

### 5.3- Alan yöntemleri

#### 5.3.1- Sonlu fark yaklaşımı

Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz sınır tabaka için süreklilik ve momentum denklemleri

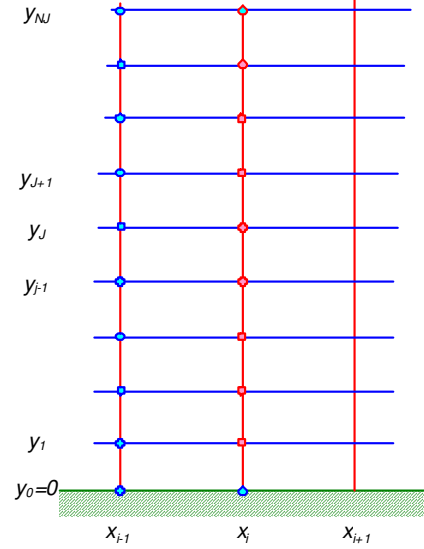
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

olarak yazılabilir.

Sınır tabakanın, şekilde gösterildiği gibi  $x_{i-1}$  ile belirtilen herhangi bir konumunda düzenli olarak seçilen  $y_j$  noktalarında hız bileşenleri bilindiği takdirde yukarıdaki denklemler sayısal bir şekilde integre edilerek  $x+\Delta x$  gibi bir sonraki istasyonda hız bileşenleri elde edilebilir.

Seçilen noktaların oluşturduğu yapıya ağ yapısı adı verilir. Şekildeki ağ yapısında mavi daireler hız bileşenlerinin bilindiği noktaları, kırmızı daireler ise hız bileşenlerinin bilinmediği, arandığı noktaları belirtmektedir.



Şekil - Sınır tabakada ağ yapısı

Sonlu fark yaklaşımında yukarıdaki denklemlerde geçen türevler Taylor açılımı yardımıyla yaklaşık formda ifade edilerek cebirsel denklemler haline getirilip çözülmeye çalışılır. Bir fonksiyonun herhangi bir nokta etrafında Taylor serisine açılış tarzına bağlı olmak üzere ileri, geri veya merkezi sonlu fark kavramları ortaya çıkar.

#### **Birinci türev için formülasyon**

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun  $(x+\Delta x)$  ve  $(x-\Delta x)$  noktalarındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntılardan birinci türev çekilerek

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

elde edilir. Bu ifadeler yukarıda gösterildiği gibi bir ağ sistemindeki ayırık noktalar dikkate alınarak indissel formda

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

*birinci mertebeden ileri fark formülasyonu*

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

*birinci mertebeden geri fark formülasyonu,*

Şeklinde yazılabilir. Ayrıca ileri ve geri yöndeki Taylor açılımları birbirinden çıkartılarak

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

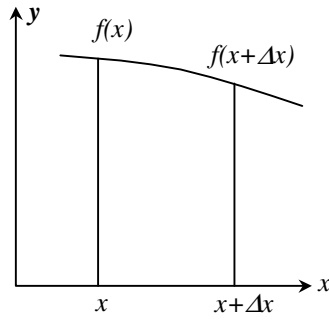
benzeri işlemler sonucu indissel formda

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

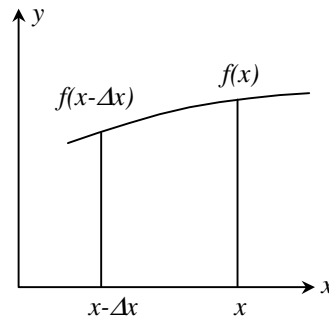
*merkezi fark formülasyonu*

elde edilir. İleri ve geri formülasyonlar birinci mertebeden bir hassasiyete sahipken merkezifark formülasyonunun *ikinci mertebeden* olduğu dikkati çekmektedir.

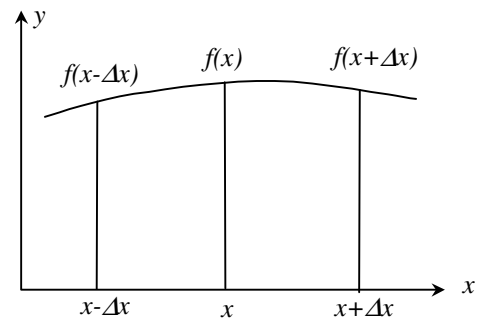
Birinci türev için yazılan formülasyonlarda hangi ağ noktalarının kullanıldığı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



a) İleri fark



b) Geri fark



c) Merkezi fark

### **İkinci türev için formülasyon**

Taylor serisinin  $(x+2\Delta x)$  noktasındaki açılımı

$$f(x + 2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

şeklinde yazılabilir. Daha önceki

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

Taylor açılımı 2 ile çarpılıp bu denklemden çıkartılırsa;

$$f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

ve buradan ikinci türev çekilirse,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

veya indissel formda yazılarak

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad \text{ileri fark formülü}$$

elde edilir. Benzeri şekilde  $(x-2\Delta x)$  noktasındaki

$$f(x-2\Delta x) = f(x) - (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

Taylor açılımından

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

açılımının iki katı çıkarılıp buradan ikinci türev çekilerek indissel formda

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad \text{ikinci türevin geri fark formülü}$$

elde edilir. Şayet

$$f(x+\Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

açılımları toplanarak buradan ikinci türev çekilirse indissel formda düzenlenerek

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad \text{ikinci türevin merkezi fark formülü}$$

elde edilir.

### **Sonlu fark denklemi**

Bir kısmi diferansiyel denklemde yer alan bütün türevler yukarıda gösterilen yöntemlerle ayrıklaştırılarak denklemin tamamı ayrık formda yazılır ve sayısal çözümü bu şekilde araştırılır.

Örnek olarak bir  $f = f(t, x, y)$  bağımlı değişkenine ait

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

denklemi ele alınırsa,  $t$  anında  $f$  fonksiyonunun bütün  $x, y$  konumlarındaki değerleri bilindiği takdirde zamana göre türevin ileri farkla hesaplanması uygun olur:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Burada  $n$  üst-indisi  $t$  anındaki bilinen değerleri,  $n+1$  üst-indisi  $t+\Delta t$  anında bilinmeyen (aranan) değerleri,  $i$  ve  $j$  alt-indisleri ise  $x$  ve  $y$  yönündeki konumları belirtmektedir.

