

BÖLÜM 4

SIKIŞTIRILAMAZ, SABİT-ÖZELLİKLİ LAMİNER AKIMLAR

İÇİN TAM VE SAYISAL ÇÖZÜMLER

4.1- Giriş

4.2- Paralel akımlar

4.2.1- Paralel levhalar arasında daimi akım:

4.2.2- Sonsuz geniş levha üzerindeki zamana bağlı akım

4.3- Hız alanı için benzerlik çözümleri

4.3.1- Düz levha üzerindeki sınır tabaka için tam çözüm

4.3.2- Basınç gradyanlı halinde benzerlik çözümleri

4.4- Düşük hızda enerji denklemi için benzerlik çözümleri

4.7- Sayısal çözümler

4.7.1- Sonlu fark yaklaşımı

4.7.2- Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için bir açık şema

4.7.3- Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için kapalı şemalar

4.7.4- Sınır tabaka denklemleri için faydalı bir değişken dönüşümü

EK-4 Üç-diyagonal denklemlerinin çözümü için Thomas yöntemi

BÖLÜM 4

SIKIŞTIRILAMAZ, SABİT-ÖZELLİKLİ LAMİNER AKIMLAR

İÇİN TAM VE SAYISAL ÇÖZÜMLER

4.1- Giriş

Önceki bölümde de gösterildiği gibi sınır tabaka problemlerinin matematiksel formülasyonu hayli karmaşık olup, incelemeler daimi, sıkıştırılmaz, sabit-özellikli akımlarla sınırlandırılrsa dahi sadece az sayıdaki halde tam (exact) analitik çözümler elde edilebilmektedir. Ve bu çözümlerin az bir kısmı pratik bir uygulamaya sahiptir. Bu bölümde bazı örnek haller incelenecek, iç akımlarla ilgili olan en geniş uygulamaya sahip haller ise Bölüm 8 de ele alınacaktır.

4.2- Paralel akımlar

Paralel akımlar hızın sadece $u(y)$ bileşeninin olması ile karakterize edilmektedir. Bu akımlarda ekseri düzlemsel yüzeylerin $\pm x$ yönlerinde sonsuz uzun olduğu kabul edilmektedir. Bu bölümde bu gibi iki hal üzerinde ayrıntılı olarak durulacaktır.

Şimdilik hareket denklemlerinde sadece $u(y)$ olmasının sonuçlarını inceleyelim.

$$u = u(y) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow v = sb$$

Şayet akım geçirgen olmayan paralel bir katı yüzey ile sınırlanmışsa $v_w = 0$ olup her yerde $v = 0$ olur.

Momentum denklemi
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ve $v = 0$ koşulları
$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \quad (4.1)$$

şekline gelir. Bu eşitlik u bilinmeyen için tek bilinmeyenli bir denklem olup, lineer olması nedeniyle de hayli basit hale geldiği söylenebilir.

4.2.1- Paralel levhalar arasında daimi akım:

Bu problemde aralarındaki mesafe küçük olan çok geniş iki paralel levha arasındaki akım daimi halde incelenecektir. Levha uçlarından yeterince uzakta dikkate alınan akım uçlardan etkilenmeyecektir. Dolayısıyla incelemelerde levha girişinden olan x uzaklığı yer almayacaktır.

Bu problem için (4.1) denklemi
$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (4.2)$$

şeklinde lineer bir adi diferansiyel denkleme dönüşür.

Bu problemin iki farklı durumu vardır:

Birinci durumda alttaki levha sabit olup üstteki levha sabit bir hızla hareket etmektedir, ve akımda basınç gradyanı yoktur.

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -W \\ u = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} y = W \\ u = U_w \end{array} \right\}, \quad p = sb$$

Bu koşullarda denklem

$$\frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

olup, integre edilerek

$$u(y) = C_0 + C_1y$$

sınır koşulları uygulanarak

$$0 = C_0 + C_1(-W)$$

$$U_w = C_0 + C_1(W)$$

sabitler hesaplanıp

$$C_0 = \frac{U_w}{2}, \quad C_1 = \frac{U_w}{2W}$$

sonuçta çözüm için

$$\boxed{\frac{u(y)}{U_w} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{W} \right)} \quad (4.3)$$

elde edilir. Bu problem *Couette akımı* olarak bilinmektedir. Akım alt duvardaki sıfır hız ile üst duvardaki W hızı arasında lineer olarak değişmektedir.

İkinci durumda her iki levha da hareketsizdir. Ancak bu defa levhalar arasındaki akım sabit bir dp/dx basınç gradyanı etkisiyle hareket ettirilmektedir.

Bu durumda denklem

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{d^2u}{dy^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}$$

şeklinde olup integre edilerek

$$u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1y + C_0$$

sınır koşulları

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -W \\ u = 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} y = W \\ u = 0 \end{array} \right\}$$

uygulanarak

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (W)^2 + C_1(W) + C_0$$

$$0 = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (-W)^2 + C_1(-W) + C_0$$

sabitler hesaplanarak

$$C_0 = -\frac{W^2}{2\mu} \frac{dp}{dx}, \quad C_1 = 0$$

sonuçta çözüm

$$u(y) = -\frac{W^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{W^2}\right) \quad (4.4)$$

olarak elde edilir. Bu, parabolik bir hız dağılımı olup x eksenine göre simetriktir.

