, \quad f = 1 \\ &\eta \to \infty, \quad f = 0 \end{aligned}}$$

*Sınır koşulları*

# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

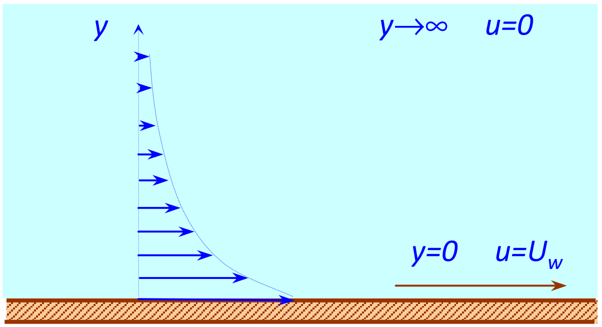
## Düz levha üzerinde daimi akım problemi

Stokes probleminden elde edilen çözümden yarı sonsuz bir düz levha üzerindeki daimi akım halinde ne olduğunu en azından niteliksel olarak anlamak için yararlanılabilir.

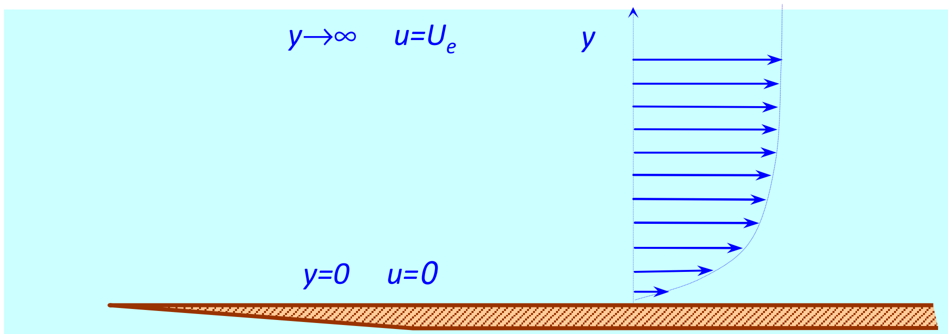
Bu halde levhanın oluşturacağı bozuntuların akışkan içinde levhaya dik yönde, ani harekete geçen levha halindekiyle aynı hızda yayılacağı ve aynı sırada uzaktaki akımın $U_e$ hızıyla akım boyunca taşınacağı söylenebilir.

Bu durumdaki çözümde $t$ büyüklüğünün yerini $x/U_e$ büyüklüğü alacaktır.

Böylece viskoz tabaka kalınlığı $\delta \approx 2\sqrt{\nu\, x / U_e}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{\delta}{x} \propto \mathrm{Re}_x^{-1/2}}$ $\qquad \mathrm{Re}_x = \dfrac{U_e x}{\nu}$




*Stokes problemi*




*Düz levha problemi*

# Navier-Stokes denklemlerinin tam çözümleri

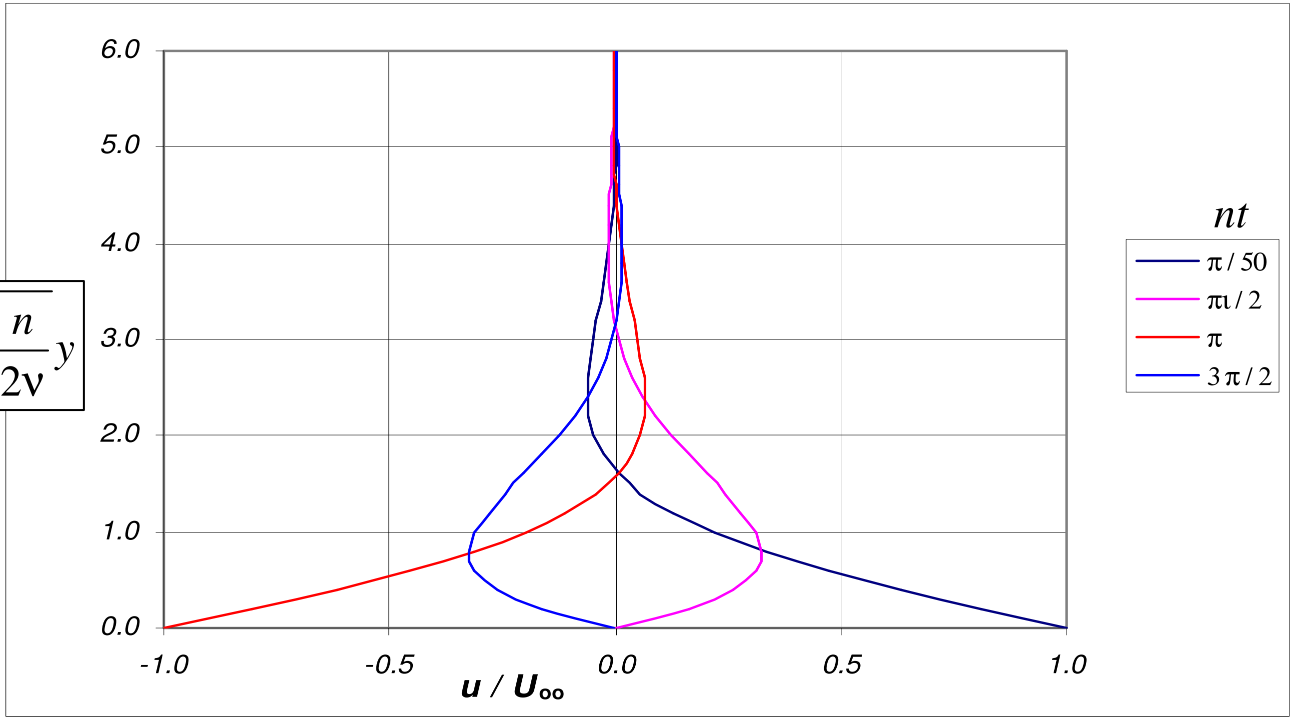
İkinci Stokes problemi : *Levhanın salınım yapması hali*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u(0,t) = U_w \cos(nt)$$