Konuma göre türevlerin  $t_n$  anında veya  $t_{n+1}$  anında ayrıklaştırılmasına göre iki farklı sonlu fark denklemi elde edilebilir.  $t_n$  anında ayrıklaştırılma yapılırsa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2$$

Böylece örnek denklemin sonlu fark formülasyonu

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

şekline gelir.  $t_{n+1}$  anında ayrıklaştırılma yapıldığı takdirde ise

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

elde edilir.

Bu iki formülasyon arasındaki temel farklılık elde edilen ayrıklaştırılmış denklemlerdeki bilinmeyen sayısıdır. Önceki denklemde bir tek bilinmeyen var iken, son denklemde 5 bilinmeyen vardır.

Önceki denklem bütün ağ noktalarında kolaylıkla hesaplanır ve bu formülasyona "*açık (explicit) formülasyon*" adı verilir.

Buna karşılık son denklemin her bir ağ noktasında bağımsız olarak çözümü mümkün değildir. Bütün ağ noktalarında yazıldıktan sonra elde edilen denklem sisteminin eş zamanlı olarak çözülmesi gerekir. Bu nedenle bu formülasyona "*kapalı (implicit) formülasyon*" adı verilir.

### 5.3.2- Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için bir açık şema

Burada ele alınan yöntemde momentum denklemi akım doğrultusunda ilerleyen bir açık şema ile çözümlenerek  $u(x,y)$  hız bileşeni elde edilirken, süreklilik denklemi de  $v(x,y)$  hız bileşeninin elde edilmesinde kullanılacaktır (Wu yöntemi).

Bu amaçla sınır tabaka içerisinde şekilde gösterildiği gibi bir ayrıklaştırma yapıldığını,  $x_i$  istasyonunda hız bileşenlerinin bilindiğini ve  $x_{i+1}$  istasyonundaki hız bileşenlerinin arandığını varsayalım.

Sınır koşulları olarak **duvar üzerinde** hız bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olduğu, **sınır tabaka dışında** ise  $u$  hız bileşeninin  $U_e$  kenar hızına eşit olduğu bilinmektedir.

Momentum denklemindeki türevler

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad \frac{dU_e}{dx} = \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Türevler momentum denkleminde kullanılarak

$$u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} = U_{ei} \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x} + v \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki tek bilinmeyen  $u_{i+1,j}$  olup, bu büyüklük için

$$Q_{i,j} = \frac{v\Delta x}{u_{i,j}(\Delta y)^2}$$

olmak üzere düzenleme yapılarak

$$u_{i+1,j} = Q_{i,j} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - [2Q_{i,j} - 1] u_{i,j} - \frac{v_{i,j}}{u_{i,j}} \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} + \frac{U_{ei}}{u_{i,j}} \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x}$$

bulunur.

Süreklilik denklemindeki türevlerin  $x_i$  istasyonunda  $v$  hız bileşenini verecek biçimde ayrıştırılması gerekmektedir.  $v$  hızının duvar üzerindeki değeri sıfır olarak bilinmektedir. Bunu izleyen bir üst noktadaki  $v$  hızını bulabilmek için  $v$  nin  $y$  doğrultusundaki türevinin

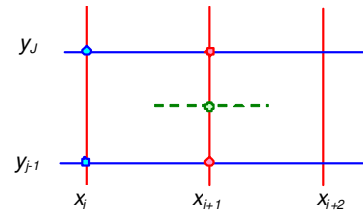
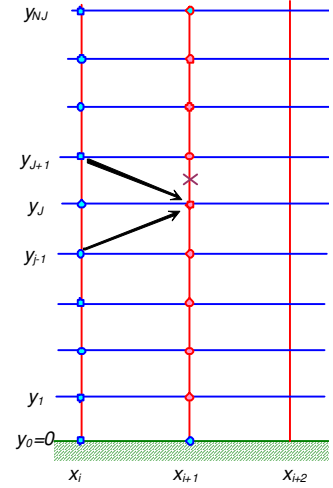
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y}$$

şeklinde yazılması uygun olur. Bu ifadenin  $y_i$  ve  $y_{i+1}$  arasındaki orta noktada (şekilde çarpı işaretiyle belirtilen nokta) yazılmış bir merkezi fark ifadesi olduğu varsayılabilir. Bu durumda süreklilik denkleminde yer alan  $x$  e göre türevin de buna uygun biçimde ayrıştırılması gerekir. Buna göre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right)$$

yazılarak süreklilik denklemi

$$\frac{v_{i+1,j} - v_{i+1,j-1}}{\Delta y} + \frac{1}{2} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right) = 0$$



Şekil - Süreklilik denkleminin ayrıştırılması

şekline gelir. Bu ifade bilinmeyen  $v_{i,j}$  için

$$v_{i+1,j} = v_{i+1,j-1} + \frac{\Delta y}{2\Delta x} (u_{i,j} + u_{i,j-1} - u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1})$$

şeklinde düzenlenebilir.

### **Cözümün kararlılığı**

Diferansiyel denklemlerin açık şema ile çözümünde en önemli konulardan birisi çözümün kararlılığı sorunudur. Burada söz konusu olan diferansiyel denklem non-linear olduğundan kararlılık analizi için Karplus(1958) tarafından geliştirilen "devre analogisi" yöntemi uygulanacaktır.

Bu analogi bir elektrik direnç ağındaki voltaj veya akım şiddeti dağılımını modelleyen

$$a(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) + b(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j}) + c(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) + d(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j}) = 0$$

şeklindeki denkleme dayanmaktadır. Bu denklemde  $a$  pozitif bir büyüklük olup,  $\phi$  herhangi bir bağımlı değişkendir. Şayet

- (1) bütün katsayılar pozitif ise veya
- (2) katsayıların bazıları negatif ve toplamları negatif ise

sistemin kararlı olacağı belirtilmektedir.

Tartışılan bütün sonlu fark yaklaşımları yukarıdaki biçime sokulabileceğinden sonlu fark formülasyonunun kararlılığını incelemek için bu analogiden yararlanılabilir.

