

## **BÖLÜM 7**

### **TÜRBÜLANSLI SINIR TABAKALAR**

7.1- Giriş

7.2- Mühendisliğin türbülans analizindeki gereksinimleri

7.3- Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

7.3.1- Düz levha üzerindeki akım

7.4- Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

7.5- Türbülanslı akımların analizindeki merkezi problem

7.6- Ortalama akım türbülanslı transport formülasyonları

## BÖLÜM 7

### TÜRBÜLANSLI SINIR TABAKALAR

#### 7.1- Giriş

Bu bölümde sınır tabakanın pratik bakımdan en önemli kısmı olan türbülanslı akımlarla ilgilenilecektir. Konu *sabit-yoğunluklu*, *sabit-özelliikli* akımlarla sınırlandırılacak ve sadece duvar üzerindeki *harici* türbülanslı akımlar göz önüne alınacaktır.

#### 7.2- Mühendisliğin türbülans analizindeki gereksinimleri

Türbülanslı akımların mutlaka zamana bağlı ve üç-boyutlu olduğu bilinmektedir. Ayrıca, zamana bağlılığın *frekansının* ve hareket *ölçeğinin* çeşitli büyüklük mertebelerinde dağıldığı bulunmuştur.

Bu gerçekler dikkate alınırca bir türbülanslı akımın bütün ayrıntılarıyla analizinin, düz levha üzerindeki gibi basit bir akım olsa bile ne kadar büyük bir problem olduğu anlaşılır. Bir örnek, konunun anlaşılması bakımından faydalı olacaktır. Şayet türbülanslı hareketin ölçeği çeşitli büyüklük mertebelerinde bir dağılım gösteriyorsa sayısal bir hesaplama için  $(\Delta x, \Delta y)$  hücre genişliklerinin uygun seçimi bir sorun olacaktır. Nitekim, hücre büyüklüğü hareketin önemli bir kısmının ölçeğinden büyük ise sonuçların çok kaba olacağı açıktır. Bu bakımdan genel olarak türbülanslı bir sınır tabakanın *bir istasyonunda*  $10^3 + 10^4$  ağ noktası ve *toplam*  $10^6 + 10^7$  ağ noktasına gereksinim duyulmaktadır.

Pratikteki bir türbülanslı akımın bütün ayrıntıları için günümüzde genel bir analiz yöntemi geliştirmenin henüz mümkün olmadığı söylenebilir. Komple bir simülasyonun hesaplama maliyeti  $Re^3$  ile değişmektedir. Dolayısıyla çok büyük miktarda bilgisayar süreleri harcansa bile günümüz imkanlarıyla ancak çok düşük  $Re$  sayısındaki akımlar incelenebilir.

Genel değerlendirme böyle ümitsiz olmakla birlikte tasarımcıların analitik araçlardan tamamıyla mahrum kaldığını söylemek doğru olmaz. Zira tasarım için türbülanslı akım analizinden beklenen bilgi sınırlıdır. Şayet laminer sınır tabaka için daha önce söylenen hususlar hatırlanırsa, sınır tabaka analizinden beklenen öncelikli bilgi  $C_f(x)$  *yüzey sürtünme katsayısının*, ayrılma noktası da dahil olmak üzere bulunmasıdır. İkinci olarak  $\delta(x)$ ,  $\delta^*(x)$  ve  $\theta(x)$  gibi *sınır tabaka kalınlıklarıyla* ilgilenilir. Tasarım için çoğu halde ayrıntılı hız ve sıcaklık profili gibi diğer büyüklüklerin kullanımı daha kısıtlıdır.

Bu noktada daha ileriye gitmeden önce türbülanslı akım için örneğin  $C_f(x)$  in ne anlama geldiğini düşünmekte yarar vardır. Tipik bir mühendislik uygulaması olarak sabit hızla ilerleyen *bir gemi için sürtünme direncinin tahmini* problemi göz önüne alınırca, bunun için yüzey üzerindeki herhangi bir noktada *yüzey gerilmesinin çalkantı değerlerinin bilinmesi gerekmez*. Daha ziyade bu *gemiye çekmek için gerekli pervane performansının* bilinmesine ihtiyaç vardır. Geminin hızı sabit kalmasa bile  $C_f(x)$  in çalkantı değerine ihtiyaç duyulmaz. Tasarımcı açısından  $C_f(x)$  in zamanla değişimi sadece başlangıç koşullarının veya sınır koşullarının zamanla değişmesiyle ilgilidir. (Bu noktada türbülanslı daimi-akım ile zamana-bağlı türbülanslı akım kavramları arasındaki farkı dikkatli bir biçimde değerlendirmek gereklidir). Türbülanslı akımın analizinde ihtiyaç daha ziyade sadece zaman-ortalaması veya ortalama değerlerin bulunması olarak gözükmektedir. Bu gibi büyüklükler daimi veya zamana bağlı, iki-boyutlu veya üç-boyutlu olabilir.

Bütün bu hususlar çerçevesinde sadece ortalama akımın [ $C_f(x)$ ,  $\delta(x)$  vb ve belki de  $U(x,y)$  gibi] tahminini amaçlayan bir türbülans analizinin tasarımcının esas amacına hizmet edeceği gibi günümüz analitik ve sayısal imkanları içerisinde kalacağı görülebilir. Ancak bu güne kadar türbülanslı akımların güvenilir ve etkin tahmini yolunda sadece sınırlı bir başarı elde edilebildiği belirtilmelidir.

Pratikte bazı durumlar vardır ki akımın ayrıntılı çalkantı karakteristiğinin bilinmesi önemlidir. Buna bir örnek olarak yakıt-yakıcı karışımı şeklindeki akımın *tutuşma ve yanması* olayı gösterilebilir. Alev içerisinde *kimyasal enerjinin ısı enerjisine dönüşüm hızı anlık lokal sıcaklıklara hayli non-lineer bir biçimde bağlıdır*. Buna göre herhangi bir noktadaki daimi ısı üretimini tahmin etmek için sadece  $T(x,y)$  nin bilinmesi yeterli olmaz,  $T(x,y,z,t)$  nin hesaplanması ve sonuçların zaman ortalamasının alınması gerekir. Bir büyüklüğün üssünün ortalaması ile ortalamasının üssü aynı olmayıp genellikle türbülans incelemelerinde zaman ortalaması alınırken hesaplama

$$\sqrt{(T')^2}$$

şeklinde gerçekleştirilir

Ortalama akım analizine girmeden önce *mevcut ampirik bilgilerin* bir kısmını gözden geçirmekte yarar bulunmaktadır. Zira bu bilgiler analitik geliştirmelerin tabanını oluşturacaktır. Anlık çalkantı hareketinin bütün ayrıntılarını dikkate almadan ortalama akımın incelenebilmesi için daha ziyade deneysel veri tabanına ağırlık vermek gerekecektir. Böylece *ampirik bilgiler hareket denklemleri çerçevesinde kullanılarak yarı-ampirik* bir analiz geliştirilecektir.

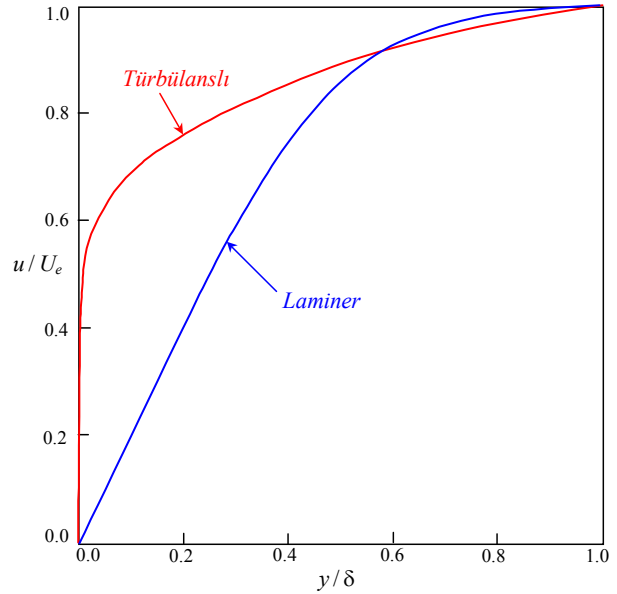
### 7.3- Ortalama akımla ilgili ampirik bilgiler

#### 7.3.1- Düz levha üzerindeki akım

Şayet bir *düz levha* üzerinde *laminer* ve *türbülanslı* hallerde ölçülen *hız profilleri*, mesafeler sınır tabaka kalınlığıyla ve hızlar da dış akım hızıyla boyutsuzlaştırılarak karşılaştırılırsa iki profil arasında önemli bir farklılık olduğu tespit edilebilir.

Şekil 7.1 de türbülanslı haldeki ortalama hız profili duvarı sıfırdan daha büyük bir hızda kesiyor gibi gözükmektedir. Aslında hız duvar yakınında yavaş bir değişme gösterirken çok kısa bir aralıkta aniden sıfıra gitmektedir.

Bu durum iki farklı tabakaya sahip,  *$0.05 \leq y/\delta \leq 1.00$  aralığında yüksek viskoziteli* bir akışkanın ve  *$0 \leq y/\delta \leq 0.05$  aralığında da daha düşük viskoziteli* akışkanın bulunduğu laminer bir sınır tabakaya benzetilebilir.



Şekil 7.1- Tipik laminer ve türbülanslı sınır tabaka hız profillerinin karşılaştırması

Bu iki tabakanın birleştiği yüzeyde kayma gerilmeleri eşit olacağından

$$\mu_1 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{arakesit}} = \mu_2 \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\text{arakesit}} \quad (7.1)$$

yazılabilir. Bu durumda hız gradyanının arakesiti geçerken  $\mu_2/\mu_1$  gibi bir oranla ani bir değişim göstermesi gerekir. İleride görülecektir ki bu husus türbülanslı sınır tabaka incelemelerindeki en önemli fikirlerden birinin esasıdır.

Düz levha üzerindeki laminer ve türbülanslı sınır tabakalar arasında önemli bir fark daha vardır. Şöyle ki:

**Laminer** sınır tabakada **akışkan cinsi**, **Reynolds sayısı**, **pürüzlülük** vs ne olursa olsun boyutsuz hız profilleri aynıdır.

Buna karşılık **türbülanslı** sınır tabakada **Reynolds sayısı** ve/veya **pürüzlülükteki değişim  $C_f$  yi değiştirir**. Bu da boyutsuz hız profilinin şeklini etkiler. Hız profillerinin Şekil 7.2 de gösterilen bu tabiatı sınır tabakaların analizinde doğrudan önem kazanmaktadır.

Farklı koşullarda oluşan hız profillerinin şeklini tanımlamak üzere  $H = \delta^*/\theta$  - **şekil parametresi**nden yararlanmak istenebilir.

Bir **düz levha** üzerindeki **laminer sınır tabaka** için  $H$  büyüklüğü **daima 2.6** dır.

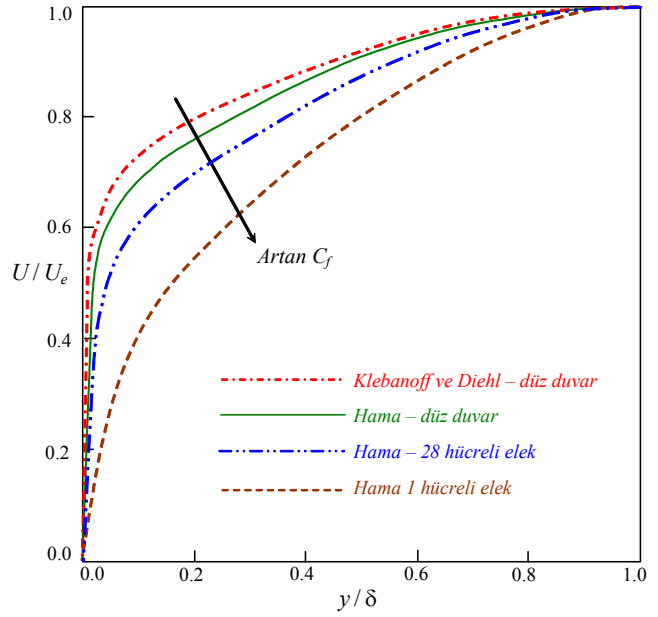
Ancak bu durum türbülanslı akım için geçerli değildir. Nitekim Şekil 7.2 de sunulan hız profillerinden düz levha üzerindeki türbülanslı sınır tabakada  $H$  büyüklüğünün  $C_f$  ye bağlı olacağı tahmin edilebilir. Buna göre belli bir  $dP/dx$  basınç dağılımına sahip herhangi bir cisim üzerindeki türbülanslı sınır tabakada oluşacak hız profillerinin şeklini  $H$  parametresi ile belirlemek mümkün değildir.

Mevcut ampirik bilgilerin olabilen en kısa biçimde sunumu ve kullanımı açısından güçlü ve kapsamlı **korelasyon değişkenleri** geliştirilmesi çok önemlidir. Problem karmaşık olup çok miktarda da veri bulunmaktadır. Bu yüzden mevcut verileri en basit biçimde dikkate almak faydalı olacaktır. Düz levha üzerindeki basit türbülanslı akım için bile korelasyon için  $u/U_e$  ve  $y/\delta$  değişkenlerini almanın yeterli olmayacağı açıktır. Varılacak sonuca bir çok araştırmacının katkısı olmakla birlikte en açık ve en kapsamlı katkı Clauser (1956) tarafından yapılmıştır. Bu yaklaşımın ana hatları aşağıda izlenecektir.

