

BÖLÜM 5

SIKIŞTIRILABİLİR LAMİNER SINIR TABAKALAR

- 5.1- Giriş
- 5.2- Adyabatik duvar sıcaklığı
- 5.3- Referans sıcak yöntemi
- 5.4- $Pr=1$ özel hali
- 5.5- Birden farklı Prandtl sayıları için gerikazanım faktörü
- 5.6- Sıkıştırılabilme dönüşümleri:
 - 5.6.1- Howarth-Dorodnitzin dönüşümü
 - 5.6.2- Crocco dönüşümü
 - 5.6.3- Levy-Lees dönüşümü
- 5.7- Sıkıştırılabilir akım için integral yöntemi
- 5.8- Düz levha üzerindeki sıkıştırılabilir akım için tam çözümler

BÖLÜM 5

SIKIŞTIRILABİLİR LAMİNER SINIR TABAKALAR

5.1. Giriş

Düzlemsel veya aksel simetrik bir cisim üzerindeki daimi, sıkıştırılabilir laminar akım için süreklilik, momentum ve enerji denklemlerinin daimi haldeki biçimleri kullanılacaktır.

$$\rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial(\rho u r_o^j)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r_o^j)}{\partial y} = 0$$

$$\rho C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x}$$

Birden fazla akışkanın karışımı söz konusu olduğu durumlarda enerji denkleminin entalpiyi içeren biçiminin kullanılması daha uygun olur.

Yukarıdaki denklem sistemine bakarak sıkıştırılabilmenin süreklilik denkleminde doğrudan etkin olduğu, buna karşılık momentum ve enerji denklemlerinde değişken bir katsayı olarak daha pasif kaldığı söylenebilir.

Sıkıştırılabilmenin ikinci etkisi akımda μ ve k katsayılarının sabit kalması koşullarını aşacak derecede büyük sıcaklık değişimleri yaratmasıdır. Burada ilgi daha ziyade viskozite üzerinde olup ısı iletim katsayısı da Prandtl sayısı yardımıyla

$$k = \frac{\mu c_p}{Pr}$$

şeklinde tanımlanacaktır. Çoğu gazlar için geniş bir sıcaklık aralığında Prandtl sayısının neredeyse sabit kaldığı hatırlanır.

Çoğu zaman enerji denkleminin entalpiyi içeren biçiminin kullanılması tercih edilir. Bu bakımdan entalpi için $h = C_p T$ tanımı hatırlanarak enerji denkleminin sağındaki ilk terim (ısı transferi terimi)

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{c_p} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

şeklinde düzenlenebilir.

Bu bilgiler ışığında en basit hallerde denilebilir ki, laminar sınır tabaka problemlerinde sıkıştırılabilmenin yarattığı ilave sorunlar daha ziyade ρ ve μ değişkenleri ile Pr sayısının değeri üzerinde yoğunlaşmaktadır. Viskozitenin $\mu = \mu(T)$ şeklinde sıcaklıkla değiştiği bilinmektedir. Hal denklemi de $\rho = \rho(T, p)$ bağıntısını vermektedir. Bununla birlikte sınır tabaka içinde dikey doğrultuda basınç değişmediğinden gaz karışımı içermeyen problemlerde yoğunluk değişimlerinin sadece sıcaklık değişimlerinden kaynaklandığı dikkate alınacaktır.

5.2. Adyabatik duvar sıcaklığı

Isı transferiyle ilgili

$$q_w = \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = h(T_w - T_e) \quad \text{Newton soğutma kanunu}$$

hatırlanırsa adyabatik şartlarda (ısı transferi yok) duvar sıcaklığının $T_w = T_e$ şeklinde dış akım sıcaklığına eşit olacağı görülmektedir. Ancak bu bağıntı sadece düşük sıcaklıklarda geçerlidir. Sıkıştırılabilmenin önemli olduğu yüksek hızlarda yeni bir olay görülür. Yüksek hızlı akım önemli miktarda kinetik enerjiye sahip olup bu kinetik enerji sınır tabaka içinde sürtünme nedeniyle ısı şekline dönüşür (dissipasyon). Bu olay enerji denklemindeki $\mu(\partial u/\partial y)^2$ terimi ile temsil edilmektedir. Akımdaki kinetik enerji basit olarak durma sıcaklığı ile statik sıcaklık arasındaki farka eşittir:

$$T_{kinetik} = T_t - T = \frac{V_2^2}{2c_p}$$

Şayet duvar adyabatikse daimi denge durumunda duvarın erişeceği sıcaklık kinetik enerjinin ne kadarının duvar üzerinde geriye dönüşeceğine bağlı olacaktır. Bu büyüklük *r geri-kazanım faktörü* olarak adlandırılır ve

$$T_{aw} = T_e + r \frac{U_e^2}{2c_p}$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki *r* faktörünün değeri gazlar için genellikle birden küçük ama bire yakındır. Yüksek hızlı akımda film katsayısı

$$q_w = h(T_w - T_{aw})$$

bağıntısına dayandırılmalıdır.