$$\frac{u}{U_w} = e^{-\sqrt{n/2\nu}\, y} \cos\left( nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}} y \right)$$

$$\eta = \sqrt{\frac{n}{2\nu}} y$$




Buna göre

# Daimi, iki-boyutlu, laminer sınır tabaka denklemleri

*Navier-Stokes denklemleri*

Süreklilik $$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$x$ - momentum $$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$y$ - momentum $$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial v}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\bar{u}=\frac{u}{V},\quad \bar{v}=\frac{v}{V},\quad \bar{x}=\frac{x}{L},\quad \bar{y}=\frac{y}{L},\quad \bar{p}=\frac{p}{\rho V^2}$$

Boyutsuz büyüklükleri kullanılarak

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}=0$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\mathrm{Re}=\frac{VL}{\nu}$$

# Daimi, iki-boyutlu, laminer sınır tabaka denklemleri

Sınır tabaka yaklaşımları çerçevesinde

$$\bar{u} = \frac{u}{V} \approx 1, \quad \bar{v} = \frac{v}{V} \approx \bar{\delta}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L} \approx 1, \quad \bar{y} = \frac{y}{L} \approx \bar{\delta}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho V^2} \approx 1$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \approx \frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right) \approx \frac{1}{1}\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \approx \frac{1}{\bar{\delta}} \qquad \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) \approx \frac{1}{\bar{\delta}}\left(\frac{1}{\bar{\delta}}\right) = \frac{1}{\bar{\delta}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \approx \bar{\delta} \qquad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}\right) \approx \frac{1}{1}\left(\frac{\bar{\delta}}{1}\right) = \bar{\delta}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \approx \frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}} = 1 \qquad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) \approx \frac{1}{\bar{\delta}}\left(\frac{\bar{\delta}}{\bar{\delta}}\right) = \frac{1}{\bar{\delta}}$$

# Daimi, iki-boyutlu, laminer sınır tabaka denklemleri

Navier-Stokes denklemlerinde her bir terimin büyüklük mertebesi incelenerek ve küçük terimler ihmal edilerek

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}}_{\approx 1} + \underbrace{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}}_{\approx 1} = 0$$

$$\underbrace{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}}_{\approx 1} + \underbrace{\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}}_{\approx 1} = -\underbrace{\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}}_{\approx 1} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}_{\approx 1} + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}}_{\approx 1/\bar{\delta}^2}\right)$$

$$\underbrace{\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}}_{\approx \bar{\delta}} + \underbrace{\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}}_{\approx \bar{\delta}} = -\underbrace{\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}}_{\approx 1/\bar{\delta}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}}_{\approx \bar{\delta}} + \underbrace{\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}}_{\approx 1/\bar{\delta}}\right)$$

$\Rightarrow$

*Sınır tabaka denklemleri*

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

# Daimi, iki-boyutlu, laminer sınır tabaka denklemleri

*Boyutlu büyüklüklerle sınır tabaka denklemleri*

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ &u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &0=-\frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}}$$

*Sınır koşulları*

Yüzey üzerinde

$$\boxed{y=0\,, \qquad u(x,0)=0\,, \quad v(x,0)=0}$$

Sınır tabaka kenarında

$$\boxed{y\to\infty\,, \qquad u(x,\infty)\to U_e(x)}$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial y}=\frac{\partial^2 U_e}{\partial y^2}=0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{U_e\frac{\partial U_e}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}$$