Şekil 7.2 de yer alan hız profillerinin herhangi bir ölçek faktörü ile çarpılarak tek bir eğriye dönüştürülmesi beklenemez. Bununla birlikte sınır tabaka içerisinde kenar hızına nazaran meydana gelen  $U-U_e$  **hız kayıpları** dikkate alınırsa, şekle göre  $C_f$  değeri büyüdükçe daha büyük hız kaybı oluşmaktadır. Daha büyük bir  $C_f$ , sınır tabaka içindeki akışkana daha büyük bir yavaşlatıcı kuvvet etkimesi ve dolayısıyla hızda (ve böylece momentumda) daha büyük bir kayıp olması anlamına gelmektedir. Buna göre kenar hızıyla boyutsuzlaştırılmış hız kayıplarının

$$\frac{U_e - U}{U_e} = 1 - \frac{U}{U_e} \propto \sqrt{C_f}$$

şeklinde yüzey sürtünme katsayısıyla orantılı olduğu söylenebilir. Buna göre bu iki büyüklüğün oranıyla elde edilecek bir değişkenle bütün eğrilerin korelasyonunun sağlanabileceği görülür:



Şekil 7.2- Düzgün ve pürüzlü düz levhalar üzerinde türbülanslı sınır tabaka hız profilleri (Clauser, 1956, *The turbulent boundary layer, Adv Appl Mech 4, 1-51*)

$$\frac{U/U_e - 1}{\sqrt{C_f/2}} = \frac{U - U_e}{U_e \sqrt{\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2}}} = \frac{U - U_e}{\sqrt{\tau_w/\rho}}$$

Bu ifadenin paydası hız boyutunda bir büyüklük olup kısaca

$$u_* = \sqrt{\tau_w/2} \quad (7.2)$$

şeklinde gösterilir ve “*sürtünme hızı*” olarak adlandırılır. Böylece düz levha üzerindeki sınır tabakada hız profillerinin ordinatı için

$$\frac{U/U_e - 1}{\sqrt{C_f/2}} = \frac{U - U_e}{u_*}$$

şeklinde bir korelasyon değişkeni elde edilir. Diğer eksen için  $y/\delta$  büyüklüğünün korunması yeterli olacaktır:

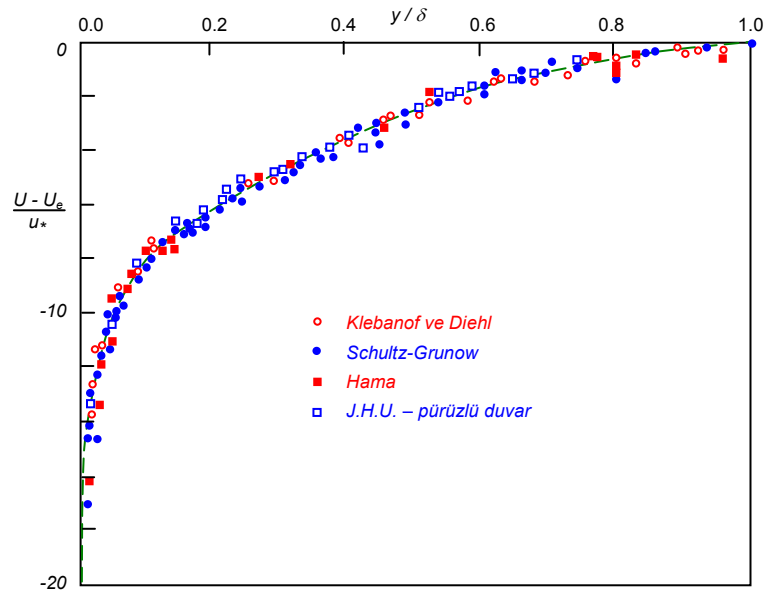
$$\frac{U - U_e}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

“*kayıp kanunu*”

Profiller için koordinatların bu şekilde seçiminin ne denli başarılı olduğu Şekil 7.3 den görülmektedir.

Ancak bu korelasyonun *genel başarısı*  $y/\delta$  nın küçük değerlerinde yani duvara yakın bölgede görülmemektedir. Daha önce de belirtildiği gibi bu bölgede hız çabuk bir biçimde değişmekte olup çeşitli hallerdeki farklılık Şekil 7.3 deki gibi bir grafikten kolay anlaşılamaz.

Bu korelasyon değişkenlerinin duvar yakınında geçerli olmayacağı fiziksel bir açıklamayla gösterebilir.



Şekil 7.3- Düzgün ve pürüzlü düz levhalar üzerindeki türbülanslı sınır tabakaların dış bölgelerinde hız kayırları

Şöyle ki; sınır tabakanın üst kısımlarında lokal ortalama hızların sınır tabaka kenar hızına göre büyüklüklerinin,  $(U - U_e)$ , önemli olduğu görülmüştü. Bu yaklaşımda lokal ortalama hızların duvar üzerindeki sıfır hız değerine kıyasla durumu doğrudan dikkate alınmamıştır. Oysa duvara yakın en alt tabakada bu karşılaştırma önemli olacaktır.

Duvar bölgesinde hızlar için ölçekleyici büyüklük olarak yine sürtünme hızının alınması uygun gözükmemektedir. Böylece

$$U/u_* = u^+$$

şeklinde bir korelasyon değişkeni elde edilir.

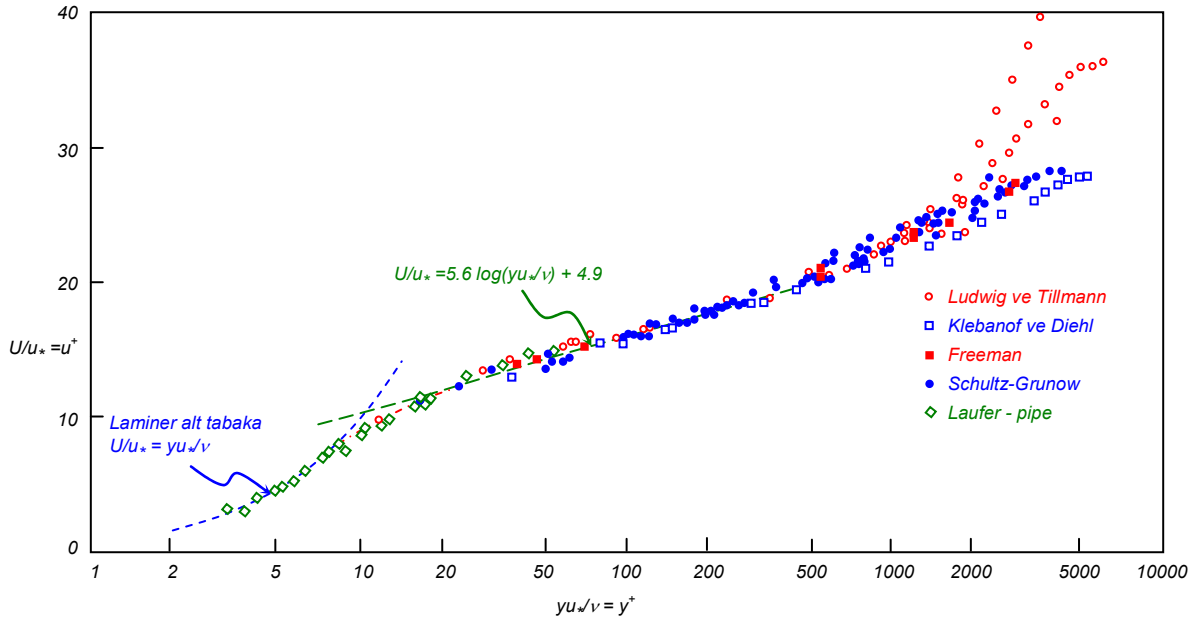
Sınır tabakanın üst bölgesinde  $y$  konumu  $y/\delta$  şeklinde bir oranla gösterilmiştir. Duvarın baskın olduğu alt bölgede  $\delta$  sınır tabaka kalınlığının öneminin daha az olduğu izah edilebilir. Bu alt bölge sınır tabakanın toplam kalınlığının sadece küçük bir kısmını ( $\approx \%10$ ) teşkil etmekte olup  $y=\delta$  civarında oluşacak değişikliklerin etkisi alt bölgede çok az hissedilecektir. Bu durumda  $y$  büyüklüğünün duvara yakın bölgede bir başka biçimde boyutsuzlaştırılması daha uygun olacaktır. Daha önce bir uzunluğun Reynolds sayısı kullanılarak nasıl boyutsuz hale getirildiği görülmüştü. Mevcut durumda da benzeri bir inceleme ile

$$y^+ = \frac{yu_*}{\nu} \quad (7.3)$$

şeklinde tanımlanan bir tür  $Re$  sayısına varmak mümkündür. Bu değişkenler kullanılarak elde edilen

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{yu_*}{\nu}\right), \quad u^+ = f(y^+)$$

şeklindeki ilişki literatürde “*duvar kanunu*” olarak anılmaktadır. Yapılan korelasyonlar sonucu elde edilen eğrilerin başarısı Şekil 7.4 de görülmektedir.



Şekil 7.4- Düzgün katı yüzeyler üzerindeki türbülanslı sınır tabakalar için universal duvar kanunu (Clauser, 1956)

Burada sadece düzgün katı duvarlara ait verilerin yer aldığı belirtilmelidir. Pürüzlülüğün etkisi ileride kısaca tartışılacaktır. Ayrıca logaritmik bir ölçek kullanılmasının mantığı ve belirtilen eğrilerin kaynakları izleyen bölümde açıklanacaktır.

Bu noktada belirtilmelidir ki,  $u_*$  büyüklüğü hız profillerinin anlaşılmasında böyle kilit bir rol oynadığı için  $\tau_w$  *duvar gerilmesinin doğru tespiti* önem kazanmaktadır. Yüzey gerilmesi ilk kez 1950 li yıllarda başarılı yüzey gerilmesi balanslarının geliştirilmesiyle ölçülebilir hale gelmiştir (Dhawan, 1953). Bu tip bir cihaz yüzeyin ilgilenilen kısmında yüzeye temas etmeyen küçük bir parça şeklinde olup, böylece yüzeyin bu küçük alanındaki gerilme kuvveti doğrudan ölçülür. Daha önceki araştırmacılar  $\tau_w$  yi tespit etmek için hız profiline

yüzey üzerindeki eğimini kullanmayı denemişler, ancak profilin duvar yakınındaki şekli nedeniyle doğru sonuçlara ulaşamamışlardır.

Tekrar Şekil 7.4 e dönülecek olursa, düzgün katı bir yüzey yakınındaki hız çalkantıları, tam duvar üzerinde  $u'=v'=w'=0$  olması nedeniyle kuvvetli biçimde sönümlenir. Buna göre türbülanslı sınır tabakanın dahilinde duvar yakınlarda çok küçük kalınlıkta bir laminer akım tabakası bulunmaktadır. Bu bölge "*laminer alt tabaka*" olarak adlandırılır.

Şayet  $y^+=yu_*/\nu$  bu bölgedeki akımı tanımlayan uygun bir Reynolds sayısı ise öyle bir sınır değeri olacaktır ki bunun altında hakim akım laminer olsun. Bu husus verilen bir akım için  $y$  nin bir alt kritik değeri olacağı anlamına gelir. Şayet böyle bir laminer alt tabaka varsa kesinlikle çok ince olacaktır. Yani bu alt tabaka küçük bir  $y$  yüksekliği dahilinde kalacaktır.

Duvar üzerinde  $\partial\tau/\partial y=0$  olduğundan bu laminer alt bölgede  $\tau = \tau_w$  olduğu varsayılabilir.  $\tau(y)$  nin tipik bir değişimi Şekil 7.5 de gösterilmektedir. Bu kabulde birlikte de

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} = \tau_w \neq F(y) \quad (7.4)$$

yazılabilir.

Bu bağıntı  $U(0)=0$  olmak üzere integre edilerek

$$U = \frac{y\tau_w}{\mu} \quad (7.5)$$

ve düzenlenerek

$$\frac{U}{u_*} = \frac{y\tau_w}{\mu} \frac{u_*}{u_*^2} = \frac{y\tau_w}{\mu} \frac{u_*}{\tau_w/\rho} = \frac{yu_*}{\mu/\rho} \rightarrow \frac{U}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} \quad (7.5a)$$

veya duvar kanunu değişkenleri cinsinden

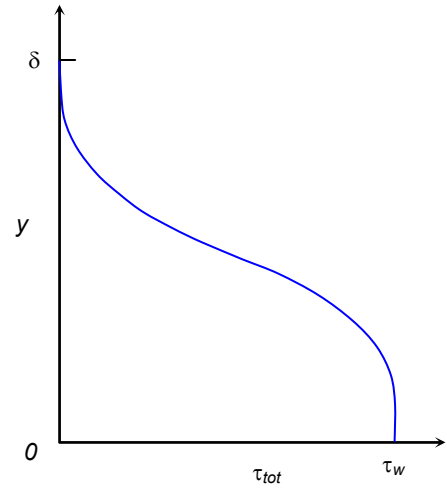
$$u^+ = y^+ \quad (7.5b)$$

elde edilir. Şekil 7.4 den görülebilir ki mevcut veri (7.5b) bağıntısını  $y^+ \approx 5-7$  değerlerine kadar izlemektedir. Bu görüntü laminer alt tabakanın varlığını doğrulamaktadır. Tabakanın kalınlığı  $\delta$ 'nin %1'inden daha küçüktür.

Şekil 7.4 i okurken dikkatli olmak gerekir. Şöyle ki, sınır tabakanın kalınlığı kabaca  $\delta^+ = O(5000)$  mertebesindedir. Şekil 7.4 esasen sınır tabakanın alt bölgesini incelemek için düzenlenmiş bir grafik olup, bu grafik üzerinde  $\delta$  nin büyüklüğünün aranması doğru olmaz.  $y^+ \approx 5-7$  büyüklüğü  $\delta^+$  nin  $1/1000$  i mertebesindedir.

