İKİ BOYUTLU SINIR TABAKALAR İÇİN İNTEGRAL YÖNTEMLERİ

Kanat profili ve benzeri cisimler etrafındaki laminer sınır tabakaların hesaplanmasında kullanılan sayısal tekniklerden bir grubu *integral yöntemleri* olarak bilinir. Bu yöntemler genel olarak sınır tabaka denklemlerinin duvara dik doğrultuda integre edilmesiyle elde edilen ve *integral denklem* adı verilen denklemlerin çözümü esasına dayanmaktadır.

Burada önce tipik integral denklemlerin elde edilmesi gösterilecek, ardından bazı integral yöntemleri izah edilecektir. Örnek olarak Walz-Eppler ve Cousteix yöntemleri ele alınacak olup bu yöntemlerde süreklilik denkleminin, momentum denkleminin integral biçimleri ve ayrıca momentum denkleminin u hız bileşeniyle çarpılması sonucu elde edilen kinetik enerji denkleminin integral formları kullanılmaktadır.

Momentum denkleminin integral biçimi daha önce çıkartıldığından üzerinde durulmayacak, süreklilik integral denklemi (katılım denklemi) ve kinetik enerji integral denkleminin çıkartılışına yer verilecektir.

SÜREKLİLİK İNTEGRAL (KATILIM) DENKLEMİ

Süreklilik denklemi (0-δ) aralığında integre edilerek

$$\int_0^{\delta}\left(\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}\right)dy$$

$$\int_0^{\delta}\frac{\partial\rho v}{\partial y}dy=\int_0^{\delta}\partial(\rho v)=\rho_e v_{\delta}$$

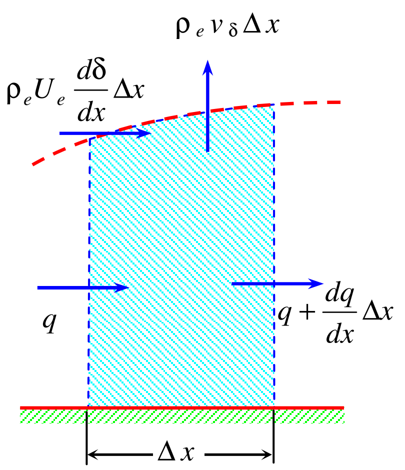
$$\int_0^{\delta}\frac{\partial f}{\partial x}dy=\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}f\,dy-f(\delta)\frac{d\delta}{dx}$$

$$f=\rho u$$

$$\int_0^{\delta}\frac{\partial\rho u}{\partial x}dy=\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}\rho u\,dy-\rho_e U_e\frac{d\delta}{dx}$$

$$\int_0^{\delta}\rho u\,dy=-\rho_e U_e(\delta-\delta_1)$$

$$\delta_1=\int_0^{\delta}\left(1-\frac{\rho u}{\rho_e U_e}\right)dy=\delta-\frac{1}{\rho_e U_e}\int_0^{\delta}\rho u\,dy$$



$$q=\int_0^{\delta}\rho u\,dy=-\rho_e U_e(\delta-\delta_1)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\rho_e U_e(\delta-\delta_1)\right]=\rho_e U_e\left(\frac{d\delta}{dx}-\frac{v_{\delta}}{U_e}\right)$$

$$\frac{d\delta}{dx}-\frac{v_{\delta}}{U_e}=C_E$$

$$\frac{d}{dx}\left[\rho_e U_e(\delta-\delta_1)\right]=\rho_e U_e C_E$$

Sıkıştırılamaz halde $\rho_e=Sb$

$$\frac{d}{dx}(\delta-\delta_1)=C_E-\frac{\delta-\delta_1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

KİNETİK ENERJİ İNTEGRAL DENKLEMİ

Momentum denklemi u ile çarpılıp (0-δ) aralığında integre edilerek

$$\int_0^\delta \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy \quad + \quad \int_0^\delta u\rho v \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad = \quad \int_0^\delta u\rho_e U_e \frac{dU_e}{dx} dy \quad + \quad \int_0^\delta u \frac{\partial \tau}{\partial y} dy$$

Kısmi integrasyonla

$$\underbrace{\left[u\tau\right]_0^\delta}_{0} - \underbrace{\int_0^\delta \tau \frac{\partial u}{\partial y} dy}_{-D}$$