*Bernoulli denklemi*

# Daimi, iki-boyutlu, laminer sınır tabaka için benzerlik çözümleri

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \\ &u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{aligned}}$$

Laminer sınır tabaka denklemlerinin non-lineer olması çözümü zorlaştırır

*Öyle bir sınıf problem bulmak mümkün müdür ki bu problemler için kısmi diferansiyel denklemler, non-lineer olsalar bile, adi diferansiyel denklemlere dönüştürülebilsinler?*

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$$

şeklindeki bir değişkenlere ayırma yöntemi sınır-tabaka denklemleri için çalışmaz

$$\boxed{u(x,y)=u[\eta(x,y)]}$$

Bir çözüm yolu $x$ ve $y$ değişkenlerinin fonksiyonu olan yeni bir $\eta(x,y)$ değişkeni tanımlamaktır.

Ancak sadece denklemlerin değil, aynı zamanda sınır koşullarının da bu tanımlama ile uyumlu olması gerekir. Bu yöntem sadece bir kısım akım tipinde söz konusudur

## Düz levha üzerindeki daimi, iki-boyutlu, basınç gradyantsız, Laminer, sınır tabaka için benzerlik çözümleri

$\boxed{\frac{\partial p}{\partial x}}$ olup sınır tabaka denklemleri $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0}$ $\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$

*A* ve *B* sonradan bulunacak sabitler olmak üzere hız profili için önerilen değişken dönüşümleri:

$$\boxed{\frac{u}{U_e}=Af'(\eta);\quad \eta=\frac{By}{\sqrt{x}}}$$

Akım fonksiyonu duvar ile herhangi bir akım çizgisi arasından geçen debi ile ilgili olup, ayrıca sınır tabaka *x* mesafesinin karekökü ile orantılı gelişmektedir.

$$\boxed{\psi\approx\sqrt{x}f(\eta)=C\sqrt{x}f(\eta)}$$

Akım fonksiyonu tanımı gereği

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Sınır tabaka denklemleri Akım fonksiyonu cinsinden yazılırsa

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}}$$

## Düz levha üzerindeki daimi, iki-boyutlu, basınç gradyantsız, Laminer, sınır tabaka için benzerlik çözümleri

Önerilen değişken dönüşümleri akım fonksiyonu cinsinden yazılan sınır tabaka denkleminde kullanılarak *A* , *B* ve *C* sabitlerinin uygun değerleri seçilebilir

$$\boxed{\frac{u}{U_e}=Af'(\eta);\quad \eta=\frac{By}{\sqrt{x}}}\quad \boxed{\psi=C\sqrt{x}\,f(\eta)}\quad \Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{By}{\sqrt{x}}\right)=By\frac{\partial}{\partial x}x^{-1/2}=-\frac{By}{2}x^{-3/2}=-\frac{1}{2x}\frac{By}{\sqrt{x}}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial\eta}{\partial x}=-\frac{\eta}{2x}}\quad \boxed{\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{B}{\sqrt{x}}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=C\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{x}\,f\right]=C\left[f\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x}+\sqrt{x}\frac{\partial}{\partial x}f\right]=C\left[\frac{f}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right]\quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial x}=C\frac{\sqrt{x}}{2x}(f-\eta f')}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[C\sqrt{x}\,f\right]=C\sqrt{x}\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}=C\sqrt{x}\,f'\frac{B}{\sqrt{x}}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial y}=BCf'}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}(BCf')\frac{\partial\eta}{\partial y}=BC\frac{\partial f'}{\partial\eta}\frac{B}{\sqrt{x}}\quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=B^2C\sqrt{x}\frac{f''}{x}}$$

# Düz levha üzerindeki daimi, iki-boyutlu, basınç gradyantsız, Laminer, sınır tabaka için benzerlik çözümleri

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial\eta}\left(B^2C\frac{f''}{\sqrt{x}}\right)\frac{\partial\eta}{\partial y}=\frac{B^2C}{\sqrt{x}}\frac{\partial f''}{\partial\eta}\frac{B}{\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=B^3C\frac{f'''}{x}}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)=C\frac{\sqrt{x}}{2x}\frac{\partial}{\partial\eta}(f-\eta f')\frac{\partial\eta}{\partial y}=C\frac{\sqrt{x}}{2x}\frac{\partial}{\partial\eta}(f-\eta f')\frac{B}{\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=-\frac{BC}{2x}\eta f''}$$

$$\boxed{\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}}$$

$$(BCf')\left(-\frac{BC}{2x}\eta f''\right)-\left[C\frac{\sqrt{x}}{2x}(f-\eta f')\right]\left(B^2C\sqrt{x}\frac{f''}{x}\right)=\nu\left(B^3C\frac{f'''}{x}\right) \Rightarrow -ff''=\frac{2\nu B}{C}f'''$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{u=AU_e f'(\eta)}\\ \boxed{u=\dfrac{\partial\psi}{\partial y}=BCf'}\end{array}\right\} \Rightarrow AU_e f'=BCf' \Rightarrow \boxed{AU_e=BC} \qquad \boxed{\frac{2\nu B}{C}=1}$$