5.3. Referans sıcak yöntemi

T_e ve T_w sıcaklıkları arasında öyle bir sıcaklık değeri bulunabilir mi ki akışkanın bu sıcaklıktaki yoğunluğuna ve fiziksel özelliklerine sahip sabit-yoğunluklu ve sabit-özellikli bir akım, değişken-yoğunluklu ve değişken özellikli mevcut gerçek akımı uygun bir biçimde temsil etsin. En azından gazlar için böyle bir yaklaşım yapmak mümkündür ve bu yaklaşık akımdaki sıcaklığa "*referans sıcaklık*" adı verilir. Böyle bir sıcaklık değeri Eckert (1956) tarafından

$$T^* = T_e + 0.5(T_w - T_e) + 0.22(T_{aw} - T_e)$$

bağıntısıyla verilmiştir. Düşük hızlı olmasına karşılık büyük sıcaklık farkları içeren akımlarda bu bağıntının sonuncu terimi yok olmaktadır. Sıvılar için aynı yüksek hassasiyette bir bağıntı geliştirilememiştir.

Bu kavram kullanılarak daha önce Bölüm 2 ve Bölüm 4 de uygulanan yöntemler sıkıştırılabilir akımlara taşınabilir. Örneğin Strouhal sayısı için daha önce bulunan bağıntı

$$St^* = 0.332(Pr^*)^{-2/3} (Re^*)^{-1/2}$$

şeklinde yazılabilir. Buradaki (*) işareti bütün fiziksel özelliklerin $T=T^*$ sıcaklığında değerlendirildiği anlamına gelmektedir. Bu bağıntı düz levha üzerinde film katsayısının hesaplanmasında kullanılabilir.

5.4. $Pr=1$ özel hali

Düşük hızlı akımlarda $Pr=1$ özel halinde hız ve sıcaklık için boyutsuz profiller elde edildiği hatırlanır. Aynı durum yüksek hızlı akımlar için de dikkate alınabilir.

Her ne kadar bu özel durum gerçekte pek görülmüyor ise de çoğu gaz için $Pr \sim 0.7$ olup, bu değer bire yakındır. Dolayısıyla böyle bir inceleme gayet faydalı bilgiler verecektir.

Bu amaçla enerji denkleminin durma entalpisi $(h+u^2/2)$ cinsinden daha önce

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(h + \frac{u^2}{2} \right) \right] = -\frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial(\tau u)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

şeklinde yazılan ifadesi daimi akım halinde, ısı transferi terimi Pr sayısı ve entalpi cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilerek

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right)$$

ve kayma gerilmesi de

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

şeklinde modellenerek

$$\left[\left(\rho u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(h + \frac{u^2}{2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h}{Pr} + \frac{u^2}{2} \right) \right]$$

şeklinde düzenlenebilir. $Pr=1$ için bu ifade, durma entalpisi

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2}$$

olmak üzere

$$\rho u \frac{\partial h_0}{\partial x} + v \frac{\partial h_0}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial h_0}{\partial y} \right)$$

şekline gelir ki bu denklemin bir çözümü

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2} = sb$$

olarak elde edilir. Buradaki sabitin değeri bir sınır şartından, örneğin duvar üzerinde $u=0$ alınarak bulunabilir. Basit bir hal olarak izole duvar hali ele alınırsa, bu halde ısı akısı olmayıp

$$h + \frac{u^2}{2} = h_{aw} = sb = h_e + \frac{u_e^2}{2}$$

ve c_p nin sabit olduğu hallerde

$$T + \frac{u^2}{2c_p} = T_{aw} = sb = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p}$$

sonucu elde edilir. Bu bağıntı Busemann (1931) enerji integrali olarak bilinir.

Yukarıdaki analiz Crocco (1932) tarafından genelleştirilmiştir. Bunun için yine ısı terimi entalpi ve Pr sayısı cinsinden ifade edilerek ve kayma gerilmesi de $(\mu \partial u / \partial y)$ şeklinde modellenerek enerji denklemi yazılırsa:

$$\rho \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$h=h(u)$ genel kabulü ile bu denklem

$$\rho \frac{\partial h}{\partial u} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

şekline gelir. Veya sağdaki ilk terim

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{dh}{du} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{dh}{du} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Pr} \frac{d^2 h}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

şeklinde açılarak

$$\rho \frac{dh}{du} \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{dh}{du} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Pr} \frac{d^2 h}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

elde edilir. Ayrıca momentum denklemi daimi halde (dh/du) ile çarpılıp

$$\frac{dh}{du} \cdot \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = - \frac{dh}{du} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dh}{du} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

elde edilen bu denklem enerji denklemiyle karşılaştırılarak

$$- \frac{dh}{du} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{dh}{du} \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{dh}{du} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\mu}{Pr} \frac{d^2 h}{du^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$$- \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{dh}{du} + u \right) + \frac{dh}{du} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = \frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left[\frac{d^2 h}{du^2} + Pr \right]$$

bulunur. Bu denklem $Pr=1$ için

$$-\frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{dh}{du} + u \right) = \frac{\mu}{Pr} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \left[\frac{d^2 h}{du^2} + 1 \right]$$

şekline indirgenir. Bu denklemin de basit iki çözümü bulunabilir.

İlk çözüm

$$\frac{dh}{du} + u = 0$$

olması halinde elde edilir. Bu halde denklem

$$\frac{d^2 h}{du^2} + 1 = 0$$

şeklini alır ki integre edilerek

$$h = -\frac{u^2}{2} + sb$$

elde edilir. Bu sonuç daha önce elde edilenle aynıdır. Duvar üzerinde

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_w = -u_w \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = 0$$

olup, bu koşul duvar üzerinde ısı transferi olmadığını gösterir. Zira

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_w = \left. \frac{\partial (c_p T)}{\partial y} \right|_w = c_p \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_w = -\frac{c_p}{k} q_w$$

Bu sonucun dp/dx gradyanının keyfi değerleri için geçerli olması önemlidir.