Şimdi momentum denkleminin

$$u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} = U_{ei} \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x} + v \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

şeklinde elde edilen sonlu fark açılımı

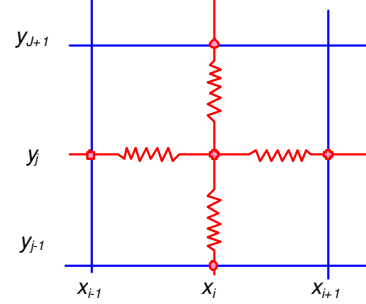
$$-\left[ \frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} - \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \left[ \frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} + \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] (u_{i,j-1} - u_{i,j}) - u_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) = -U_{ei} (U_{ei+1} - U_{ei})$$

veya

$$a = -\left[ \frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} - \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right]; \quad b = \left[ \frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} + \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right]; \quad c = -u_{i,j}; \quad d = 0$$

olmak üzere

$$a(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + b(u_{i,j-1} - u_{i,j}) + c(u_{i+1,j} - u_{i,j}) = -U_{ei} (U_{ei+1} - U_{ei})$$



Şekil - Direnç ağı

şeklinde düzenlenirse yukarıdaki model denkleme benzemesi için öncelikle  $a > 0$  olması gerekmektedir.

$$- v_{i,j} < 0 \text{ ise } a > 0 \text{ dır.}$$

$$- v_{i,j} > 0 \text{ ise } a = -\frac{\Delta x}{\Delta y} \left[ \frac{1}{2} v_{i,j} - \frac{v}{\Delta y} \right] > 0 \text{ olması için } v_{i,j} < \frac{2v}{\Delta y} \text{ olmalıdır.}$$

$$- \text{Sınır tabakada ayrılma olmadığı için } u_{i,j} > 0 \text{ olup, böylece } c < 0 \text{ dır.}$$

Bu durumda kararlılık için katsayıların toplamının negatif olması gerekmektedir.

$$a + b + c = -\left[ \frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} - \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] + \left[ \frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} + \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] - u_{i,j} = 2 \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} - u_{i,j} < 0$$

Buradan sonuç olarak kararlılık için

$$\Delta x < \frac{u_{i,j} (\Delta y)^2}{2v}$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Sınır tabakada duvar haricinde en düşük hız duvarın üzerindeki ilk ağ noktasında olacaktır. Bu ağ noktasının duvara uzaklığı  $\Delta y$  olmak üzere yukarıdaki koşul yerine getirilerek  $x$  doğrultusundaki  $\Delta x$  adım uzunluğu tespit edilir.

#### Örnek 4.1:

*Kinematik viskozitesi  $\nu = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  olan bir akışkanın  $10 \text{ m/s}$  hızdaki akımı içerisinde akıma paralel bir düz levhanın yer aldığı, levha hücum kenarının  $1 \text{ m}$  gerisinden itibaren bir rampa olduğunu ve bu rampa boyunca akım hızının  $U_e(x) = 10.5 - 0.5x \text{ m/s}$  şeklinde değiştiğini varsayınız (Howard akımı).*

*Bu levha üzerindeki sınır tabakayı  $x = 2.0$  noktasına kadar hesaplayınız. Sınır tabaka ters basınç gradyanı etkisiyle ayrılır mı, tespit ediniz.*

#### Çözüm:

Bu örnek daha önce Thwaites-Walz yöntemi kullanılarak incelenmişti. Şimdi daha kuvvetli ve hız dağılımını ayrıntılı olarak verecek bir yöntemle incelenecektir.

Ancak bu incelemelerde kolaylık bakımından denklemlerin boyutsuzlaştırılmasında yarar vardır. Bu amaçla akım büyüklükleri serbest akım hızı  $U_\infty$  ve katı yüzeyin karakteristik uzunluğu  $L$  olmak üzere

$$\bar{u} = \frac{u}{U_\infty}; \quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty}; \quad \bar{U}_e = \frac{U_e}{U_\infty}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L}$$

şeklinde boyutsuzlaştırılarak

$$\text{Süreklilik denklemi} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\text{Momentum denklemi} \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

şekline gelir. Buradaki Reynolds sayısı serbest akım hızı ve karakteristik uzunluk cinsinden

$$Re = U_{\infty} L / \nu$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Momentum denklemi daha önce gösterildiği biçimde ayrıştırılarak

$$\bar{u}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta \bar{x}} + \bar{v}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j-1}}{2\Delta \bar{y}} = \bar{U}_e \frac{\Delta \bar{U}_e}{\Delta \bar{x}} + \frac{1}{Re} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - 2\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1}}{(\Delta \bar{y})^2}$$

Veya yeni bir düzenleme ile

$$A = \frac{1}{Re} - \frac{\bar{v}_{i,j}\Delta \bar{y}}{2}; \quad B = \frac{1}{Re} + \frac{\bar{v}_{i,j}\Delta \bar{y}}{2}; \quad C = \bar{U}_e \frac{\Delta \bar{U}_e}{\Delta \bar{x}} (\Delta \bar{y})^2 - 2 \frac{\bar{u}_{i,j}}{Re}; \quad h = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{u}_{i,j} (\Delta \bar{y})^2}$$

olmak üzere

$$\bar{u}_{i+1,j} = \bar{u}_{i,j} + h[A\bar{u}_{i,j+1} + B\bar{u}_{i,j-1} + C]$$

şeklinde düzenlenebilir. Boyutsuzlaştırılmış süreklilik denklemi de daha önceki benzer biçimde ayrıştırılarak aşağıdaki şekle gelir:

$$\bar{v}_{i+1,j} = \bar{v}_{i+1,j-1} + \frac{\Delta \bar{y}}{2\Delta \bar{x}} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1} - \bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i+1,j-1})$$

Bu formüller yardımıyla bir kez hız bileşenleri elde edildikten sonra sınır tabakanın global büyüklükleri hesaplanır.

Örneğin yüzeydeki kayma gerilmesi yüzey üzerindeki hız  $u_{i,1} = 0$  olmak üzere üç noktadan bir parabol geçirilerek

$$\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu}{2\Delta y} (4u_{i,2} - u_{i,3})$$

ve böylece yüzey sürtünme katsayısı da

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = \frac{\mu}{\rho U_e^2 \Delta y} (4u_{i,2} - u_{i,3}) = \frac{1}{Re \bar{U}_e^2 \Delta \bar{y}} (4\bar{u}_{i,2} - \bar{u}_{i,3})$$

şeklinde hesaplanabilir.