Böylece biri alt tabakaya diğeri de dış tabakaya ait olmak üzere başarılı iki korelasyon kanunu ortaya konulmuştur. Fizik gereği bu iki bölge arasındaki geçiş ani olamaz. Aksine arada ortak bir bölge olması beklenir. Bu ortak birleşme bölgesinde her iki bölgedeki

$$\frac{U - U_e}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right); \quad \frac{U}{u_*} = g\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) \quad (7.6a)$$



Şekil 7.5- Sınır tabakada kayma gerilmesinin tipik değişimi

bağıntıları geçerli olmalıdır. Bu iki bağıntı yeniden

$$\frac{U}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) + \frac{U_e}{u_*}; \quad \frac{U}{u_*} = g\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)\left(\frac{\delta u_*}{\nu}\right)\right] \quad (7.6b)$$

şeklinde düzenlenebilir. Birleşme bölgesinde bütün  $y$  ler için bu iki bağıntının aynı olması gerekir.

Bağımsız değişken olması nedeniyle  $y$  büyüklüğü birleşme bölgesinde keyfi olarak değişebilir.

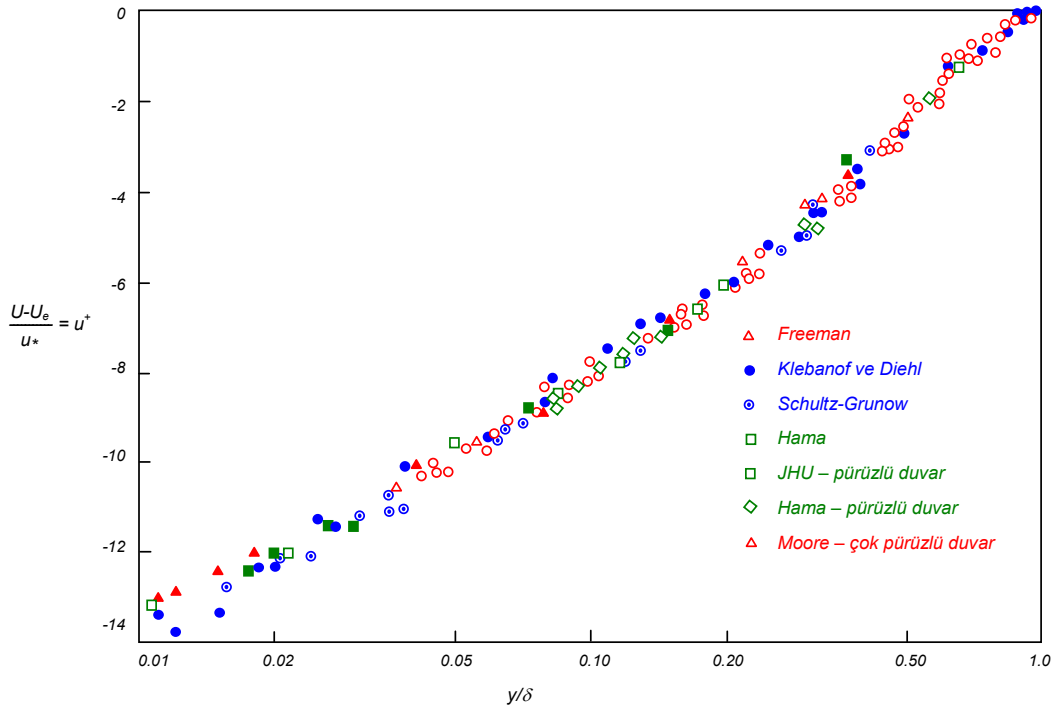
Verilmiş bir sınır tabaka hız profili için  $U_e/u_*$  ve  $\delta u_*/\nu$  büyüklükleri birer sabit olup  $y$  ile değişmez. Buna göre,  $g$  fonksiyonunun içindeki *sabit  $\delta u_*/\nu$  çarpanı* fonksiyonun dışında toplam şeklindeki bir sabitle aynı etkiye sahip olmalıdır. Böyle bir özellik sadece bir logaritma fonksiyonunda vardır. Çünkü çarpımın logaritması iki logaritmanın toplamı şeklinde yazılabilir.

O halde birleşme bölgesinde  $f$  ve  $g$  fonksiyonları için logaritmik fonksiyonlar önerilerek (7.6a) bağıntıları aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{U - U_e}{u_*} = A \log\left(\frac{y}{\delta}\right) + B \quad (7.6)$$

$$\frac{U}{u_*} = A \log\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) + C \quad (7.7)$$

Halihazırda Şekil 7.4 de logaritmik ölçekle çizilmiş olan duvar kanunu ile Şekil 7.3 deki hız kayıp kanunu logaritmik ölçekte tekrar çizilerek Şekil 7.6 daki gibi birleştirilebilir. Logaritma kanunları veriyi izlediğinden ve bölge küçük olmadığından (kabaca  $30 \approx y^+ \approx 300$  civarında) bir ara bölge olduğu açıktır.



Şekil 7.6- Düz levha üzerindeki türbülanslı sınır tabakalar için hız kayıp kanununun logaritmik çizimi (Clauser, 1956)



Bu şekilde çizilen veriyi dikkate alarak Clauser (1956) (7.6) ve (7.7) logaritmik bağıntılarındaki sabitler için  $A=5.6$ ,  $B=-2.5$  ve  $C=4.9$  değerlerini önermiştir. Başka araştırmacılar aynı veri için sabitlere çok az farklı değerler veren farklı eğriler elde etmiştir. Ancak burada Clauser 'in sabitleri kullanılacaktır. Yine bazı başka araştırmacılar da denklemleri tabii logaritma ile yazarak  $A$  sabitine  $\kappa=\ln(10)/A$  şeklinde bağlı olan bir başka sabit kullanmışlardır. Böylece  $A=5.6$  ve  $\kappa=0.41$  olmak üzere

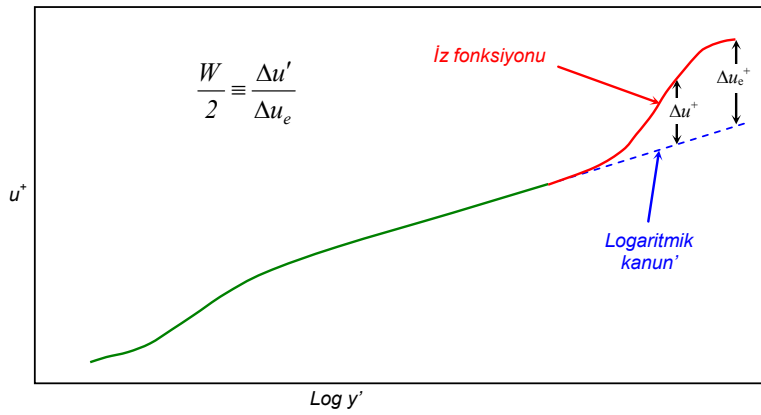
$$\frac{U}{u_*} = \frac{I}{K} \ln\left(\frac{yu_*}{v}\right) + C \quad (7.7b)$$

elde etmişlerdir.

Coles (1956) *sınır tabakanın dış bölgesindeki hız profillerini* tanımlamak için "iz kanunu" kavramını ortaya koymuştur. Hızlarda logaritmik kanunun üzerinde görülen sapmaların,  $y=\delta$  daki maksimum sapma ile normalize edildiği takdirde sadece  $y/\delta$  nın fonksiyonu olduğu gerçeğini dikkate almıştır. Bu normalize edilmiş sapmaları, bir  $W(y/\delta)$  *iz fonksiyonu* ile belirterek  $W(0)=0$  ve  $W(1)=2$  olmak üzere korelasyon gerçekleştirmiştir. Coles 'un iz fonksiyonu

$$\frac{U/u_* - \left[ \frac{I}{K} \ln(yu_*/v) + C \right]}{U_e/u_* - \left[ \frac{I}{K} \ln(\delta u_*/v) + C \right]} \equiv \frac{I}{2} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (7.8)$$

şeklinde olup şematik olarak Şekil 7.7 de gösterilmiştir.



Şekil 7.7- Coles 'un iz fonksiyonu

Coles (1956) bu  $W$  fonksiyonunu

$$W\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi y}{2\delta}\right) \quad (7.8a)$$

şeklinde önermiştir. Sonuç olarak iz kanunu birleşme bölgesini ve üst bölgeyi birlikte tanımlayacak biçimde

$$\frac{U}{u_*} = \frac{I}{K} \ln\left(\frac{yu_*}{v}\right) + C + \frac{\Pi}{K} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (7.9)$$

olarak düzenlenebilir. Burada  $\Pi = -\kappa B/2$  bir iz parametresi olup,  $B = -2.5$ , için  $\Pi = 0.51$  dir (Coles 0.55 değerini tavsiye etmiştir).

Türbülanslı sınır tabakanın tamamı dört bölgeden oluşmuş gibi düşünülebilir. Kovaszny'e (1967) göre her bir bölgenin kendi uzunluk ve hız skalası vardır.

- En alttaki *laminer alt-tabaka*nın uzunluk skalası  $\nu/u_*$ , hız skalası ise  $u_*$  dir.

- *İç bölge*nin uzunluk ve hız skalaları sırasıyla  $y$  ve  $u_*$  dir.

- *Dış bölge*nin uzunluk skalası  $\delta$ , hız skalası ise  $U_e$  dir.

- Corrsin ve Kistler (1955) "*süper-tabaka*" adını verdikleri dördüncü bir tabaka daha tanımlamışlardır. Bu tabaka sınır tabakanın dış kenarında viskoz tabaka ile viskoz olmayan dış akım arasında yer alan ince ve kıvrımlı bir geçiş bölgesidir. Bu bölgedeki hız skalası olarak "*katılım hızı*" alınabilir. Katılım hızı, dış akımdan sınır tabaka içerisine birim zamanda giren akım debisi ile orantılı bir hızdır. Bu hız aynı zamanda türbülans arayüzünün türbülanslı olmayan dış akıma nazaran ilerleme hızını ifade eder. Katılım hızı Kovaszny (1967) tarafından

$$V_0 \equiv U_e \frac{d}{dx} (\delta - \delta^*) \quad (7.10)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Kovaszny bu bağıntıyı kullanarak süper-tabaka için  $10\nu/V_0$  şeklinde bir karakteristik uzunluk skalası oluşturmuştur.

$U$  ve  $y$  büyüklükleri

$$\frac{U - U_e}{u_*} = A \log\left(\frac{y}{\delta}\right) + B \quad (7.6)$$

$$\frac{U}{u_*} = A \log\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C \quad (7.7)$$

bağıntıları arasından elimine edilerek

$$\frac{U_e}{u_*} = A \log\left(\frac{\delta u_*}{\nu}\right) + C - B \quad (7.11)$$

ve bu bağıntı yeniden düzenlenerek bir *yüzey sürtünme kanunu*

$$\sqrt{\frac{2}{C_f}} = A \log\left(R_\delta \sqrt{\frac{C_f}{2}}\right) + C - B \quad (7.12)$$

şeklinde bulunabilir.

(7.12) bağıntısı yaklaşık biçimde yazılarak veya ampirik verilere eğri uydurularak başka, daha basit açık formüller de türetilmiştir. En basit birisi Blasius'a ait ve Schultz-Grunow (1940) tarafından doğrulanan

$$C_f = 0.0456 (R_\delta)^{-1/4} \quad (7.13)$$

bağıntısıdır. Bu bağıntı konuma bağlı Reynolds sayısının yaklaşık  $R_x=10^7$  değerine kadar geçerlidir. Çoğu kimse Schoenherr (1932) 'in

$$\frac{I}{\sqrt{C_f}} = 4.15 \log(R_x C_f) + 1.7 \quad (7.13)$$

bağıntısını kullanmaktadır.

$L$  uzunluğundaki düz levha üzerindeki türbülanslı akımda toplam sürtünme direnci katsayısı,  $C_D$ , için bu iki araştırmacı

$$C_D = \frac{0.427}{[\log(R_L) - 0.407]^{2.64}} \quad (7.13a)$$

ve

$$\frac{I}{\sqrt{C_D}} = 4.13 \log(R_L C_D) \quad (7.14a)$$

önermişlerdir.

#### 7.4- Seçilmiş ampirik türbülans bilgileri

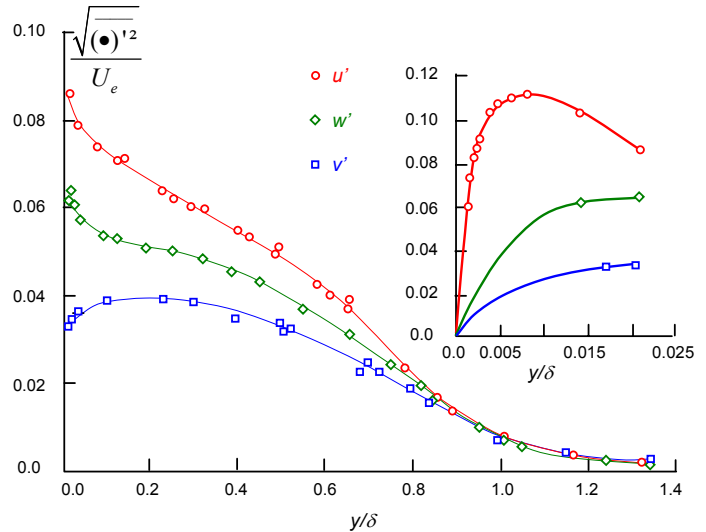
Yukarıdaki bölümlerde yapılan analizin amacı ortalama akımın genel özelliğinin anlaşılması olarak ortaya konulmuş olmakla birlikte türbülanslı akımın çalkantılı doğasının anlaşılması esastır. Konuyu izah amacıyla, 1950 li yıllarda Amerikan Ulusal Standartlar Bürosu tarafından düz levha üzerinde elde edilen zengin veriden yararlanılacaktır. Bu seçimin iki ana nedeni vardır. Birincisi akımın basit olması, buna karşılık olayları temsil etmesi, ikincisi de bu akım için komple ölçme sonuçlarının mevcut olmasıdır.

Şekil 7.17 de sınır tabakada üç doğrultudaki türbülans şiddeti profilleri yer almaktadır.

