

BÖLÜM 2

LAMİNER SINIR TABAKA

İNTEGRAL DENKLEMLERİ VE ÇÖZÜMLERİ

- 2.1- Giriş
- 2.2- İntegral momentum denklemi
- 2.3- İntegral momentum denkleminin çözümü
 - 2.3.1- Pohlhausen yöntemi
 - 2.3.2-Thwaites-Walz yöntemi
 - 2.3.3-Emmeli ve enjeksiyonlu akımlar
- 2.4- İntegral enerji denklemi
- 2.5- İntegral enerji denkleminin çözümü
 - 2.5.1- Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

2.1. Laminer sınır tabaka hesaplamasından beklenenler

- Yüzey sürtünme sürüklemesi $C_f(x) = \frac{\tau_w}{1/2\rho U_e^2} = ?$
- Ayrılma var mı $\tau_w = 0, \quad C_f(x) = 0 \quad ?$
- Isıtma veya soğutma varsa ısı transferi hızı $q_w(x) = ?$
- Konsantrasyon gradyanı varsa kütle transfer hızı $\dot{m}_{iw}(x) = ?$
- Sınır tabakanın kalınlığı δ
- Sınır tabaka hız dağılımı $u(x,y)$

2.2. İntegral momentum denklemleri

Kontrol hacmine soldan giren kütle miktarı

$$\int_0^H \rho u dy$$

Sağdan çıkan kütle miktarı

$$\int_0^H \rho u dy + \frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u dy \right] dx$$

Çıkan ve giren bu kütle miktarları arasında bir fark varsa,

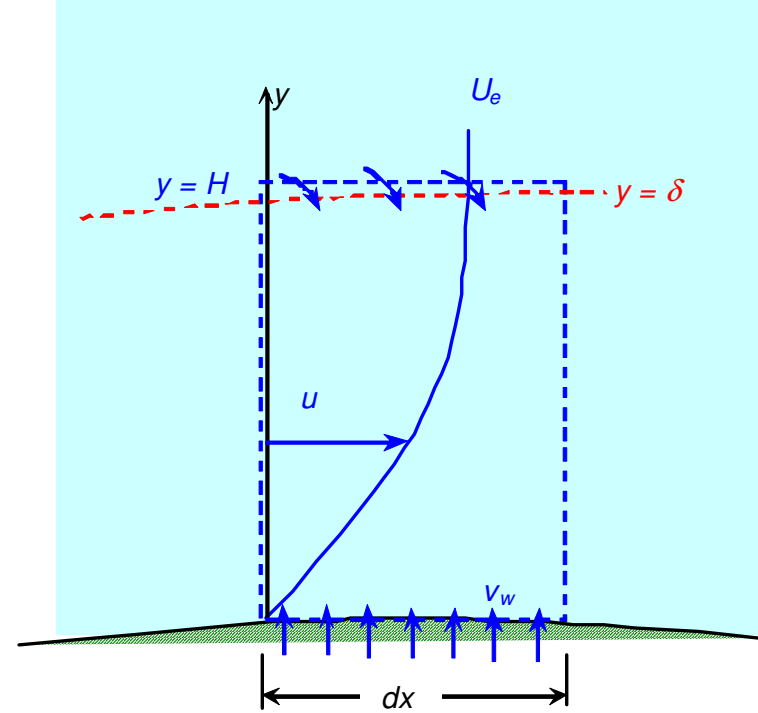
$$\int_0^H \rho u dy + \frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u dy \right] dx - \int_0^H \rho u dy \neq 0$$

Akım daimi kabul edilmekte olup, bu kadar bir debinin kontrol hacminin üst yüzeyinden geçmiş olması gerekir.

Duvar geçirgense, duvardan geçen debinin yukarıdaki debi farkından ayrıca çıkartılması gerekir

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u dy \right] dx$$

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u dy \right] dx - \rho_w v_w dx$$



Kontrol hacmine soldan giren momentum miktarı

$$\int_0^H \rho u^2 dy$$

Sağdan çıkan momentum miktarı

$$\int_0^H \rho u^2 dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u^2 dy \right) dx$$

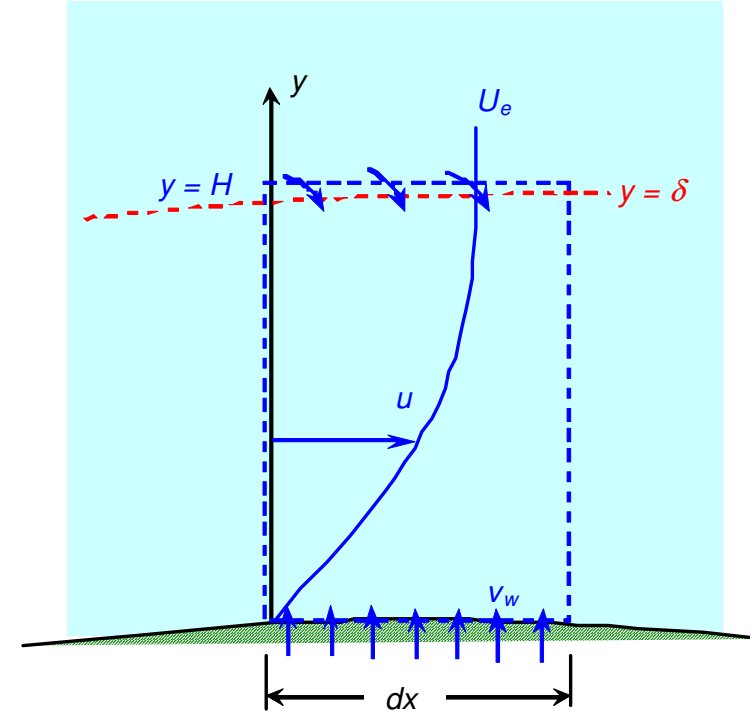
Üst yüzeyden kontrol hacmine giren kütleler, x doğrultusunda ve dış akım hızıyla orantılı bir momentumu da kontrol hacmine sokacaktır

$$U_e(x) \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right]$$

Böylece kontrol hacmindeki net momentum değişimi

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u^2 dy \right) dx - U_e(x) \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right]$$

Bu momentum değişimi kontrol hacmine x doğrultusunda etkiyen kuvvetlerle dengelenecektir.