Sınır tabaka kalınlığı her zaman olduğu gibi hızın kenar hızının %99 una eriştiği nokta araştırılarak bulunur. Deplasman ve momentum kalınlıkları ise hız profilinin trapez kuralı kullanılarak integrasyonu yoluyla elde edilebilir.

Burada söz konusu olan problem için  $U_{\infty} = 10 \text{ m/s}$  olup levhanın karakteristik uzunluğu  $L = 1 \text{ m}$  olarak alınacaktır.



Levhanın ilk  $1 m$  lik kısmında basınç gradyanı olmayıp bu bölgede Blasius denklemi geçerlidir. Bu denklemin çözümü yardımıyla basınç gradyanının olduğu bölge için  $x = 1 m$  de başlangıç şartları elde edilir. Buna göre  $x = 1 m$  de

$$\text{Lokal Reynolds sayısı} \quad \text{Re}_x = \frac{U_e x}{\nu} = \frac{10 \cdot 1}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^4$$

$$\text{Sınır tabaka kalınlığı} \quad \delta = \frac{5.0 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{5.0 \times 1}{\sqrt{5} 10^2} = 0.0224 m$$

$$\text{Öteleme kalınlığı} \quad \delta^* = \frac{1.721 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{1.721 \times 1}{\sqrt{5} 10^2} = 0.0077 m$$

$$\text{Momentum kalınlığı} \quad \theta = \frac{0.664 x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0.664 \times 1}{\sqrt{5} 10^2} = 0.00297 m$$

$$\text{Şekil parametresi} \quad H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{0.0077}{0.00297} = 2.5926$$

$$\text{Sürtünme katsayısı} \quad C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{0.664}{\sqrt{5} 10^2} = 0.00297$$

Levhanın karakteristik uzunluğu  $1 m$  alındığından buradaki kalınlıkların ayrıca boyutsuzlaştırılmasına gerek kalmamıştır.

Levhanın döndüğü  $\bar{x} = 1$  noktasında  $y$  doğrultusunda  $\Delta \bar{y} = 0.00112$  aralıkla 100 nokta alalım. Böylece bu noktalardan

$$\frac{\delta}{\Delta y} = \frac{0.0224}{0.00112} = 20$$

adedi sınır tabakanın içinde kalacaktır. Diğer noktalar ise levha boyunca giderek sınır tabaka kalınlaşacağı için ilave edilmiştir.

Kullanılan çözüm yöntemi açık (explicit) şema olduğu için akım doğrultusundaki  $\Delta x$  adımını serbest seçme olanağı yoktur. Bunu kararlılık kriteri belirleyecektir.

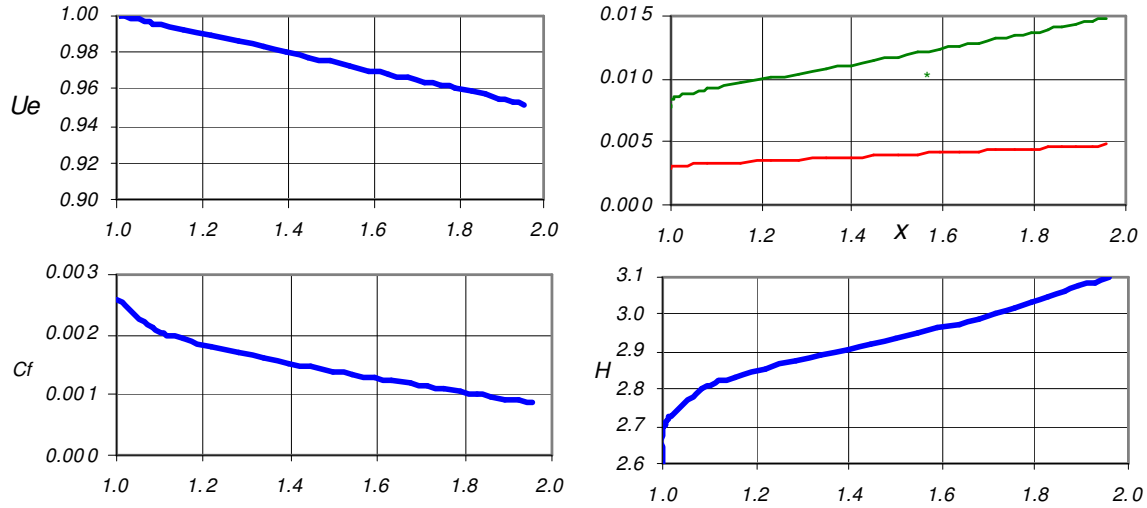
$\bar{x} = 1$  noktasından itibaren çözümün başlatılabilmesi için ayrıca bu istasyondaki hız profiline ihtiyaç vardır. Bunun için kolaylık bakımından örneğin

$$\frac{u}{U_e} = \frac{3}{2} \zeta - \frac{1}{2} \zeta^3 ; \quad \zeta = \frac{y}{\delta}$$

kübik hız profili kullanılabilir.

Tablo: Howard tipi akımda açık formülasyonla sınır tabaka çözümü sonuçları

n	x	$U_e$	*	H	$C_f$		
0	1.00000	1.00000	0.02240	0.008	0.00297	2.59200	0.00297
1	1.00188	0.99991	0.02128	0.008	0.00311	2.70365	0.00260
51	1.08290	0.99585	0.02240	0.009	0.00327	2.79783	0.00210
101	1.15457	0.99227	0.02352	0.010	0.00340	2.83169	0.00193
151	1.22068	0.98897	0.02464	0.010	0.00351	2.85486	0.00180
201	1.28248	0.98588	0.02576	0.010	0.00362	2.87348	0.00170
251	1.34070	0.98297	0.02688	0.011	0.00372	2.88978	0.00161
301	1.39581	0.98021	0.02800	0.011	0.00382	2.90480	0.00153
351	1.44816	0.97759	0.02912	0.011	0.00391	2.91909	0.00146
401	1.49801	0.97510	0.02912	0.012	0.00399	2.93299	0.00140
451	1.54558	0.97272	0.03024	0.012	0.00408	2.94667	0.00134
501	1.59105	0.97045	0.03024	0.012	0.00415	2.96026	0.00129
551	1.63457	0.96827	0.03136	0.013	0.00423	2.97384	0.00124
601	1.67626	0.96619	0.03136	0.013	0.00430	2.98745	0.00119
651	1.71624	0.96419	0.03248	0.013	0.00437	3.00114	0.00114
701	1.75460	0.96227	0.03248	0.013	0.00443	3.01491	0.00110
751	1.79144	0.96043	0.03360	0.014	0.00450	3.02879	0.00106
801	1.82683	0.95866	0.03360	0.014	0.00456	3.04278	0.00102
851	1.86084	0.95696	0.03472	0.014	0.00461	3.05690	0.00098
901	1.89354	0.95532	0.03472	0.014	0.00467	3.07115	0.00094
951	1.92499	0.95375	0.03584	0.015	0.00472	3.08553	0.00091
1001	1.95523	0.95224	0.03584	0.015	0.00478	3.10004	0.00087
1051	1.98433	0.95078	0.03584	0.015	0.00483	3.11469	0.00084



