BÖLÜM 1- GİRİŞ

1.1. Viskoz olayların önemi

Akışı yöneten temel denklemler

A- İntegral biçimde

Süreklilik	$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\upsilon}\rho\cdot d\upsilon+\iint\limits_{S}\rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS=0$
Momentum	$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\upsilon}(\rho\cdot d\upsilon)\cdot\vec{V}+\iint\limits_{S}\left(\rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS\right)\cdot\vec{V}=-\iint\limits_{S}p\cdot\vec{n}\,dS+\iiint\limits_{\upsilon}\rho\cdot\vec{f}\cdot d\upsilon+\vec{F}_{visc}$
Enerji	$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\upsilon}\rho\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)\cdot d\upsilon+\iint\limits_{S}\left(\rho\cdot\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS\right)\cdot\left(e+\frac{1}{2}V^2\right)=$ $-\iint\limits_{S}\left(p\cdot\vec{n}\,dS\right)\cdot\vec{V}+\iiint\limits_{\upsilon}\left(\vec{f}\cdot\rho\cdot d\upsilon\right)\cdot\vec{V}+\iiint\limits_{\upsilon}\dot{q}\cdot\rho\cdot d\upsilon+\dot{W}_{visc}+\dot{Q}_{visc}$

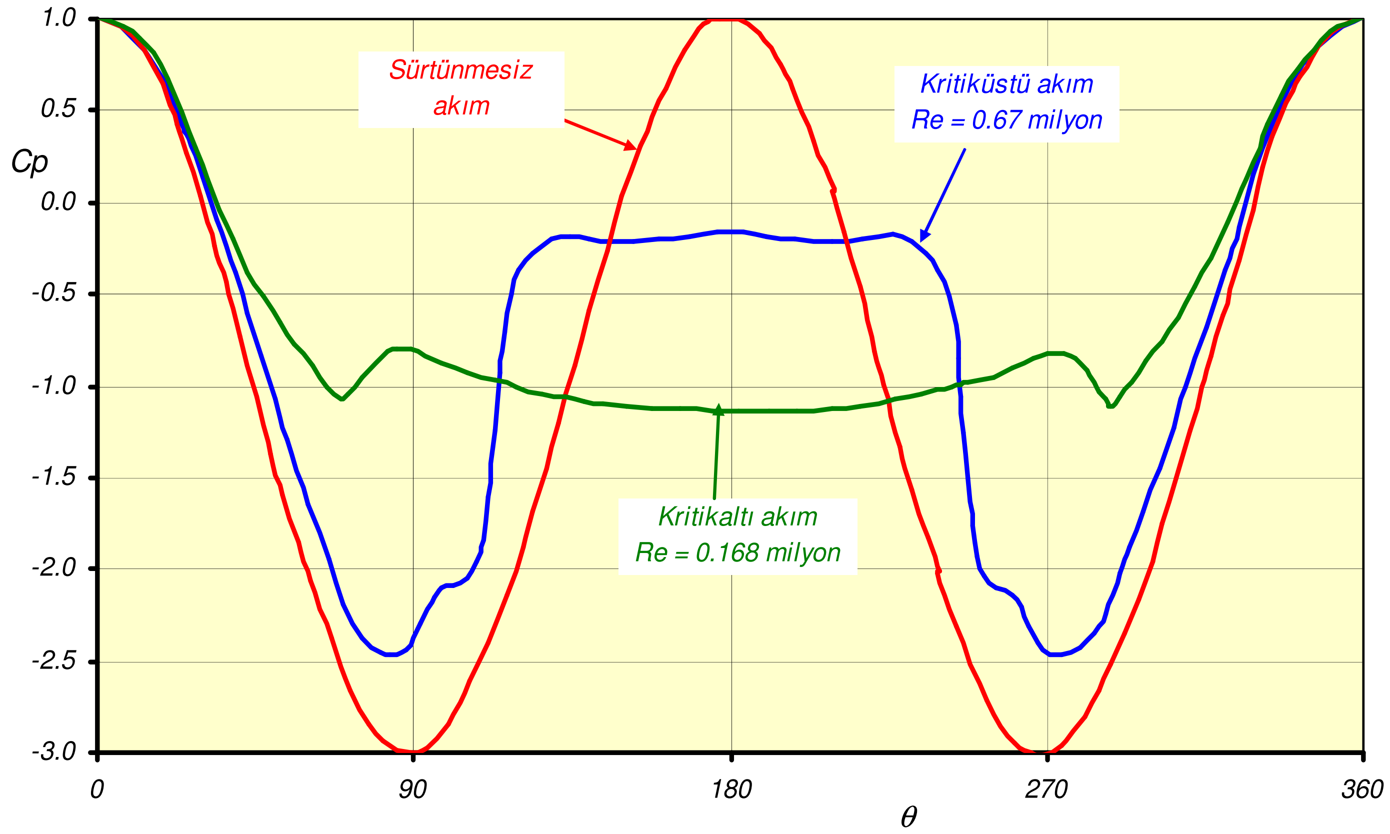
Akışı yöneten temel denklemler

B- Diferansiyel biçimde

Süreklilik	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \cdot \vec{V}) = 0$	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, \nabla \vec{V} = 0$
Momentum	$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} u) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot f_x + f_{x-visc}$ $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} v) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot f_y + f_{y-visc}$ $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V} w) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot f_z + f_{z-visc}$	$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot f_x + f_{x-visc}$ $\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho \cdot f_y + f_{y-visc}$ $\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho \cdot f_z + f_{z-visc}$
Enerji	$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho \cdot \left(e + \frac{1}{2}V^2\right)\right] + \nabla\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}V^2\right)\vec{V}\right] = -\nabla(p\vec{V}) + \rho\, \vec{f}\, \vec{V} + \rho\, \dot{q} + \dot{w}_{visc} + \dot{q}_{visc}$	