Şekilden aksenal türbülans şiddetinin en büyük olduğu, fakat yanal yöndeki türbülans şiddetinin de dikey yönden daha büyük olduğu fark edilmektedir:

$$\frac{\sqrt{u'^2}}{U_e} > \frac{\sqrt{w'^2}}{U_e} > \frac{\sqrt{v'^2}}{U_e}$$

Bunun nedeni akımın yanal doğrultularda salınım serbestisi olmasına karşın duvarın direkt kısıtlayıcı etkisi nedeniyle aynı serbestinin dikey doğrultuda olmayışdır.



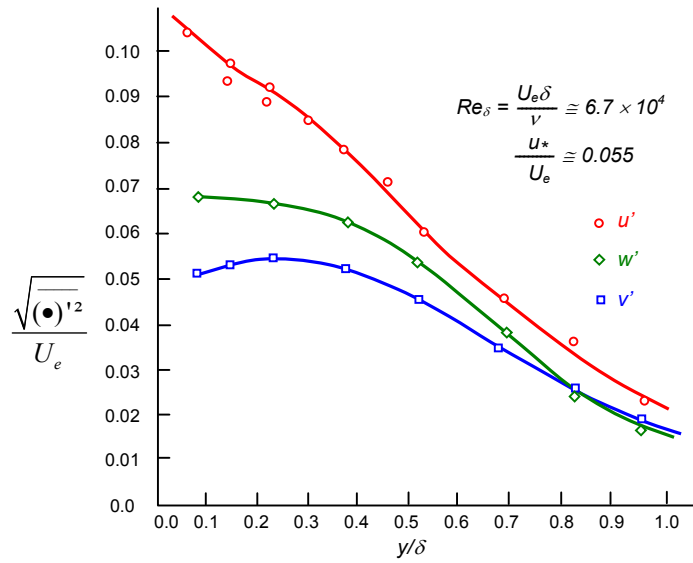
Şekil 7.17- Düz levha üzerinde türbülans şiddeti profilleri (Klebanoff, 1955)

### Pürüzlü bir düz levha

üzerindeki akım için Corrsin ve Kistler (1954) tarafından elde edilen türbülans şiddeti profilleri Şekil 7.18 de yer almaktadır.

Bu incelemedeki pürüzlülük buruşturulmuş kağıt biçiminde olup iki-boyutlu ve yaklaşık sinüzoidaldir. Pürüz yüksekliği 0.2 cm olup bu yükseklik akımı tamamen pürüzlü rejime sokmak için yeterlidir.

Bulunan türbülans şiddeti düzeyleri düzgün duvar halinden çok daha fazladır. Fakat üç bileşenin birbirine göre sıralaması aynıdır.

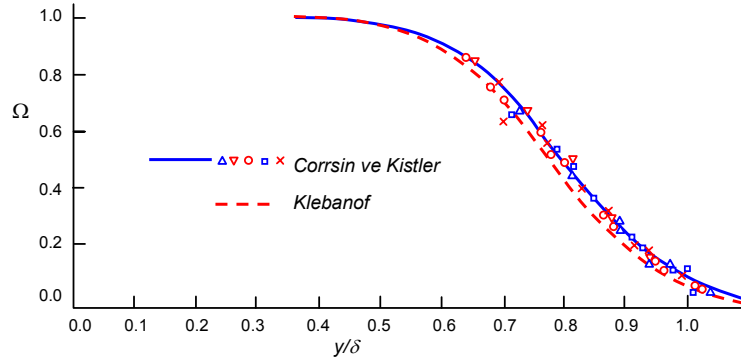


Şekil 7.18- Tam pürüzlü düz levha üzerinde türbülans şiddeti profilleri (Corrsin ve Kistler, 1954)

Türbülanslı bir sınır tabakanın dış kenarı zamana bağlı, düzgün olmayan bir sınırla karakterize edilir. Bunu anlamak için  $y=\delta$  konumuna bir sıcak-tel anemometresi yerleştirilirse anemometrenin değişimli olarak türbülanslı akım ve viskoz olmayan akım ölçtüğü görülür.

Bu durum "aralıklılık (intermittency)" adı verilen ve  $0 \div 1$  arasında değişen bir  $\Omega$  büyüklüğü ile yansıtılır.  $\Omega$  büyüklüğü akımın ne kadar süre ile türbülanslı olduğunu oransal olarak belirtmektedir.

Bazı ölçme sonuçları Şekil 7.19 da sunulmuştur. Sınır tabakanın dışına yaklaşıldıkça aralıklılığın 1 değerinden hayli küçük kaldığı belirtilmelidir.



Şekil 7.19-Sınır tabaka içinde aralıklılık dağılımı (Klebanoff, 1955, Corrsin ve Kistler, 1954)

Sınır tabaka içinde akışkanın x-doğrultusundaki momentumunun türbülans tarafından dikey doğrultuda taşındığı bilinen bir husustur. Bu olay boylamasına ve dikey doğrultudaki çalkantı hızlarının

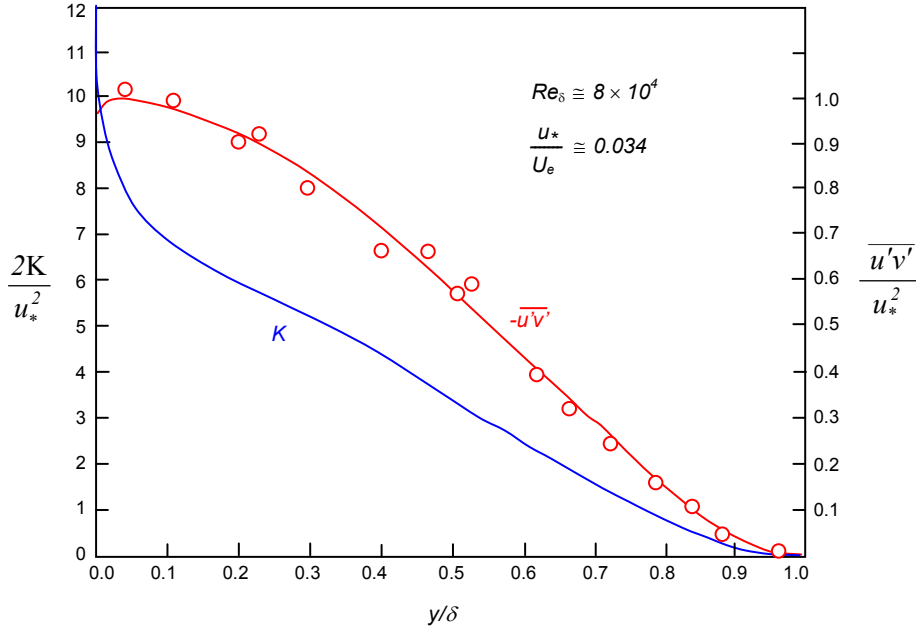
$$-\overline{u'v'}$$

şeklindeki korelasyonu ile ilişkilidir. Şayet bu büyüklük akışkanın yoğunluğu ile çarpılarak

$$-\rho \overline{u'v'}$$

şeklinde düzenlenirse gerilme boyutunu alır ve "türbülanslı kayma gerilmesi" veya "Reynolds gerilmesi" olarak adlandırılır. Bu kavram izleyen bir bölümde daha direkt bir biçimde çıkartılacaktır. Fakat şimdilik türbülans çalkantılarının sınır tabaka üzerindeki başlıca etkisinin Reynolds gerilmesi vasıtasıyla olduğunu gözlenmesi yeterlidir.

Reynolds gerilmelerine ilişkin ölçme sonuçlarının sürtünme hızıyla normalize edilmiş biçimde bir grafiği Şekil 7.20 de sunulmuştur. Bu büyüklük duvar yakınında en büyük değerini almakta olup duvarın daha yakınındaki ince laminer alt-tabakanın içerisinde aniden sıfıra düşmektedir.



Şekil 7.20- Düz levha üzerindeki türbülanslı sınır tabakada Reynolds gerilmesi ve türbülans kinetik enerjisi profilleri (Klebanoff, 1955)

Bu laminer alt bölgedeki değişim Şekil 7.21 de genişletilmiş olarak görülmektedir.

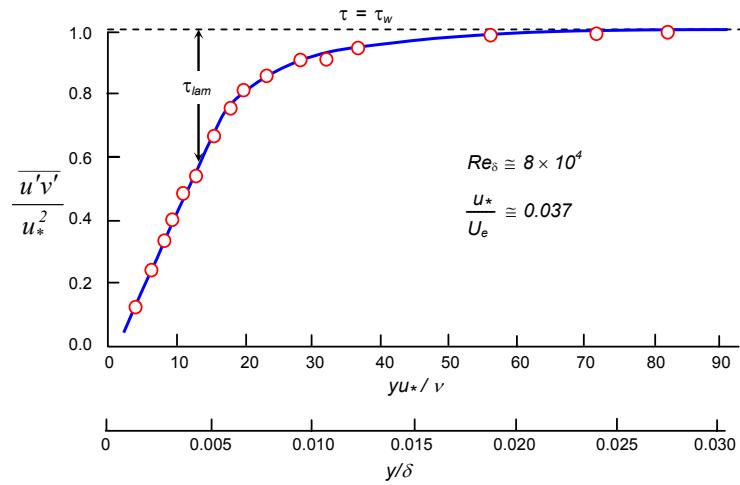
Şekil 7.20 de ayrıca "türbülanslı kinetik enerji"nin değişimi gösterilmiştir. Bu, üç çalkantı hız bileşeninin birim kütle başına kinetik enerjisi olup

$$K' \equiv \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} \quad (7.25)$$

$$K \equiv \frac{\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}}{2}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Akımın ne kadar türbülanslı olduğunu tarif etmek için herhangi bir büyüklük kullanılması gerekiyorsa, en mantıklı seçim türbülans kinetik enerjisi olacaktır.



Şekil 7.21- Sınır tabaka duvar bölgesinde Reynold gerilmesinin ayrıntılı dağılımı (Schubauer, 1954)

Türbülans çalkantılarının geniş bir zaman ölçeği aralığında oluştuğu hususuna açıklık getirmek için boylamasına türbülans çalkantılarının spektra ölçümlerinin bazıları dalga sayısının ( $k_1$ ) fonksiyonu olarak Şekil 7.22 de sunulmuştur. Burada  $k_1$

$$\text{Dalga sayısı} = \frac{2\pi \times \text{frekans}}{\text{ortalama hız}}$$

olup  $E_1(k_1)$  büyüklüğü de

$$k_1 \div k_1 + dk_1$$

bandındaki boylamasına türbülans enerjisinin miktarıdır. Böylece

$$\overline{u'^2} = \int_0^{\infty} E_1(k_1) dk_1 \quad (7.26)$$

olmaktadır.

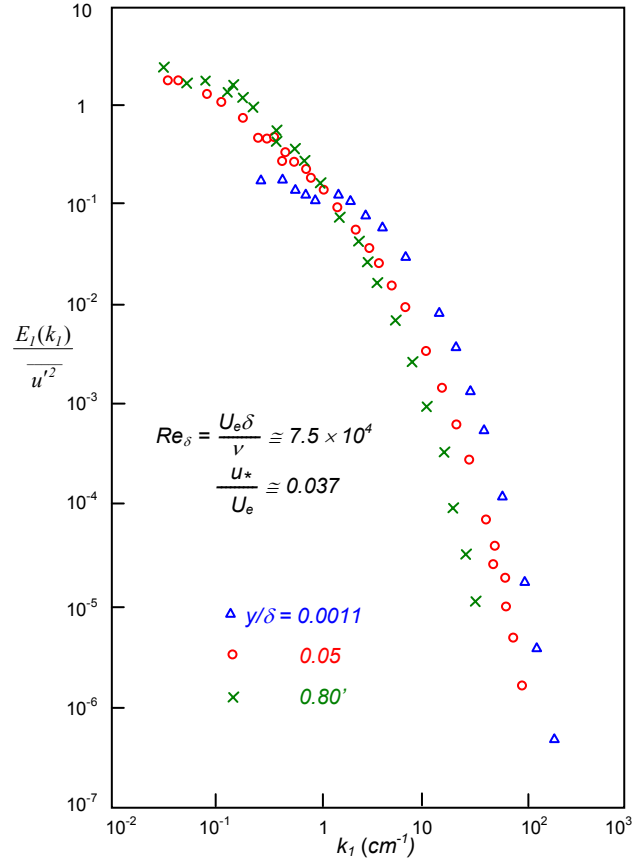
Buradaki ilk gözlem dalga sayısının büyük değerlerinde hissedilir bir hareket olmasıdır.

İkinci bir husus, katı duvar büyük ölçekli hareketleri engellediğinden

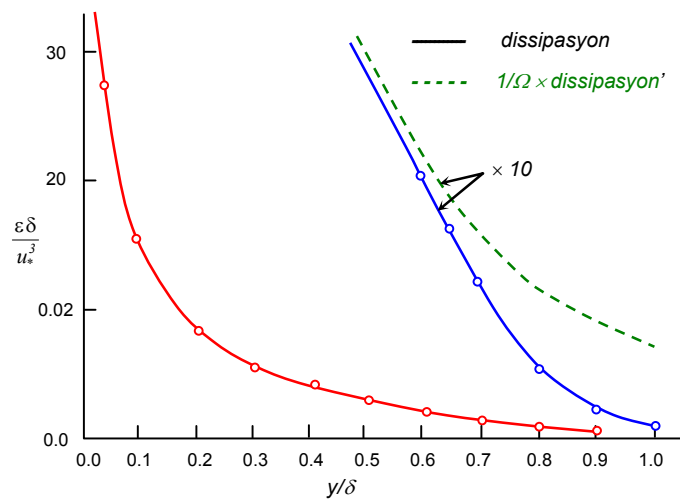
duvara yaklaştıkça daha büyük ölçekli ediler (girdapçıklar) içerisindeki enerjinin azalmasıdır ( $y/\delta = 0.0011$  için küçük dalga sayısındaki verilere bakınız). Büyük ölçekli edilerden küçük ölçeklilere doğru bir enerji akışı ve sonunda viskozite ile dissipasyon oluşmaktadır. Büyük ölçekli hareket için gerekli enerji dış akımdan çekilmektedir.