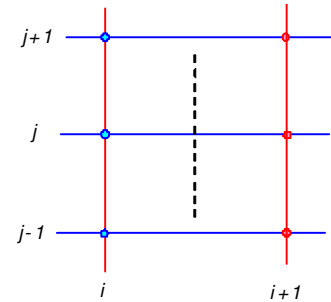
Şekil: Howard tipi akımda sınır tabakanın karakteristik büyüklükleri

#### 4.7.3- Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için kapalı şemalar

Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için değişik kapalı formülasyonlar uygulamak mümkündür.

İlk kapalı şemalardan birisi Parr (1963) tarafından geliştirilmiştir. Parr momentum denkleminde  $y$  doğrultusundaki türevleri Crank-Nicolson yöntemiyle

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right]$$



$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right]$$

ve x doğrultusundaki türevleri de ileri farklarla

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

şeklinde ayırıştırarak şartsız olarak kararlı bir çözüm yöntemini ortaya koymuştur.

Daha basit bir ayırıştırma [Grossman ve Schetz](#) (1985) tarafından geliştirilmiş olup bu yöntem aşağıdaki örnekte incelenecektir.

### Örnek 4.2:

*Kinematik viskozitesi  $\nu = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  olan bir akışkanın 10 m/s hızdaki akımı içerisinde akıma paralel bir düz levhanın yer aldığı, levha hücum kenarının 1 m gerisinden itibaren bir rampa olduğunu ve bu rampa boyunca akım hızının  $U_e(x) = 10.5 - 0.5x$  m/s şeklinde değiştiğini varsayınız (Howard akımı). Bu hız dağılımı bir ters basınç gradyanı yaratmaktadır.*

*Bu levha üzerindeki sınır tabakayı  $x = 2.0$  noktasına kadar hesaplayınız. Sınır tabaka ters basınç gradyanı etkisiyle ayrılır mı, tespit ediniz.*

### Çözüm:

Bu örnek daha önce Thwaites-Walz yöntemi kullanılarak ve ayrıca açık formülasyonlu bir sonlu fark yöntemiyle incelenmişti. Burada kapalı formülasyonlu bir sonlu fark yöntemi uygulanacaktır. Problemin çoğu girdileri açık yöntemdekiyle aynıdır. Denklemler yine boyutsuz olarak

$$\text{Süreklilik denklemi} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\text{Momentum denklemi} \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

şeklinde kullanılacaktır. Şekildeki gibi bir ağ yapısında türevler ayırıştırılarak

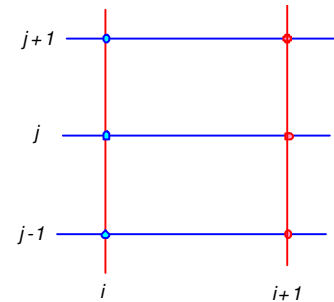
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta \bar{x}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - \bar{u}_{i+1,j-1}}{2\Delta \bar{y}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - 2\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j-1}}{(\Delta \bar{y})^2}$$

ve momentum denkleminde yerleştirilerek

$$\bar{u}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta \bar{x}} + \bar{v}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - \bar{u}_{i+1,j-1}}{2\Delta \bar{y}} = \left( \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \right)_i + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - 2\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j-1}}{(\Delta \bar{y})^2}$$



( $i+1$ ) istasyonundaki bilinmeyenler cinsinden düzenlenirse

$$\boxed{A_j \bar{u}_{i+1,j-1} + B_j \bar{u}_{i+1,j} + C_j \bar{u}_{i+1,j+1} = D_j}$$

elde edilir. Burada

$$A_j = -\left[ \frac{\bar{v}_{i,j}}{2\Delta\bar{y}} + \frac{I}{\text{Re}(\Delta\bar{y})^2} \right]; \quad B_j = \left[ \frac{\bar{u}_{i,j}}{\Delta\bar{x}} + \frac{2}{\text{Re}(\Delta\bar{y})^2} \right]; \quad C_j = \left[ \frac{\bar{v}_{i,j}}{2\Delta\bar{y}} - \frac{I}{\text{Re}(\Delta\bar{y})^2} \right]$$

$$D_j = \bar{U}_{ei} \left( \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \right)_i + \frac{\bar{u}_{i,j}^2}{\Delta\bar{x}}$$

Boyutsuzlaştırılmış süreklilik denkleminin ayrıklaştırılmış biçimi daha önce olduğu gibidir:

$$\boxed{\bar{v}_{i,j} = \bar{v}_{i,j-1} + \frac{\Delta\bar{y}}{2\Delta\bar{x}} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1} - \bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i+1,j-1})}$$

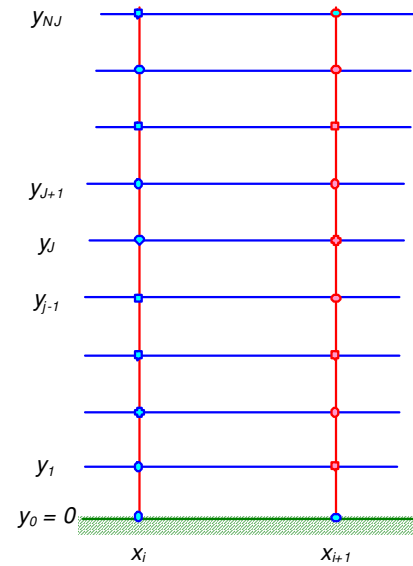
Momentum denkleminin çözümü bu defa açık formülasyon halindeki gibi basit bir formül şeklinde değildir. Denklemden üç bilinmeyen olup yalnız başına çözümü mümkün değildir.