Uygun bir seçim $\boxed{A=1,\quad B=\dfrac{U_e}{\sqrt{2\nu}},\quad C=\sqrt{2\nu U_e}}$

# Düz levha üzerindeki daimi, iki-boyutlu, basınç gradyantsız, Laminer, sınır tabaka için benzerlik çözümleri

Böylece düz levha üzerindeki laminer sınır tabaka denklemleri için değişken dönüşümleri

$$\boxed{\frac{u}{U_e} = f'(\eta)} \qquad \boxed{\eta = \frac{y}{\sqrt{2\nu x / U_e}}}$$

$$\boxed{\psi = \sqrt{2\nu U_e x}\, f(\eta)}$$

Dönüştürülmüş denklem

$$\boxed{f''' + ff'' = 0}$$

Blasius benzerlik denklemi

Sınır koşulları

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{ll} y = 0\,, & u(x,0) = v(x,0) = \psi(x,0) = 0 \\ y \to \infty\,, & u(x,\infty) = U_e \end{array}} \\ \boxed{x = 0\,, \quad y > 0\,, \qquad u(0,y) = U_e} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} \eta = 0\,, & f(0) = f'(0) = 0 \\ \eta \to \infty\,, & f'(\infty) = 1 \end{array}}$$

NOT: Sınır koşullarından ikisi $\eta = 0$ da verilmiş iken üçüncüsü $\eta = \infty$ da verilmiştir. Bu nedenle problem bir sınır değer problemi olup çözümü ancak iteratif olarak elde edilebilir.

## Blasius benzerlik denkleminin sayısal çözümü

$\boxed{f''' + ff'' = 0}$ denklemi

$\boxed{\begin{aligned} & f(0) = f'(0) = 0 \\ & f'(\infty) = 1 \end{aligned}}$ Sınır koşulları

$$\boxed{\begin{aligned} f &= g_0 \\ f' &= g_1 \\ f'' &= g_2 \end{aligned}}$$

değişken dönüşümü ile

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\begin{aligned} g_0' &= g_1 \\ g_1' &= g_2 \\ g_2' &= -g_0 g_2 \end{aligned}} \\ \boxed{\begin{aligned} & g_0(0) = g_1(0) = 0 \\ & g_1(\infty) = 1 \end{aligned}} \end{array} \right\}$$

şekline gelir.

Birinci dereceden bu 3 diferansiyel denklem eş zamanlı olarak çözülecektir. Ayrıca sınır değer problemi olması nedeniyle iterasyon gerekmektedir.

Vektör biçimde $\boxed{g(\eta) = \begin{Bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \end{Bmatrix}}$ olmak üzere $\boxed{g'(\eta) = T = \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ -g_0 g_2 \end{Bmatrix}}$ yazılabilir

Çözüm, basit Euler yöntemi ile elde edilebilir: $\boxed{g(\eta + \Delta\eta) = g(\eta) + T(\eta) \cdot \Delta\eta}$

## Blasius benzerlik denkleminin sayısal çözümü

Daha etkin bir çözüm, Runge Kutta Gill yöntemi ile elde edilebilir:

$$k = \frac{1}{6}\left[k_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3 + k_4\right]$$

$$g(\eta + h) = g(\eta) + k$$

$$k_1 = h\, f[\eta, g]$$

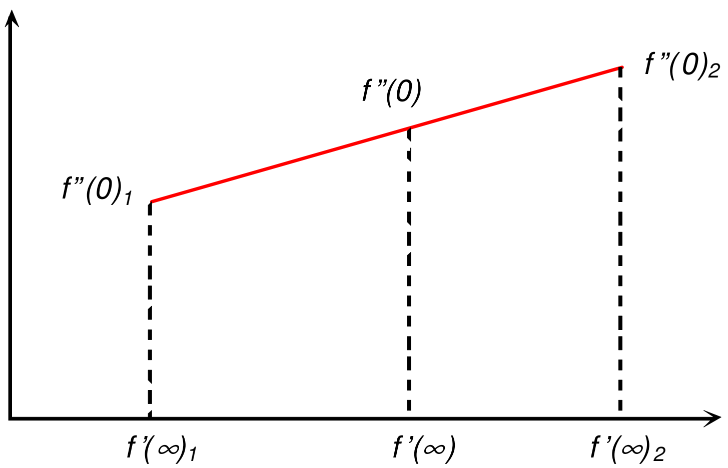
$$k_2 = h\, f\left[\eta + \frac{h}{2},\ g + \frac{1}{2}k_1\right]$$

$$k_3 = h\, f\left[\eta + \frac{h}{2},\ g + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_1 + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2\right]$$

$$k_4 = h\, f\left[\eta + h,\ g - \frac{1}{\sqrt{2}}k_2 + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3\right]$$