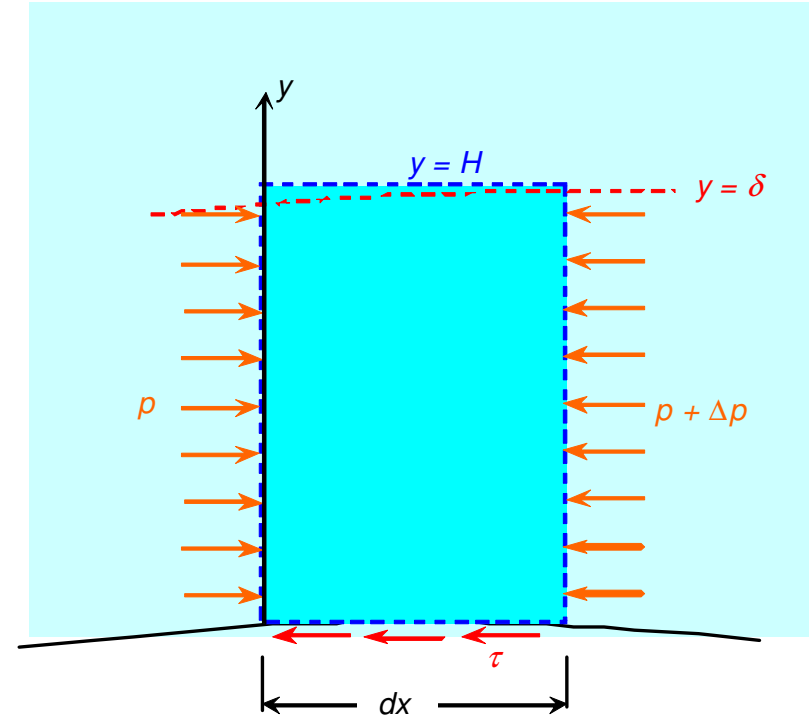


Sınır tabaka yaklaşımı gereği statik basınç y den bağımsızdır:

$$\frac{dp}{dy} \approx 0$$

Kontrol hacminin sağ ve sol cephelerinden etkiyen basınç kuvvetlerinin bileşkesi

$$-\left(p + \frac{dp}{dx} dx\right)H + pH = -\left(\frac{dp}{dx} dx\right)H$$



Kontrol hacmine duvar üzerinde akım yönüne zıt yönde bir yüzey sürtünmesi etkir:

$$-\tau_w dx = -\mu \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} dx$$

Kontrol hacminin üst yüzeyi sınır tabakanın dışında olduğundan bu yüzeye x-doğrultusunda etkiyen herhangi bir teğetsel kuvvet yoktur

Momentum değişimi ve dış kuvvetler için yukarıda bulunan bağıntılar momentumun korunumu prensibinde kullanılarak

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u^2 dy \right) dx - U_e(x) \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right] = \left(\frac{dp}{dx} dx \right) H - \tau_w dx$$

soldaki ikinci terim

$$U_e(x) \frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx = \frac{d}{dx} \left[\int_0^H \rho u U_e(x) dy \right] dx - \frac{dU_e}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx$$

şeklinde dzenlenerek, ρ sabit olmak üzere

$$-\tau_w - H \frac{dp}{dx} = -\rho \frac{d}{dx} \left[\int_0^H (U_e - u) u dy \right] + \frac{dU_e}{dx} \rho \left(\int_0^H u dy \right) + \rho v_w U_e$$

Sınır tabakanın kenarında $-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U_e \frac{dU_e}{dx}$ olup

Ayrıca $H = \int_0^H dy$ yazılarak

$$-\tau_w - \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^H dy = -\rho \frac{d}{dx} \left[U_e^2 \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy \right] + \frac{dU_e}{dx} \rho \left(U_e \int_0^{\delta} \frac{u}{U_e} dy \right) + \rho v_w U_e$$

Veya düzenlenerek

$$-\tau_w - \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = -\rho \frac{d}{dx} \left[U_e^2 \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy \right] + \rho v_w U_e$$

Buradaki integraller için yeni tanımlamalar yapılarak:

$$\delta^* \equiv \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$

Öteleme kalınlığı

$$\theta \equiv \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy$$

Momentum kalınlığı

$$-\tau_w + \rho U_e \frac{dU_e}{dx} \delta^* = -\rho \frac{d}{dx} (U_e^2 \theta) + \rho v_w U_e$$

Veya düzenlenerek

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

von Karman momentum integral denklemi

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

von Karman momentum integral denklemi

Bütün değişkenler sadece x koordinatın fonksiyonudur

Aranan C_f sürtünme katsayısı denklemin içinde doğrudan “bağımlı bir değişken” olarak yer almaktadır.

Denklemin çözümü için $U_e(x)$ hız dağılımının önceden bilinmesi gerekir.

Denklem birden fazla bilinmeyen (C_f, θ, δ^*) içermektedir.

$$C_f(x), \theta(x), \delta^*(x)$$

Bu nedenle çözüm için ilave bilgilere ihtiyaç vardır.

Öteleme (deplasman) kalınlığı

$$\delta^* \equiv \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy$$



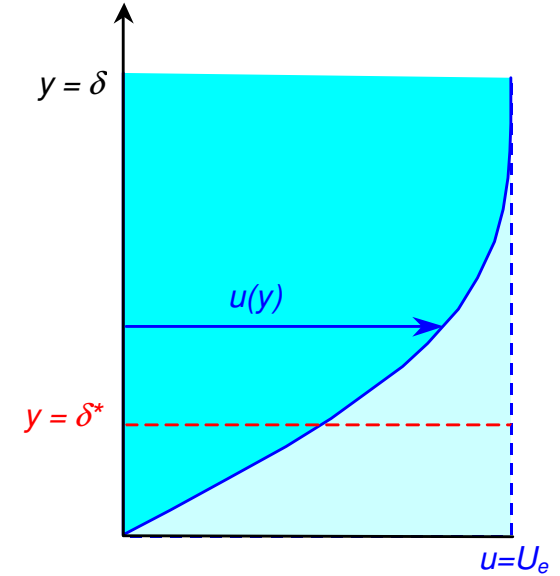
$$\rho \delta^* U_e = \rho \int_0^{\delta} (U_e - u) dy = \rho U_e \int_0^{\delta} dy - \rho \int_0^{\delta} u dy$$

$$\rho \delta^* U_e = \rho U_e \delta - \rho \int_0^{\delta} u dy$$

$\rho U_e \delta$ δ kalınlığındaki bir tabaka içinde U_e hızıyla hareket eden akımın kütleli debisi

$\rho \int_0^{\delta} u dy$ sınır tabaka içinde $u(y)$ hızıyla hareket eden akımın kütleli debisi

$\rho \delta^* U_e$ δ^* kalınlığındaki bir tabaka içinde U_e dış akım hızıyla hareket eden akımın kütleli debisi



Sonuç olarak δ^* büyüklüğü sürtünmenin akımı yavaşlatması nedeniyle sınır tabaka içerisinde geçemeyen debi ve dış akım hızı cinsinden tanımlanmış bir eşdeğer kalınlığı (*öteleme kalınlığı*) ifade etmektedir.

Öteleme (deplasman) kalınlığı

Sürtünme nedeniyle sınır tabaka içinden geçemeyen akışkan debisi, süreklilik denklemi gereği sınır tabakanın dışından geçer.

Sınır tabakanın akım üzerindeki öteleme etkisi nedeniyle bir cismin etrafındaki gerçek basınç dağılımı potansiyel akım halindeki basınç dağılımından farklılık gösterir.

Bu etki çoğu zaman sınır tabakanın öteleme etkisi olarak ifade edilir.