Denklemin ikinci çözümü $dp/dx=0$ için elde edilir. Bu halde denklem yine

$$\frac{d^2 h}{du^2} + 1 = 0$$

şekline gelir. Ancak bu durumda $dh/du + 1 = 0$ eşitliği olmayıp, bu şartlarda integral alınarak

$$\frac{dh}{du} = -u + C_1 \quad \rightarrow \quad h = -\frac{u^2}{2} + C_1 u + C_2$$

ve buradaki sabitler sınır tabaka kenarındaki ve duvar üzerindeki

$$h(U_e) = h_e \quad ; \quad h(0) = h_w$$

koşullarıyla hesaplanarak

$$h(u) = -\frac{u^2}{2} + \left(h_e + \frac{U_e^2}{2} - h_w \right) \frac{u}{U_e} + h_w$$

elde edilir. $c_p=sb$ halinde bu bağıntı sıcaklık cinsinden

$$T = -\frac{u^2}{2c_p} + \left(T_e + \frac{U_e^2}{2c_p} - T_w \right) \frac{u}{U_e} + T_w$$

bağıntısını verir.

Antalpi için bulunan bağıntıdan türev alınarak ve duvar üzerinde değerlendirilerek

$$\left. \frac{\partial h}{\partial y} \right|_w = -u_w \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w + \left(\frac{h_e + U_e^2 / 2 - h_w}{U_e} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w = \left(\frac{h_e + U_e^2 / 2 - h_w}{U_e} \right) \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_w$$

elde edilir ki görüldüğü gibi sonuç sıfır değildir. Yani bu halde basınç gradyanı sıfır olmak koşulu ile duvar üzerinde ısı transferi söz konusudur.

5.5- Birden farklı Prandtl sayıları için geri-kazanım faktörü

“Levha termometresi” problemi olarak adlandırılan, yüksek hızlı akışkan akımına maruz düzlemsel levha üzerindeki adyabatik akım problemi incelenerek faydalı sonuçlar elde edilebilir. Levha içerisine gömülü bir termokupl ile ölçülecek sıcaklık, tanım gereği, adyabatik duvar sıcaklığı, T_{aw} , olacaktır. Bu sıcaklık, Pr sayısı ve T_{te} bilindiği takdirde geri-kazanım faktörü için $r=r(Pr)$ bağıntısı bulunabilir.

Pohlhausen (1921a) bu problemi, sabit-özellik kabulü altında, ancak enerji denkleminde sürtünme kaynaklı ısı terimi, $\mu(\partial u/\partial y)^2$, dahil olmak üzere, veya önemli bir geri-kazanım olayı olmamak üzere incelemiştir. Daimi halde ve $dp/dx=0$ olmak üzere enerji denklemini

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{d^2 T}{dy^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\nu}{c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} y = 0, x \geq 0; & \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \\ y \rightarrow \infty, \in x & \quad T(x, y) \rightarrow T_e \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Boyutsuz bir sıcaklık değişkeni

$$\Theta_r \equiv \frac{T - T_e}{U_e^2 / (2c_p)}$$

şeklinde tanımlanarak ve hız alanı için daha önce verilen η değişkeni kullanılarak enerji denklemini

$$\Theta_r'' + Pr \cdot f \Theta_r' + \frac{Pr}{2} (f''')^2 = 0$$

ve sınır şartları

$$\Theta_r'(0) = 0; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} \Theta_r(\eta) = 0$$

şekline gelir. Bu denklemin çözümü sonucunda geri-kazanım faktörü için

$$r = \frac{Pr}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(-Pr \int_0^{\eta} f d\eta\right) \left[\int_0^{\eta} (f''')^2 \exp\left(Pr \int_0^{\eta} f d\eta\right) d\eta \right] d\eta$$

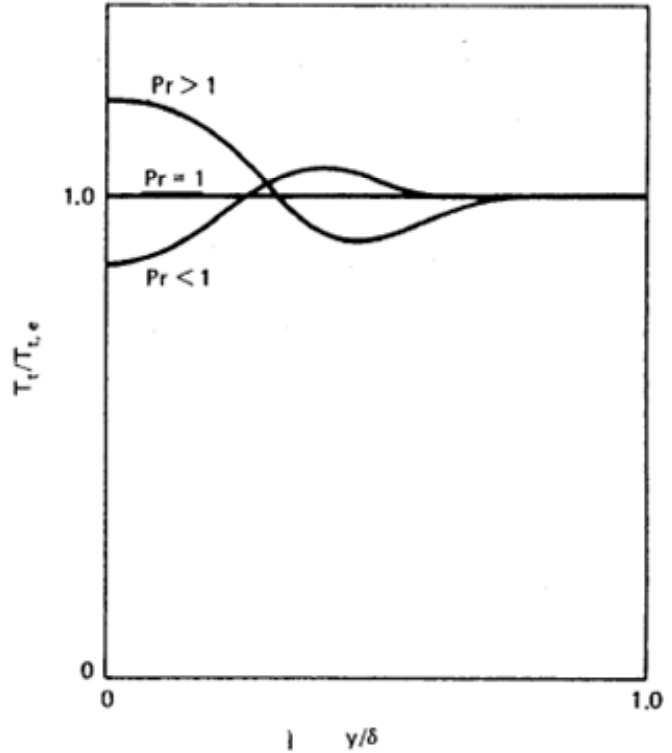
bağıntısı ve $0.5 \leq Pr \leq 5.0$ halinde

$$r \approx \sqrt{Pr}$$

elde edilir. Bu sonuç buradaki basit akım probleminden daha genel koşullarda geçerli bulunmuş olmakla birlikte İkinci Dünya Savaşı yıllarında gizli bilgi olarak nitelendirilmiştir.