Süreklilik denkleminden

$$\rho v = -\int_0^y \frac{\partial \rho u}{dx} dy'$$

$$\int_0^\delta \left(-\int_0^y \frac{\partial \rho u}{dx} dy'\right) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) dy$$

Kısmi integrasyonla

$$-\frac{U_e^2}{2}\int_0^\delta \frac{\partial \rho u}{dx} dy + \int_0^\delta \frac{u^2}{2} \frac{\partial \rho u}{dx} dy$$

$$\int_0^\delta \left[\rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u^2}{2}\left(\rho \frac{\partial u}{dx} + u \frac{\partial \rho}{dx}\right)\right] dy - \frac{U_e^2}{2}\int_0^\delta \frac{\partial \rho u}{dx} dy$$

$$\int_0^\delta \left(\frac{3}{2}\rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u^3}{2} \frac{\partial \rho}{dx}\right) dy - \frac{U_e^2}{2}\int_0^\delta \frac{\partial \rho u}{dx} dy$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho u^3}{2}\right) dy - \frac{U_e^2}{2}\int_0^\delta \frac{\partial \rho u}{dx} dy$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho u^3}{2}\right) dy - \frac{U_e^2}{2}\int_0^\delta \frac{\partial \rho u}{dx} dy \quad - \quad \rho_e U_e \frac{dU_e}{dx}\int_0^\delta u dy \quad = \quad -D$$

$$f = \rho u^3$$

$$f = \rho u$$

$$\int_0^\delta \frac{\partial f}{\partial x} dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta f\, dy - f(\delta)\frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{\rho u^3}{2} dy - \frac{U_e^2}{2}\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u dy \quad - \quad \rho_e U_e \frac{dU_e}{dx}\int_0^\delta u dy \quad = \quad -D$$

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{\rho u^3}{2}dy}\ -\ \underbrace{\frac{U_e^2}{2}\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u dy-\rho_e U_e\frac{dU_e}{dx}\int_0^\delta u dy}\ =\ \underbrace{-D}$$

$$-\frac{U_e^2}{2}\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u dy-\frac{1}{2}\frac{d\left(U_e^2\right)}{dx}\int_0^\delta \rho u dy+\frac{1}{2}\frac{d\left(U_e^2\right)}{dx}\int_0^\delta \rho u dy-\rho_e U_e\frac{dU_e}{dx}\int_0^\delta u dy$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^\delta \frac{\rho u^3}{2}dy\ -\ \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\int_0^\delta \rho u U_e^2 dy+U_e\frac{dU_e}{dx}\int_0^\delta(\rho u-\rho_e u)dy\ =\ -D$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\rho_e U_e^3\underbrace{\int_0^\delta \frac{\rho u}{\rho_e U_e}\left(1-\frac{u^2}{U_e^2}\right)dy}_{\delta_3}\right]+U_e\frac{dU_e}{dx}\rho_e U_e\left[\underbrace{\int_0^\delta\left(1-\frac{u}{U_e}\right)dy}_{(\delta_1)_i}-\underbrace{\int_0^\delta\left(1-\frac{\rho u}{\rho_e U_e}\right)dy}_{\delta_1}\right]=-D$$

$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[\rho_e U_e^3\delta_3\right]+U_e\frac{dU_e}{dx}\rho_e U_e\left[(\delta_1)_i-\delta_1\right]=-C_D\rho_e U_e^3$$

$$C_D\rho_e U_e^3=D=\int_0^\delta \tau\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$\frac{1}{\rho_e U_e^3}\frac{d}{dx}\left[\rho_e U_e^3\delta_3\right]=2C_D-\frac{2}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\left[(\delta_1)_i-\delta_1\right]$$

$$\frac{d\delta_3}{dx}=2C_D-3\frac{\delta_3}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\ -\ \underbrace{\left\{\frac{\delta_3}{\rho_e}\frac{d\rho}{dx}-\frac{2}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\left[(\delta_1)_i-\delta_1\right]\right\}}_{\text{Sıkıştırılamaz halde sıfır}}$$

WALZ-EPPLER İNTEGRAL YÖNTEMİ

Walz-Eppler integral yöntemi, von Karman momentum integral denklemiyle kinetik enerji integral denkleminin eş zamanlı olarak integrasyonu esasına dayanır.