Herhangi bir türbülanslı kaymalı akımda türbülans enerjisinin üretimi, taşınımı, yayını ve dissipasyonu söz konusudur.

Dissipasyon esasen laminar viskozitenin daha küçük ediler üzerindeki aksiyonundan kaynaklanır. Bu büyüklüğü ölçmek zordur. Fakat bazı sonuçlar Şekil 7.23 de gösterilmiştir. Akımın tam türbülanslı bölgelerinde dağılımı görmek için bu gibi sonuçları aralıklılığın etkisine bağlamak alışılmamıştır.

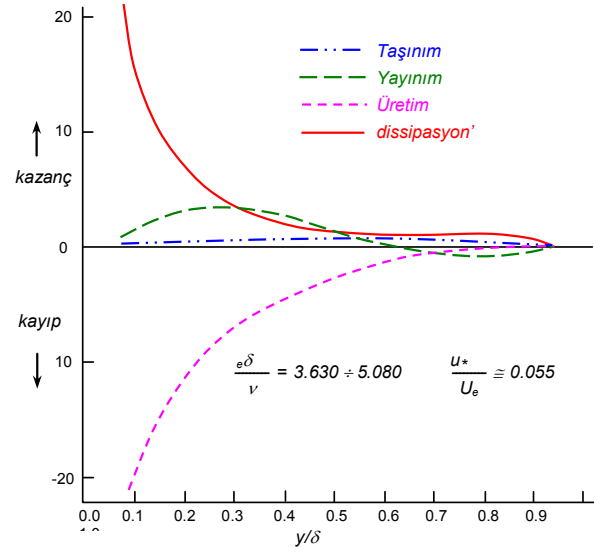


Şekil 7.22- Düz levha üzerindeki sınır tabakada eksenel türbülans şiddetinin spektrumu (Klebanoff, 1955)



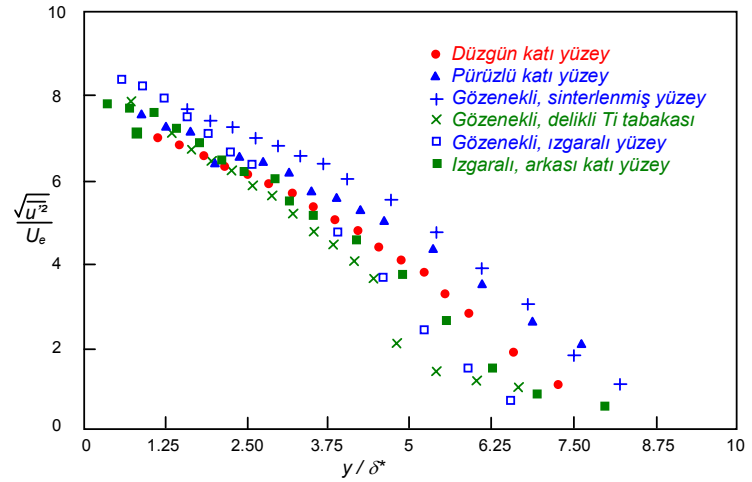
Şekil 7.23- Düz levha sınır tabakasında dissipasyon ve türbülans kinetik enerjisinin dağılımı (Klebanoff, 1955)

Yukarıdaki belirtilen bütün proseslerin dağılımı Şekil 7.24 de sunulduğu gibi bir türbülanslı kinetik enerji dengesi biçiminde gösterilebilir. Dış kenar yakınları hariç bütünsel dengeye ana katkılar üretim ve dissipasyondan kaynaklanmaktadır. Bu ikisi hemen hemen birbirini dengelemektedir.



Şekil 7.24- Düzgün yüzeyli düz levha üzerindeki sınır tabakada türbülans enerji balansı (Klebanoff, 1955)

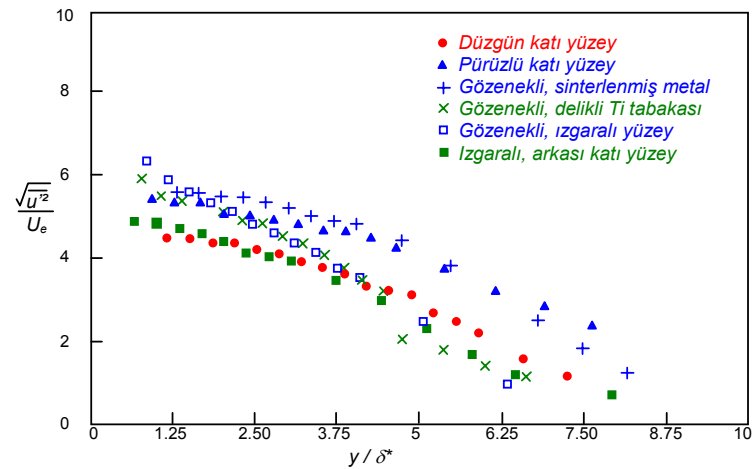
Geçirgen yüzeyler üzerindeki akımların türbülans büyüklükleriyle ilgili bilgi, ortalama akımla ilgili olanlardaki gibi katı yüzeydekilere kıyasla daha zayıftır. Daha önce ortalama akımın tartışıldığı altı yüzey üzerinde (üçü katı üçü geçirgen) aksenal ve normal doğrultulardaki türbülans şiddetleri ve Reynolds gerilmelerine ait bir kısım veri Şekil 7.25, 7.26 ve 7.27 de sunulmuştur.



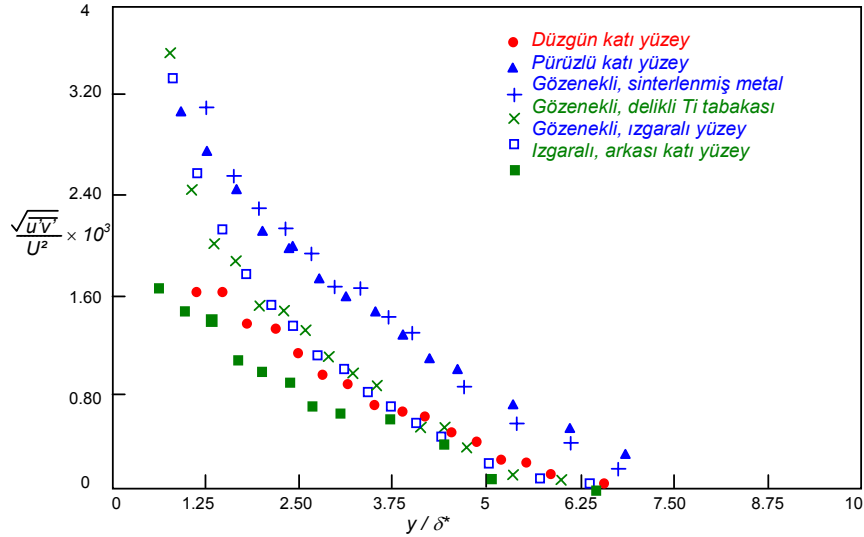
Şekil 7.25- Çeşitli katı ve gözenekli duvarlar üzerinde aksenal doğrultudaki türbülans şiddeti profilleri (Kong ve Schetz, 1982)

Pürüzlü katı yüzeylerin bu üç büyüklüğü düzgün katı yüzeylere kıyasla arttırdığı açıktır.

Gözenekliliğin farkedilir bir etkisi olup, bu etki normal doğrultudaki türbülans şiddeti ve Reynolds gerilmesi üzerinde en büyüktür. Normal türbülans bileşeni gözenekli bir duvar tarafından düzgün bir duvar kadar sönümlenmemektedir.



Şekil 7.26- Çeşitli katı ve gözenekli duvarlar üzerinde normal doğrultudaki türbülans şiddeti profilleri (Kong ve Schetz, 1982)



Şekil 7.27- Çeşitli katı ve gözenekli duvarlar üzerinde Reynolds gerilmeleri (Kong ve Schetz, 1982)

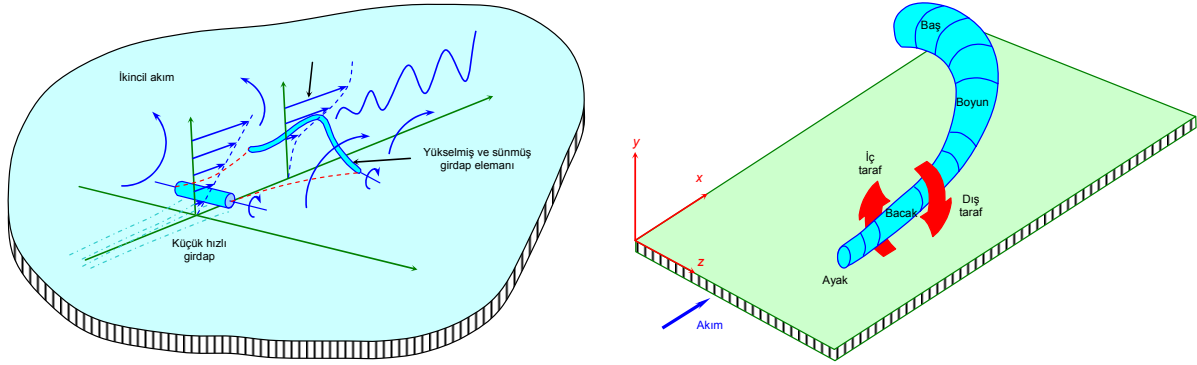
Türbülansın çalkantı doğasını yansıtan çeşitli büyüklüklerin ölçüm sonuçlarına ilaveten bu büyüklüklerle ilgili proseslerin fiziksel bir tasviri de faydalıdır. Türbülans şiddetleri gibi bu büyüklükler de zaman üzerinde ortalamalardır. Türbülanslı akımın gerçek fiziğini anlamak için ayrık, zamana bağlı türbülans olaylarının davranışını bilmeye ihtiyaç vardır. Buradaki kısa anlatım ana hatlarıyla Kline ve Robinson (1990) tarafından yapılan incelemeye dayanmaktadır. Münferit edi fikri gerçekten açık ve özellikle yardımcı değildir. Zira türbülanslı akımda aynı zamanda ve aynı yerde çok çeşitli boyutlarda ediler mevcuttur. Akışkan kümeleri ve girdap çizgileri düşünmek daha faydalıdır. Bir türbülanslı akım içerisinde bir akışkan kümesinin bir konumdan diğerine hareket ettiği söylenebilir. Bu nosyon Reynolds gerilmesini tanımlamak için kullanılacaktır. Türbülanslı akım kabaca girdap çizgilerinin süperpozisyonu olarak dikkate alınabilir. Buna göre  $d$  çapında,  $L$  uzunluğunda ve açısal hızı  $\omega$  olan bir girdap çizgisi göz önüne alınırsa, bunun kütlesi  $\rho L d^2$  ile, kinetik enerjisi  $\rho L d^4 \omega^2$  ile ve açısal momentumu da  $\rho L d^4 \omega$  ile orantılıdır. Bu girdap elemanı, kütlesi ve açısal momentumu sabit kalmak kaydıyla sündürülürse (ki bu düşük yayılım için iyi bir yaklaşımdır),  $L$  arttıkça çap azalacak ve açısal hız artacak bu da kinetik enerjiyi arttıracaktır. Böylece elemanı uzatmak için uçları üzerinde yapılan iş elemanın kinetik enerjisinde artış yaratmaktadır. Bu durum daha önce belirtilen enerji kaskadının tasvirini sağlar. Enerji büyük ölçekli hareketlerden bunlar içindeki küçük ölçekli hareketlere doğru, küçük ölçekli hareketlerdeki girdap çizgilerinin büyük ölçekli hareketlerle sündürülmesi sonucu, akmaktadır.

Ortalama hareketin iki-boyutlu olduğu türbülanslı bir akımda girdap çizgileri daha ziyade akımla çaprazdır. Sündürme de bu doğrultuda olacağından türbülans üç-boyutlu olacaktır. Ortalama girdaplılığın çoğu, ortalama hız profilinin şekline göre duvar civarında yoğunlaşmıştır (Şekil 7.2). Bu husus girdap sünmesinin bir başka sonucunu ortaya koyar: girdap elemanlarının duvar civarında rastgele yükselmesini ani çalkantılar ve patlama (bursting) ve dış bölgeye sıçramalar izler.

Bu prosesler Kline ve arkadaşları (1967) tarafından Şekil 7-28A da gösterildiği gibi tasvir edilmiştir. Daha yeni çalışmalarda Şekil 7.28B de gösterildiği gibi, daha sık oluşan çengel tipi yapılara işaret edilmiştir. Burada sağ ve sol çengeller rastgele gözükmemektedir. Rao ve arkadaşları (1971) ortalama patlama zamanı periyodunu  $5\delta/U_e$  olarak belirlemiştir. Kline ve arkadaşları (1967) bir patlamayla sıçrayan akışkanın akım doğrultusunda  $0.8U$  civarında hıza sahip olduğunu bulmuştur. Buna göre sıçrama prosesi Reynolds gerilmesinin bir kısmının sorumlusudur. Sıçrayan bir akışkan kümesi,  $u' < 0$  ve  $v' > 0$  olduğundan negatif işaretli bir  $u'v'$  korelasyonu verir. Kim ve arkadaşları (1971) bütün



türbülans üretiminin özellikle duvar yakınındaki patlama ve sıçramanın sonucu olduğunu belirtmişlerdir.



a) Girdap sünmesi (Kline ve arkadaşları, 1967)

b) Çengel şekilli girdapsal yapı (Kline ve Robinson, 1990)

Şekil 7.28- Türbülanslı sınır tabakanın duvar bölgesinde girdapsal yapılar

Duvar civarı zaman ve konumda periyodik yapı sergiler. Akım doğrultusunda ve açıklık doğrultusunda, uzunluğu  $\delta$  mertebesinde ve genişliği  $30\nu/u_*$  mertebesinde düşük-momentumlu akışkan şeritleri periyodik olarak oluşur. Bu şeritlerin üzerinde  $y^+ \approx 40$  civarında yatay bir kayma tabakası oluşur. Bu noktada lokal hız profili bir büküm gösterir. Sıçrayan (dış tabakaya itilen) akışkan ara bölgenin kenarından ( $y^+ \approx 40$  civarında) aşağı tabakaya doğru kayan yüksek-momentumlu akışkanla yer değiştirir. Bu kayma-sıçrama prosesi de yine Reynolds gerilmesinin önemli bir kısmını üretir.