Adyabatik bir duvar üzerindeki sınır tabakada $Pr > 1$, $Pr = 1$ ve $Pr < 1$ için tipik toplam sıcaklık profilleri şekilde gösterilmektedir.

Önceki paragrafta $Pr = 1$ için $T_t = sb = T_{te}$ olduğu görülmüştü. $Pr < 1$ için r geri-kazanım faktörü birden küçüktür. Bunun sonucu olarak $T_{aw} = T(x, 0) = T_t(x, 0) < T_{te}$ olur. Akım adyabatik olduğundan sınır tabaka içindeki toplam termal enerji sabit kalmalıdır. Dolayısıyla şayet akımın bir bölgesinde $T_t < T_{te}$ ise bir başka bölgesinde, şekilde de gösterildiği gibi, $T_t > T_{te}$ olmalıdır. Bu görünüm $T_{aw} > T_{te}$ olduğu $Pr > 1$ halinde tam tersine dönmektedir. Bütün bunlar Prandtl sayısının momentum ve termal enerji difüzyon katsayılarının oranı olması gerçeğinin bir sonucudur. Enerjinin bir viskoz bölge içindeki bu yeniden dağılımı bir girdap veya ayrılma kabarcığı içerisinde olduğu gibi viskoz etkilerin çok kuvvetli olması halinde dikkate değer sonuçlar üretmektedir.



Şekil- Yüksek-hızlı sınır tabakada sıcaklık profilleri

5.6- Sıkıştırılabilir dönüşümleri:

Hareket denklemlerinin sıkıştırılabilir (değişken-yoğunluklu), değişken-özellikli akımlar için artan karmaşıklığı karşısında doğal olarak sabit-yoğunluklu, sabit-özellikli akımlara ait çözüm yollarından yararlanılması düşünülmüştür. Bir çözüm yolu sıkıştırılabilir sınır tabaka probleminin bir eşdeğer sıkıştırılmaz probleme dönüştürülmesidir. Böylece mevcut çözümler, orijinal sıkıştırılabilir problemin çözümünü verecek biçimde geriye dönüştürülebilir.

5.6.1- Howarth-Dorodnitzin dönüşümü

Sıkıştırılabilirlikle ilgili ilk dönüşüm Howrth (1948) ve Dorodnitsyn (1942) tarafından birbirinden bağımsız olarak geliştirilmiştir. Dönüşümdeki temel fikir dikey yöndeki y koordinatının, yoğunluğun bir ağırlık faktörü olarak kullanıldığı

$$Y = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy'$$

şeklindeki bir bağıntı ile dönüştürülmesine dayanmaktadır. Akım doğrultusundaki x koordinatında herhangi bir değişiklik önerilmemektedir. Bu dönüşümle birlikte hız bileşenleri sıkıştırılabilir haldeki akım fonksiyonu cinsinden

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\rho_e}{\rho} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} + u \left(\frac{\partial Y}{\partial x} \right)_y \right]$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu bağıntılar, düz levha üzerindeki basınç gradyantsız ($dp/dx=0$) daimi akım için momentum denkleminde kullanılarak

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \mu}{\rho_e^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)$$

elde edilir. Bu denklem daha önce (x, y) düzleminde sabit—yoğunluklu, sabit—özellikli akımda yer alan düz levha için elde edilen

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}$$

denkleminde çok benzerdir. Bu iki denklem, $\rho \mu = sb = \rho_e \mu_e$ halinde benzerlikten öteye özdeş olmaktadır ki bu durumda Blasius çözümü (x, Y) düzleminde uygulanabilir.

Elde edilen çözümün ters yönde bir dönüşümle gerçek akım düzleminde aktarılması için

$$y = \int_0^Y \frac{\rho_e}{\rho} dY'$$

şeklinde bir integralin hesaplanması, bunun için de $\rho(x, Y)$ nin bilinmesi gerekir. Bu bilgi genel olarak enerji denkleminin (x, Y) düzleminde $T(x, Y)$ yi verecek biçimde bir çözümünden gelmelidir. Gerekli olmamakla birlikte $Pr=1$ halinde adyabatik duvar için

$$T + \frac{u^2}{2c_p} = T_{aw} = sb = T_e + \frac{u_e^2}{2c_p} \quad \text{Crocco integrali,}$$

veya

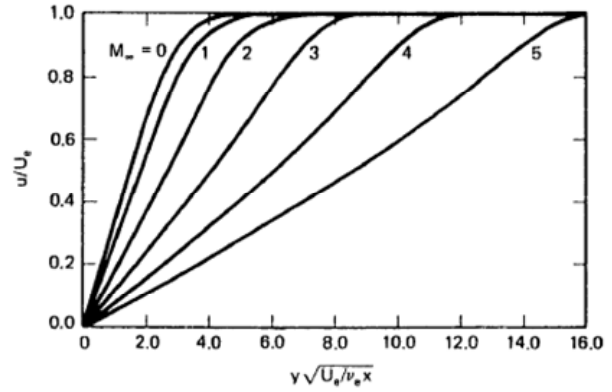
$$T = -\frac{u^2}{2c_p} + \left(T_e + \frac{U_e^2}{2c_p} - T_w \right) \frac{u}{U_e} + T_w$$

denkleminin kullanılmasına imkan verecek ilave kabuller yapılabilir. Bu işlemler $T(x, Y)$ yi bilinen $u(x, Y)$ değerleri için doğrudan verecektir.