Von Karman momentum integral denklemi
$$\boxed{\frac{d\theta}{dx}=\frac{C_f}{2}-\frac{\theta}{U_e}(2+H)\frac{dU_e}{dx}} \qquad (1)$$

Kinetik enerji integral denklemi
$$\boxed{\frac{d\delta_3}{dx}=2C_D-3\frac{\delta_3}{U_e}\frac{dU_e}{dx}} \qquad (2)$$

Bu iki denklemde toplam 5 bilinmeyen (θ, δ_3, C_f, C_D, H) bulunmakta olup çözüm için gerekli ilave üç bağıntı Falkner-Skan çözümlerinden elde edilebilir (Cousteix).

$$\boxed{H_{32}+\frac{50.84951}{H_{32}}=-23.78186\left(\frac{1}{H}+\frac{H}{[4.02923]^2}\right)+46.8818} \qquad H_{32}=\frac{\delta_3}{\theta} \qquad (3)$$

$$\boxed{\frac{C_f}{2}R_\theta=b=2.99259\left[\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{8.05846}\right)^{1.7}-\left(\frac{1}{8.05846}\right)^{1.7}\right]} \qquad (4)$$

$$\boxed{\frac{2C_D R_\theta}{H_{32}}=b-(H-1)\left[-0.06815+4.336355\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{4.02923}\right)^{2.095065}\right]} \qquad (5)$$

Bu iki adi diferansiyel denklemin çözümü herhangi standart bir yöntemle (örneğin Runge-Kutta yöntemi) gerçekleştirilebilir. Basit bir çözüm yolu Euler yöntemi olup 1. dereceden Taylor açılımı ile

$$\boxed{\theta_{i+1}=\theta_i+\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_i\Delta x_i} \qquad \boxed{\delta_{3\,i+1}=\delta_{3\,i}+\left(\frac{d\delta_3}{dx}\right)_i\Delta x_i}$$

yazılabilir.

Uyarı-1

Yukarıda izah edilen çözümün başlatılabilmesi için sınır tabakanın başlangıç noktasında sınır tabaka büyüklüklerinin bilinmesi gerekir. Küt bir cisim üzerinde sınır tabakanın hücum kenarı civarında durma noktası olarak tanımlanan bir noktadan itibaren başladığı bilinir. Durma noktasında hızın sıfır olması nedeniyle C_f sürtünme katsayısı sonsuz büyük değerler aldığı gibi C_D katsayısı ve $1/U_e$ büyüklüğünün değerleri de sonsuz olur.

$$U_e=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l}\dfrac{C_f}{2}\to\infty\\ -\dfrac{\theta}{U_e}(2+H)\dfrac{dU_e}{dx}\to\infty\end{array}} \; ; \; \boxed{\begin{array}{l}C_D\to\infty\\ -3\dfrac{\delta_3}{U_e}\dfrac{dU_e}{dx}\to\infty\end{array}}$$

Bu nedenle *momentum* ve *kinetik enerji integral bağıntılarını yukarıda verildiği şekliyle* kullanarak momentum ve enerji kalınlıklarının durma noktasındaki türevlerini hesaplamak mümkün olmaz.

Oysa bu terimler sonsuz büyüklükte olmalarına rağmen farkları sonlu büyüktedir.

$$\frac{C_f}{2}-\frac{\theta}{U_e}(2+H)\frac{dU_e}{dx} \qquad\qquad 2C_D-3\frac{\delta_3}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

Bu zorluğu gidermek için momentum ve kinetik enerji integral denklemlerini farklı bir biçimde düzenleyerek kullanmak daha uygun olur. Nitekim böyle bir düzenleme

$$\boxed{\frac{d(\theta R_\theta)}{dx}=C_f R_\theta-\frac{\theta^2}{\nu}(2H+3)\frac{dU_e}{dx}} \tag{6}$$

$$\boxed{\frac{d(\delta_3 R_{\delta_3})}{dx}=4C_D R_{\delta_3}-5\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}} \tag{7}$$

şeklinde yapılabilir ki, her iki bağıntının sağ tarafının da durma noktasında sonlu değerler alacağı görülebilir.

Uyarı-2

Düzenlenen denklemlerin durma noktasından itibaren başlatılan çözümünde de bir kararsızlık sorunu görülür. Bu bakımdan çözümün genel olarak durma noktasından $x \approx 0.1\,\delta$ kadar uzaklıktaki bir noktadan başlatılması önerilmektedir.