### 7.5- Türbülanslı akımların analizindeki merkezi problem

Şayet sıkıştırılamaz akımda, daimi olmayan, laminer denklemlerin türbülanslı hareketin esas unsurlarını ihtiva ettiği kabul edilse idi zamana bağlılığı içeren

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (1.39)$$

denklemlerinin sabit-özellikli halde türbülanslı akım probleminin çözümü için işe yarayacağı beklenirdi.

Bu kabul ne çelişkili ne de çözüm için umulduğu kadar yardımcı değildir.

Çelişkili değildir, zira bu denklemler çıkartılırken rastgele çalkantılı bir hareket hariç tutulmamıştır.

Çok yardımcı değildir, çünkü gerçek bir kolaylaştırma getirmemektedir. Yani halen üç-boyutlu, fiziksel ölçelerde çok geniş bir aralıkta ölçeğe ve frekanslara sahip olan, zamana rastgele bağlı, büyük bir hesaplama problemi ile karşı karşıya bulunmaktadır.

Daha önce analizcinin ekseriyetle sadece zaman-ortalama akımla ilgilendiği belirtilmişti. Bu genel amaç daimi olmayan denklemlere dayanan bir formülasyona nasıl dönüştürülebilir sorusunun cevabı basitçe zamana göre ortalama almaktan ibarettir. Akımın herhangi bir büyüklüğü, örneğin düzlemsel, daimi (ortalama anlamında) akım halinde

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) + u'(x, y, z, t) \quad (1.67)$$

şeklinde ortalama bir büyüklükle bir çalkantı kısmına ayrılarak ilgili denklemlerde yerleştirilir. Sonra her bir terimin zaman üzerinden ortalaması alınır.

Burada denklemlerin iki-boyutlu sınır tabaka biçimiyle ilgilenilecektir. Ayrıca ortalama alma ile ilgili basit bazı kurallar izlenecektir. Şayet  $f$  ve  $g$  iki çalkantı değişkeni,  $F$  ve  $G$  de bunların ortalama değerleri ise

$$\overline{f'} \equiv 0; \quad \overline{F} \equiv F; \quad \overline{f+g} \equiv F+G; \quad \overline{f \cdot g} \equiv F \cdot G \quad (1.67)$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial s} \equiv \frac{\partial F}{\partial s}; \quad \int \overline{f} ds \equiv \int F ds$$

yazılabilir. Buradaki üst çizgi işareti üzerinde yer aldığı büyüklüğün ortalamasının alındığını belirtmektedir.

Daimi, sıkıştırılamaz, iki-boyutlu süreklilik denklemindeki hız bileşenleri ortalama ve çalkantı değerlerine ayrılarak

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(U+u')}{\partial x} + \frac{\partial(V+v')}{\partial y} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) \quad (7.28)$$

zaman ortalaması alınarak

$$\frac{\partial \overline{u'}}{\partial s} \equiv \frac{\partial U}{\partial s}; \quad \frac{\partial \overline{v'}}{\partial s} \equiv \frac{\partial V}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \overline{u'}}{\partial s} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial s} = \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial s} = 0$$

ve

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0} \quad (7.29)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi ortalama akım için süreklilik denklemi laminer akımdakiyle aynıdır. Ayrıca bu sonuç (7.28) bağıntısında tekrar kullanılırsa

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0 \quad (7.30)$$

olduğu, yani anlık çalkantıların aynı biçimde bir süreklilik denklemini sağladığı görülür.

**İki-boyutlu, sıkıştırılamaz** sınır tabakaya ait

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

momentum denklemindeki non-lineer terimlerin incelenmesinde dikkatli olunmalıdır. Bu çerçevede taşınım terimlerinin, süreklilik denklemi de dikkate alınarak

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + \left( u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.31)$$

şeklinde yeniden düzenlenmesi faydalı olur. Bu durumda ortalama ve çalkantı değerleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} &= \frac{\partial(U+u')^2}{\partial x} + \frac{\partial[(U+u')(V+v')]}{\partial y} \\ &= \frac{\partial(U^2 + 2Uu' + u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial(UV + Vu' + Uv' + u'v')}{\partial y} \end{aligned} \quad (7.32)$$

her bir terimin zaman ortalamaları alınarak

$$\frac{\partial(U^2)}{\partial x} + \frac{\partial(UV)}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} \quad (7.32a)$$

veya ilk iki terim açılarak

$$2U \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial V}{\partial y} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}$$

ve burada süreklilik denklemi kullanılarak

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} \quad (7.32b)$$

elde edilir. Momentum denklemindeki diğer terimlerin ortalamaları da kolaylıkla alınır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial(\overline{U+u'})}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial(\overline{P+p'})}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2(\overline{U+u'})}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (7.33)$$

Görüldüğü gibi viskoz terimde önemli bir değişiklik yoktur.

Elde edilen bütün ortalama değerler momentum denkleminde yerleştirilerek

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad (7.34)$$

bulunur. **Şayet ortalama akım daimi ise ilk terim ortadan kalkacaktır.** Ayrıca genellikle

$$\frac{\partial(\overline{u'^2})}{\partial x} \ll \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y}$$

olduğu kabul edilir. Bu husus çoğu akım için deneyle doğrulanmıştır. Bu kabuller çerçevesinde sonuç olarak daimi akımdaki türbülanslı sınır tabaka denklemleri

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (7.29)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} \quad (7.34a)$$

şeklinde yazılabilir. Duvardan yeterince uzakta **laminer kayma gerilmesi** terimi **türbülansla momentum transportu** terimi yanında küçük kabul edilerek ihmal edilebilir.

Şüphesiz  $(-\rho \overline{u'v'})$  büyüklüğünü içeren terim ihmal edilemez. Aksi halde denklem tamamıyla laminer akım haline dönecektir. Belirtilen bu terim denkleminde türbülanslı akımın çalkantılı doğasının etkisini yansıtan tek terimdir.

Herhangi bir sınır tabaka probleminde olduğu gibi (7.29) ve (7.34a) denklemleriyle ifade edilen problemde de viskoz olmayan bir dış akım tarafından sınır tabaka üzerine etki eden  $P(x)$  basınç dağılımının bilindiği kabul edilmektedir. Buna göre bu **iki denklemin iki bilinmeyen için (U ve V) çözülmesi** beklenmektedir.

Bununla birlikte momentum denkleminde sağ taraftaki **en son terim ilave bir bilinmeyen** olarak yer almaktadır. Bu bir **momentum transferi** terimi olup, laminer akımdaki basit Newtonien kayma ile aynı rolü oynamaktadır. Bu bakımdan  $(-\rho \overline{u'v'})$  büyüklüğü **türbülanslı kayma gerilmesi** veya daha önce de belirtildiği gibi **Reynolds gerilmesi** olarak adlandırılmaktadır. Bu türbülanslı kayma teriminin laminer viskoz terimden gelmediği, fakat viskoz olmayan taşınımsal terimlerden geldiği belirtilmelidir.

(7.29) ve (7.34a) denklemleriyle çalışırken denklem sisteminin kapalı (çözülebilir) hale gelmesi için Reynolds gerilmesini içeren terimin de diğer bağımsız veya bağımlı değişkenler cinsinden ifade edilmesi gereklidir. Diğer değişkenlerin hepsi de ortalama değerler olarak dikkate alındığından böyle bir bağıntı **ortalama akım modeli** olarak nitelendirilir. Bu tip modellerin geliştirilmesi izleyen bölümlerde ele alınacaktır.

Belirtilen zorluğu yenmenin kolay bir yolu yoktur. Konu, bölümün sonunda daha karmaşık formülasyonlara varacak, fakat hep denklemlerden daha fazla bilinmeyen olacaktır. Bu fazladan bilinmeyen(ler) hep  $(-\rho \overline{u'v'})$  gibi türbülans büyüklükleri olacak, ve sistemi matematiksel olarak kapatmak için hep fazladan, genellikle yarı-ampirik bağıntılara gerek olacaktır. Bu durum türbülanslı akımların "**kapatma (closure) problemi**" olarak anılır. Aslında ortalama akım ve çalkantı büyüklüklerini belirterek, veya hareket denklemlerini

kullanarak, ya da burada yapıldığı gibi zaman üzerinde ortalama alarak gerçekten önemli hiçbir şey yapılmadığı üzerinde düşünülürse bu şaşırtıcı duruma nasıl gelindiğini kavramak daha kolay olur. Bu noktaya kadar, matematiksel formülasyonun geliştirilmesinde türbülanslı akımların gerçek doğası hakkında hiçbir şey söylenmemiştir. Formülasyonun tamamlanmasından önce bu konu üzerinde durulmalıdır.

Türbülanslı kayma modeli geliştirme konusunda ilerlemeden önce çalkantılarla momentum transferi olgusunun fiziksel bir izahını yapmakta yarar vardır.

Bu amaçla Şekil 7.29 dikkate alınırsa, sınır tabakanın  $y_0+\Delta y$  seviyesinde bulunan bir akışkan kümesi daha alt seviyedeki bir  $y_0$  konumuna yer değiştirdiği takdirde eski konumundaki  $U(y_0+\Delta y)$  ortalama hızını koruma eğiliminde olacaktır. Bu hız akışkan kümesinin yeni konumunda  $U(y_0)$  ortalama hızına göre pozitif işaretli bir  $u'$  çalkantı hızı kadar artmış gözükcektir.

Bu durumda  $y_0+\Delta y$  konumundan  $y=y_0$  düzlemine taşınan anlık kütle akımı  $-\rho v'$  olup bu kütle yeni konumdaki  $u'$  çalkantı hızı ile  $-\rho u'v'$  kadar bir momentum artışı yaratacaktır.

Şayet akışkan kümesi alt tabakadan daha üst bir tabakaya yer değiştirirse bunun tersi olacaktır.

Şayet zaman üzerinde bir ortalama alınırsa hız çalkantıları vasıtasıyla boylamasına momentumda dikey doğrultuda oluşan momentum transferi miktarı  $(-\rho \overline{u'v'})$  olarak elde edilir

### 7.6- Ortalama akım türbülans transportu formülasyonları

Bir ortalama akım türbülans analizi geliştirmek için ilk olarak Bölüm 7.5 deki incelemeler çerçevesinde

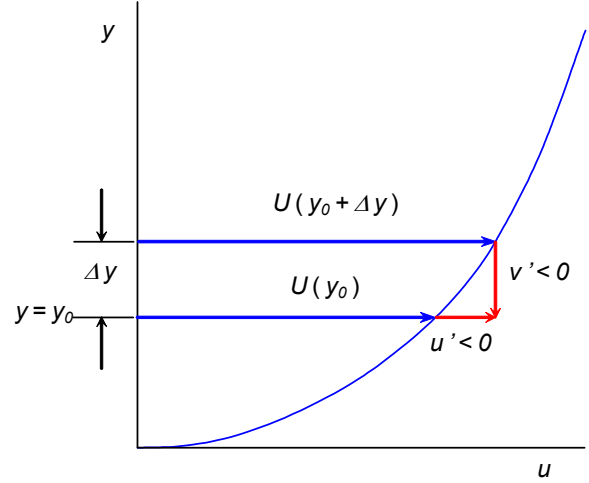
$$\tau_r \equiv -\rho \overline{u'v'} = f(x,y;U,V,P \text{ veya } U_e, \mu, \rho) \quad (7.35)$$

şeklinde bir bağıntı bulmaya çalışılmalıdır. Öyle ki (7.29) - (7.34a) denklem sistemi kapalı hale gelsin. Bu bağıntının ampirik bilgilere dayanması gerektiği açıktır. Bu bakımdan tekrar Bölüm 7.3 deki ortalama akım bilgilerine baş vurulacaktır. Bu arada, (7.35) bağıntısının sağ tarafında türbülans büyüklüklerinin yer almadığı belirtilmelidir.

Bu noktada modelleme çabalarının amacını açıkça belirtmek için sınır tabaka alt bölgesini örnek olarak dikkate almak faydalı olacaktır. Biçimsel olarak (7.35) ile belirtilen bulunacak bağıntı (7.29) ve (7.34a) hareket denklemlerinde kullanıldığında Şekil 7.4 deki veri arasından geçen dolu çizgi elde edilecektir. Bu tipten bir analiz yarı-ampirik olarak nitelendirilir. Ampirik bir yaklaşım basitçe veriye uydurulmuş eğrileri kullanacaktır.

Belirtilen amaç birbiriyle ilişkili iki formülasyonla başarılmıştır.

İlki Boussinesq (1877) tarafından, laminer akıma benzetme yoluyla



Şekil 7.29- Reynolds gerilmesinin gelişimi

$$\tau_T \equiv -\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7.36)$$

şeklinde ortaya konan *edi viskozitesi* formülasyonudur. Buradaki  $\mu_T$  edi viskozitesinin sadece akışkanın değil akımın durumuna bağlı olacağı beklenmelidir. Yani edi viskozitesi laminar viskozite gibi yalnızca akışkanın termofiziksel bir özelliği değildir.