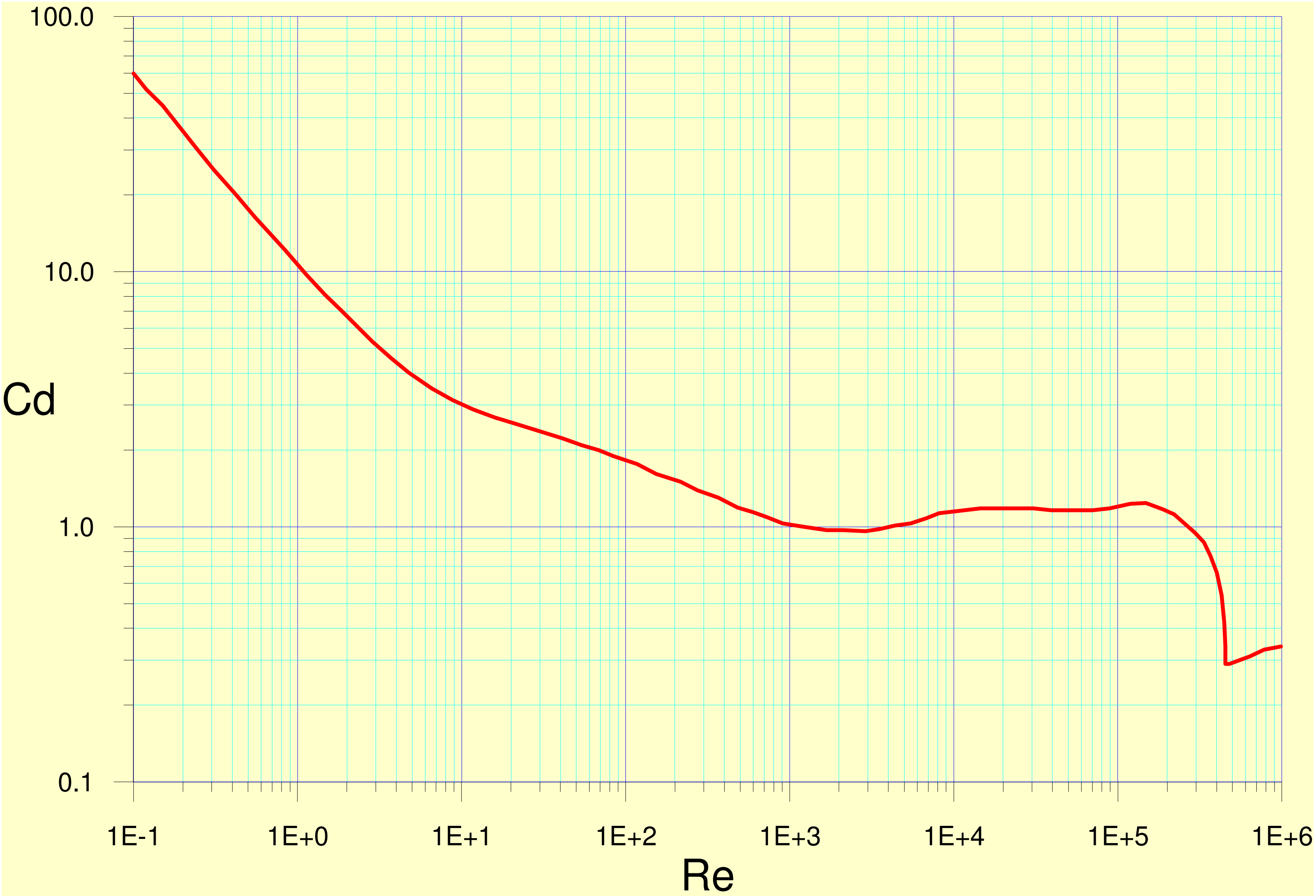
DAİRESEL SİLİNDİR ETRAFINDAKİ AKIM

Basınç dağılımı



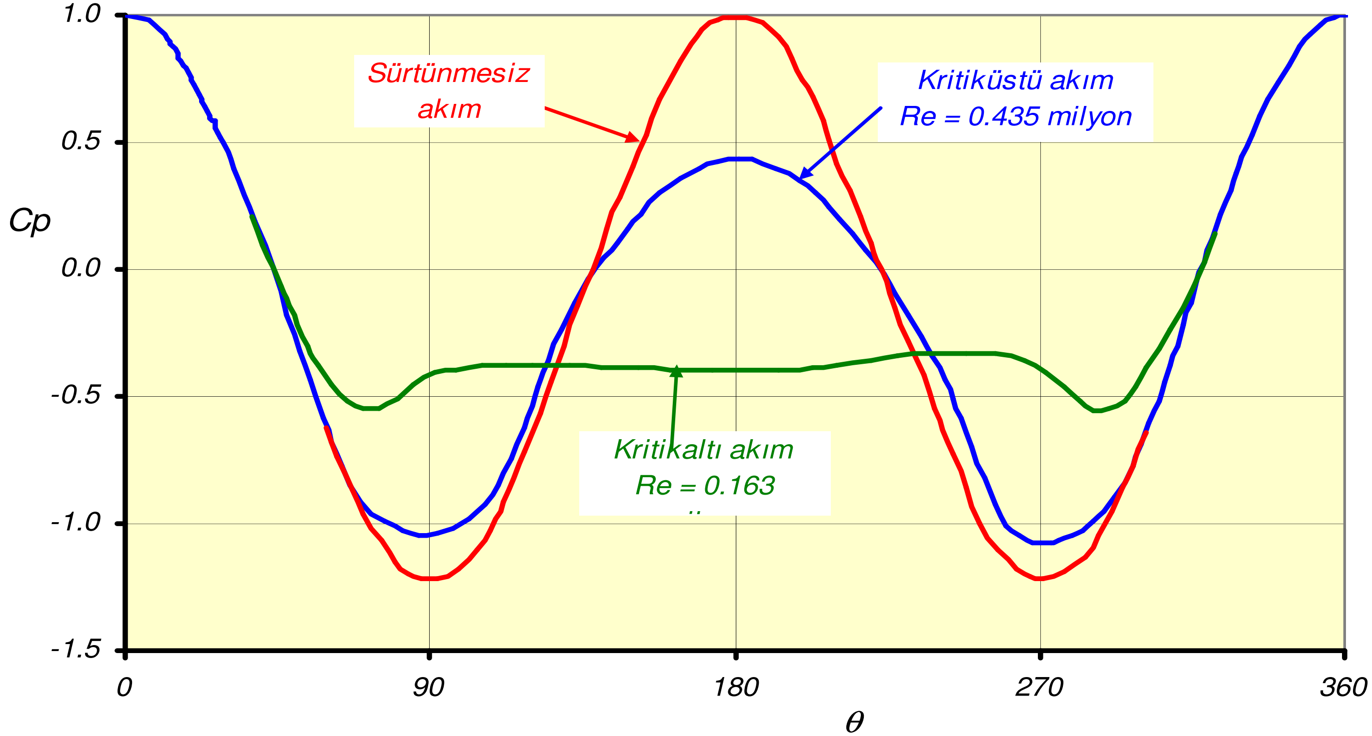
DAİRESEL SİLİNDİR ETRAFINDAKİ AKIM

Sürükleme katsayısının Reynolds sayısı ile değişimi



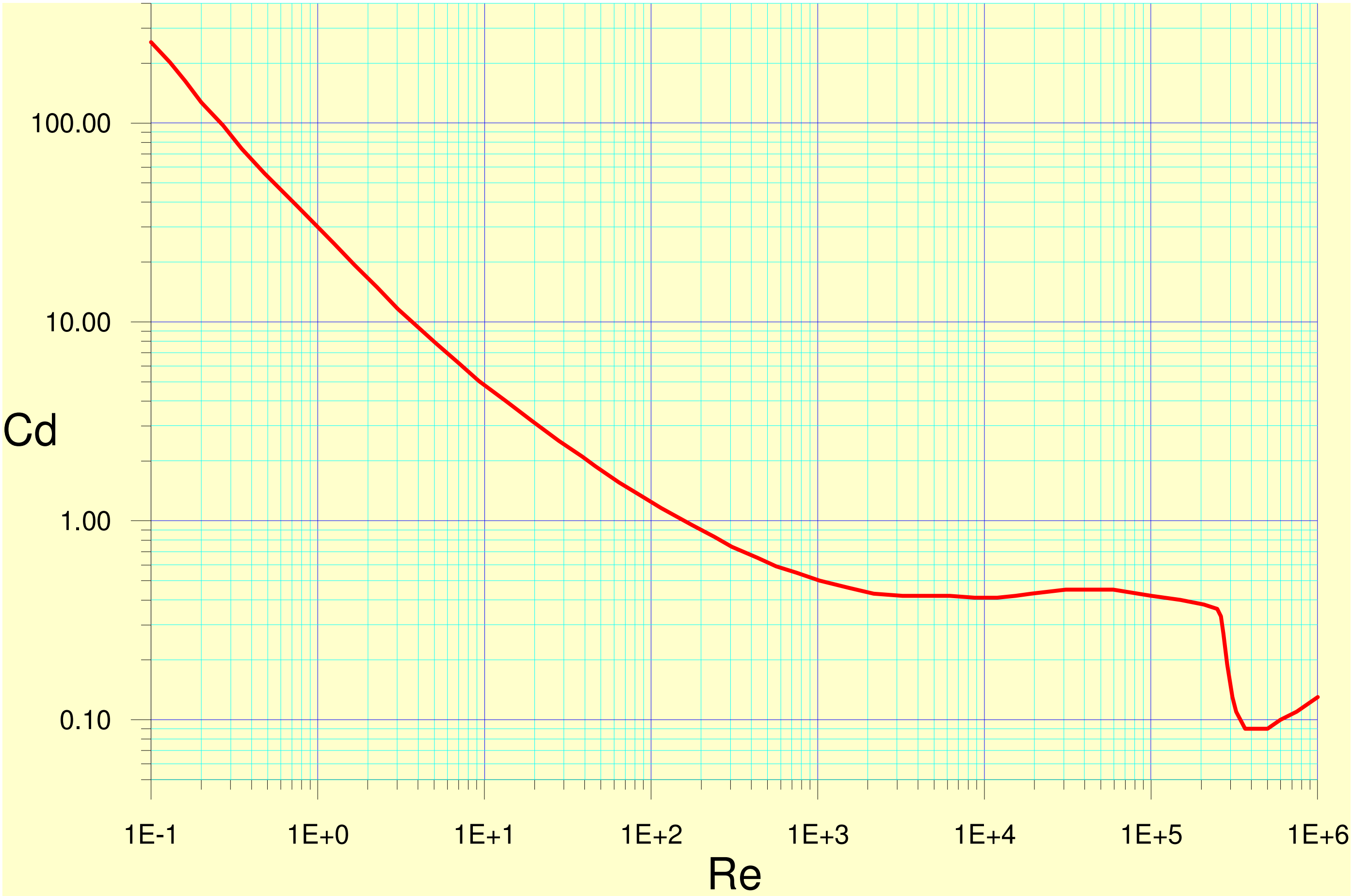
KÜRE ETRAFINDAKİ AKIM