Momentum kalınlığı

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy \quad \longrightarrow \quad \rho \theta U_e^2 = \int_0^{\delta} \rho u U_e dy - \int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

$$\int_0^{\delta} \rho u^2 dy$$

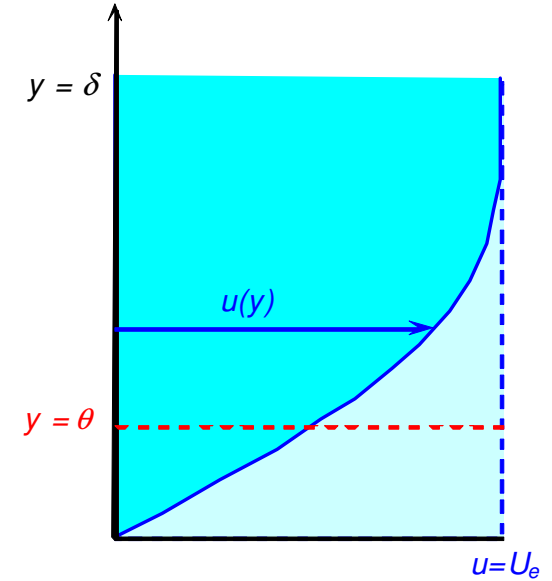
sınır tabaka içerisinde geçen
kütleli debinin taşıdığı momentum

$$\int_0^{\delta} \rho u U_e dy$$

aynı kütleli debinin dış akım hızı ile
geçmesi halinde taşıyacağı momentum

$$\rho \theta U_e^2$$

θ kalınlığındaki bir tabaka içinde U_e
dış akım hızıyla geçen kütleli debinin
taşıyacağı momentumu



θ , sınır tabaka içerisinde geçen debinin dış akım hızı yerine viskoz akım hızıyla geçmesi sonucu ortaya çıkan momentum kaybı cinsinden tanımlanmış bir kalınlığı (*momentum kalınlığı*) temsil etmektedir.

2.3. Momentum denkleminin çözümü

von Karman momentum integral denklemini

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

Mümkün olabilecek en basit sınır tabaka problemi

U_e hızındaki üniform-paralel akımda

Akıma paralel olarak yerleştirilen

Geçirgen olmayan

bir düz levha üzerindeki sınır tabaka problemidir.

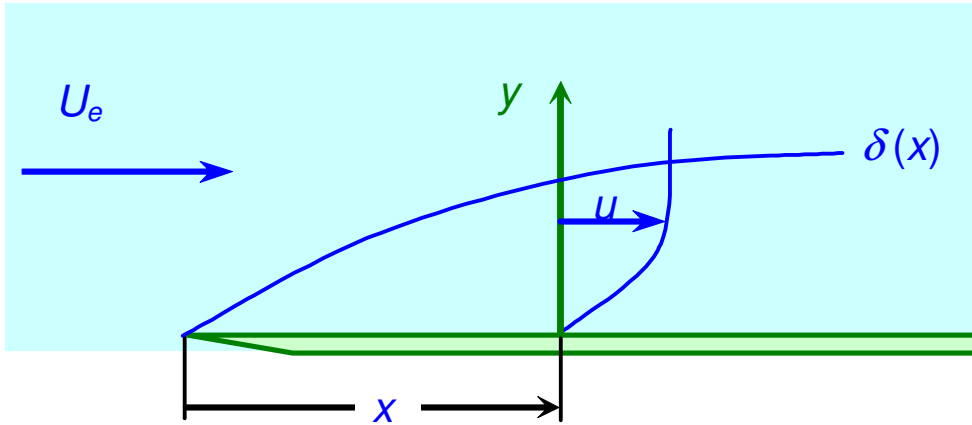


$$\frac{dU_e}{dx} = 0$$

$$v_w = 0$$



$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$



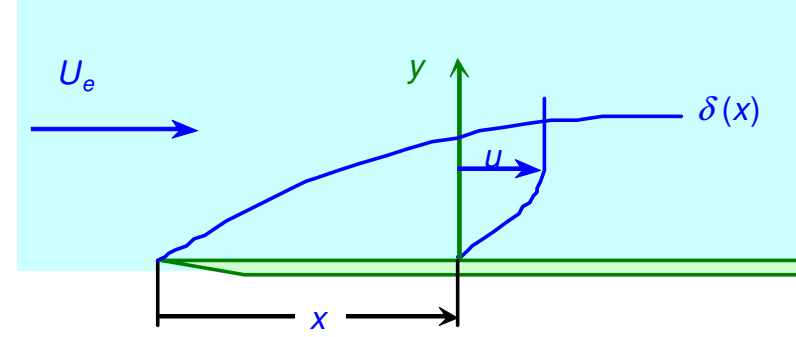
2.3.1. Pohlhausen yöntemi

UZH 386 Sınır Tabaka Ders
notları - M. Adil Yükselen

2.3.1. Pohlhausen yöntemi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

$$\theta \equiv \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy$$



θ sadece sınır tabaka içindeki $u(y)$ hız dağılımına bağlı olup hız dağılımı bilinirse çözüm mümkündür.

Sınır tabaka içinde

- duvar üzerindeki $u = 0$
- dış sınırdaki $u(\delta) = U_e$

koşullarını sağlayabilecek en basit hız dağılımı *lineer*dir.

$$\frac{u}{U_e} = \zeta, \quad \zeta = \frac{y}{\delta}$$

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) \frac{y}{\delta} dy = \left[\frac{y^2}{2\delta} - \frac{y^3}{3\delta} \right]_0^{\delta} = \frac{\delta}{6}$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \mu \frac{U_e}{\delta}$$

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = \frac{\mu U_e}{\frac{1}{2}\rho U_e^2 \delta} = \frac{2\mu}{\rho U_e \delta}$$

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{6\mu}{\rho U_e}$$

2.3.1. Pohlhausen yöntemi

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{6\mu}{\rho U_e} \longrightarrow \int_0^\delta \delta d\delta = \frac{6\mu}{\rho U_e} \int_0^x dx \longrightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{6\mu}{\rho U_e} x \longrightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{12(\mu/\rho)x}{U_e}}$$

$$\longrightarrow \frac{\delta}{x} = \sqrt{\frac{12\mu}{\rho U_e x}} \longrightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{3.464}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad \text{Re} = \frac{\rho U_e x}{\mu}$$

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \mu \frac{U_e}{\delta} = \frac{\mu U_e}{3.464 x / \text{Re}_x^{1/2}}$$

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U_e^2} = \frac{2\mu}{\rho U_e \delta} = \frac{2\mu}{\rho U_e 3.464 x / \text{Re}_x^{1/2}} \longrightarrow C_f = 0.577 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Bu problemin daha kesin bir çözümü

$$\frac{\delta}{x} = 5 \text{Re}_x^{-1/2}$$

$$C_f = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

Pohlhausen hız profilleri

$$\frac{u}{U_e} = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + a_4\zeta^4, \quad \zeta = \frac{y}{\delta}$$

Sınır tabakaya ait sınır koşulları

Duvar üzerinde $y = 0, \quad u = 0, \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx}$

Sınır tabakanın dış sınırında $y = \delta, \quad u = U_e, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2 + \frac{\lambda}{6}, \quad a_2 = -\frac{\lambda}{2}, \quad a_3 = -2 + \frac{\lambda}{2}, \quad a_4 = 1 - \frac{\lambda}{6}$$