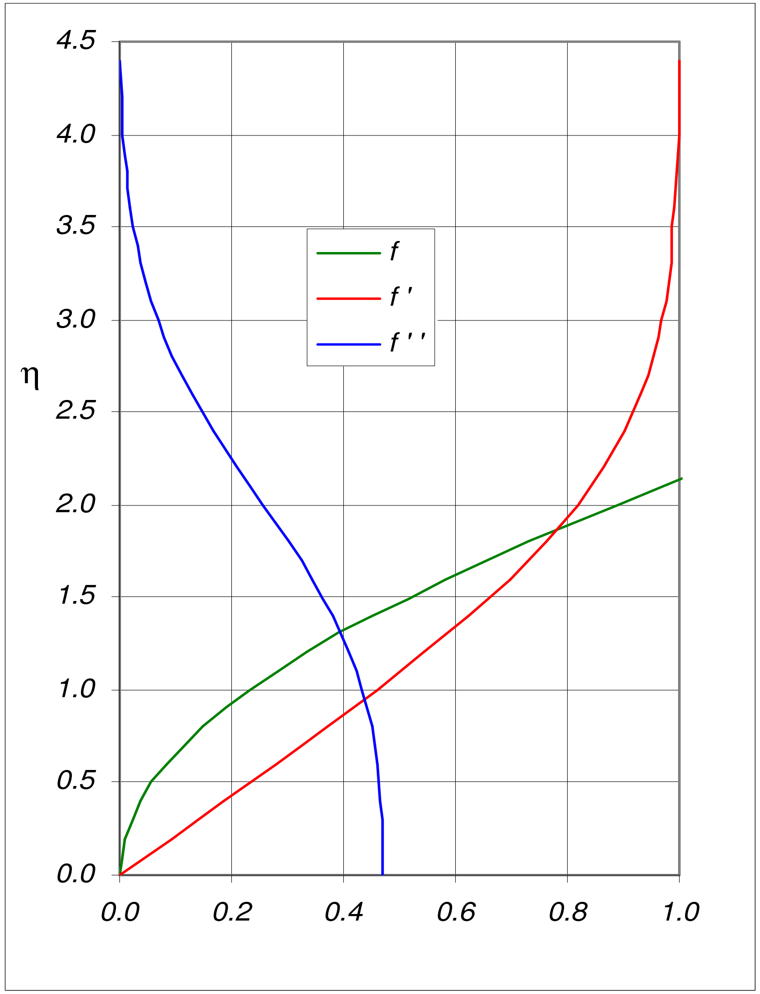
İterasyon için Shooting yöntemi:

$$f''(0) = f''(0)_1 + \frac{f''(0)_2 - f''(0)_1}{f'(\infty)_2 - f'(\infty)_1}\left[1 - f'(\infty)_1\right]$$



## Blasius benzerlik denkleminin sayısal çözümü

| h | f | f ' | f ' ' |
|---|---|---|---|
| 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.4696 |
| 0.2000 | 0.0094 | 0.0939 | 0.4693 |
| 0.4000 | 0.0375 | 0.1876 | 0.4673 |
| 0.6000 | 0.0844 | 0.2806 | 0.4617 |
| 0.8000 | 0.1497 | 0.3720 | 0.4512 |
| 1.0000 | 0.2330 | 0.4606 | 0.4344 |
| 1.2000 | 0.3337 | 0.5452 | 0.4106 |
| 1.4000 | 0.4507 | 0.6244 | 0.3797 |
| 1.6000 | 0.5830 | 0.6967 | 0.3425 |
| 1.8000 | 0.7289 | 0.7611 | 0.3004 |
| 2.0000 | 0.8868 | 0.8167 | 0.2557 |
| 2.2000 | 1.0549 | 0.8633 | 0.2106 |
| 2.4000 | 1.2315 | 0.9011 | 0.1676 |
| 2.6000 | 1.4148 | 0.9306 | 0.1286 |
| 2.8000 | 1.6033 | 0.9529 | 0.0951 |
| 3.0000 | 1.7956 | 0.9691 | 0.0677 |
| 3.2000 | 1.9906 | 0.9804 | 0.0464 |
| 3.4000 | 2.1875 | 0.9880 | 0.0305 |
| 3.6000 | 2.3856 | 0.9929 | 0.0193 |
| 3.8000 | 2.5845 | 0.9959 | 0.0118 |
| 4.0000 | 2.7839 | 0.9978 | 0.0069 |
| 4.2000 | 2.9836 | 0.9988 | 0.0039 |
| 4.4000 | 3.1834 | 0.9994 | 0.0021 |