Basınç dağılımı

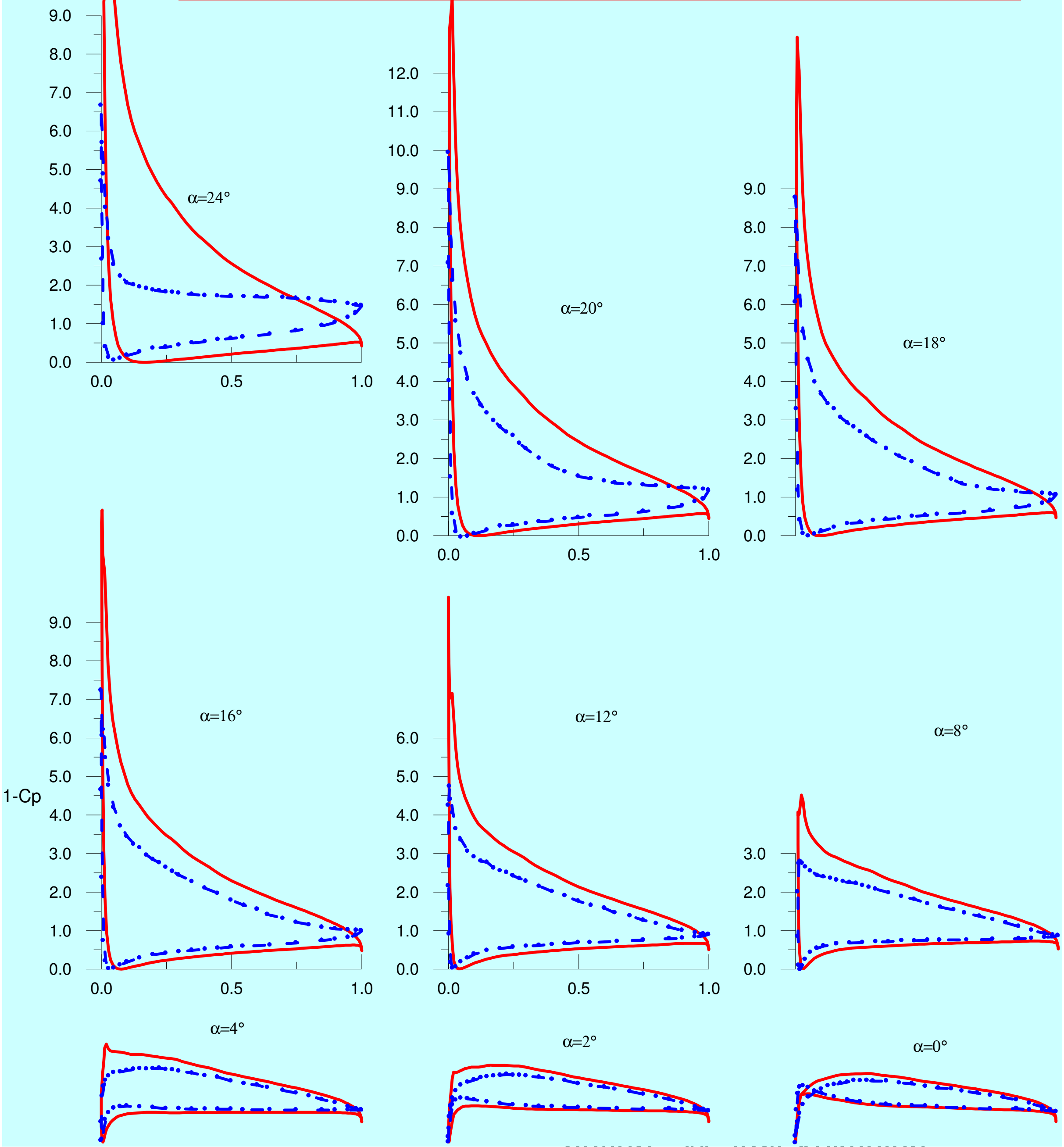


KÜRE ETRAFINDAKİ AKIM

Sürükleme katsayısının Reynolds sayısı ile değişimi



KANAT PROFİLİ ETRAFINDAKİ AKIM

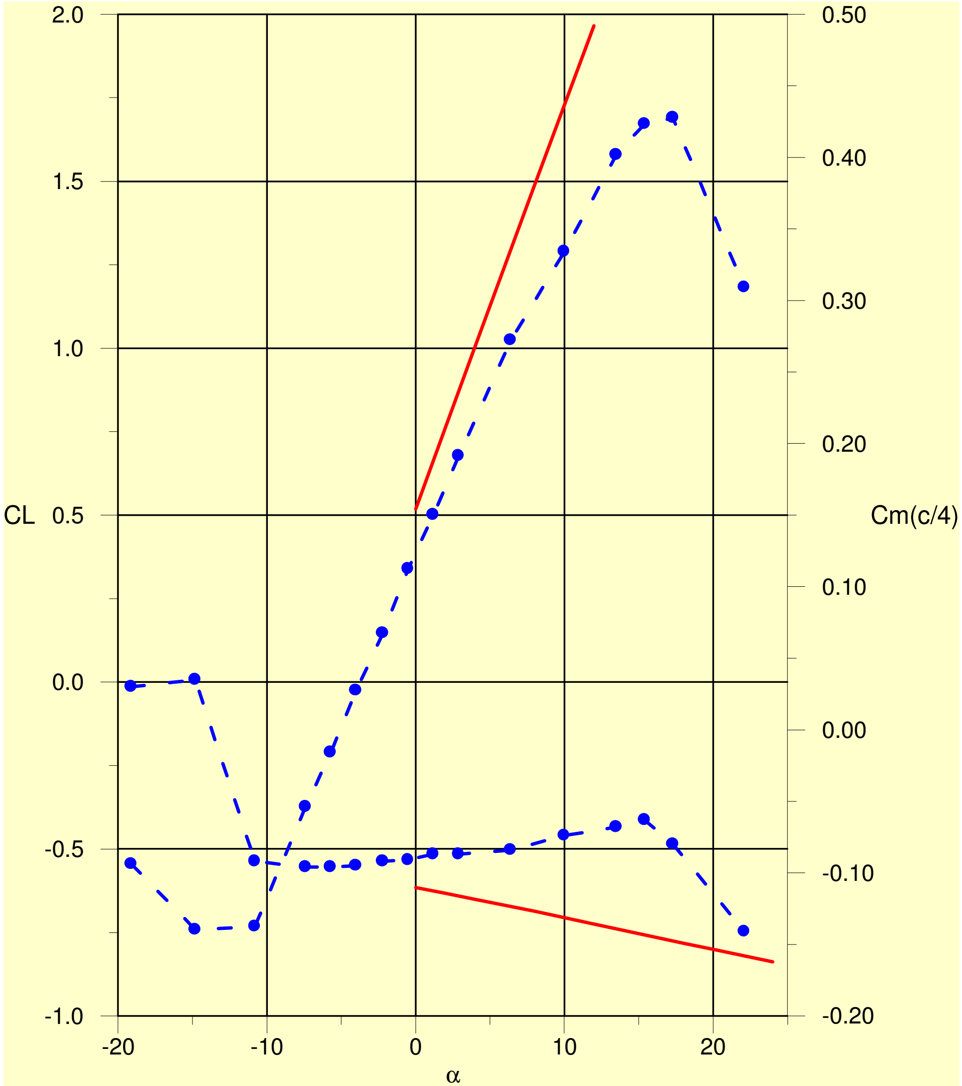


NACA 4412 profili

Deneysel, Re=3,100,000
(Pinkerton, NACA TR-563)