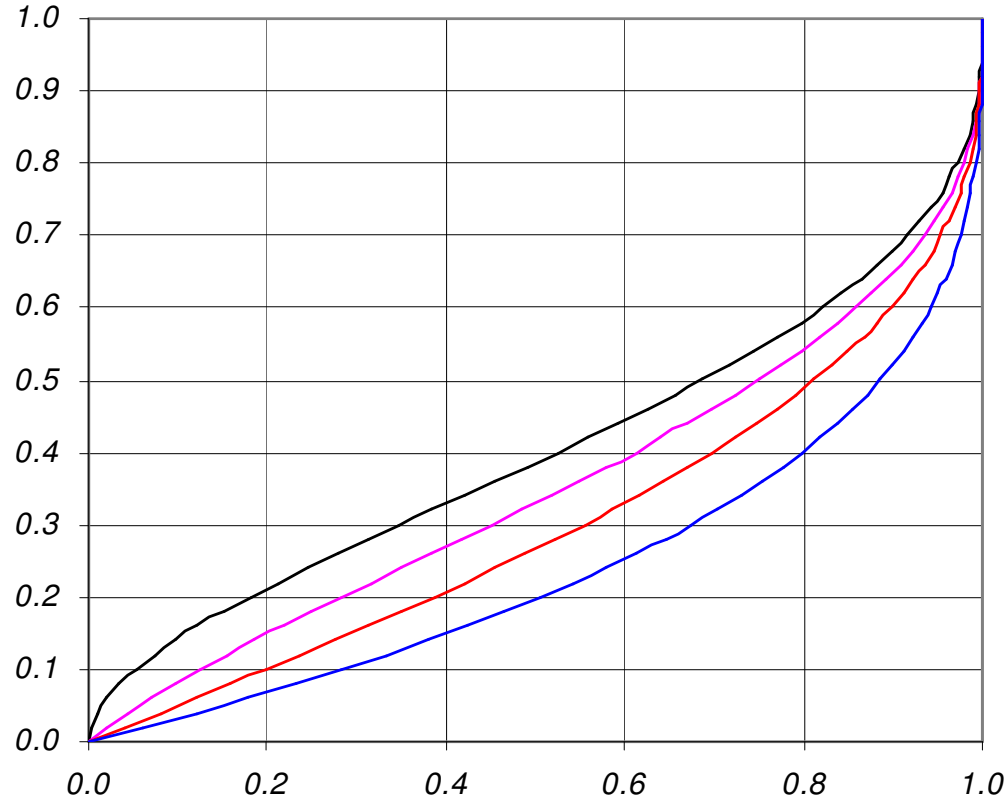
$$\frac{u}{U_e} = \left(2 + \frac{\lambda}{6}\right)\zeta - \frac{\lambda}{2}\zeta^2 + \left(-2 + \frac{\lambda}{2}\right)\zeta^3 + \left(1 - \frac{\lambda}{6}\right)\zeta^4$$

$$\frac{u}{U_e} = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{\lambda}{6}\zeta(1-\zeta)^3$$

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

*Pohlhausen basınç
gradyanı parametresi*

Pohlhausen hız profilleri



$$\frac{u}{U_e} = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4 + \frac{\lambda}{6}\zeta(1-\zeta)^3$$

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

- Lamda = -12
- Lamda = -6
- Lamda = 0
- Lamda = 7.052

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120}$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072}$$

$$\frac{C_f}{2} \frac{U_e \delta}{\nu} = 2 + \frac{\lambda}{6}$$

UZB 386 Sınır Tabaka Dersi $\lambda = -12$ için $C_f = 0$ (ayrılma)
notları - M. Adil Yükselen

2.3.2. Thwaites-Walz yöntemi

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

von Karman momentum integral denklemi

$$\frac{\delta^*}{\theta} = H \quad \text{şekil parametresi ile belirtilerek} \quad \frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} (H + 2) = \frac{\tau_w \theta}{\mu U_e}$$

$$S = \frac{\tau_w \theta}{\mu U_e} \quad \text{kayma korelasyon fonksiyonu}$$

$$\Lambda = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \quad \text{Holstein-Bohlen basınç gradyanı parametresi}$$

$$\frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = S - \Lambda [H + 2] \quad S(\Lambda) - \Lambda [H(\Lambda) + 2] = \frac{1}{2} F(\Lambda)$$

Thwaites, çeşitli deneysel verileri, Pohlhausen hız profillerini ve başka kabul edilmiş hız profillerini ve bazı tam (exact) sınır tabaka çözümlerini kullanarak

$$F(\Lambda) = 0.45 - 6.0\Lambda$$

Thwaites-Walz yöntemi

$$\frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} F(\Lambda) = \frac{0.45 - 6.0\Lambda}{2} \quad \Longrightarrow \quad 2 \frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = 0.45 - 6.0\Lambda = 0.45 - 6 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

$$2U_e \theta \frac{d\theta}{dx} + 6\theta^2 \frac{dU_e}{dx} = 0.45\nu \quad \text{her iki taraf } U_e^5 \text{ ile çarpılarak}$$

$$2U_e^6 \theta \frac{d\theta}{dx} + 6U_e^5 \theta^2 \frac{dU_e}{dx} = 0.45\nu U_e^5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dx} (\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu U_e^5$$

$$d(\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu U_e^5 dx \quad \Longrightarrow \quad \int_0^x d(\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu \int_0^x U_e^5 dx$$

$$(\theta^2 U_e^6)_x = (\theta^2 U_e^6)_{x=0} + 0.45\nu \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$$

Thwaites-Walz yöntemi

$$\frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} F(\Lambda) = \frac{0.45 - 6.0\Lambda}{2} \quad \longrightarrow \quad 2 \frac{U_e \theta}{\nu} \frac{d\theta}{dx} = 0.45 - 6.0\Lambda = 0.45 - 6 \frac{\theta^2}{\nu} \frac{dU_e}{dx}$$

$$2U_e \theta \frac{d\theta}{dx} + 6\theta^2 \frac{dU_e}{dx} = 0.45\nu \quad \text{her iki taraf } U_e^5 \text{ ile çarpılarak}$$

$$2U_e^6 \theta \frac{d\theta}{dx} + 6U_e^5 \theta^2 \frac{dU_e}{dx} = 0.45\nu U_e^5 \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{dx} (\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu U_e^5$$

$$d(\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu U_e^5 dx \quad \longrightarrow \quad \int_0^x d(\theta^2 U_e^6) = 0.45\nu \int_0^x U_e^5 dx$$

$$(\theta^2 U_e^6)_x = (\theta^2 U_e^6)_{x=0} + 0.45\nu \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\theta^2(x) = \theta^2(0) \left[\frac{U_e(0)}{U_e(x)} \right]^6 + \frac{0.45\nu}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}}$$

Thwaites-Walz yöntemi

$$\theta^2(x) = \theta^2(0) \left[\frac{U_e(0)}{U_e(x)} \right]^6 + \frac{0.45v}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Düz levha hali için } \theta(0) = 0 \\ \text{Küt cisimler için } U_e(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta^2(0) \left[\frac{U_e(0)}{U_e(x)} \right]^6 = 0 \Rightarrow \theta^2(x) = \frac{0.45v}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}$$