Prandtl (1925) tarafından

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7.37)$$

şeklinde önerilen ikinci formülasyon *karışım uzunluğu formülasyonu* olarak anılır. Buradaki  $l_m$  büyüklüğü bir karışım uzunluğudur. Prandtl'in karışım uzunluğu kavramı Reynolds gerilmesi için Bölüm 7.5 in sonunda yapılan fiziksel açıklamayı yakından izlemektedir. Karışım uzunluğu bir etkileşim mesafesi olarak, moleküller arası ortalama serbest yörüngeye benzetilebilir. Sadece, moleküller arasında değil de türbülans kümeleri arasında tanımlanmaktadır. Şayet Şekil 7.29 da akışkan kümelerinin hareket mesafesi olarak  $\Delta y$  değil de  $l_m$  alınırsa,  $v'(y_0) < 0$  olmak üzere

$$u'(y_0) = U(y_0 + l_m) - U(y_0) \approx l_m \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7.38)$$

şeklinde bir bozuntu hızı tanımlanabilir. Şayet akışkan kümesi aşağıdan yukarıya çıkıyorsa bu defa  $v'(y_0) < 0$  olmak üzere bozuntu hızı

$$u'(y_0) = U(y_0 - l_m) - U(y_0) \approx -l_m \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7.39)$$

şeklinindedir. Süreklilik gereği,  $v' \sim -u'$  olup, bu son iki bağıntı doğrudan (7.37) bağıntısını verir. Bu bağıntıdaki  $\tau_T$  nin işaretini doğru verebilmek için  $(\partial u / \partial y)^2$  yerine

$$\left| \frac{\partial U}{\partial y} \right| \frac{\partial U}{\partial y}$$

yazmak daha doğru olur.  $l_m$  için bağımsız değişken veya parametrelerin ya da ortalama bağımlı değişkenlerin fonksiyonu olan ilave bir bağıntıya ihtiyaç vardır. Bu bağıntı da edi viskozitesi gibi, akışkanın değil akımın durumunun bir fonksiyonu olacaktır.

Bu aşamada, (7.36) ve (7.37) formülasyonlarıyla ilgili bazı gözlemler uygun olacaktır:

İlkin, edi viskozitesi ve karışım uzunluğu formülasyonları, transport prosesini temsilen ilgili bağımlı değişkenin gradyantını  $(\partial U / \partial y)$  içermeleri nedeniyle *gradyan transport formülasyonları* olarak anılır. Buna göre laminar momentum ve ısı enerji transportu için yazdığımız

$$\tau = \mu \frac{\partial U}{\partial y} \quad \text{ve} \quad q = -k \frac{\partial T}{\partial y}$$

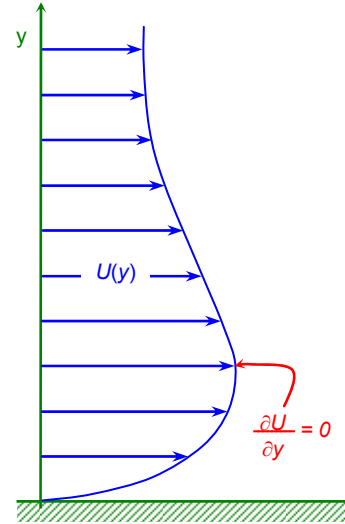
bağıntıları da gradyant transport formülasyonları olmaktadır. Türbülanslı kaymalı akımlar için bu gibi formülasyonların özel bir zaafiyeti vardır

Bu zafiyeti Şekil 7.30 daki gibi bir profil halinde en kolay biçimde görmek mümkündür. Bu tip profiller, örneğin, duvar üzerindeki bir yarıktan türbülanslı akıma teğetsel doğrultuda yüksek hızla akışkan enjeksiyonu halinde elde edilir.

$U(x)$  ortalama hız profili bir maksimuma sahip olduğundan  $\partial U/\partial y=0$  olan bir nokta olacaktır. Bu noktada her iki formülasyon da

$$\tau_T = -\rho \overline{u'v'} = 0$$

verir. Formülasyonların bu zayıflıklarının gidermenin basit bir yolu yoktur. Bununla birlikte çoğu sınır tabaka akımlarında bu şekilde maksimum veya minimumlar bulunmamaktadır. Simetrik bir profil için simetri düzleminde  $\partial U/\partial y=0$  olup yine aynı durum görülmektedir.



Şekil 7.40- Türbülanslı sınır tabakada bir maksimuma sahip ( $\partial U/\partial y=0$ ) hız profili

İki formülasyonla ilgili ikinci genel gözlem de bu ikisinin esasen eşdeğer olmasıdır. (7.36) ve (7.37) denklemlerine bakılarak açıkça

$$\mu_T = \rho l_m^2 \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7.40)$$

yazılabilir. Dolayısıyla  $\mu_T$  için bir bağıntı biliniyorsa (7.40) bağıntısından  $l_m$  için müteakbil bağıntı bulunabilir.

Edi viskozitesi ve karışım uzunluğu için özel modeller Bölüm 7.8 de çıkartılacaktır. Bununla birlikte, daha önce, türbülanslı sınır tabakaların analizi için integral yöntemlere göz atılacaktır.

### 7.7- Ortalama akım integral yöntemleri

Türbülanslı akımların analizi için de laminer akımlardaki integral yöntemlerinin benzeri yöntemler mevcuttur. Bunlar türbülanslı analizde kabaca, laminer haldeki gibi diferansiyel formülasyonlara dayanan bağıntıları kullanırlar. Yöntemlerin uygulanması genellikle basit olup mühendislik çalışmaları için uygun sonuçlar vermektedir. Burada yöntemlerden ikisi kısaca izah edilecektir. Bunlardan daha eski olanı sadece çok basit problemler için uygundur. Daha yeni olanı ise Moses (1969) tarafından ortaya konmuş olup daha genel akımlar için kullanılabilir. Her iki halde de gerekli türbülanslı kayma modellemesinin analize nasıl girdiği dikkati çekmektedir.

#### Prandtl yöntemi

İntegral yöntemin türbülanslı akımda ilk uygulaması Prandtl (1927) tarafında düz-levha problemi için yapılmıştır. Daimi, laminer akımlar için daha önce

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{1}{U_e} \frac{dU_e}{dx} (2\theta + \delta^*) - \frac{v_w}{U_e} = \frac{C_f}{2} \quad (2.15)$$

şeklinde çıkartılan momentum integral denklemi türbülanslı daimi bir ortalama akım için, bütün bağımlı değişkenler "ortalama büyüklükler" şeklinde değerlendirilmek suretiyle kullanılabilir. Geçirgen olmayan bir düz-levha üzerindeki akım için bu denklem

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (2.15a)$$

şeklini alır.  $\theta$  momentum kalınlığı daha önce olduğu gibi

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{U}{U_e}\right) \frac{U}{U_e} dy$$

şeklinde tanımlanmakla birlikte, buradaki  $U(y)$  ortalama hız profilidir. Çözüm için, laminar halde olduğu gibi, "kabul edilmiş" bir hız profiline ihtiyaç vardır.

Düz levha üzerindeki türbülanslı akım için ortalama hız profili kabaca

$$\frac{U}{U_e} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} \quad (7.41)$$

şeklinde temsil edilebilir. Burada  $Re_x \approx 10^6 \div 10^7$  için  $n \approx 7$  dir. Ancak, Bölüm 7.3.1 deki incelemeler dikkate alınır, genel halde bu bağıntının doğru olmayacağı söylenebilir. Buna rağmen analizde bu hız profili ile ilerlenebilir.

(7.41) hız profili kullanılarak  $n = 7$  için  $\delta^*/\delta = 1/8$  ve  $\theta/\delta = 7/72$  elde edilir.

İzleyen aşamada bu hız profilinin duvar kaymasını hesaplamak için kullanılması beklenebilir. Ama duvar kayması  $(\partial U/\partial y)_w$  türevini içermekte olup, bu türev de (7.41) bağıntısına göre  $n = 7$  için duvar üzerinde

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_e}{7\delta} \left(\frac{y}{\delta}\right)^{-6/7} \Rightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} \rightarrow \infty$$

şeklinde sonsuza gitmektedir.

Bununla birlikte, türbülanslı akım içinde kayma için ilave bir bilgiye gerek duyulacaktır. Bu yöntemde,  $\delta$  öncelikli bağımlı değişken olarak ortaya konduğundan, sadece duvar üzerindeki  $C_f$  kaymasının  $\delta$  cinsinden  $C_f(R_\delta)$  şeklinde bilinmesine ihtiyaç vardır. Laminer analiz için duvar kayması farklı biçimde ele alınmış olmakla birlikte  $\delta$  aynı rolü oynamıştır. Prandtl (1927) gereken  $C_f(R_\delta)$  için

$$C_f = 0.0456 (R_\delta)^{-1/4} \quad (7.13)$$

bağıntısını kullanmıştır. Bu bağıntıyla birlikte tespit edilen  $\theta/\delta$  oranı da (2.15a) bağıntısında kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} &= \frac{0.0456}{2(R_\delta)^{1/4}} \rightarrow \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = \frac{0.0456}{2(U_e \delta / \nu)^{1/4}} \\ \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} &= \frac{0.0456}{2} \left(\frac{\nu}{U_e \delta}\right)^{1/4} \end{aligned} \quad (7.42)$$

veya bu bağıntı düzenlenip integre edilerek,  $\delta(0)=0$  olmak üzere



$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.375}{R_x^{1/5}} \quad (7.43)$$

elde edilir. Bu sonuç düz levha üzerindeki laminar sınır tabaka için Blasius denklemi kullanılarak elde edilen

$$\frac{\delta(x)}{x} = \frac{5.0}{R_x^{1/2}}$$

Bağıntısıyla karşılaştırılırsa türbülanslı sınır tabakanın laminar sınır tabakaya kıyasla daha çabuk bir şekilde kalınlaşmakta olduğu gösterilebilir. Nitekim bu iki bağıntıya göre:

$$\begin{array}{lll} \text{laminar halde} & \delta/x \sim R_x^{-1/2} & (\delta \sim x^{1/2}) \\ \text{türbülanslı halde} & \delta/x \sim R_x^{-1/5} & (\delta \sim x^{4/5}). \end{array}$$

Bu sonuç nispeten kabadır. Bir kere türbülanslı bir sınır tabaka için en iyi bir değişken gruplaması üzerine oturmayan bir hız profili kullanılmaktadır. İkinci olarak, yöntem geçişi ve levhanın başlangıcındaki laminar akım bölgesini tamamıyla ihmal etmektedir.

Bu yöntemle daha fazlasını yapmak mümkün değildir. Örneğin, basınç gradyanı içeren problemler çözülmek istenseydi  $dP/dx$  türevinin genel halleri için  $C_f(Re_\delta, dP/dx)$  şeklinde bilgiye ihtiyaç olacaktı. Ama, şayet bu fazla bilgi mevcut olsaydı, zaten bu analize de ihtiyaç olmayacaktı.

### Moses yöntemi

Türbülanslı sınır tabakalar için yukarıda izah edilenden daha kabiliyetli ve uygulanması daha basit bir integral yöntemi Moses (1969) tarafından geliştirilmiştir. Bu yöntem (2.15) momentum denkleminin

$$\begin{aligned} \frac{U(y_1/\delta)}{U_e} \frac{d}{dx} \left[ R_\delta \int_0^{y_1/\delta} \frac{U}{U_e} d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] - \frac{1}{U_e} \frac{d}{dx} \left[ U_e R_\delta \int_0^{y_1/\delta} \left(\frac{U}{U_e}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \\ = \frac{\tau_w - \tau(y_1/\delta)}{\mu U_e} - \frac{(y_1/\delta) R_\delta}{U_e} \frac{dU_e}{dx} \end{aligned} \quad (7.44)$$

şeklindeki daha genelleştirilmiş bir halini kullanılmaktadır. Burada  $y_1/\delta$  büyüklüğü 0 ile 1.0 arasında herhangi bir değer alabilir.  $y_1/\delta = 1.0$  için (7.44) denklemi alışlagelen momentum integral denklemine dönüşür.

$y_1/\delta$  nın başka değerleri için, ayrı, ilave denklemler elde edilir. Daha sonra  $y_1 < \delta$  olmak üzere  $dx : y_1 : 1$  boyutlarındaki bir kontrol hacmine kütle ve momentumun korunumu ilkeleri uygulanacaktır (ki daha önce  $H \geq \delta$  olmak üzere  $dx : H : 1$  boyutlarındaki bir kontrol hacmi kullanılmıştı). Sonuçlar arasındaki en büyük farklılık, daha önceki incelemelerde  $y=H$  da kayma sıfır olup denklemlerde gözüküyor iken buradaki incelemelerde  $y=y_1$  de kaymanın gözükmesidir. Moses  $y_1/\delta = 1.0$  ve  $y_1/\delta = 0.3$  kullanarak iki denklem elde etmiştir. İkinci değer kabaca tabaka boyunca momentum kaybının ikiye bölünmesine karşılık gelmektedir.

Gereken hız profili için Moses iz kanununun yaklaşık bir biçimini kullanmıştır.  $W(y/\delta)$  büyüklüğünün tanımıyla birlikte

$$\frac{U/u_* - \left[ \frac{1}{K} \ln(yu_*/\nu) + C \right]}{U_e/u_* - \left[ \frac{1}{K} \ln(\delta u_*/\nu) + C \right]} \equiv \frac{1}{2} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (7.8)$$

denklemini ve  $u_*/U_e = \sqrt{C_f/2}$  büyüklüğünü kullanarak

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{K} \ln\left(\frac{yu_*}{\nu}\right) + C = \frac{\Pi}{K} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (7.9)$$

denklemini yeniden yazmış ve iz fonksiyonun

$$W\left(\frac{y}{\delta}\right) = 2 \left[ 3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right] \quad (7.45)$$

şeklinde yaklaşık biçimini elde etmiş, sonuçta

$$\frac{U}{U_e} \cong 1 + \frac{\sqrt{C_f/2}}{K} \ln\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{2\Pi}{K} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \left[ 1 - \frac{1}{2} W\left(\frac{y}{\delta}\right) \right] \quad (7.46)$$

İfadesine erişmiştir.