Teorik, Panel yöntemi

KANAT PROFİLİ ETRAFINDAKİ AKIM

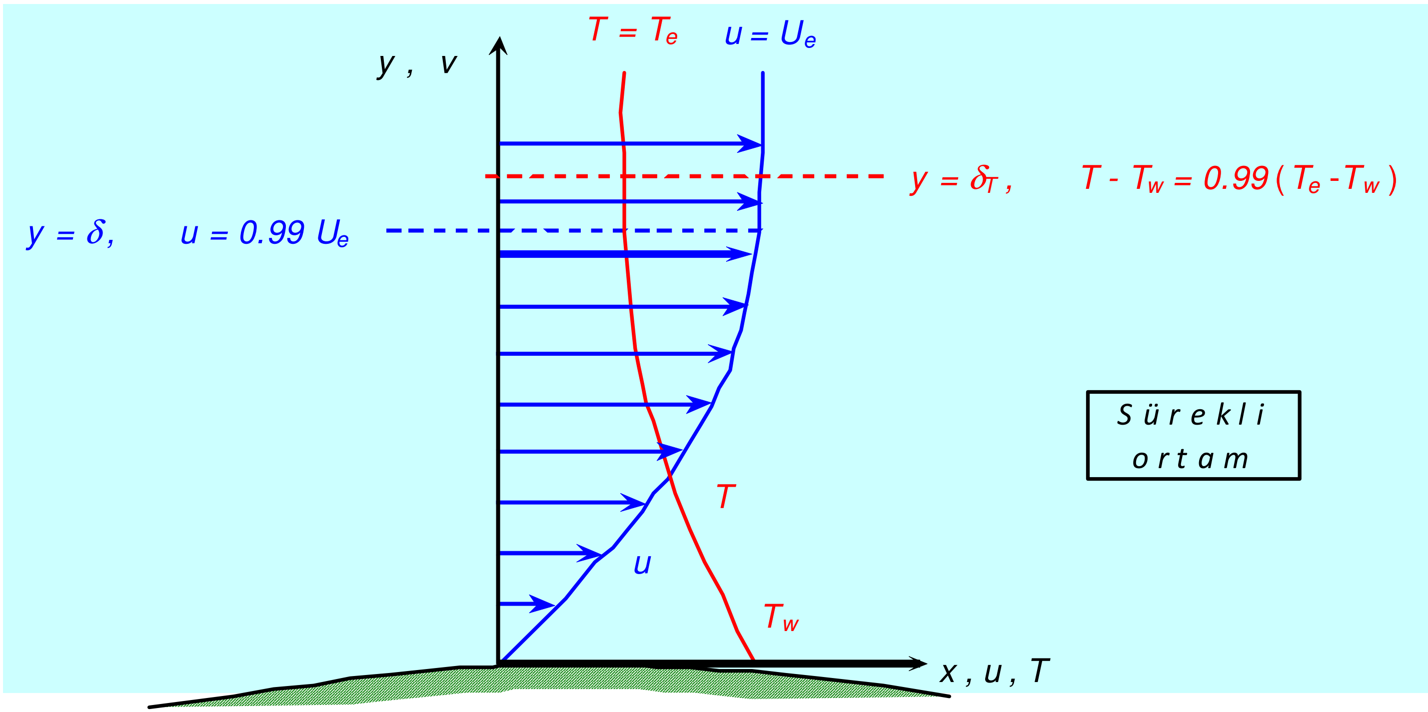


NACA 4412 profili

Deneysel, Re=3,100,000
(Pinkerton, NACA TR-563)

Teorik, Panel yöntemi

AKIŞKAN KATI SINIRINDAKİ KOŞULLAR



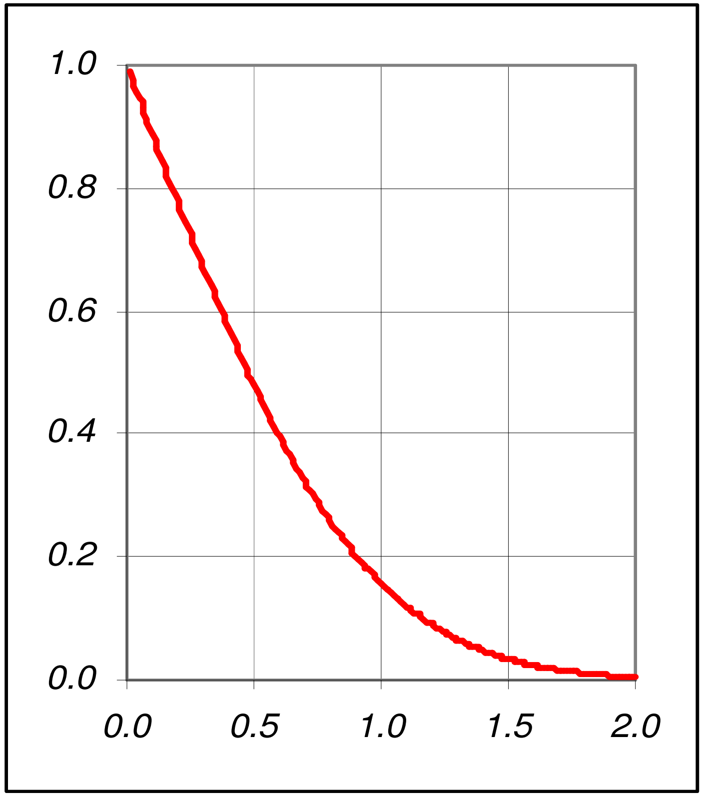
Hız sınır tabakası

Sıcaklık sınır tabakası

LAMİNER TRANSPORT OLAYLARI

Laminer akımda difüzyon örneği : *Stokes problemi*

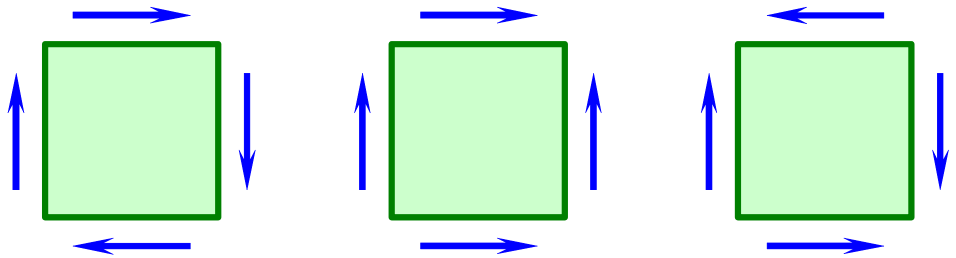
Aniden hareket ettirilen sonsuz geniş bir levha üzerindeki viskoz akım



AKIŞKAN İÇİNDE GERİLME

Bir katı cisim çekme altında uzar, baskı altında kısalır. Böylece bir iç gerilme oluşur. Uzama veya kısalmayı sağlayan yük ortadan kaldırılınca eski haline döner ve gerilmeler de ortadan kalkar. Yani katı cisim içindeki yer değiştirmeler gerilme yaratır.

Oysa akışkan böyle bir basit yer değiştirmeye maruz bırakılırsa yeni konumunda yine gerilmesiz kalır. Akışkanda gerilmenin nedeni konum değil ama akışkan zerrelerinin birbirine göre hareketidir. Dolayısıyla gerilme olabilmesi için öncelikle akışkanın hareketli olması gerekir. Ama bu da yeterli olmayıp hareketli bölgede hız farklılıkları olması gerekir. Ne kadar büyük hız farklılığı varsa gerilme de o kadar büyük olur.