Adyabatik duvar halinde bazı çözümler şekilde gösterilmiştir.

Duvar civarındaki (küçük y) mevcut yüksek sıcaklık ve dolayısıyla düşük yoğunluk nedeniyle yüksek Mach sayılarında Blasius profilinin nispeten lineer olan iç kısmının genişlediği belirtilmelidir.

Sınır tabaka dışındaki akım ses-üstü olsa bile, duvar üzerinde hızın sıfır olması gerektiğinden, duvar yakınlığında akımın ses-altı olacağı açıktır. Adyabatik halde duvar yakınlığında sıcaklık ve dolayısıyla ses hızı büyük olacağından bu bölge geniş olabilir. Örneğin $M_e = 4$ için $u/U_e \approx 0.4$ olduğu $y/\delta \approx 0.4$ noktasına kadar akım hızı ses-altındadır. Bu husus şok-sınır tabaka etkileşimi açısından önemlidir.



Şekil-İzole düzlemsel levha üzerindeki laminar sınır tabakada hız profilleri ($Pr=1$, viskozite sıcaklıkla orantılı)

5.6.2- Crocco dönüşümü

Bir başka sıkıştırılabilir dönüşümü Crocco (1946) tarafından geliştirilmiştir. Burada viskoz gerilme ($\tau = \mu \partial u / \partial y$) ve statik entalpi (h) bağımlı değişkenler olarak, x ve u bağımsız değişkenler olarak alınmıştır. Bu, garip görünen değişken dönüşümlerinin alınmasının ana nedeni momentum denkleminin $u \partial u / \partial x$ teriminden kaynaklanan non-lineerliğidir. Nitekim u 'nun bağımsız değişken olarak alınması bu non-lineerliği ortadan kaldırmaktadır.

Daimi haldeki

$$\text{süreklilik denklemi} \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0$$

$$\text{momentum denklemi} \quad \rho \left[u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\text{statik entalpi cinsinden enerji denklemi} \quad \rho \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right] = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

$\rho \mu = sb$ kabulü yapılarak

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho \mu}{\tau} \right) + \frac{\partial^2 \tau}{\partial u^2} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\mu}{\tau} \right)$$

ve

$$(1 - Pr) \frac{\partial h}{\partial u} \tau \frac{\partial \tau}{\partial u} + \tau^2 \left(\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + Pr \right) - Pr(\rho \mu) u \frac{\partial h}{\partial x} + \mu Pr \frac{\partial p}{\partial x} \left(\frac{\partial h}{\partial u} + u \right) = 0$$

şekline dönüştürülebilir. Bir çözüm elde edildikten sonra dönüşüm

$$y(x, u) = \int_0^u \frac{\mu(h) du'}{\tau(x, u')}$$

şeklinde ters yönde uygulanır.

Özel olarak $\partial p / \partial x = 0$ halinde momentum denklemi iyice basitleşir. Değişkenler

$$\tau(x, u) = X(x) \cdot U(u)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir.

5.6.3- Levy-Lees dönüşümü

En genel sıkıştırılabilir dönüşümü Levy-Lees (1956) dönüşümüdür. Burada

$$\bar{s} = \int_0^x \rho_e U_e \mu_e r_0^{2j} dx' \quad \bar{\eta} = \frac{\rho_e U_e r_0^j}{\sqrt{2\bar{s}}} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_e} dy'$$

şeklinde bir değişken dönüşümü yapılır. Burada r_0 ekstenel simetrik cisim hali için lokal gövde yarıçapıdır. Bu dönüşüm Howarth-Dorodnitsyn dönüşümünün elemanlarını, Blasius benzerlik değişkenini ve Mangler dönüşümünü içermektedir. Dolayısıyla sıkıştırılabilir benzerlik akımları için faydalıdır. Sayısal yöntemlerle incelenen, benzerlik göstermeyen sıkıştırılabilir akımlar için de sınır tabaka kalınlığını kontrol altında tutabilme açısından yararlıdır.

Sınır tabakadaki türevler için Levy-Lees dönüşümü şu sonuçları vermektedir:

$$\rho u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} + \rho v \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = \rho U_e \rho_e \mu_e r_0^{2j} \left[f' \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{s}} - f' f' \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{s}} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{\eta}} - \frac{f}{2\bar{s}} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{\eta}} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left[\cdot \right] \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \right\} = \frac{\rho U_e^2 r_0^{2j}}{2\bar{s}} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left\{ \rho \left[\cdot \right] \frac{\partial(\cdot)}{\partial \bar{\eta}} \right\}$$

Burada
$$u(\bar{s}, \bar{\eta}) = U_e(\bar{s}) \cdot f'(\bar{s}, \bar{\eta})$$

5.7- Sıkıştırılabilir akım için integral yöntemi

Thwaites-Walz yöntemi Cohen ve Reshotko (1956) tarafından sıkıştırılabilir akımlar için geliştirilmiştir. Cohen ve Reshotko $\rho\mu = sb$ ve $Pr=1$ alarak adyabatik duvar halini ve ısı transferi olması halini ayrı ayrı incelemişlerdir. Kısıtlayıcı kabuller yapılmış olmasına rağmen ortaya çıkan basit ve etkin yöntem yüksek hızlı laminar sınır tabakaların incelemesinde bütün analizcilerin tercihi olmuştur.