AKIŞ ŞEMASI

$\delta_1,\ \theta,\ \delta_3,\ H,\ H_{32}$

için durma noktası değerleri (Falkner-Skan çözümlerinden)

$\Downarrow$

$$x_0 \leftarrow [\delta/10]_0$$
$$[U_e]_0 \leftarrow kx_0$$
$$[\theta R_\theta]_0 \leftarrow \frac{[\theta^2 U_e]_0}{\nu}$$
$$[\delta_3 R_{\delta_3}]_0 \leftarrow \frac{[\delta_3^{\,2} U_e]_0}{\nu}$$

$\Downarrow$

$\boxed{H=H(H_{32})}$ (3) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

$$C_f R_\theta = 2\cdot b(H) \tag{4}$$
$$C_D R_{\delta_3}=\frac{H_{32}^2}{2}\cdot\frac{2C_D R_\theta}{H_{32}} \tag{5}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d(\theta R_\theta)}{dx} \tag{6}$$
$$\frac{d(\delta_3 R_{\delta_3})}{dx} \tag{7}$$

$\Uparrow$ $\Uparrow$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\boxed{H_{32}=\delta_3/\theta}$ $\Leftarrow$

$$\theta=\sqrt{[\theta R_\theta]\cdot\nu/U_e}$$
$$\delta_3=\sqrt{[\delta_3 R_{\delta_3}]\cdot\nu/U_e}$$

$\Leftarrow$

$$x \leftarrow x+\Delta x$$
$$U_e \leftarrow U_e(x)$$

$\Leftarrow$

$$[\theta R_\theta] \leftarrow [\theta R_\theta]+\left[\frac{d(\theta R_\theta)}{dx}\right]\Delta x$$
$$[\delta_3 R_{\delta_3}] \leftarrow [\delta_3 R_{\delta_3}]+\left[\frac{d(\delta_3 R_{\delta_3})}{dx}\right]\Delta x$$

Ayrılma kriteri $\qquad H \geq 4.02923$

COUSTEIX İNTEGRAL YÖNTEMİ

Cousteix integral yöntemi, momentum ve süreklilik integral denklemlerinin eş zamanlı olarak integrasyonu esasına dayanır.

Von Karman momentum integral denklemi

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx}=\frac{C_f}{2}-\frac{\theta}{U_e}(2+H)\frac{dU_e}{dx}} \quad (1)$$

Süreklilik integral (katılım) denklemi

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\delta-\delta_1)=C_E-\frac{\delta-\delta_1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}} \quad (2)$$

Bu iki denklemde toplam 5 bilinmeyen (θ, δ-δ_1, C_f, C_E, H) bulunmakta olup çözüm için gerekli ilave üç bağıntı Falkner-Skan çözümlerinden elde edilebilir (Cousteix).

$$\boxed{\frac{C_f}{2}R_\theta=b(H)=2.99259\left[\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{8.05846}\right)^{1.7}-\left(\frac{1}{8.05846}\right)^{1.7}\right]} \quad (3)$$

$$\boxed{\frac{2C_D R_\theta}{H_{32}}=d(H)=b-(H-1)\left[-0.06815+4.336355\left(\frac{1}{H}-\frac{1}{4.02923}\right)^{2.095065}\right]} \quad (4)$$

$$\boxed{\frac{2C_E R_\theta}{H^*}=e(H)=-\frac{2}{H-1}b(H)+\frac{H+1}{H-1}d(H)} \quad (5)$$

Burada

$$\boxed{H^*=\frac{\delta-\delta_1}{\theta}}$$

olup H^* ile H arasında aşağıdaki gibi bir ilişki verilmiştir (Cousteix)

$$\boxed{\frac{H^*}{12.37}+1.2706\left(\frac{12.37}{H^*}\right)=-1.5022\left(\frac{1}{H}+\frac{H}{[4.02923]^2}\right)+3.1924} \quad (6)$$

Bu iki adi diferansiyel denklemin çözümü herhangi standart bir yöntemle (örneğin Runge-Kutta yöntemi) gerçekleştirilebilir. Basit bir çözüm yolu Euler yöntemi olup 1. dereceden Taylor açılımı ile

$$\boxed{\theta_{i+1}=\theta_i+\left(\frac{d\theta}{dx}\right)_i\Delta x_i} \qquad \boxed{(\delta-\delta_1)_{i+1}=(\delta-\delta_1)_i+\left[\frac{d(\delta-\delta_1)}{dx}\right]_i\Delta x_i}$$

yazılabilir.