## Blasius benzerlik denkleminin sayısal çözümü

Sınır tabakanın sınırı $u/U_e = 0.99 \Rightarrow \eta = 3.5$

$$\eta = y\sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}} \Rightarrow 3.5 = \delta(x)\sqrt{\frac{U_e x}{\nu}\frac{1}{2x^2}} = \frac{\delta(x)}{x}\sqrt{\frac{Re_x}{2}} \Rightarrow \boxed{\delta(x) = \frac{5.0\, x}{\sqrt{Re_x}}}$$

Öteleme kalınlığı

$$\delta^* = \int_0^{\delta}\left(1-\frac{u}{U_e}\right)dy = \int_0^{\eta(\delta)}(1-f')\,d\left(\eta\sqrt{\frac{2\nu x}{U_e}}\right) = \sqrt{\frac{2\nu x^2}{U_e x}}\left[\eta - f\right]_0^{\eta(\delta)} = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{U_e x/\nu}}\{\eta(\delta) - f[\eta(\delta)]\}$$

$$\delta^* = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\{3.5 - 2.2863\} \Rightarrow \boxed{\delta^* = \frac{1.721\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

Momentum kalınlığı:

$$\theta = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\left\{f\left[\eta(\delta)\right] - (f\,f')_0^{\eta(\delta)} + \int_0^{\eta(\delta)} f\,f''\,d\eta\right\}$$

$$\boxed{f''' + ff'' = 0 \quad \rightarrow \quad ff'' = -f'''}$$

## Blasius benzerlik denkleminin sayısal çözümü

$$\theta = \frac{\sqrt{2}\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\left\{ f\left[\eta(\delta)\right] - f\left[\eta(\delta)\right] f'\left[\eta(\delta)\right] + f(0)\,f'(0) - \int_0^{\eta(\delta)} f'''\,d\eta \right\} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{0.664\,x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

Şekil parametresi

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1.721}{0.664} \Rightarrow \boxed{H = 2.5919}$$