Ancak sınır tabaka noktalarının herbirinde (sınır noktaları hariç) bu denklemin birer kez yazılabileceği düşünülürse sonuçta bir lineer denklem takımı elde edilir. Nitekim yandaki gibi bir indisleme sisteminde bu denklem takımı

$$B_1 \bar{u}_{i+1,1} + C_1 \bar{u}_{i+1,2} = D_1$$

$$A_j \bar{u}_{i+1,j-1} + B_j \bar{u}_{i+1,j} + C_j \bar{u}_{i+1,j+1} = D_j, \quad (j = 2, 3, \dots, NJ - 2)$$

$$A_{NJ-1} \bar{u}_{i+1,NJ-2} + B_{NJ-1} \bar{u}_{i+1,NJ-1} = D_{NJ-1} - C_{NJ-1} \bar{U}_{ei+1}$$



şeklinde düzenlenebilir. Burada ilk denklem duvara komşu noktada, son denklem ise sınır tabakanın kenarına komşu noktada yazılmış olup, sınır şartları gereği duvar üzerindeki hız sıfır iken kenar nokradaki hız bilinen dış akım hızına eşit alınmıştır.

Bu denklem sistemi matris formda yazılırsa katsayılar matrisinin diyagonal ve buna komşu elemanları dışında bütün elemanlarının sıfır olduğu görülür. Bu tipteki matrislere **üç-diyagonal matris** adı verilir.

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{NJ-3} & B_{NJ-3} & C_{NJ-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{NJ-2} & B_{NJ-2} & C_{NJ-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{NJ-1} & B_{NJ-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{i+1,0} \\ \bar{u}_{i+1,1} \\ \bar{u}_{i+1,2} \\ \dots \\ \bar{u}_{i+1,NJ-3} \\ \bar{u}_{i+1,NJ-2} \\ \bar{u}_{i+1,NJ-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \dots \\ D_{NJ-3} \\ D_{NJ-2} \\ D_{NJ-1} - C_{NJ-1} \bar{U}_{ei+1} \end{Bmatrix}$$

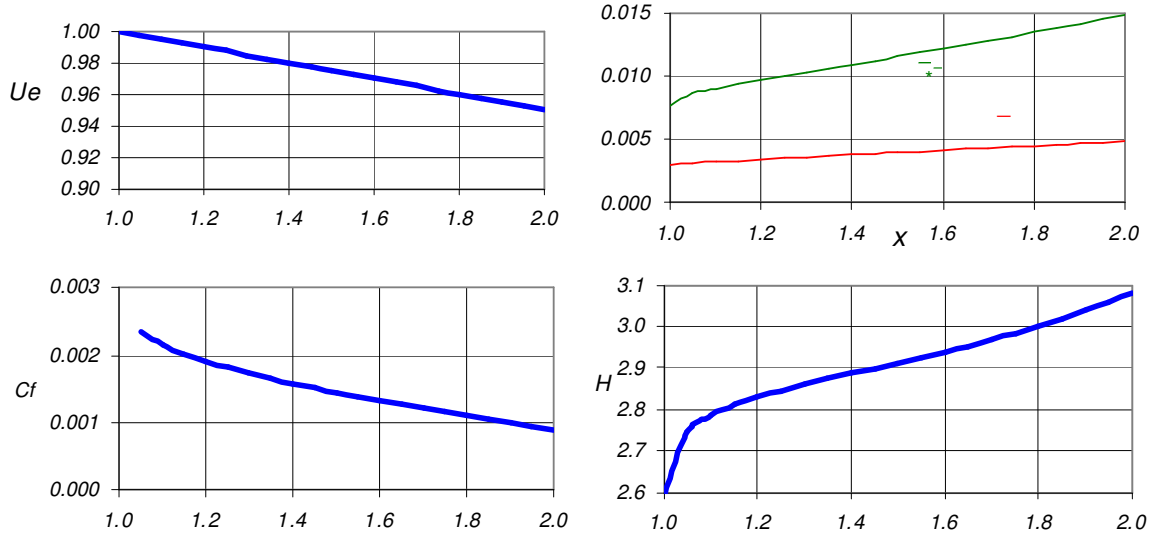
Bu tip denklem sistemlerinin çözümü için tercih edilen bir çözüm tekniği olan Thomas yöntemine ilişkin bilgiler Ek-4 te yer almaktadır.

Hız bileşenleri elde edildikten sonra sınır tabakanın global büyüklükleri daha önce açık formülasyonlu yöntemde olduğu gibi hesaplanır.

Kullanılan kapalı şema şartsız kararlı olduğundan  $x$  doğrultusundaki adım uzunluğu serbest olarak seçilebilecektir. Bu bakımdan sınır tabakanın başlangıçtaki kalınlığı mertebesindeki bir değer yani  $\Delta x=0.025$  değeri seçilmiştir.

Tablo: Howard tipi akımda kapalı formülasyonla sınır tabaka çözümü sonuçları

n	x	$U_e$	$\bar{u}$	$\bar{v}$	$\bar{w}$	H	$C_f$
1	1.0000	1.0000	0.02240	0.008	0.00297	2.59000	0.00297
3	1.0500	0.99750	0.02128	0.009	0.00315	2.74492	0.00234
5	1.1000	0.99500	0.02240	0.009	0.00323	2.78601	0.00215
7	1.1500	0.99250	0.02352	0.009	0.00333	2.81155	0.00202
9	1.2000	0.99000	0.02464	0.010	0.00343	2.83039	0.00190
11	1.2500	0.98750	0.02576	0.010	0.00352	2.84617	0.00181
13	1.3000	0.98500	0.02576	0.010	0.00361	2.86031	0.00173
15	1.3500	0.98250	0.02688	0.011	0.00370	2.87357	0.00165
17	1.4000	0.98000	0.02800	0.011	0.00379	2.88643	0.00158
19	1.4500	0.97750	0.02800	0.011	0.00388	2.89922	0.00151
21	1.5000	0.97500	0.02912	0.012	0.00397	2.91218	0.00145
23	1.5500	0.97250	0.03024	0.012	0.00405	2.92551	0.00138
25	1.6000	0.97000	0.03024	0.012	0.00414	2.93933	0.00132
27	1.6500	0.96750	0.03136	0.012	0.00423	2.95379	0.00126
29	1.7000	0.96500	0.03248	0.013	0.00431	2.96899	0.00121
31	1.7500	0.96250	0.03248	0.013	0.00440	2.98505	0.00115
33	1.8000	0.96000	0.03360	0.013	0.00448	3.00207	0.00109
35	1.8500	0.95750	0.03472	0.014	0.00457	3.02018	0.00104
37	1.9000	0.95500	0.03472	0.014	0.00465	3.03949	0.00098
39	1.9500	0.95250	0.03584	0.014	0.00474	3.06014	0.00093
41	2.0000	0.95000	0.03696	0.015	0.00482	3.08230	0.00088