Uyarı-1

Yukarıda izah edilen çözümün başlatılabilmesi için sınır tabakanın başlangıç noktasında sınır tabaka büyüklüklerinin bilinmesi gerekir. Küt bir cisim üzerinde sınır tabakanın hücum kenarı civarında durma noktası olarak tanımlanan bir noktadan itibaren başladığı bilinir. Durma noktasında hızın sıfır olması nedeniyle C_f sürtünme katsayısı sonsuz büyük değerler aldığı gibi C_E katsayısı ve $1/U_e$ büyüklüğünün değerleri de sonsuz olur. Bu durumda

$x=0$ da $\boxed{\begin{array}{l} U_e = 0 \quad \Rightarrow \quad 1/U_e \to \infty \\ \qquad\qquad\quad C_f \to \infty \\ \qquad\qquad\quad C_E \to \infty \end{array}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} \left(\dfrac{d\theta}{dx}\right)_0 \to (\infty - \infty) \\ \left[\dfrac{d(\delta-\delta_1)}{dx}\right]_0 \to (\infty-\infty) \end{array}}$

şeklinde belirsizlikler söz konusu olur ki bu nedenle de *momentum integral* denkleminde ve *katılım* denkleminde geçen türevlerin durma noktasındaki değerlerini (1) ve (2) denklemlerinden, *yukarıda verildiği şekliyle* kullanarak hesaplamak mümkün olmaz.

Oysa

$$\frac{C_f}{2} - \frac{\theta}{U_e}(2+H)\frac{dU_e}{dx} \qquad\qquad 2C_D - 3\frac{\delta_3}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

ifadelerindeki terimler sonsuz olmakla birlikte farkları sonlu büyüklükte olmak zorundadır.

Bu zorluğu gidermek için von Karman denkleminin ve katılım denklemini farklı bir biçimde düzenleyerek kullanmak daha uygun olur. Nitekim böyle bir düzenleme

$$\boxed{\frac{d(\theta R_\theta)}{dx} = C_f R_\theta - \frac{\theta^2}{\nu}(2H+3)\frac{dU_e}{dx}} \tag{7}$$

$$\boxed{\frac{d(\delta-\delta_1)R_{\delta-\delta_1}}{dx} = (H^*)^2\left(2\frac{C_E R_\theta}{H^*} - \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}\right)} \tag{8}$$

şeklinde yapılabilir ki, her iki bağıntıda geçen terimlerin durma noktasında sonlu değerler alacağı görülebilir.

Bu denklemler yine herhangi standart bir yöntemle sayısal olarak çözülebilir. Basit bir çözüm

$$\boxed{(\theta R_\theta)_{i+1} = (\theta R_\theta)_i + \left[\frac{d(\theta R_\theta)}{dx}\right]_i \Delta x_i}$$