Sınır tabaka hesabının yapılabilmesi için önceden $U_e(x)$ in ve dolayısıyla $p_e(x)$ in bilinmesi gerekir ki bu $M_e(x)$ ve $T_e(x)$ in hesaplanmasında kullanılabilir. Yöntem, sonuçta Thwaites-Walz integralinin karşılığı olarak

$$\theta_i^2(X) = \frac{Av_0}{U_{e,i}^B(X)} \int_0^X U_{e,i}^{B-1}(X') dX'$$

bağıntısını vermektedir. Burada $A \approx 0.45$, B de $S_w = T_w/T_{t,e} - 1$ bağıntısıyla ısı transfer hızına bağlı bir büyüklüktür. Isı transferi olmaması ($T_w = T_{aw} = T_{t,e}$ ve $Pr=1$) halinde $S_w=0$ ve $B \approx 6$ dır. Cohen ve Reshotko S_w nin başka değerleri için B büyüklüğünün değerlerini bir eğri ile vermişlerdir.

Yukarıdaki integralde alt- indisli büyüklükler dönüştürülmüş, sıkıştırılmaz değişkenlere karşılık gelmektedir. Bunlar ve dönüştürülmüş x koordinatı

$$X = \int_0^x \frac{a_e p_e}{a_i p_i} dx'; \quad U_{e,i} = \frac{a_i}{a_e} U_e; \quad \theta = \frac{p_i a_e}{p_e a_i} \theta_i$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Değişken-yoğunluk halinde momentum ve öteleme kalınlıkları

$$\theta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{u_e}\right) \frac{\rho u}{\rho_e u_e} dy; \quad \delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Denklemdaki v_0 büyüklüğü $T_{i,e}$ ve $p_{i,e}$ şartlarındaki kinematik viskozitedir.

θ büyüklüğü hesaplandıktan sonra daha önce de olduğu gibi δ^* ve τ büyüklüklerini elde edebilmek için

$$\Lambda_i(X) = \frac{\theta_i^2(X)}{v_0} \frac{dU_{e,i}}{dX}$$

parametresinin hesaplanması gerekmektedir. Adyabatik duvar halinde sıkıştırılmaz hal için $H(\Lambda_i)$ ve $S(\Lambda_i)$ nin tablolarla verilen değerleri burada da kullanılabilir. Isı transferi hali için Cohen ve Reshotko bu büyüklükleri S_w 'nin fonksiyonu olarak tablolarla vermişlerdir. Deplasman kalınlığı ve yüzey gerilmesi

$$\frac{\delta^*}{\theta} = H(\Lambda_i) + \frac{\gamma-1}{2} M_e^2 [H(\Lambda_i) + I]$$

$$\tau_w = \frac{S(\Lambda_i) \mu_w U_e}{\theta} \left(\frac{T_e}{T_w} \right)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

Yöntem kolay uygulanabilmekte ve yeteri doğrulukta olup çabuk hesaplama amaçları için faydalıdır.

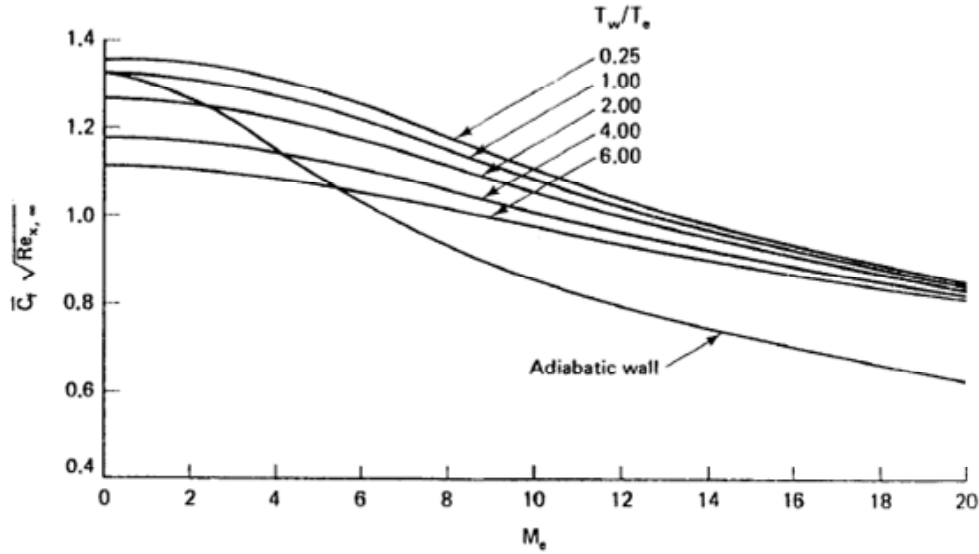
5.8- Düz levha üzerindeki sıkıştırılabilir akım için tam çözümler

Bir düzlemsel levha üzerindeki yüksek hızlı akım için gerçekçi bir viskozite kanunu kullanarak ve $Pr \neq 1$ olmak üzere ilk tam çözümler Crocco (1946) tarafından elde edilmiştir. Crocco kendi geliştirdiği dönüşümü uygulamış ve problemi eş-zamanlı olarak çözülecek iki adi diferansiyel denkleme indirgemmiştir. Başka basitleştirici kabuller yapmış ve problemi modern bilgisayarlar kullanmaksızın ardarda yaklaşımlar yöntemi (successive approximation method) ile çözmüştür.