Şekil: Howard tipi akımda sınır tabakanın karakteristik büyüklükleri

#### 4.7.4- Sınır tabaka denklemleri için faydalı bir değişken dönüşümü

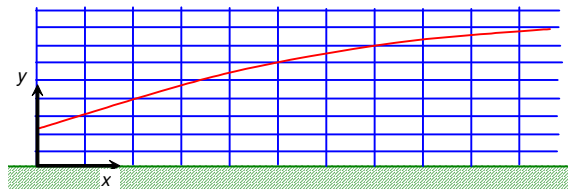
Önceki bölümlerde sınır tabaka denklemlerinin çözümü için açık ve kapalı formülasyon kullanan sonlu fark yöntemleri üzerinde durulmuş, bazı örnek teknikler tanıtılmıştır. Daha gelişmiş başka yöntemleri, sıkıştırılabilir ve türbülanslı hallerdeki uygulamaları literatürde bulmak mümkündür.

Örneklerde de görüldüğü gibi sınır tabakanın giderek kalınlaşması nedeniyle, hesaplar için oluşturulan ağ yapısının sınır tabaka bölgesini içine alacak biçimde geniş tutulması gerekmektedir. Bunun için ya sınır tabaka başlangıcında duvara dik doğrultuda gereğinden çok fazla nokta alınması, ya da sınır tabaka kalınlaştıkça nokta sayısının buna uygun biçimde artırılması gerekmektedir.

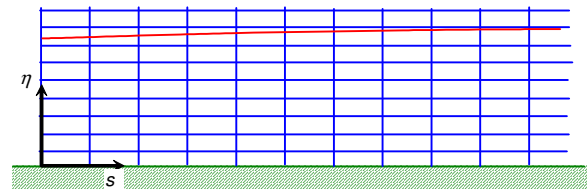
Ancak, bunlar yerine sınır tabaka kalınlığının sabite yakın kalmasını sağlayacak bir değişken dönüşümü yapılması faydalı olacaktır.

Sınır tabaka kalınlığının düz levha üzerinde laminer halde  $x^{1/2}$  ile orantılı olarak arttığı bilinmektedir. Nitekim düz levha üzerindeki ve köşe etrafındaki benzer akımlar halinde  $y/x^{1/2}$  büyüklüğü ile orantılı bir değişken tanımlanarak sınır tabakanın dönüşüm düzleminde aynı kalınlıkta kalması sağlanmıştır.

Genel bir akım halinde şüphesiz benzerlik olması pek beklenmez. Bu bakımdan yapılacak değişken dönüşümü de sınır tabaka kalınlığının dönüşüm düzleminde tam olarak sabit kalmasını sağlamayacaktır. Ancak en azından sabite yakın kalmasını sağlayarak çözüm ağının daha uygun genişlikte seçilmesi anlamında faydalı olacaktır.



Sınır tabaka düzlemi;



Dönüşüm düzlemi;

Böyle bir değişken dönüşümü genel olarak

$$s = \int_0^x U_e dx'; \quad \eta = \frac{yU_e}{\sqrt{2\nu s}}$$

şeklinde önerilebilir. Bu değişkenlerle momentum denklemi,

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 2s \left[ f' \frac{\partial f'}{\partial s} - f'' \frac{\partial f}{\partial s} \right]; \quad \beta = \frac{2s}{U_e} \frac{dU_e}{ds}$$

şekline dönüşür. Bu denklem Falkner-Skan benzerlik dönüşümünü andırmakla birlikte denklemin sağ tarafı Falkner-Skan akımlarındaki gibi sıfır değildir. Bu farklılık dış akım hızlarının köşe etrafındaki akım hızlarından farklı olmasından, yani bir benzerlik çözümü olmamasından kaynaklanmaktadır.

Burada ayrıca

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{U_e}; \quad \psi = \sqrt{2\nu s} f(s, \eta)$$

$$v = -U_e \sqrt{2\nu s} \left( \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{f}{2s} \right)$$

olup sınır şartları da

$$f(s, 0) = 0; \quad f'(s, 0) = 0; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(s, \eta) = 1$$

şeklindedir. Katı cidar üzerindeki sınır şartı, emme veya üfleme halinde

$$f(s, 0) = f_w = -\frac{I}{\sqrt{2\nu s}} \int_0^s v_w ds$$

şeklinde değişecektir.

Önceki bölümlerde izah edilen sayısal yöntemlerde bu dönüştürülmüş denklemleri bir akım fonksiyonu kullanmak yerine

$$F(s, \eta) = \frac{u}{U_e}$$

olmak üzere

$$F'' + \beta(1 - F^2) - VF' - 2sFF_s = 0$$

şekline dönüştürmek daha uygun olur. Buradaki  $V$  büyüklüğü dönüştürülmüş dikey hız olup, dönüştürülmüş süreklilik denkleminde

$$2sF_s + V' + F = 0$$

elde edilerek

$$V = V_w - \int_0^\eta (2sF_s + F) d\eta$$

şeklinde bulunur. Buradaki integral trapez kuralı ile hesaplanabilir.