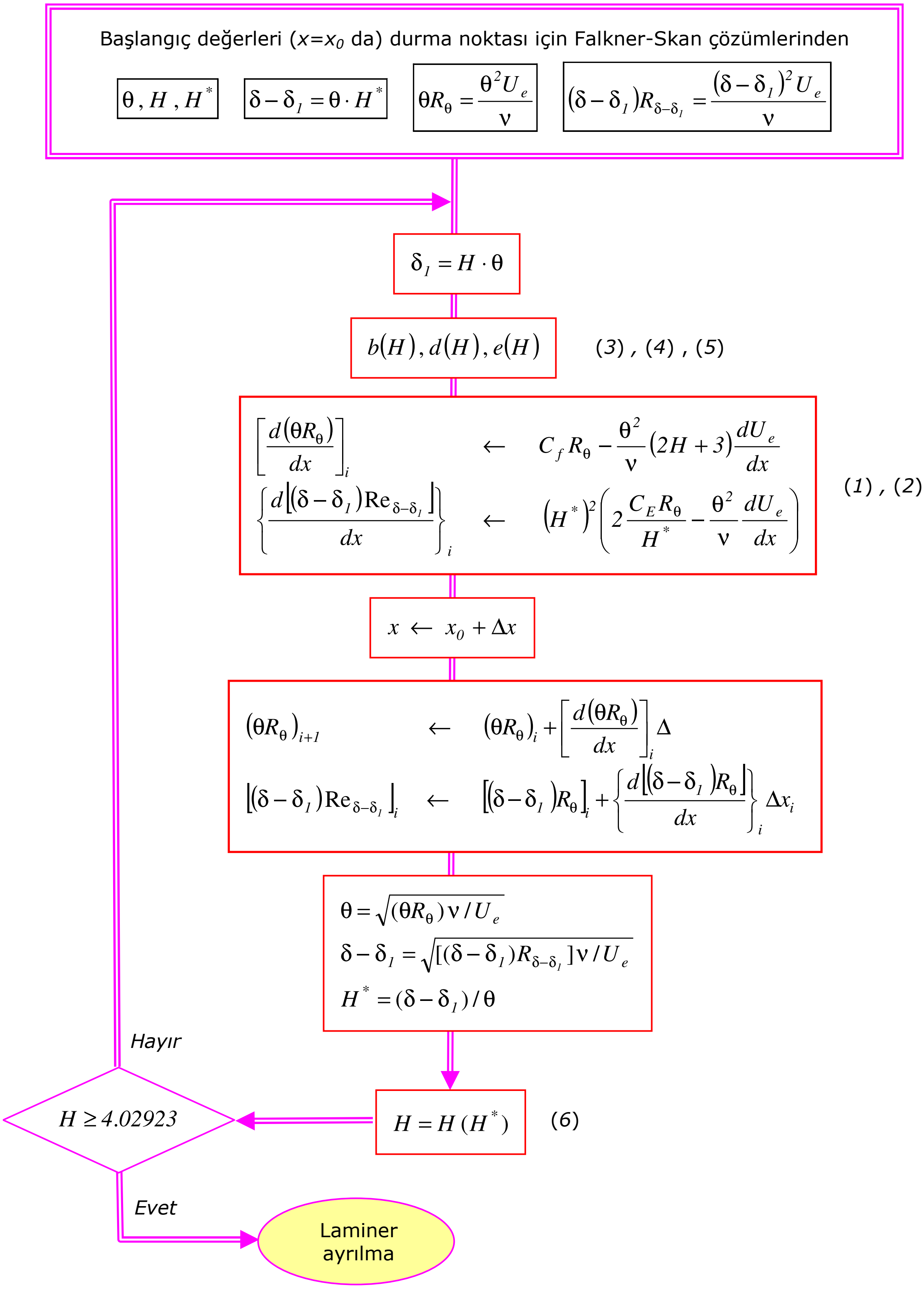
$$\boxed{\left[(\delta-\delta_1)R_{\delta-\delta_1}\right]_{i+1} = \left[(\delta-\delta_1)R_{\delta-\delta_1}\right]_i + \left\{\frac{d[(\delta-\delta_1)R_\theta]}{dx}\right\}_i \Delta x_i}$$

şeklinde Euler yöntemiyle elde edilebilir.

Uyarı-2

Düzenlenen denklemlerin durma noktasından itibaren başlatılan çözümünde de bir kararsızlık sorunu görülür. Bu bakımdan çözümün genel olarak durma noktasından $x \approx 0.1\,\delta$ kadar uzaklıktaki bir noktadan başlatılması önerilmektedir.

AKIŞ ŞEMASI


Başlangıç değerleri ($x=x_0$ da) durma noktası için Falkner-Skan çözümlerinden
θ , H , H^*
$\delta-\delta_1=\theta\cdot H^*$
$\theta R_\theta=\dfrac{\theta^2 U_e}{\nu}$
$(\delta-\delta_1)R_{\delta-\delta_1}=\dfrac{(\delta-\delta_1)^2 U_e}{\nu}$
$\delta_1=H\cdot\theta$
$b(H), d(H), e(H)$
(3) , (4) , (5)
$\left[\dfrac{d(\theta R_\theta)}{dx}\right]_i \leftarrow C_f R_\theta-\dfrac{\theta^2}{\nu}(2H+3)\dfrac{dU_e}{dx}$
$\left\{\dfrac{d\left[(\delta-\delta_1)\mathrm{Re}_{\delta-\delta_1}\right]}{dx}\right\}_i \leftarrow (H^*)^2\left(2\dfrac{C_E R_\theta}{H^*}-\dfrac{\theta^2}{\nu}\dfrac{dU_e}{dx}\right)$
(1) , (2)
$x \leftarrow x_0+\Delta x$
$(\theta R_\theta)_{i+1} \leftarrow (\theta R_\theta)_i+\left[\dfrac{d(\theta R_\theta)}{dx}\right]_i\Delta$
$\left[(\delta-\delta_1)\mathrm{Re}_{\delta-\delta_1}\right]_i \leftarrow \left[(\delta-\delta_1)R_\theta\right]_i+\left\{\dfrac{d\left[(\delta-\delta_1)R_\theta\right]}{dx}\right\}_i\Delta x_i$
$\theta=\sqrt{(\theta R_\theta)\nu/U_e}$
$\delta-\delta_1=\sqrt{[(\delta-\delta_1)R_{\delta-\delta_1}]\nu/U_e}$
$H^*=(\delta-\delta_1)/\theta$
$H=H(H^*)$
(6)
$H\geq 4.02923$
Hayır
Evet
Laminer ayrılma