Moses, laminer alt tabaka için bir başka polinom kullanmış, yüksek Reynolds sayısındaki akımlarda integral yöntem için bu ince tabaka içerisinde profilin seçiminin önemli olmadığını belirtmiştir. Bu seçim integrallerin değerini önemli ölçüde etkilememektedir. (7.41) denkleminde verildiği gibi  $U/U_e = f(y/\delta)$  almak yerine böyle birleşik bir hız profili almak daha doğrudur

Türbülanslı kayma modeli olarak

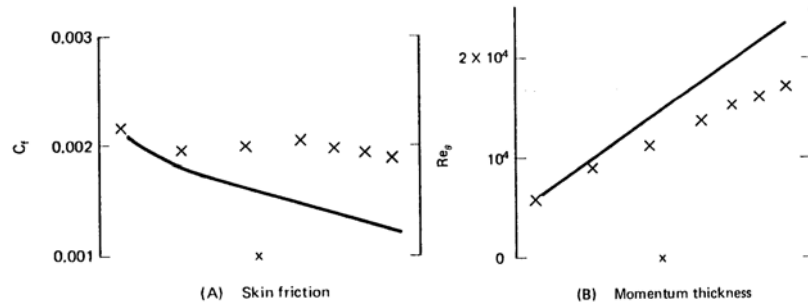
$$\tau_T \equiv -\rho \overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial U}{\partial y} \quad (7.36)$$

edi-viskozitesi modeli alınmıştır. (7.44) denkleminde sadece  $\tau(y_1/\delta)$  büyüklüğü geçtiğinden bu integral yöntemi için türbülanslı kaymanın bir tek  $y/\delta = y_1/\delta$  noktasında modellenmesi gereklidir. Bu husus yöntemin kuvvetli tarafıdır. Zira türbülans modellemesi sadece gerçekte problemin çıktısı olan yüzey sürtünmesini basitçe almak yerine çok daha temel bir seviyede yapılmıştır. Moses, Coles (1962) tarafından verilen bir kısım veriye eğri uydurarak elde ettiği

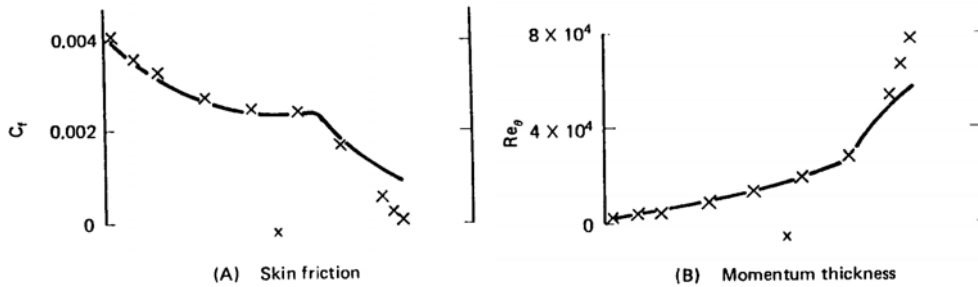
$$\frac{\mu_T + \mu}{\rho U_e \theta} \Big|_{y_1/\delta} = 0.0225 + \frac{125}{Re_\delta} \quad (7.47)$$

şeklinde tamamiyle ampirik bir edi-viskozitesi modeli kullanmıştır. Bütün bunlarla birlikte sistem (7.44) denkleminin  $y_1/\delta = 1.0$  ve  $y_1/\delta = 0.3$  de (7.46) hız profiliyle birlikte değerlendirilmesi sonucu elde edilen iki adi diferansiyel denklemden oluşmaktadır. Denklem sisteminin iki bilinmeyeni olup bunlar  $Re_\delta$  ile ifade edilen  $\delta(x)$  ve  $C_f$  dir. Bu iki denklem adi-diferansiyel denklem çözümünde kullanılan herhangi bir sayısal yöntemle çözülebilir.

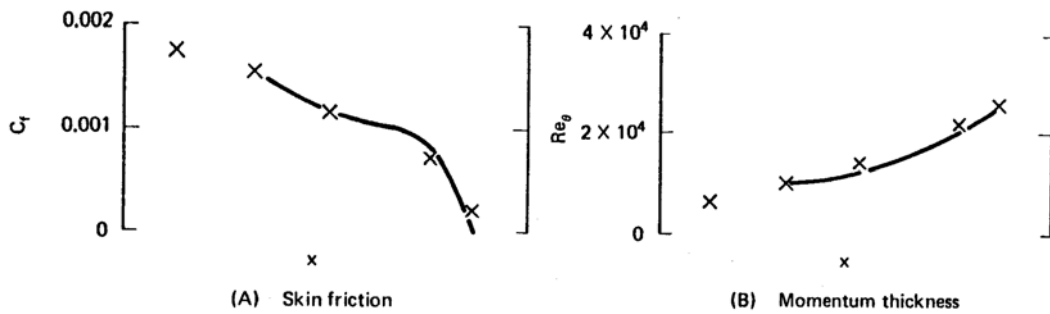
Moses (1969), yöntemini bazı deneysel haller için uygulamış, mevcut integral yöntemlerinden herhangi biri kadar uygun sonuçlar elde etmiştir. Genel olarak uyum ( $C_f$  ve  $\delta(x)$  gibi bütünsel büyüklükler için), en iyi diferansiyel yöntemlerle elde edilenler kadar iyidir. Çeşitli hesap yöntemlerinin performansını ortaya koyabilmek için, giderek artan karmaşıklıkta üç adet ters-basınç-gradyantlı akım örnek olarak seçilmiştir. Yöntemlerin hepsi düz levha halinde (sıfır basınç gradyanı) iyi performans sergilemektedir. Olumlu basınç gradyanı halinde performans biraz daha iddiasızdır. Sözü edilen üç örnek halde (1) Clauser'ın (1956) daha önce belirtilen denge (equilibrium) hali, (2) Schubauer ve Klebanof'un (1950) klasik deneyi, (3) Newman'ın (1951) kanat profili ele alınmıştır. Bu üç akımla ilgili bilgiler de anlamsız hesaplamalara yol açmayacak ve veri ile karşılaştırmaya imkan verecek biçimde yeterince iyi bir şekilde dokümanite edilmiştir. Bu akımlar 1968 de Stanford'da gerçekleştirilen AFOSR-IFP konferansında (Kline ve arkadaşları, 1969) sınır tabaka hesaplama yöntemleri için test hali olarak seçilmiş en karmaşık akımlardan üçüdür. Moses'in (1969) hesaplamaları  $\theta(x)$  ve  $C_f(x)$  büyüklükleri için bu üç halde elde edilen veri ile Şekil 7.31-33 de karşılaştırılmıştır. Schubauer ve Klebanof ile Newman hallerinde ayrılmaya kadar uyum iyi iken, Clauser'ın denge hali için uyumun zayıf olduğu görülmektedir.



Şekil 7.31- Moses yönteminin Clauser'ın (1956) verileriyle karşılaştırması (Kline ve arkadaşları, 1969)



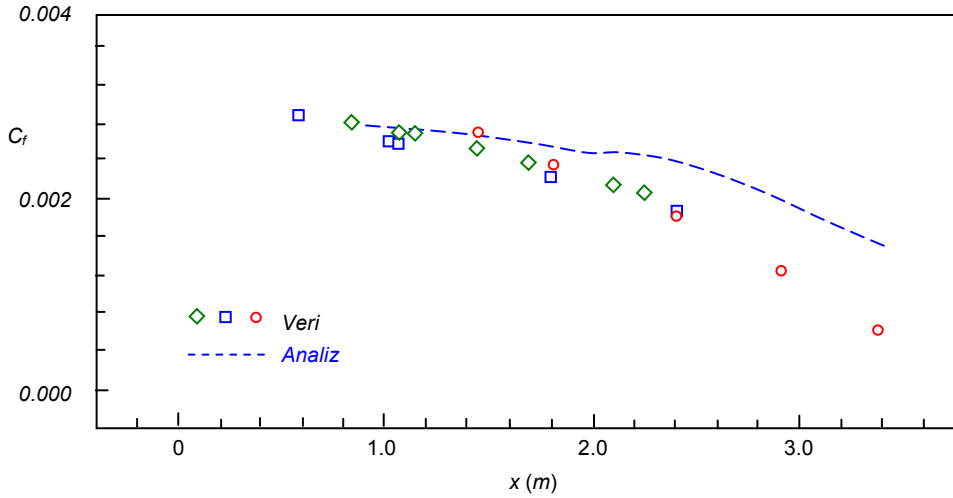
Şekil 7.32- Moses yönteminin Schubauer ve Klebanof'un (1950) verileriyle karşılaştırması (Kline ve arkadaşları, 1969)



Şekil 7.33- Moses yönteminin Newman'ın (1951) verileriyle karşılaştırması (Kline ve arkadaşları, 1969)

Çeşitli yöntem ve modellerin performansını göstermek için, 1981 de Stanford'da gerçekleştirilen bir başka konferanstaki (Kline ve arkadaşları, 1982) bazı haller daha ele

alınmıştır. Samuel ve Joubert (1974) tarafından düşük-hızda ters-basınç gradyantlı halde gerçekleştirilen deney sonuçlarıyla Moses yöntemi sonuçları Şekil 7.34 de karşılaştırılmış olup uyum genel olarak iyi gözükmemektedir.



Şekil 7.33- Moses yönteminin ters basınç gradyantlı akım için Samuel ve Joubert'in (1974) verileriyle karşılaştırması

Burada incelenen integral yöntemi laminer akım için daha ince izah edilen Thwaites-Walz integral yöntemiyle birlikte kullanılabilir. Komple akımı çözecek bir yöntem elde etmek için geçişsel bölgede de Dey ve Nararshima (1990) tarafından önerilen aralıklılık dağılımı alınabilir. Buradaki temel fikir  $\gamma$  aralıklılık faktörü olmak üzere geçişsel bölgede öteleme kalınlıkları için

$$(1-\gamma)\delta_{lam}^* + \gamma\delta_{turb}^*$$

şeklinde bir dağılım almaktır.

### Örnek 7.1- Türbülanslı sınır tabakada momentum integral yönteminin uygulanması

5 m uzunluğundaki bir düz levha  $U_\infty = 10.0 \text{ m/s}$  hızdaki akıma maruz olup düz levhanın bitiminden itibaren yer alan rampa  $U_e(x) = 15.0 - x \text{ m/s}$  şeklinde değişen bir dış akım yaratmaktadır. Akışkanın viskozitesini  $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  olarak bu yüzey boyunca  $x = 7.0 \text{ m}$  mesafesine kadar türbülanslı sınır tabakanın gelişimini inceleyiniz. Sınır tabaka ayrılır mı?

#### Çözüm:

Akımın ilk kısmı düz levha üzerinde ve basınç gradyantsız olup bu bölgede basit integral çözümü uygulanarak  $x=5$  de  $\delta$ ,  $\theta$  ve  $C_f$  büyüklükleri hesaplanabilir. Hesaplanan bu değerler yüzeyin kalan rampa kısmındaki hesaplar için başlangıç değerleri olarak kullanılacaktır.

Buna göre rampa başlangıcında  $C_f = 0.002665$  ve  $Re_\theta = 8336.3$  değerleri elde edilir. Hesaplamalar  $x=0.7 \text{ m}$  noktasına erişinceye kadar  $\Delta x = 0.10 \text{ m}$  aralıklarla 21 adımda gerçekleştirilmiştir.

Hesaplamalar Schetz tarafından verilen bir program ile gerçekleştirilmiş olup elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

$X$	$U_e$	$C_f$	$\delta$	$\theta$	$Re_\delta$	$H$
5.0	10.0	0.00266	0.0771	0.00834	8336.4	1.337
5.1	9.9	0.00260	0.0792	0.00876	8667.5	1.347
5.2	9.8	0.00253	0.0814	0.00919	9004.7	1.356
5.3	9.7	0.00247	0.0837	0.00964	9348.9	1.365
5.4	9.6	0.00241	0.0862	0.01010	9700.5	1.374
5.5	9.5	0.00235	0.0888	0.01059	10060.3	1.383
5.6	9.4	0.00230	0.0916	0.01109	10429.0	1.392
5.7	9.3	0.00224	0.0945	0.01162	10807.2	1.401
5.8	9.2	0.00219	0.0975	0.01217	11195.7	1.410
5.9	9.1	0.00213	0.1007	0.01274	11595.2	1.419
6.0	9.0	0.00208	0.1040	0.01334	12006.6	1.428
6.1	8.9	0.00203	0.1075	0.01397	12430.7	1.438
6.2	8.8	0.00198	0.1111	0.01462	12868.5	1.448
6.3	8.7	0.00192	0.1149	0.01531	13320.9	1.458
6.4	8.6	0.00187	0.1188	0.01603	13789.1	1.469
6.5	8.5	0.00182	0.1229	0.01679	14274.1	1.481
6.6	8.4	0.00176	0.1272	0.01759	14777.3	1.493
6.7	8.3	0.00171	0.1317	0.01843	15299.9	1.506
6.8	8.2	0.00165	0.1364	0.01932	15843.5	1.519
6.9	8.1	0.00160	0.1413	0.02026	16409.8	1.534
7.0	8.0	0.00154	0.1465	0.02125	17000.4	1.550

Görüldüğü gibi sınır tabaka kalınlığı giderek artmaktadır. Nispeten kuvvetli sayılabilecek bu ters basınç gradyanı altında sınır tabaka  $x=7m$  de ayrılmamakta ( $C_f > 0$ ), ancak sınır tabaka kalınlığı neredeyse ikiye katlanmakta ve sürtünme katsayısı da %40 azalmaktadır.