Bu bağıntı küt bir cismin durma noktasında tekillik gösterir. Ancak limit alınarak

$$\theta^2(0) = 0.45v \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x U_e^5(\bar{x}) d\bar{x}}{U_e^6(x)} = 0.45v \lim_{x \rightarrow 0} \frac{U_e^5}{6U_e^5 (dU_e / dx)} = \frac{0.45v}{6(dU_e / dx)_{x=0}}$$

$$\theta^2(0) = \frac{0.075v}{(dU_e / dx)_0}$$

Burada $\left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0 = 2 \frac{U_\infty}{R_0}$

U_∞ serbest akım hızı

R_0 küt cismin hücum kenarındaki eğrilik yarıçapı

Thwaites-Walz yöntemi

a) $\theta^2(x) = \frac{0.45v}{U_e^6(x)} \int_0^x U_e^5(x) dx$ integrali ile $\theta(x)$ hesaplanır

b) $U_e(x)$ dağılımından dU_e/dx türevi hesaplanır

c) $\Lambda = \frac{\theta^2}{v} \frac{dU_e}{dx}$ bağıntısıyla basınç gradyanı parametresinin $\Lambda(x)$ değeri hesaplanır

d) Λ 'nın çeşitli değerleri için $S(\Lambda)$ ve $H(\Lambda)$ fonksiyonlarının değerleri Thwaites tarafından hesaplanmış olup tablolanmıştır.

$\Lambda(x)$ değerine karşılık $S(x)$ ve $H(x)$ değerleri bu tablolardan interpolasyonla veya bu tablodaki değerlere uydurulan fonksiyonlarla hesaplanır

$0 \leq \Lambda \leq 0.1$	aralığında	$S = 0.22 + 1.57\Lambda - 1.80\Lambda^2$ $H = 2.61 - 3.75\Lambda + 5.24\Lambda^2$
$-0.1 \leq \Lambda \leq 0$	aralığında	$S = 0.22 + 1.402\Lambda + \frac{0.018\Lambda}{\Lambda + 0.107}$ $H = 2.088 + \frac{0.0731}{\Lambda + 0.14}$

Thwaites-Walz yöntemi

Tablo: Kayma ve şekil parametrelerinin basınç gradyanı ile değişimleri

Λ	$H(\Lambda)$	$S(\Lambda)$	δ/θ
0.100	2.28	0.359	8.5
0.080	2.34	0.333	8.2
0.064	2.39	0.313	8.2
0.048	2.44	0.291	8.1
0.032	2.49	0.268	8.1
0.016	2.55	0.244	8.0
0.000	2.61	0.220	8.0
-0.016	2.67	0.195	8.0
-0.032	2.75	0.168	8.0
-0.048	2.87	0.138	8.1
-0.064	3.04	0.104	8.1
-0.080	3.30	0.056	8.1
-0.084	3.39	0.038	8.2
-0.088	3.49	0.015	8.2
-0.090	3.55	0.000	8.2

Thwaites-Walz yöntemi

e) Yüzey sürtünme katsayısı

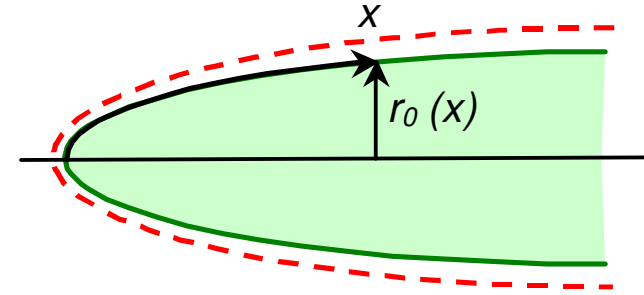
$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{\tau_w \theta}{\mu U_e} \\ C_f &= \frac{2\tau_w}{\rho U_e^2} \end{aligned} \right\} \boxed{C_f = 2 \frac{\mu}{\rho} \frac{S}{U_e \theta}} \quad \text{şeklinde hesaplanır}$$

Yukarıda izah edilen yöntem, bir çok deneysel ve teorik çalışmanın sonucuna dayanan bir $F(\Lambda)$ dağılımını dikkate alması nedeniyle Pohlhausen yöntemine kıyasla çok daha doğru sonuçlar vermektedir. Nitekim yöntemin olumlu basınç gradyanlarındaki hatası %10 un altındadır. Ancak olumsuz (ters) basınç gradyanlarında bu hata %20-30 mertebelerini bulabilmektedir.

Not: *Eksenel simetrik sınır tabaka hali*

$$\theta^2(x) = \frac{0.45\nu}{r_0^2(x)U_e^6(x)} \int_0^x r_0^2(\bar{x})U_e^5(\bar{x})d\bar{x} \quad \text{Rott - Crabtree}$$

Burada $\theta^2(0) = \frac{0.0563\nu}{(dU_e/dx)_0} \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_0 = \frac{3}{2} \frac{U_\infty}{R_0}$



Thwaites-Walz yöntemi

Örnek uygulama

Kinematik viskozitesi $\nu = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir akışkanın 10 m/s hızdaki akımı içerisinde akıma paralel bir düz levhanın yer aldığı, levha hücum kenarının 1m gerisinden itibaren bir rampa olduğunu ve bu rampa boyunca akım hızının

$$Ue(x) = 10.5 - x/2$$

şeklinde değiştiğini varsayınız. Bu levha üzerindeki sınır tabakayı $x = 2.0$ noktasına kadar hesaplayınız. Sınır tabaka ters basınç gradyanı etkisiyle ayrılır mı, tespit ediniz.

Çözüm

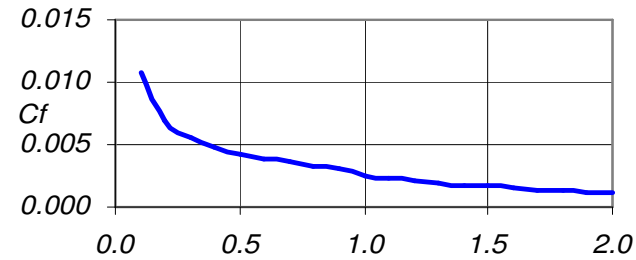
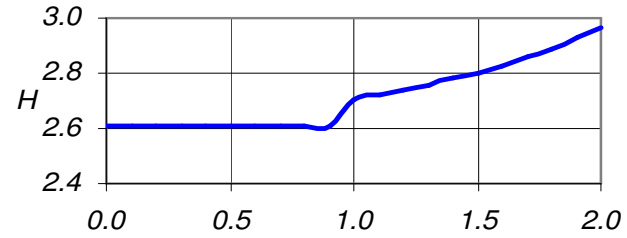
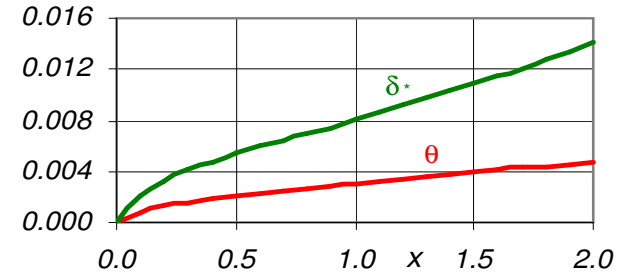
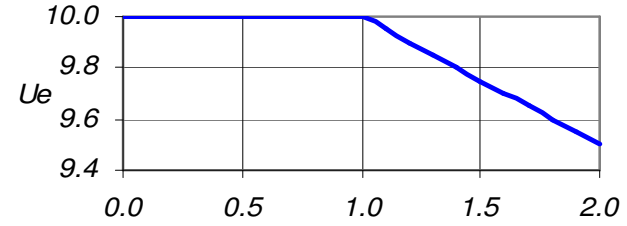
Düz levhanın hücum kenarında sınır tabakanın kalınlığı sıfır olacaktır.