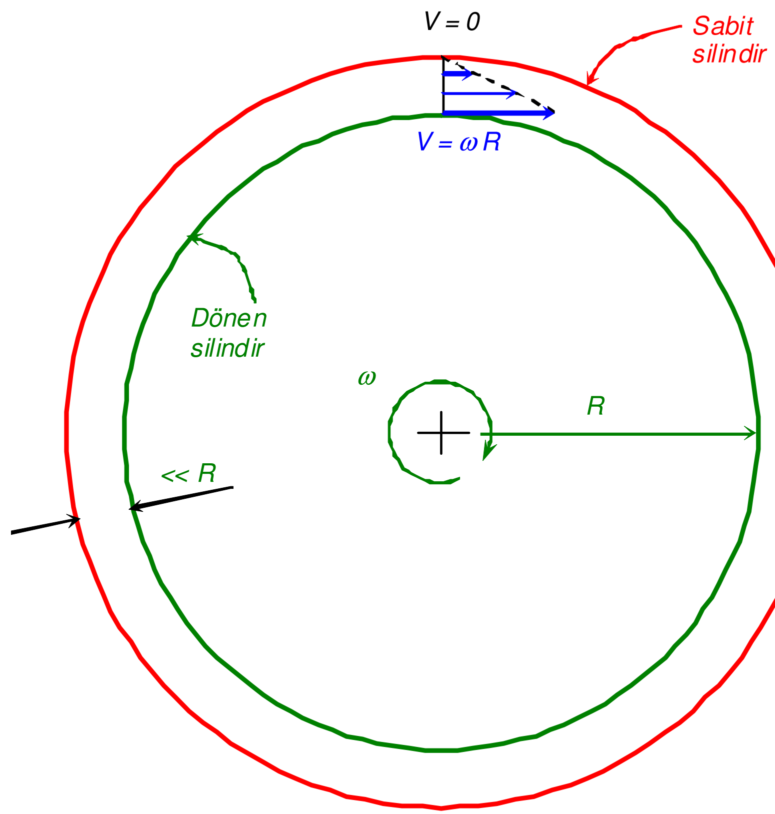
AKIŞKAN İÇİNDE GERİLME

Viskoz gerilme ile hız farklılıkları arasındaki ilişki (Stokes kanunu) $\boxed{\tau = \mu \frac{\partial V}{\partial n}}$

μ = μ(T) : Laminer *Mutlak Viskozite* katsayısı

$$\boxed{\mu = \frac{\tau}{\partial V / \partial n} \quad \Rightarrow \quad \frac{[ML^{-1}T^{-2}]}{[LT^{-1}]/[L]} = [ML^{-1}T^{-1}]}$$

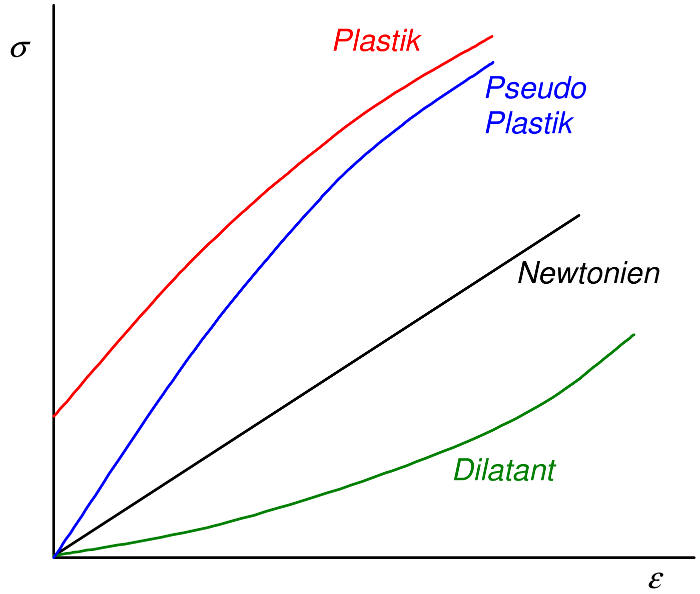
$$\boxed{\mu\,[kg/(m \cdot s)] = [N \cdot s / m^2] = [Pa \cdot s]}$$



Couette deneyi

AKIŞKAN İÇİNDE GERİLME

gerilme-şekil değiştirme hızı ilişkisi



Laminer *kinematik viskozite* katsayısı

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad [L^2 T^{-1}] \quad [m^2 / s]}$$

Reynolds sayısı

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu}$$

AKIŞKAN İÇİNDE ISI TRANSFERİ

(i) Isı akışı ancak sıcaklık gradyantı varsa oluşur ve sıcaklık gradyantı ile orantılıdır

(ii) Isı daima sıcaklığın büyük olduğu yerden küçük olduğu yere doğru akar.

Fourier kanunu $$q = -k \frac{\partial T}{\partial n}$$

K = k(T): Laminer ısıl iletkenlik katsayısı

HIZ VE SICAKLIK SINIR TABAKALARI İÇİN ÖNEMLİ BOYUTSUZ BÜYÜKLÜKLER

Reynolds sayısı

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \qquad \mathrm{Re} = \frac{\rho V^2}{\mu V / L} = \frac{Atalet\ kuvveti}{Viskoz\ kuvvet}$$

$$\mathrm{Re} \propto 10^3 \div 10^8$$

Prandtl sayısı

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mu c_p}{k} \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\mu / \rho}{k / (\rho c_p)} = \frac{momentum\ difüzyonu}{ısıl\ difüzyon}$$

Çoğu gazlar için *Pr~0.7*

Su ve benzeri sıvılar için *Pr*~O(*10*)

Sıvı metaller için *Pr<<1*

Akışkan kinematiği

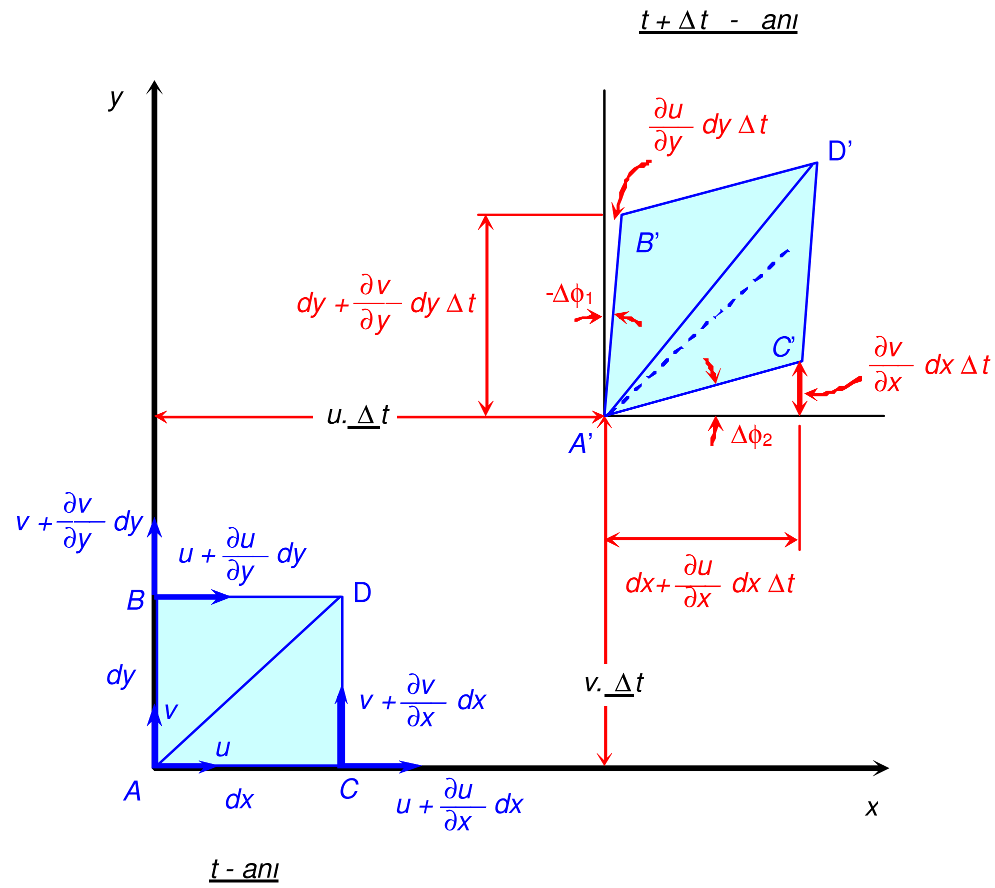
Akışkan hareketi

1- Öteleme (translasyon)
2- Dönme (rotasyon)
3- Genişleme-daralma (dilatasyon)
4- Açısal deformasyon

A noktasının *A'* ye gitmesi bir *öteleme* hareketidir.