Crocco yöntemini kullanarak düz levha üzerindeki akım için çok geniş hesaplamalar van Driest (1952) tarafından gerçekleştirilmiştir. Viskozite için Sutherland bağıntısını kullanmış ve $Pr=0.75$ alarak, adyabatik ve ısı transferi hallerinin (çeşitli T_w/T_e için) her ikisinde de, geniş bir Mach sayısı aralığında ($0 \leq M_e \leq 20$) inceleme yapmıştır.

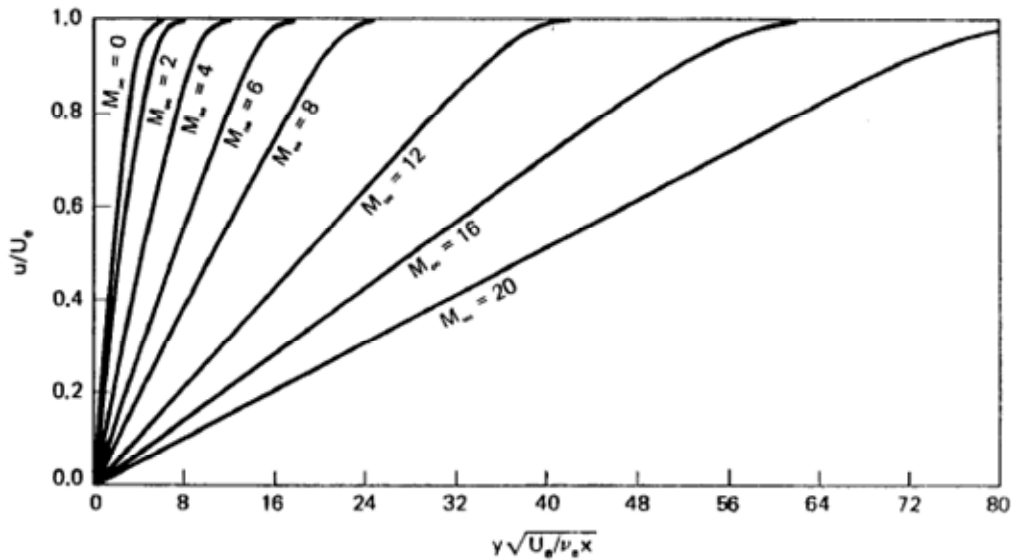
Yüksek Mach sayılarındaki sonuçları, mükemmel gaz kabulü ile elde edilmiş olmaları nedeniyle tam (exact) olarak görmek mümkün değildir. $M_e > 6$ dan itibaren dissosiasyon önemli olmaya başladığından bu kabul geçerli değildir. Bunlarla birlikte van Driest'in çalışması önemli parametrelerin geniş bir aralığı için yapılmış özenli bir çalışmadır.

Şekilde ortalama yüzey sürtünme katsayısının Mach sayısı ile değişimi görülmektedir.



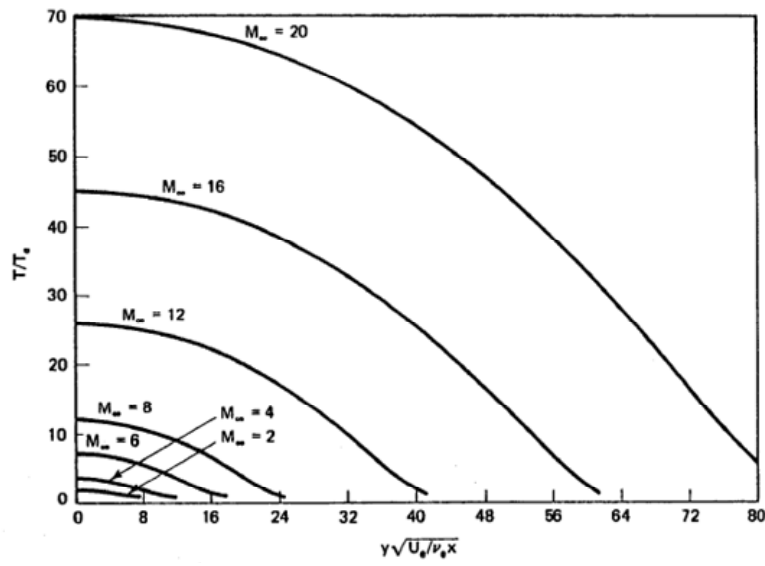
Küçük Mach sayılarında T_w/T_e oranının kuvvetli bir etkisi olduğu ve adyabatik hal ile ısı transferi hali arasında önemli bir farklılığın ortaya çıktığı belirtilmelidir.

Adyabatik hallerdeki hız profilleri de aşağıdaki şekilde sunulmuştur.