Levha boyunca x koordinatı $\Delta x = 0.05$ adım uzunluklarıyla değiştirilerek yapılan hesaplama sonuçları tabloda ve grafikte yer almaktadır.

Thwaites-Walz yöntemi

Örnek uygulama

n	x	U_e	θ	H	δ^*	C_f
0	0.00	10.00	0.00000	2.610	0.00000	-
1	0.10	10.00	0.00082	2.610	0.00214	0.01071
2	0.20	10.00	0.00125	2.610	0.00328	0.00701
3	0.30	10.00	0.00157	2.610	0.00411	0.00559
4	0.40	10.00	0.00184	2.610	0.00479	0.00479
5	0.50	10.00	0.00207	2.610	0.00540	0.00426
6	0.60	10.00	0.00227	2.610	0.00594	0.00387
7	0.70	10.00	0.00246	2.610	0.00643	0.00357
8	0.80	10.00	0.00264	2.610	0.00689	0.00333
9	0.90	10.00	0.00281	2.610	0.00732	0.00314
10	1.00	10.00	0.00296	2.707	0.00802	0.00249
11	1.10	9.95	0.00316	2.723	0.00859	0.00229
12	1.20	9.90	0.00334	2.740	0.00917	0.00211
13	1.30	9.85	0.00353	2.759	0.00974	0.00194
14	1.40	9.80	0.00371	2.780	0.01032	0.00179
15	1.50	9.75	0.00389	2.804	0.01091	0.00166
16	1.60	9.70	0.00407	2.829	0.01151	0.00153
17	1.70	9.65	0.00424	2.858	0.01213	0.00140
18	1.80	9.60	0.00442	2.890	0.01277	0.00129
19	1.90	9.55	0.00459	2.926	0.01345	0.00117
20	2.00	9.50	0.00477	2.967	0.01415	0.00106



Thwaites-Walz yöntemi

Örnek uygulama

Bu örnek uygulamada dikkati çeken bazı hususlar ve sonuçlar:

$$x = 1.0 \text{ m için} \quad Re_x = 1 \times 10 \times 2.0 \times 10^4 = 200,000$$

$$x = 2.0 \text{ m için} \quad Re_x = 2 \times 9.5 \times 2.0 \times 10^4 = 380,000$$

$$x = 1.0 \text{ m için} \quad \theta/x = 0.00296 / 1.0 = 0.00296 = \% 0.30$$

$$x = 2.0 \text{ m için} \quad \theta/x = 0.00477 / 2.0 = 0.00238 = \% 0.24$$

$$x = 1.0 \text{ m için} \quad \delta/x = 0.00802 / 1.0 = 0.00802 = \% 0.80$$

$$x = 2.0 \text{ m için} \quad \delta/x = 0.01415 / 2.0 = 0.007075 = \% 0.71$$

$$x = 1.0 \text{ m için} \quad H = 2.61$$

$$x = 2.0 \text{ m için} \quad H = 2.97$$

$$x = 0.1 \text{ m için} \quad C_f = 0.01071$$

$$x = 1.0 \text{ m için} \quad C_f = 0.00249$$

$$x = 2.0 \text{ m için} \quad C_f = 0.00106$$

Ayrılma yok

Emmeli ve Enjeksiyonlu Akımlar

Gözenekli duvarlar üzerindeki emmeli veya üfleme akımları,

- soğuk bir akışkanın enjekte edilmesiyle soğutma
- akımın emilmesi yoluyla türbülansa geçişin geciktirilmesi
- ve ters basınç gradyanında akım ayrılmasının önlenmesi

gibi uygulamalarıyla pratik bir öneme sahiptir.

Genel olarak integral momentum denklemi bu gibi akımların (özellikle enjeksiyon halinde) incelenmesinde yeterince güvenilir değildir.

Bununla birlikte *ayrılmanın emme yoluyla önlenmesi* için Prandtl tarafından gerçekleştirilen basit inceleme ilginçtir.

Prandtl bu incelemesinde Pohlhausen hız profilinin ayrılmaya karşılık gelen $\lambda = -12$ halini dikkate almıştır.

Emmeli ve Enjeksiyonlu Akımlar

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{3}{10} - \frac{\lambda}{120}$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{37}{315} - \frac{\lambda}{945} - \frac{\lambda^2}{9072}$$

$$\frac{C_f}{2} \frac{U_e \delta}{\nu} = 2 + \frac{\lambda}{6}$$

$\lambda = -12$ halinde

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{4}{35}$$

$$C_f = 0$$

hız profili emme yoluyla sabit tutulduğundan

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{d\delta^*}{dx} = \frac{d\theta}{dx} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2}$$

$$v_w = \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) = \frac{dU_e}{dx} \left(2 \frac{4}{35} + \frac{2}{5} \right) \delta$$

Duvar üzerinde

$$\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -U_e \frac{dU_e}{dx}$$

$\lambda = -12$ halindeki hız profili için

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_w = 12 \frac{U_e}{\delta^2}$$

$$12 \frac{U_e}{\delta^2} = -\frac{U_e}{\nu} \frac{dU_e}{dx} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{12\nu}{-dU_e/dx}}$$

$$v_w = 2.18 \sqrt{-\nu \frac{dU_e}{dx}}$$

Enerji integral denklemi

- *Düzlemsel,*
 - *daimi,*
 - *sabit-yoğunluklu,*
 - *sabit-özellikli*
- } akım şartlarında bazı hallerde önemli ısı enerjisi (veya ısı) transferi olayları görülebilir.

Örneğin 50°C sıcaklıktaki havanın 30°C sıcaklıktaki bir yüzey üzerinden geçtiği akım göz önüne alınırsa bu halde önemli bir ısı transferi meydana gelecektir.

Akımda söz konusu sıcaklıklarda havanın { - yoğunluğunda, - viskozitesinde - ısı özelliklerinde } dikkate değer bir değişim olmayacaktır

Yüzey üzerinde bir ısı sınır tabaka oluşacak ve bu tabakadaki sıcaklıklar { $y = 0$ da $T = T_w(x)$ ile $y = \delta_T(x)$ de $T = T_e(x)$ } arasında değişecektir.