Öteleme miktarları:

$$\boxed{u \cdot \Delta t\ ,\quad v \cdot \Delta t}$$



Akışkan kinematiği

AD diyagonali saat ibrelerine zıt yönde bir dönme hareketi yaparak *A'D'* diyagonaline dönüşmüştür. Bu bir "*dönme* (rotasyon)" hareketidir.

BC kenarının açısal hızı

$$\Delta\phi_2 = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}dx\,\Delta t}{dx+\dfrac{\partial u}{\partial x}dx\,\Delta t}\right] \approx \frac{\partial v}{\partial x}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi_2}{\Delta t} = \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

AB kenarının açısal hızı

$$\Delta\phi_1 = \tan^{-1}\left[\frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}dy\,\Delta t}{dy+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy\,\Delta t}\right] \approx \frac{\partial u}{\partial y}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi_1}{\Delta t} = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

BD diyagonalinin açısal hızı

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_2}{dt}-\frac{d\phi_1}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Akışkan kinematiği

z – ekseni etrafındaki (xy - düzlemindeki) açısal hız $$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

y – ekseni etrafındaki (xz - düzlemindeki) açısal hız $$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

x – ekseni etrafındaki (yz - düzlemindeki) açısal hız $$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

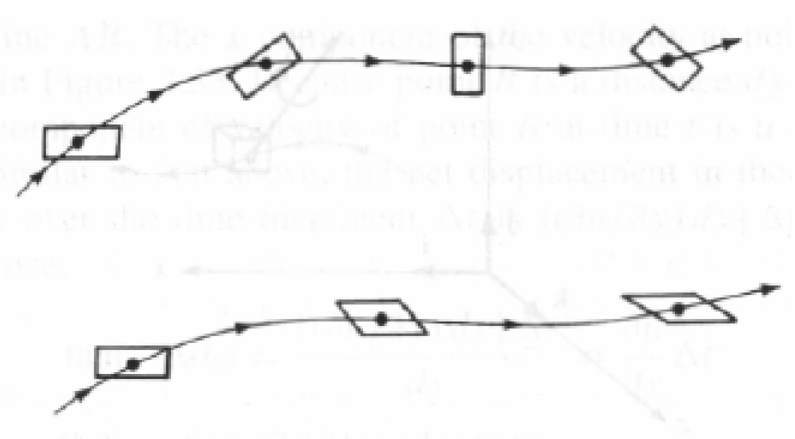
Akışkan taneciğinin açısal hız vektörü $$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

Vortisite $$\vec{\zeta} = 2\vec{\omega} = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V}}$$

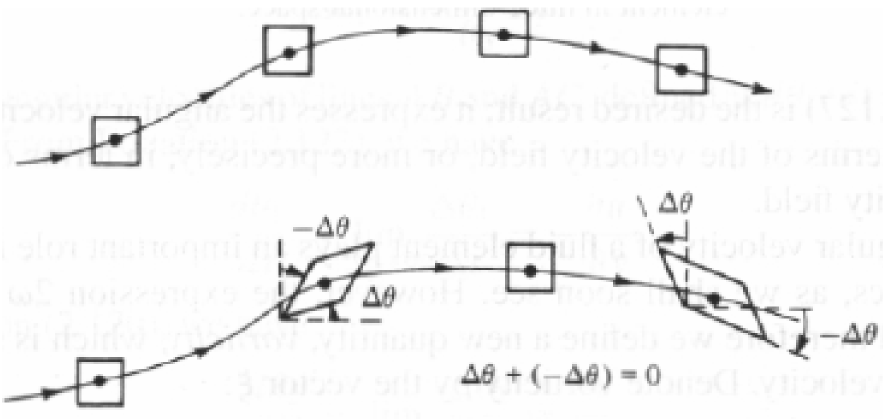
Akışkan kinematiği

Rotasyonel hareket



$$\boxed{\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} \neq 0}$$

İrrotasyonel hareket



$$\boxed{\vec{\zeta} = \nabla \times \vec{V} = 0}$$

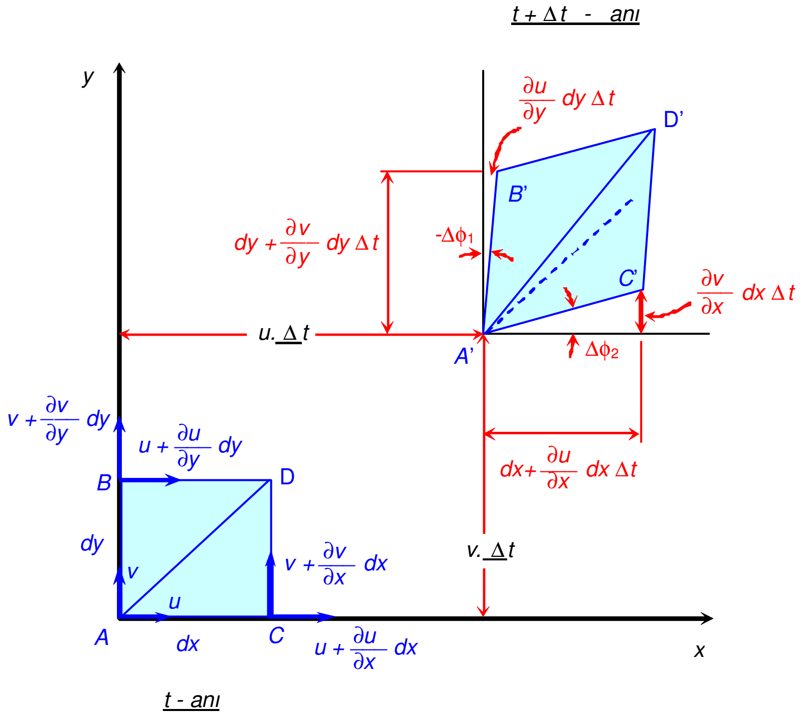
Akışkan kinematiği

Akışkan elemanı, *AB* ve *AC* kenarları arasındaki dik açı azalarak bir *açısal derformasyon*a uğramıştır.

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_2}{dt} + \frac{d\phi_1}{dt}\right) \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$



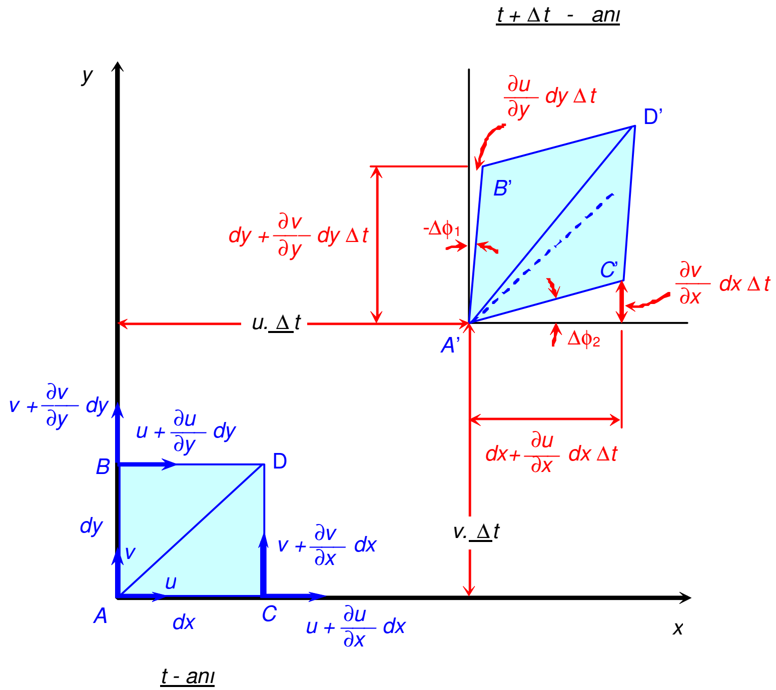
Akışkan kinematiği

Akışkan elemanı “*genişleme* (dilatasyon)” biçiminde bir şekil değişimine uğrayarak *A’B’C’D’* elemanı olmuştur.

$$\varepsilon_{xx}\Delta t = \frac{dx + \dfrac{\partial u}{\partial x} dx\,\Delta t - dx}{dx}$$

$$\varepsilon_{xx}\Delta t = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Benzeri şekilde $\quad \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$