KATILIM DENKLEMİNİN FARKLI DÜZENLENMESİ

$$\frac{d(\delta-\delta_1)}{dx} = C_E - \frac{\delta-\delta_1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$(\delta-\delta_1)\frac{dR_{\delta-\delta_1}}{dx} = (\delta-\delta_1)\frac{d}{dx}\left[\frac{(\delta-\delta_1)U_e}{\nu}\right]$$

$$R_{\delta_3} = \frac{(\delta-\delta_1)U_e}{\nu}$$

$$(\delta-\delta_1)\frac{dR_{\delta-\delta_1}}{dx} = \frac{(\delta-\delta_1)^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx} + R_{\delta-\delta_1}\frac{d(\delta-\delta_1)}{dx}$$

$$R_{\delta-\delta_1}\frac{d(\delta-\delta_1)}{dx} = C_E R_{\delta-\delta_1} - \frac{(\delta-\delta_1)^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$$

$$(\delta-\delta_1)\frac{dR_{\delta-\delta_1}}{dx} = R_{\delta-\delta_1} C_E$$

$$+$$

$$\frac{d[(\delta-\delta_1)R_{\delta-\delta_1}]}{dx} = 2C_E R_{\delta-\delta_1} - \frac{(\delta-\delta_1)^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\delta-\delta_1 = \theta\cdot H^*$$
$$R_{\delta-\delta_1} = R_\theta \cdot H^*$$

$$\frac{d[(\delta-\delta_1)R_{\delta-\delta_1}]}{dx} = 2C_E R_\theta H^* - \frac{\theta^2 (H^*)^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$$

MOMENTUM İNTEGRAL DENKLEMİNİN FARKLI DÜZENLENMESİ

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} - \frac{\theta}{U_e}(2+H)\frac{dU_e}{dx}} \qquad \boxed{\theta\frac{dR_\theta}{dx} = \theta\frac{d}{dx}\left(\frac{\theta U_e}{\nu}\right) = \frac{\theta}{\nu}\left(\theta\frac{dU_e}{dx} + U_e\frac{d\theta}{dx}\right)}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{R_\theta = \frac{\theta U_e}{\nu}} \quad \Rightarrow \quad \Downarrow \qquad\qquad \boxed{\theta\frac{dR_\theta}{dx} = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx} + R_\theta\frac{d\theta}{dx}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{R_\theta\frac{d\theta}{dx} = R_\theta\frac{C_f}{2} - \frac{\theta^2}{\nu}(2+H)\frac{dU_e}{dx}} \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Downarrow$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \boxed{\theta\frac{dR_\theta}{dx} = R_\theta\frac{C_f}{2} - \frac{\theta^2}{\nu}(H+1)\frac{dU_e}{dx}}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow \quad \Rightarrow + \Leftarrow \quad \Leftarrow \quad \Leftarrow \quad \Leftarrow \quad \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{d(\theta R_\theta)}{dx} = C_f R_\theta - \frac{\theta^2}{\nu}(2H+3)\frac{dU_e}{dx}}$$

KİNETİK ENERJİ İNTEGRAL DENKLEMİNİN FARKLI DÜZENLENMESİ

$$\frac{d\delta_3}{dx} = 2C_D - 3\frac{\delta_3}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$R_{\delta_3} = \frac{\delta_3 U_e}{\nu}$$

$$R_{\delta_3}\frac{d\delta_3}{dx} = R_{\delta_3} 2C_D - 3\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\delta_3 \frac{dR_{\delta_3}}{dx} = \delta_3 \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta_3 U_e}{\nu}\right) = \frac{\delta_3}{\nu}\left(\delta_3 \frac{dU_e}{dx} + U_e \frac{d\delta_3}{dx}\right)$$

$$\delta_3 \frac{dR_{\delta_3}}{dx} = \frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx} + R_{\delta_3}\frac{d\delta_3}{dx}$$

$$\delta_3 \frac{dR_{\delta_3}}{dx} = R_{\delta_3} 2C_D - 2\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$$