Isı sınır tabakanın δ_T kalınlığı { - akışkanın fiziksel özelliklerine ve - ilgilenilen probleme bağlı olarak } viskoz sınır tabaka kalınlığından daha büyük veya küçük olabilir

Enerji integral denklemi

Prandtl
sayısı

$$\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$$

momentum yayınımlı katsayısı ile
ısı yayınımlı katsayısının oranı

Çoğu gazlar için $\text{Pr} \approx 0.7$ dir. Buna göre

{ Gazlar içinde ısı
momentumdan daha hızlı yayılır.

Bir bakıma:

{ ısı sınır tabaka
viskoz sınır tabakaya
kıyasla

$$\frac{1}{0.7}$$

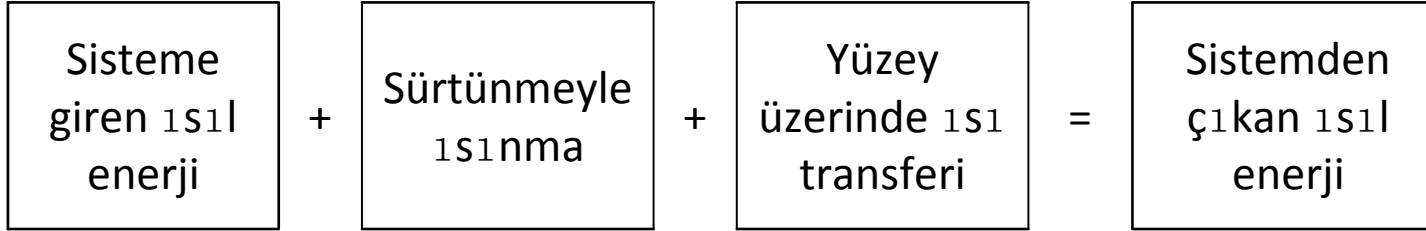
oranında daha
kalın olur

Su, yağ vb gibi bilinen sıvılar için Prandtl sayısı 10 ile 10^6 gibi yüksek mertebeler arasında değişir.

Diğer uç noktada ise Prandtl sayısının 10^{-2} mertebesinde olduğu sıvı metaller yer alır.

Isı transferinin söz konusu olduğu sınır tabakalarda akışkanın Prandtl sayısının çok önemli olduğu açıktır.

Enerji integral denklemi



Kontrol hacminin **sol** tarafından **giren** ısı enerjisi

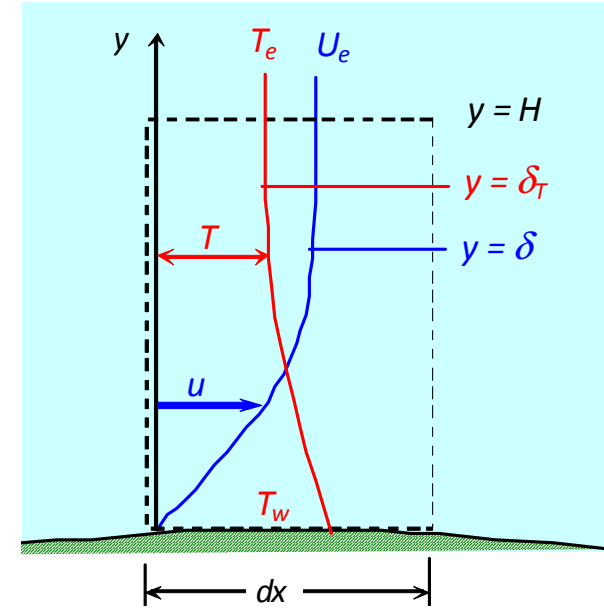
$$\rho c_p \int_0^H u T dy$$

sağ tarafından **çıkan** ısı enerjisi

$$\rho c_p \int_0^H u T dy + \frac{d}{dx} \left[\rho c_p \int_0^H u T dy \right] dx$$

üst sınırdan giren kütle **debisi**nin soktuğu ısı enerjisi

$$c_p T_e \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right]$$



Enerji integral denklemi

Viskoz tabaka içerisinde **kayma gerilmesinden** kaynaklanan **sürtünme ısınması**

$$\int_0^H \mu (\partial u / \partial y)^2 dy$$

Yüzey üzerindeki ısı transferi $-k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w$

Bütün bu terimler enerjinin korunumu için yukarıda yazılan bağıntıda kullanılarak

$$\rho c_p \int_0^H u T dy + c_p T_e \left[\frac{d}{dx} \left(\int_0^H \rho u dy \right) dx - \rho_w v_w dx \right] + \int_0^H \mu (\partial u / \partial y)^2 dy$$

$$- k (\partial T / \partial y)_{y=0} dx + \rho_w v_w c_p T_w dx = \rho c_p \int_0^H u T dy + \frac{d}{dx} \left[\rho c_p \int_0^H u T dy \right] dx$$

ρ sabit olmak üzere düzenlenerek

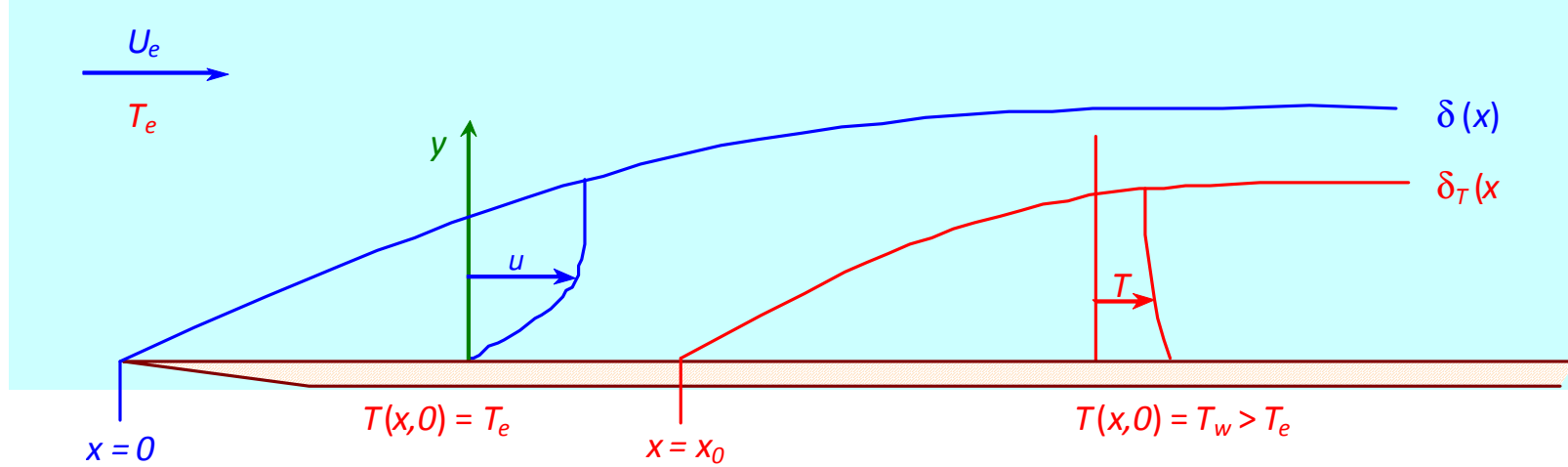
$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H (T_e - T) u dy \right] + \frac{v}{c_p} \int_0^H \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy - v_w (T_e - T_w) = \frac{k (\partial T / \partial y)_w}{\rho c_p}$$

integral enerji denklemi

Denklemden çok sayıda bilinmeyen yer almaktadır. Hız ve sıcaklık profillerinin verilmesi halinde bilinmeyen sayısı azaltılabilir. Bu amaçla sıcaklık profilleri için de Pohlhausen hız profillerine benzer bir yaklaşım yapılabilir.