Deformasyon hızları matrisi

$$\varepsilon_{zx} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Akışkan kinematiği

Deformasyon hızları tansörü

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Navier-Stokes Denklemleri

Newton'un ikinci kanunu $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

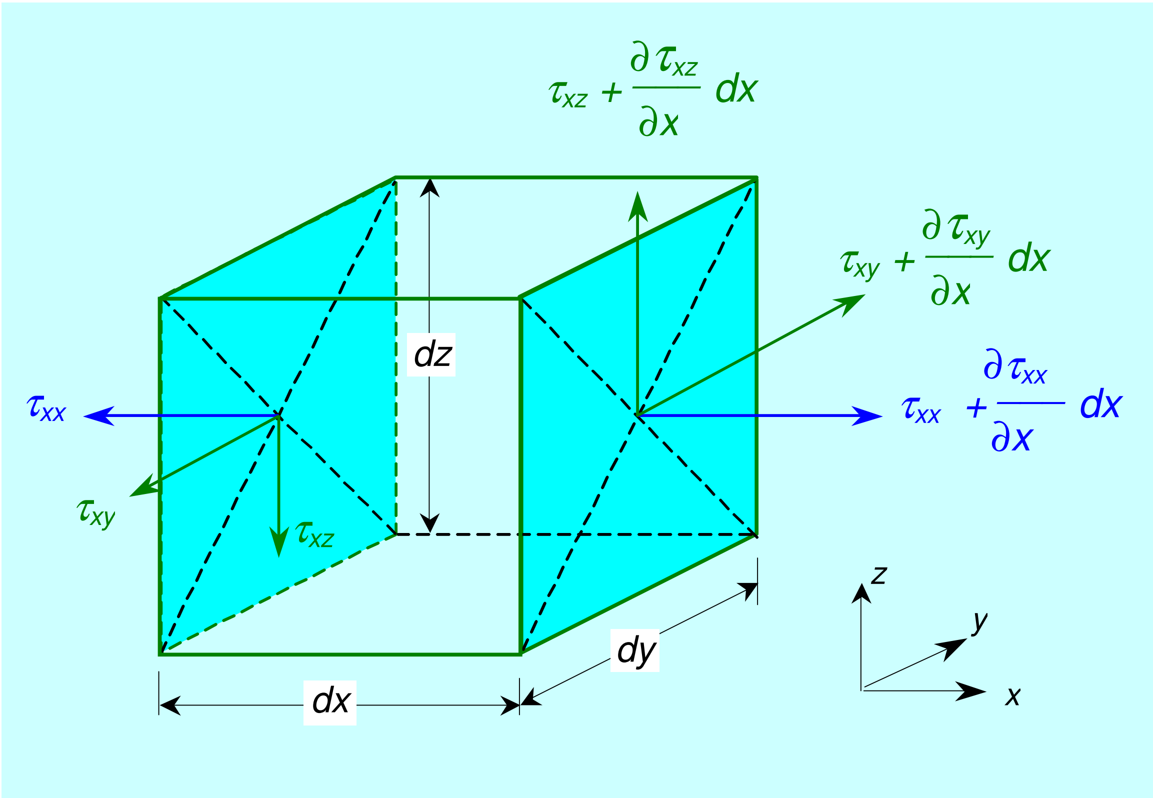
akışkan hacmi ile bölünerek $\sum \vec{f} = \rho \cdot \vec{a}$

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\upsilon} = \vec{f}_{bünyesel} + \vec{f}_{yüzeysel}$$ birim hacme etkiyen kuvvet

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad \Longrightarrow \quad \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{f}_{bünyesel} + \vec{f}_{yüzeysel}$$

$$\vec{f}_{bünyesel} = \rho\, \vec{g}$$ Yerçekimi kuvvetleri

Navier-Stokes Denklemleri – Yüzeysel kuvvetler



x eksenine dik iki yüzeye etkiyen kuvvetler $\quad \vec{T}_x dy\, dz\ ; \quad \left(\vec{T}_x + \frac{\partial \vec{T}_x}{\partial x} dx \right) dy\, dz$

net kuvvet $\quad \frac{\partial \vec{T}_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$

Navier-Stokes Denklemleri – Yüzeysel kuvvetler

x eksenine dik yüzeylere etkiyen net kuvvet $\dfrac{\partial \vec{T}_x}{\partial x} dx\, dy\, dz$

y eksenine dik yüzeylere etkiyen net kuvvet $\dfrac{\partial \vec{T}_y}{\partial y} dx\, dy\, dz$

z eksenine dik yüzeylere etkiyen net kuvvet $\dfrac{\partial \vec{T}_z}{\partial z} dx\, dy\, dz$

Kuvvet vektörleri bileşenlere ayrılarak

$$\vec{T}_x = \tau_{xx}\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k}$$
$$\vec{T}_y = \tau_{yx}\vec{i} + \tau_{yy}\vec{j} + \tau_{yz}\vec{k}$$
$$\vec{T}_z = \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \tau_{zz}\vec{k}$$

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

gerilme tansörü

τ_{xx}, τ_{yy}, τ_{zz} : normal gerilmeler

τ_{xy}, τ_{xz}, τ_{yz} : viskoz kayma gerilmeleri

Navier-Stokes Denklemleri – Yüzeysel kuvvetler

x-doğrultusundaki momentum denklemi için kuvvet vektörlerinin *x*-doğrultusundaki bileşenleri toplanarak

$$F_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx\,dy\,dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx\,dy\,dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx\,dy\,dz = \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz$$

birim hacim başına kuvvet

$$f_x = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

y doğrultusunda

$$f_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

z doğrultusunda

$$f_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Navier-Stokes Denklemleri – Yüzeysel kuvvetler

Yüzey gerilme kuvvetlerinin bileşkesi

$$\vec{f}_{yüzeysel} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

$$\vec{f}_{yüzeysel} = \nabla \cdot \tau_{ij}$$

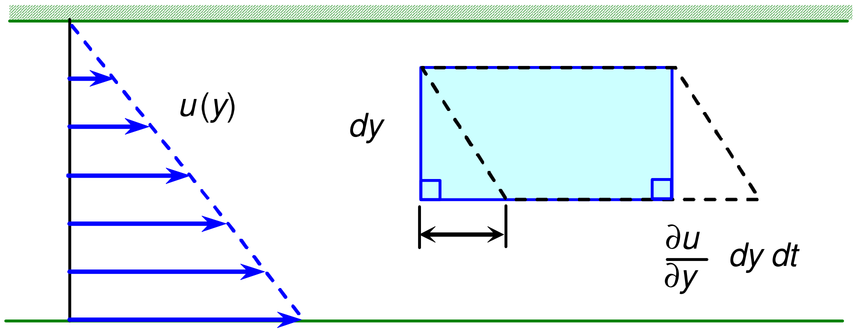
Böylece momentum denklemi

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \, \vec{g} + \nabla \cdot \tau_{ij}$$

Gerilme tansörü ile şekil değiştirme tansörü arasında ve dolayısıyla hızlar arasında ilişki kurmak mümkündür.