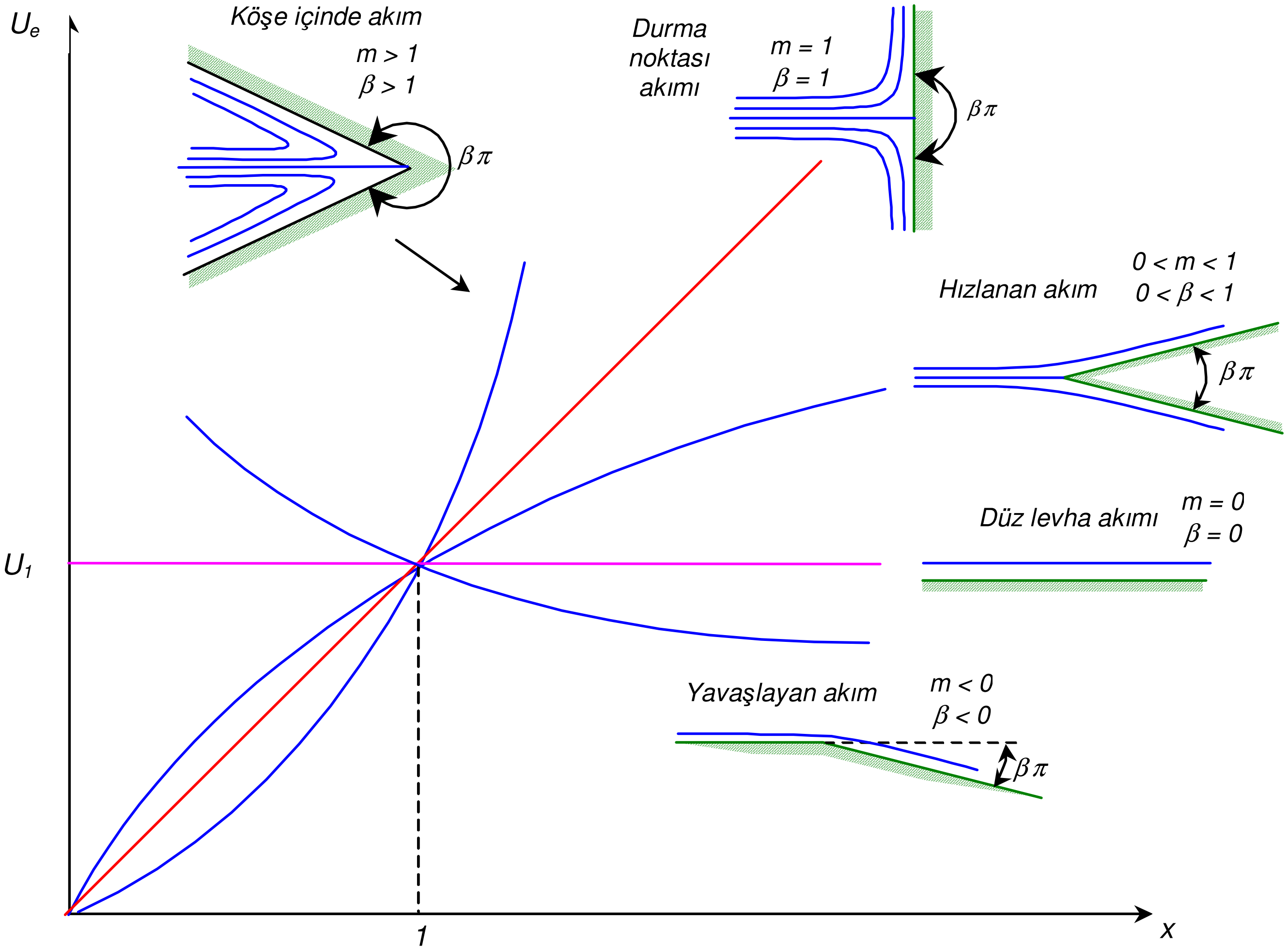
Yüzeyde kayma gerilmesi

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \rho\nu U_e \left[\frac{\partial f'}{\partial \eta}\right]_{\eta=0} \sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}} = \rho U_e^2 \sqrt{\frac{\nu}{2U_e x}}\,(f'')_{\eta=0} = \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Re}_x}} f''(0)$$

Yüzey sürtünme katsayısı

$$C_f = \frac{\tau_w}{½\rho U_e^2} = \frac{1}{½\rho U_e^2}\frac{\rho U_e^2}{\sqrt{2}\sqrt{\mathrm{Re}_x}} f''(0) = \frac{\sqrt{2}f''(0)}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} = \frac{\sqrt{2}\times 0.4696}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \Rightarrow \boxed{C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}}$$

# Basınç gradyantı halinde Falkner-Skan benzerlik çözümleri




$$U_e(x) = U_1 x^m$$

$$m = \frac{x}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

# Basınç gradyantı halinde Falkner-Skan benzerlik çözümleri

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=U_e\frac{dU_e}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

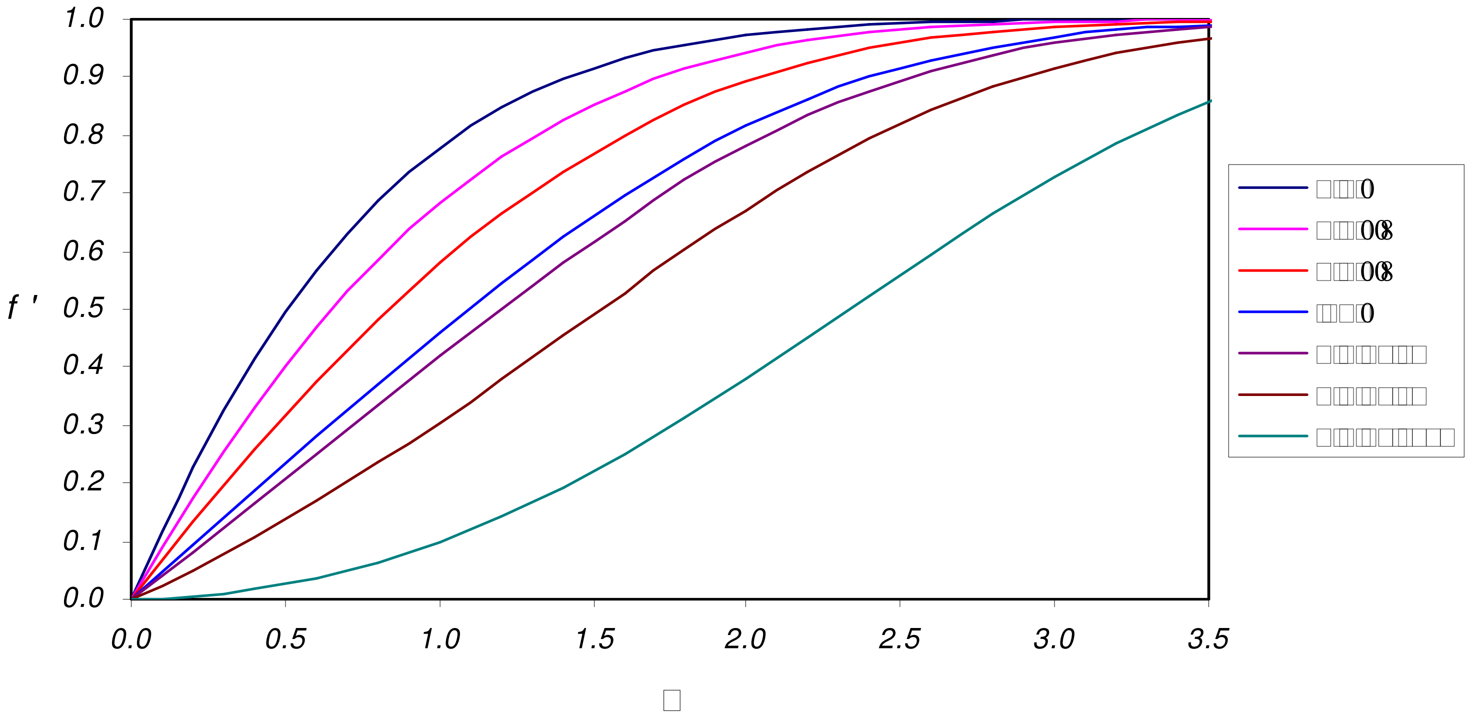
$$\eta = y\sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{U_e}{\nu x}}$$