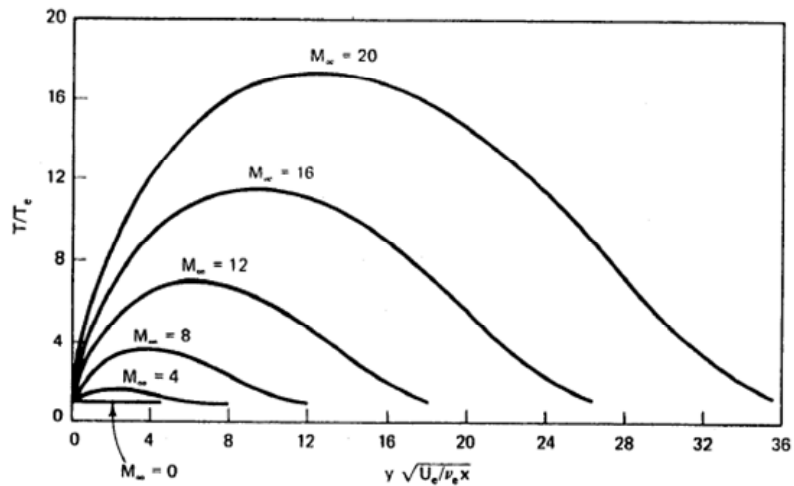
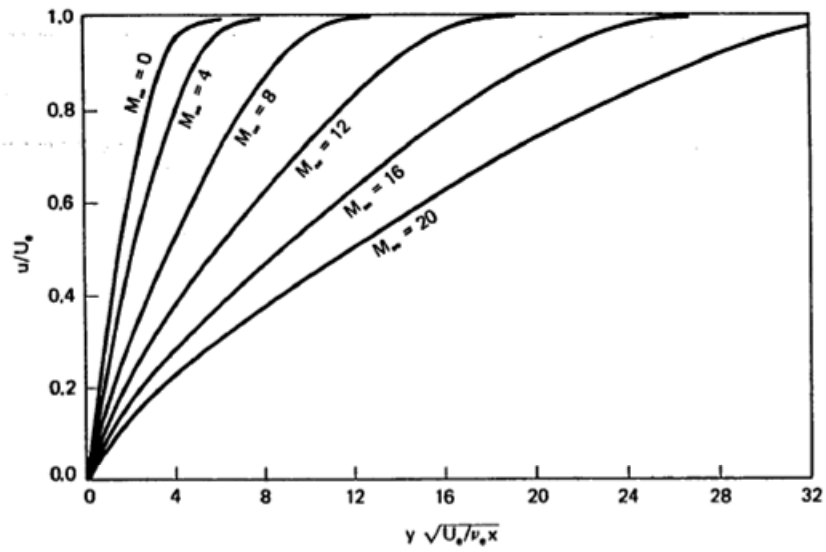


Bunlar genel olarak $Pr=1$ için daha önce verilen eğrilere benzemektedir. Yine Mach sayısı ile birlikte eğrilerin duvar civarındaki lineer kısmı genişlemekte ve boyutsuz sınır tabaka kalınlığı hızlı bir şekilde artmaktadır.

Aynı adyabatik haller için sıcaklık profilleri aşağıdaki şekilde yer almaktadır.

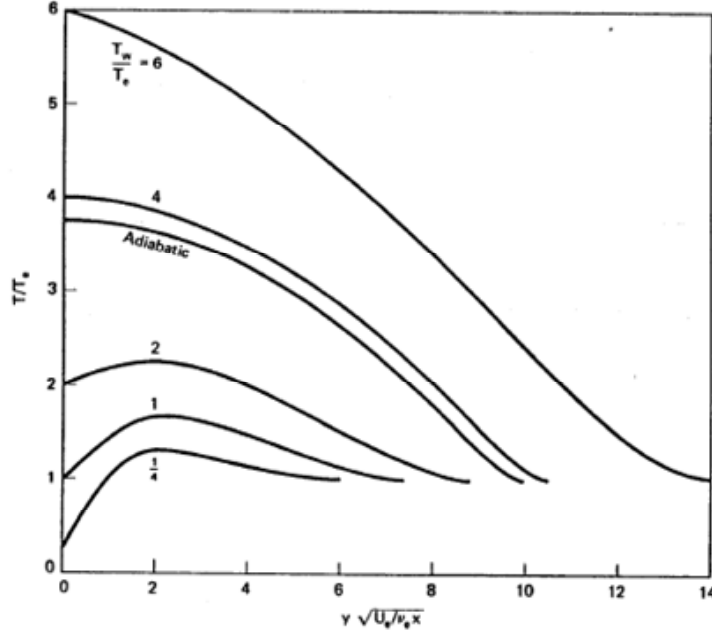


Duvardan ısı transferi halindeki hız ve sıcaklık profilleri $T_w/T_e=1.0$ hali için aşağıdaki şekillerde sunulmuştur.



Hız profilleri duvar civarında adyabatik haldekilere kıyasla daha fazla eğridir. Statik sıcaklık profilleri tabaka içerisinde, daha önce de tartışıldığı gibi zirve göstermektedir. Yüksek Mach sayılarında tabaka içerisinde çok büyük sıcaklıklara erişildiği açıktır.

Aşağıdaki şekilde $M_e=4.0$ için sıcaklık profilleri T_w/T_e 'nin fonksiyonu olarak yer almaktadır.



Çok sıcak duvarlar için $T_w \geq T_{aw}$ olup, zirve ortadan kalkmaktadır. Ancak uçuşta bu gibi şartlar pek olası değildir.