Dönüştürülmüş momentum denkleminin çözümü için kapalı bir formülasyon oluşturulabilir. Bu amaçla akım doğrultusundaki  $F_s$  türevi ileri farklarla, dikey doğrultudaki  $F'$  ve  $F''$  türevleri de önceki istasyonda merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$A_i F_{i+1, j-1} + B_i F_{i+1, j} + C_i F_{i+1, j+1} = D_i$$

şeklinde bir denklem elde edilebilir. Burada

$$A_i = -\frac{I}{(\Delta\eta)^2} - \frac{V_{i,j}}{2\Delta\eta}; \quad B_i = \frac{2}{(\Delta\eta)^2} + \beta F_{i,j} + 2s \frac{F_{i,j}}{\Delta s}; \quad C_i = -\frac{I}{(\Delta\eta)^2} + \frac{V_{i,j}}{2\Delta\eta}$$

$$D_i = \beta - 2s \frac{F_{i,j}^2}{\Delta s}$$

dır. Bu denklem takımı üç-diyagonal olup, Thomas yöntemiyle çözülür.

**EK****Üç-diagonalli denklem sistemlerinin çözümü için****Thomas yöntemi**

Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde ve Hesaplamalı mühendisliğin bazı problemlerinde zaman zaman üç-diagonalli katsayılar matrisine sahip lineer denklem takımlarıyla karşılaşılır. Üç-diagonalli katsayılar matrisine sahip böyle bir lineer denklem takımı matris biçiminde normal olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_N \end{Bmatrix}$$

Ancak katsayılar matrisinin çoğu sıfır olan elemanları için bilgisayar hafızasında gereksiz yer işgal etmemek ve gereksiz işlemlerden kaçınmak amacıyla ( $N \times N$ ) boyutlarında bir katsayılar matrisi yerine ( $N \times 3$ ) boyutlarında bir katsayılar matrisi kullanacak biçimde bir düzenleme ve buna uygun bir çözüm algoritması kullanılması tercih edilir.

Çözüm için çok tercih edilen bir yöntem Thomas algoritmasıdır. Thomas algoritması aslında Gauss eliminasyon yönteminin üç kolonlu bir dikdörtgenel matris kullanılarak yapılan özel bir uygulamasıdır.

Yukarıdaki denklem sistemi

$$a_{i-1,i} \rightarrow l_i; \quad a_{ii} \rightarrow d_i; \quad a_{i,i+1} \rightarrow u_i; \quad b_i \rightarrow r_i$$

olmak üzere düzenlenirse:

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & d_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & d_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_N \end{Bmatrix}$$

Gauss eliminasyon yönteminin esasının diyagonal altında kalan bütün elemanların sıfır olmasını sağlayacak işlemler olduğu hatırlanırsa bu denklem sistemindeki ilk denklem  $l_2$  ile ve ikinci denklem de  $d_1$  ile çarpılıp birinci denklem ikincisinden çıkarıldıktan sonra her iki taraf  $d_1$  ile bölünerek

$$\begin{aligned} l_2 d_1 x_1 + l_2 u_1 x_2 &= l_2 r_1 \\ d_1 l_2 x_1 + d_1 d_2 x_2 + d_1 u_2 x_3 &= d_1 r_2 \end{aligned} \Rightarrow \left( d_2 - \frac{l_2 u_1}{d_1} \right) x_2 + u_2 x_3 = r_2 - \frac{r_1 l_2}{d_1}$$



elde edilir. Böylece ikinci denklemdeki  $x_1$  bilinmeyeni yok edilmiş veya diğer bir deyişle katsayılar matrisinde diyagonal elemanın altındaki katsayı sıfırlanmış olmaktadır. Bu eşitlik

$$\boxed{d_2' = d_2 - \frac{l_2 u_1}{d_1} \quad ; \quad r_2' = r_2 - \frac{r_1 l_2}{d_1}} \quad \text{olmak üzere} \quad \boxed{d_2' x_2 + u_2 x_3 = r_2'}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2' & u_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & d_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3 \\ \cdots \\ r_i \\ \cdots \\ r_N \end{Bmatrix}$$

şekline gelir. Yukarıda yapılan eliminasyon işlemi denklem sistemindeki ikinci ve üçüncü denklem arasında tekrarlanırsa, yani ikinci denklem  $l_3$  ile ve üçüncü denklem de  $d_2'$  ile çarpılıp yine birinci denklem ikincisinden çıkarılıp, karşılıklı  $d_2'$  ile bölünerek

$$\begin{aligned} l_3 d_2' x_2 + l_3 u_2 x_3 &= l_3 r_2' \\ d_2' l_3 x_2 + d_2' d_3 x_3 + d_2' u_3 x_4 &= d_2' r_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left( d_3 - \frac{l_3 u_2}{d_2'} \right) x_3 + u_3 x_4 = r_3 - \frac{l_3 r_2'}{d_2'}$$

veya yine

$$\boxed{d_3' = d_3 - \frac{l_3 u_2}{d_2'} \quad ; \quad r_3' = r_3 - \frac{l_3 r_2'}{d_2'}} \quad \text{olmak üzere} \quad \boxed{d_3' x_3 + u_3 x_4 = r_3'}$$

elde edilir. Bu denklemde de  $x_2$  bilinmeyenin ortadan kalktığı ve katsayılar matrisinde üçüncü satırda diyagonal altındaki elemanın sıfır yapıldığı görülmektedir.

Benzeri işlemler daha sonraki denklemler için de tekrarlanabilir. Bunun için yukarıda çıkartılan bağıntılar karşılaştırılarak bir genelleştirme yapılırsa

$$\boxed{d_i' = d_i - \frac{l_i u_{i-1}}{d_{i-1}'} \quad ; \quad r_i' = r_i - \frac{l_i r_{i-1}'}{d_{i-1}'} \quad (i = 2, 3, \dots, N)}$$

elde edilir. Bu durumda denklem sistemi de

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2' & u_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_3' & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_i' & u_i & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_N' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2' \\ r_3' \\ \cdots \\ r_i' \\ \cdots \\ r_N' \end{Bmatrix}$$

şekline gelir. Bu denklem sisteminde en sonuncu denklemden  $x_N$  bilinmeyeninin kolaylıkla çözülebileceği görülmektedir:

$$x_N = \frac{r'_N}{d'_N}$$

Bulunan bu büyüklük bir üstteki denklemde kullanılarak

$$x_{N-1} = \frac{r'_{N-1} - u_{N-1}x_N}{d'_{N-1}}$$

bulunur. Benzeri işlem herhangi bir  $x_i$  bilinmeyeni için

$$x_i = \frac{r'_i - u_i x_{i+1}}{d'_i}$$

şeklinde gerçekleştirilir.