Navier-Stokes Denklemleri

Gerilme tansörü – Şekil değiştirme hızları ilişkisi



Sabit ve hareketli iki duvar arasındaki dar bölgede akım

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

genelleştirilerek

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \qquad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

viskoz gerilme tansörü şekil değiştirme hızları tansörünün lineer bir fonksiyonudur

Navier-Stokes Denklemleri

Gerilme tansörü – Şekil değiştirme hızları ilişkisi

Normal gerilmeler

$$\tau_{xx} = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - p$$

$$\tau_{yy} = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - p$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - p$$

Normal gerilmelerin ortalaması basıncın eksi işaretlisine eşit olup

$$-p = \frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} = -p + \frac{3\lambda + 2\mu}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Bu eşitliğin gerçekleşebilmesi için sağdaki ikinci terimin sıfır olması gerek

Sıkıştırılamaz akımlar için
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) = div\vec{V} = 0$$

Diğer hallerde
$$\lambda = -\frac{2\mu}{3}$$
(Stokes hipotezi)

Navier-Stokes Denklemleri

Gerilme tansörü – Şekil değiştirme hızları ilişkisi

Böylece normal gerilmeler

$$\tau_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\, div\vec{V}$$

$$\tau_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\, div\vec{V}$$

$$\tau_{zz} = -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\, div\vec{V}$$

Normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri için bulunan bağıntılar birleştirilerek

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\frac{2}{3}\mu\, div\vec{V}$$

Navier-Stokes Denklemleri

Sonuç olarak momentum denklemi

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\,\vec{g}+\nabla\cdot\tau_{ij}=\rho\,\vec{g}-\nabla p+\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)-\delta_{ij}\frac{2}{3}\mu\,div\vec{V}\right]}$$

Sıkıştırılamaz, sabit viskoziteli akımlar için

$$\boxed{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\vec{g}-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{V}}$$

Enerji Denklemi

Termodinamiğin 1. kanunu $dE_t = dQ + dW$

Durağan olmayan (hareketli) sistemlerde $E_t = \rho\left(e + \tfrac{1}{2}V^2 - \vec{g}\cdot\vec{r}\right)$

Burada *e*: Partikülün birim kütle başına iç enerjisi

V: Partikülün hızı

r: Partikülün yer değiştirmesi

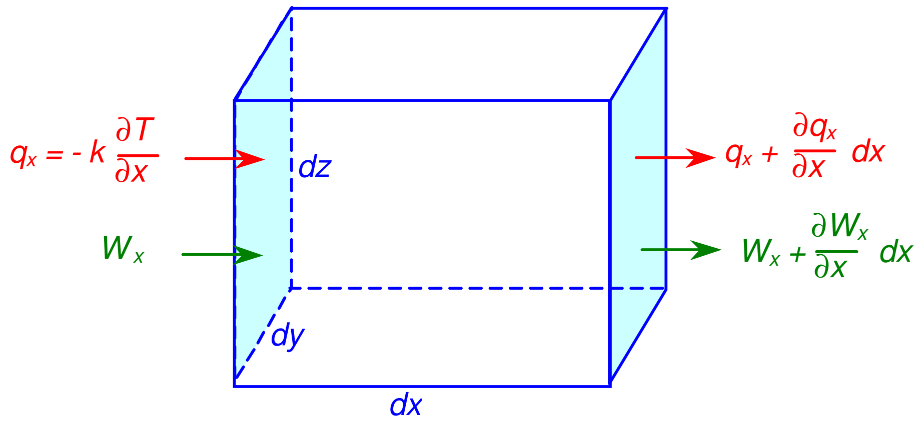
Hareketi takiben türev alınarak

$$\frac{DE_t}{Dt} = \frac{DQ}{Dt} + \frac{DW}{Dt}$$

Burada

$$\frac{DE_t}{Dt} = \rho\left(\frac{De}{Dt} + \vec{V}\frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g}\cdot\vec{V}\right)$$

Enerji Denklemi – Isı transferi

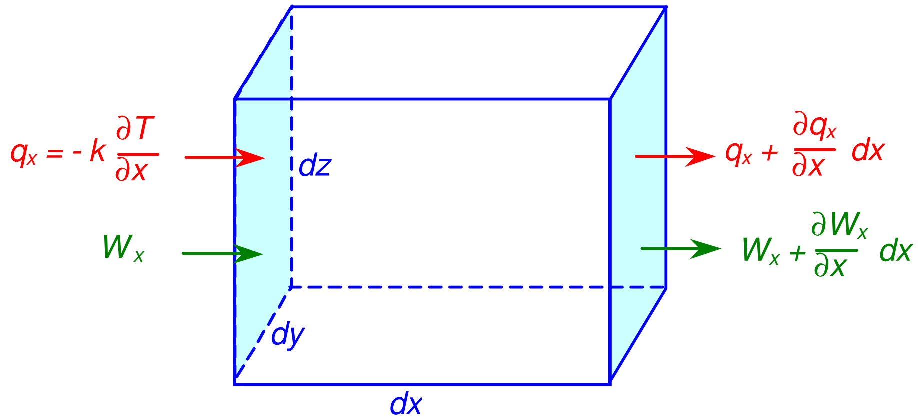


x eksenine dik yüzeylerdeki ısı transferi $\quad q_x\,dy\,dz\,, \quad \left(q_x + \dfrac{\partial q_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz$

Bütün yüzeylerden toplam ısı transferi $\quad -\left(\dfrac{\partial q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial q_y}{\partial y} + \dfrac{\partial q_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$

Birim hacim başına ısı transferi $\quad -\left(\dfrac{\partial q_x}{\partial x} + \dfrac{\partial q_y}{\partial y} + \dfrac{\partial q_z}{\partial z}\right) = -\nabla\vec{q} = \nabla\left(k \cdot \nabla T\right) = \dfrac{DQ}{Dt}$

Enerji Denklemi – iş



x eksenine dik yüzeyler üzerinde yapılan iş

$$w_x = -\left(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}\right) \qquad -w_x - \frac{\partial w_x}{\partial x}dx$$

net iş $$-\frac{\partial w_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}\right)$$

Tüm yüzler için toplam net iş

$$\frac{DW}{Dt} = -\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = -\nabla W$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz}\right)$$

Enerji Denklemi

indissel biçimde
$$\frac{DW}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\vec{V} \cdot \tau_{ij}\right) = \vec{V} \cdot \left(\nabla \cdot \tau_{ij}\right) + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

momentum denkleminden
$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho\,\vec{g} + \nabla \cdot \tau_{ij} \qquad \rightarrow \qquad \nabla \cdot \tau_{ij} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho\,\vec{g}$$

Enerji, ısı ve iş için elde edilen büyüklükler Termodinamiğin 1. yasasında kullanılarak

$$\rho\left(\frac{De}{Dt} + \vec{V}\frac{D\vec{V}}{Dt} - \vec{g} \cdot \vec{V}\right) = \nabla\left(k \cdot \nabla T\right) + \vec{V} \cdot \left(\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} - \rho\,\vec{g}\right) + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Düzenlemelerle
$$\rho \frac{De}{Dt} = div\left(k \cdot \nabla T\right) + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Enerji Denklemi

Gerilme tansörü basınç terimi ve viskoz gerilme terimi şeklinde ikiye ayrılarak

$$\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \tau'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - p \cdot div\vec{V}$$

Ayrıca basınç terimi için süreklilik denklemi yardımıyla

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\, div\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad div\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} \quad \Rightarrow \quad p \cdot div\vec{V} = -\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{Dp}{Dt}$$

Böylece enerji denklemi

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = \frac{Dp}{Dt} + div\left(k \cdot \nabla T\right) + \tau'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

Enerji Denklemi

$e+\dfrac{p}{\rho}=h$ *antalpi* $\quad \phi=\tau'_{ij}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$ *dissipasyon fonksiyonu* olmak üzere

$$\boxed{\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+div\left(k\cdot\nabla T\right)+\phi}$$

Newtonien akışkanlar için dissipasyon fonksiyonu

$$\phi=\tau'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\mu\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Sabit özellikli (*k=sb*), mükemmel gaz ($dh=c_p dT$, $de=c_v dT$) halinde

$$\boxed{\rho c_p\frac{DT}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+k\cdot\nabla^2T+\phi}$$

Genel Denklemlerin bilançosu

Süreklilik	$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\, div\vec{V}=0$
Momentum	$\rho\frac{D\vec{V}}{Dt}=\rho\,\vec{g}-\nabla p+\nabla\cdot\tau'_{ij}$
Enerji	$\rho\frac{Dh}{Dt}=\frac{Dp}{Dt}+div\left(k\cdot\nabla T\right)+\tau'_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

<u>Burada</u> $\tau'_{ij}=\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\lambda\, div\vec{V}$ Viskoz gerilme tansörü

Genel Denklemlerin bilançosu

Değişken sayısı	:	*9*	
Asıl bilinmeyenler	:	*5*	*p*, ***V***(*u*,*v*,*w*), *T*
İkincil bilinmeyenler	:	*4*	$\rho = \rho(p, T)$ $h = h(p, T)$ $\mu = \mu(T)$ $k = k(T)$

Kabuller

- Akışkan matematiksel olarak süreklidir.
- Partiküller termodinamik dengededir.
- Tek bünyesel kuvvet yer çekimi kaynaklıdır.
- Isı iletimi Fourier kanununa uyar