$+$

$$\frac{d\left(\delta_3 R_{\delta_3}\right)}{dx} = 4C_D R_{\delta_3} - 5\frac{\delta_3^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\boxed{\frac{C_E R_\theta}{H^*} = e(H)}$$ **BAĞINTISININ ÇIKARTILMASI**

Katılım denklemi

$$\frac{d(\delta-\delta_1)}{dx} = C_E - \frac{\delta-\delta_1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

Falkner-Skan tipi ($U_e=kx^m$) akımlar için

$H^*=Sb \qquad dH^*/dx=0$

$$\frac{d(\delta-\delta_1)}{dx} = \frac{d(H^*\theta)}{dx} = H^*\frac{d\theta}{dx}$$

$$H^*\frac{d\theta}{dx} = C_E - \frac{\theta H^*}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_E}{H^*} - \frac{\theta}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = 2\frac{C_D}{H_{32}} - 3\frac{\theta}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$H_{32}\frac{d\theta}{dx} = 2C_D - 3\frac{H_{32}}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\delta_3 = H_{32}\theta$$

$$\frac{d\delta_3}{dx} = 2C_D - 3\frac{\delta_3}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

Kinetik enerji integral denklemi

Momentum integral denklemi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} - \frac{\theta}{U_e}(2+H)\frac{dU_e}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{3}{2}\frac{C_E}{H^*} - \frac{C_D}{H_{32}}$$

$$\frac{\theta}{U_e}\frac{dU_e}{dx} = \frac{C_D}{H_{32}} - \frac{C_E}{2H^*}$$

$$\left[\frac{C_E R_\theta}{H^*}\right] = -\frac{2}{H-1}\left[\frac{C_f R_\theta}{2}\right] + \frac{H+1}{H-1}\left[\frac{2C_D R_\theta}{H_{32}}\right]$$

$\boxed{H^* = H^*(H)}$ BAĞINTISININ ÇIKARTILMASI

Katılım denklemi

$$\frac{d(\delta-\delta_1)}{dx} = C_E - \frac{\delta-\delta_1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\delta-\delta_1 = H^*\theta$$

$$H^*\frac{d\theta}{dx} + \theta\frac{dH^*}{dx} = C_E - \frac{\theta H^*}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

Kinetik enerji integral denklemi

$$\frac{d\delta_3}{dx} = 2C_D - 3\frac{\delta_3}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

$$\delta_3 = H_{32}\theta$$

$$H_{32}\frac{d\theta}{dx} + \theta\frac{dH_{32}}{dx} = 2C_D - 3\frac{\delta_{32}}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$$

Momentum integral denklemi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{C_f}{2} - \frac{\theta}{U_e}(2+H)\frac{dU_e}{dx}$$

$\frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}$ Elimine edilerek

$$\frac{C_E}{H^*} - \frac{H+1}{H-1}\frac{2C_D}{H_{32}} + \left(1-\frac{H+1}{H-1}\right)\frac{C_f}{2} + \frac{\theta}{H^*}\frac{dH^*}{dx} - \frac{\theta(H+1)}{H_{32}(H-1)}\frac{dH_{32}}{dx} = 0$$

$$\left[\frac{C_E}{H^*}\right] = -\frac{2}{H-1}\left[\frac{C_f}{2}\right] + \frac{H+1}{H-1}\left[\frac{2C_D}{H_{32}}\right]$$

$$\frac{1}{H^*}\frac{dH^*}{dx} = \frac{H+1}{H-1}\frac{1}{H_{32}}\frac{dH_{32}}{dx}$$

Falkner-Skan tipi ($U_e=kx^m$) akımlar için H_{32} x 'den bağımsız olup

$$\ln\frac{H^*}{H_0^*} = \int_{H_0}^{H}\frac{H+1}{H-1}\frac{1}{H_{32}}dH_{32}$$

$$H^* = H_0^*\exp\left(\int_{H_0}^{H}\frac{H+1}{H-1}\frac{1}{H_{32}}dH_{32}\right)$$