Enerji integral denklemi

Örnek: Isitılmamış başlangıç-uzunluğu problemi



Akım hızının viskoz kaynaklı sürtünme ısınmasının ihmal edilebileceği kadar küçük olduğu varsayılmaktadır. Bu durumda denklemdeki ikinci terim ortadan kalkar

Yüzey üzerinde emme-üfleme olmadığı varsayılmaktadır.

$$\frac{d}{dx} \left[\int_0^H (T_e - T) u dy \right] = \frac{k(\partial T / \partial y)_w}{\rho c_p}$$

Enerji integral denklemi - Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

Eckert ve Drake (1959) problemin çözümü için *hız ve sıcaklık profillerini kübik fonksiyonlarla temsil etmişlerdir*

Kübik hız profili:

$$\frac{u}{U_e} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta} \right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

$$y = 0, \quad u = 0, \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{dp}{dx}$$

$$y = \delta, \quad u = U_e, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Sınır koşulları ile

$$\frac{u}{U_e} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3$$

Kübik sıcaklık profili:

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = b_0 + b_1 \left(\frac{y}{\delta_T} \right) + b_2 \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^2 + b_3 \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3$$

$$y = 0, \quad T = T_w, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

$$y = \delta_T, \quad T = T_e, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

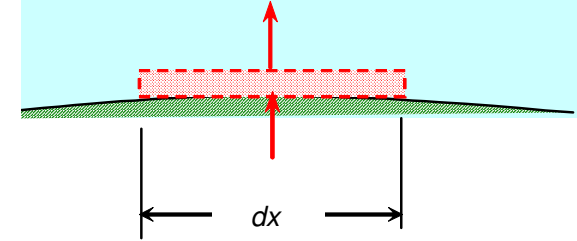
Sınır koşulları ile

$$\frac{T - T_w}{T_e - T_w} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3$$

Enerji integral denklemi - Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

NOT:

Burada duvar üzerindeki $(\partial^2 T / \partial y^2)_w = 0$ koşulu, duvar üzerinde y doğrultusunda taşınımın ihmal edildiğini göstermektedir. Nitekim duvara komşu bir kontrol hacmine duvar tarafından giren ve üst taraftan çıkan ısıların farkını dikkate alarak bu durumu görmek mümkündür:



$$\left\{ \left(-k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx + k \left[\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx \right\}_{y \approx 0} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{y \approx 0} dy dx \approx 0$$

Enerji integral denkleminde kübik hız ve sıcaklık profilleri kullanılarak

$$U_e (T_e - T_w) \frac{d}{dx} \left[\delta \left(\frac{3}{20} \zeta^2 - \frac{3}{280} \zeta^4 \right) \right] = \frac{3}{2} \frac{v (T_e - T_w)}{\delta \zeta \text{Pr}}$$

Burada $\zeta = \frac{\delta_T}{\delta}$ $\text{Pr} = \frac{\mu c_p}{k}$

Enerji integral denklemi - Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

Prandtl sayısının 1 civarında olduğu varsayılarak

$$\zeta = \frac{\delta_T}{\delta} < 1 \quad \longrightarrow \quad \zeta^4 \ll \zeta^2 \quad \text{kabul edilebilir} \quad \longrightarrow \quad \delta \zeta \frac{d}{dx} [\delta \zeta^2] = \frac{10\nu}{U_e \text{Pr}}$$

Denklem düzenlenerek

$$\delta \zeta \left[\frac{d\delta}{dx} \zeta^2 + \delta \frac{d\zeta^2}{dx} \right] = \zeta^3 \delta \frac{d\delta}{dx} + \delta^2 \zeta \frac{d\zeta^2}{dx} = \frac{10\nu}{U_e \text{Pr}} \quad \longrightarrow \quad \zeta^3 \frac{1}{2} \frac{d\delta^2}{dx} + \delta^2 \frac{2}{3} \frac{d\zeta^3}{dx} = \frac{10\nu}{U_e \text{Pr}}$$

Öte yandan düz levha üzerinde momentum denklemi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2}$$

olup burada kübik hız profili kullanılırsa

$$\delta \frac{d\delta}{dx} = \frac{140}{13} \frac{\nu}{U_e}$$

Bu bağıntı integre edilerek

$$\delta^2 = \frac{280}{13} \frac{\nu x}{U_e}$$

Enerji integral denklemi - Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

Viskoz sınır taaka kalınlığı için bulunan bağıntı enerji integral denkleminde kullanılarak

$$\zeta^3 \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{280}{13} \frac{vx}{U_e} \right) + \left(\frac{280}{13} \frac{vx}{U_e} \right) \frac{2}{3} \frac{d\zeta^3}{dx} = \frac{10\nu}{U_e \text{Pr}}$$

Düzenlenerek
$$\frac{4}{3} x \frac{d\zeta^3}{dx} + \zeta^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{\text{Pr}}$$

İntegre edilerek
$$\zeta^3 = Cx^{-3/4} + \frac{13}{14} \frac{1}{\text{Pr}}$$
 elde edilir

Sınır şartı $x = x_0$ da $\zeta = 0$ (yani $\delta_T = 0$) olup

$$\zeta = \frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{1.026 \text{Pr}^{1/3}} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3}$$

$x_0 = 0$ için (tüm levhanın ısıtılmış olması halinde)

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \frac{1}{1.026 \text{Pr}^{1/3}}$$

Enerji integral denklemi - Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi

Isıl sınır tabaka çözümü ısıl sınır tabaka kalınlığının hesaplanmasından ibaret değildir.

Isı transferi, önerilen kübik sıcaklık profili ve hesaplanan ısıl sınır tabaka kalınlığı

$$q_w = -k \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \quad \text{bağıntısında kullanılarak hesaplanır.}$$

Duvar üzerindeki ısı transferi bir “*h* – film katsayısı” cinsinden ifade edilebilir.

$$q_w = h(T_w - T_e)$$

Film katsayısı $\left\{ \begin{array}{l} \text{Nusselt sayısı içerisinde} \\ \text{Stanton sayısı içerisinde} \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} Nu \equiv \frac{hx}{k} \\ St \equiv \frac{h}{\rho U_e c_p} \end{array} \right\}$ şeklinde yer alır.

Isıtılmamış başlangıç-uzunluğu problemi için $\left\{ \begin{array}{l} Nu = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \left(\frac{\rho U_e x}{\mu} \right) \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{1/3} \\ St = \frac{Nu}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} = 0.332 \text{Pr}^{-2/3} \text{Re}^{-1/2} \left[1 - \left(\frac{x_0}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3} \end{array} \right.$

$$C_f = 0.664 \text{Re}_x^{-1/2}$$

olmak üzere

$$St \cdot \text{Pr}^{2/3} = \frac{C_f}{2}$$