$$\psi=\sqrt{\frac{2}{m+1}}\sqrt{\nu U_e x}\; f(\eta)$$

$$f'''+ff''+\beta\left[1-(f')^2\right]=0$$

$$f(0)=f'(0)=0$$

$$f'(\infty)\rightarrow 1$$



# Basınç gradyantı halinde Falkner-Skan benzerlik çözümleri

$$\frac{\delta^*}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}=\sqrt{\frac{2}{m+1}}\int_0^{\delta}(1-f')\,d\eta$$

Öteleme kalınlığı

$$\boxed{\frac{\delta^*}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}=\sqrt{\frac{2}{m+1}}\,f(\delta)}$$

$$\frac{\theta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}=\sqrt{\frac{2}{m+1}}\int_0^{\delta}(1-f')f'\,d\eta$$

Momentum kalınlığı:

$$\boxed{\frac{\theta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}=\sqrt{\frac{2}{m+1}}\,f''(0)}$$

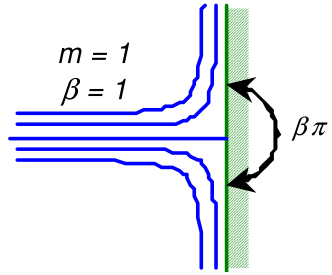
Yüzey sürtünme katsayısı

$$\boxed{C_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}=2\sqrt{\frac{m+1}{2}}\,f''(0)}$$

| | $m$ | $\beta$ | $\frac{\delta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ | $C_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ | $\frac{\delta^*}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ | $\frac{\theta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$ | $H$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Durma noktası → | *1* | *1* | *2.4* | *2.465* | *0.648* | *0.292* | *2.219* | $\frac{dp}{dx}<0$ |
| | *1/3* | *1/2* | *3.4* | *1.515* | *0.985* | *0.429* | *2.296* | |
| | *0.111* | *0.20* | *4.2* | *1.025* | *1.320* | *0.548* | *2.409* | |
| Düz levha → | *0* | *0* | *5.0* | *0.664* | *1.721* | *0.664* | *2.592* | |
| | *-0.024* | *-0.05* | *5.4* | *0.559* | *1.879* | *0.701* | *2.680* | $\frac{dp}{dx}>0$ |
| | *-0.065* | *-0.14* | *5.8* | *0.328* | *2.334* | *0.788* | *2.962* | |
| Ayrılma noktası → | *-0.0904* | *-0.1988* | *7.1* | *0* | *3.427* | *0.868* | *3.948* | |

# Basınç gradyantı halinde Falkner-Skan benzerlik çözümleri

## Durma noktası problemi ($\beta = m = 1$)




$$\sqrt{\mathrm{Re}_x} = \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} = \sqrt{\frac{U_1 x\, x}{\nu}} = \sqrt{\frac{U_1}{\nu}}\, x \;\Longrightarrow\; \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{x} = \sqrt{\frac{U_1}{\nu}}$$

Burada $\quad U_e = U_1 x \;\Longrightarrow\; \boxed{U_1 = \frac{dU_e}{dx}}$

Öteleme kalınlığı $\quad \delta^* \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{x} = 0.648 \;\Longrightarrow\; \boxed{\delta^* = \frac{0.648}{\sqrt{U_1/\nu}}}$

Momentum kalınlığı: $\quad \theta \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{x} = 0.292 \;\Longrightarrow\; \boxed{\theta = \frac{0.292}{\sqrt{U_1/\nu}}}$

Yüzey sürtünme katsayısı $\quad C_f \sqrt{\mathrm{Re}_x} = 2.465 \;\Longrightarrow\; \boxed{C_f = \frac{2.465}{x\sqrt{U_1/\nu}}}$

Şekil parametresi $\quad H = \frac{\delta^*}{\theta} \;\Longrightarrow\; \boxed{H = 2.216}$