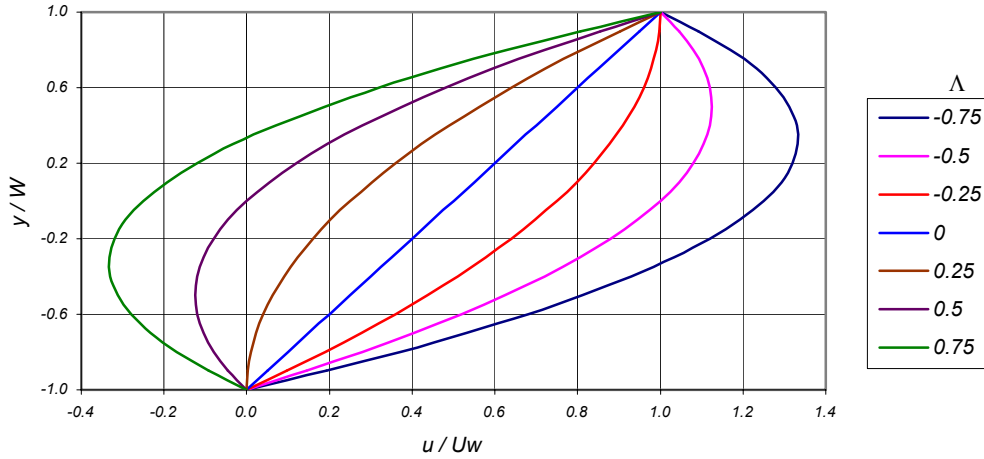
İncelenen diferansiyel denklem lineer olduğundan bu iki çözümü süperpoze ederek, alttaki levhanın hareket ettiği basınç gradyantlı bir akım için çözümü kolaylıkla elde etmek mümkündür:

$$\frac{u(y)}{U_w} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{y}{W}\right) - \frac{W^2}{2\mu U_w} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{y^2}{W^2}\right) \quad (4.4)$$

Burada görüldüğü gibi:

- Basınç gradyanı negatif ise, yani x yönünde basınç giderek azalıyor ise $u(y)$ hızı her yerde pozitif, yani akım tamamıyla x yönündedir.
- Basınç gradyanı pozitif ise (ters basınç gradyanı) akım hareketsiz olan alt duvar civarında ters yönlüdür.

Basınç gradyanının çeşitli değerleri için hız dağılımları Şekil 4.1 de gösterilmiştir.



Şekil 4.1- İki paralel levha arasındaki Couette akımı $\left(\Lambda = \frac{W^2}{2\mu U_w} \frac{dp}{dx}\right)$

4.2.2- Sonsuz geniş levha üzerindeki zamana bağlı akım:

Buradaki problem başlangıçta hareketsiz olan x doğrultusundaki sonsuz geniş bir levhanın üzerinde oluşan zamana bağlı akım ile ilgilidir. Bu tip akımlar *Stokes akımları* olarak adlandırılır. Akımda basınç gradyanı olmayıp (4.1) momentum denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.6)$$

şeklini alır. Bu problem için de iki örnek hal söz konusudur.

Birinci halde levha $t=0$ anında aniden x doğrultusunda U_w hızıyla çekilmektedir. (4.6) denklemi lineer bir kısmi diferansiyel denklem olduğundan ve geometri, sınır ve başlangıç şartları basit olduğundan çözüm klasik yöntemlerle elde edilebilir. Nitekim dönüşüm teknikleriyle

$$\frac{u}{U_w} = \operatorname{erfc}\left(\frac{y}{\sqrt{4vt}}\right) \quad (4.7)$$

elde edilebilir. Buradaki $\operatorname{erfc}(x)$ büyüklüğü x değişkeninin *tamamlayıcı hata fonksiyonu* olarak bilinmekte olup değeri, x in sıfır değeri için 1 den başlayıp, x in sonsuz değeri için sıfıra gider. Erfc fonksiyonunun tablolanmış değerleri standart matematik tablolarında bulunur.

Sınır tabakanın kalınlığı, hızın 0.01 mertebesinde olduğu noktanın levhaya uzaklığı şeklinde tanımlanarak elde edilir:

$$\delta \approx 4\sqrt{vt} \quad (4.8)$$

Bu çözümün daha genel sınır tabakalar için ileride yapacağımız analizlerle ilgili önemli bir özelliği vardır. Şöyle ki bağımsız değişkenlerin her ikisi de sadece

$$y / \sqrt{4vt}$$

büyüklüğünün içinde geçmektedir. Şayet bu husus önceden bilinmiş olsaydı (4.6) denklemi

$$\text{tek bir} \quad \eta = y / \sqrt{4vt} \quad \text{bağımsız değişkeni ve}$$

$$\text{tek bir} \quad F(\eta) = u / U_w \quad \text{bağımlı değişkeni}$$

cinsinden

$$F'' + 2\eta F' = 0 \quad (4.9)$$

şeklinde bir adi diferansiyel denklem olarak yazılabilecekti. Bu denklemin sınır şartları da sadece η cinsinden

$$F(0) = 1, \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} F(\eta) = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece bu problemin bir kısmi diferansiyel denklemle ortaya konan daha karmaşık bir problem yerine bir adi diferansiyel denklemle yönetilen bir problem olarak incelenebildiği görülmektedir. Bu gibi durumlarda hız profillerine "*benzerdir*" denilmektedir. Yani herhangi t anlarındaki bütün boyutsuz $u(y)/U_w$ hız profilleri, y koordinatları $\sqrt{4vt}$ büyüklüğü ile boyusuzlaştırılmak kaydıyla birbirinin aynıdır.

Bu sınıftaki ikinci bir tip problem de levhanın x doğrultusunda salınım yaptığı halde görülür.

$$u(0, t) = U_w \cos(nt)$$

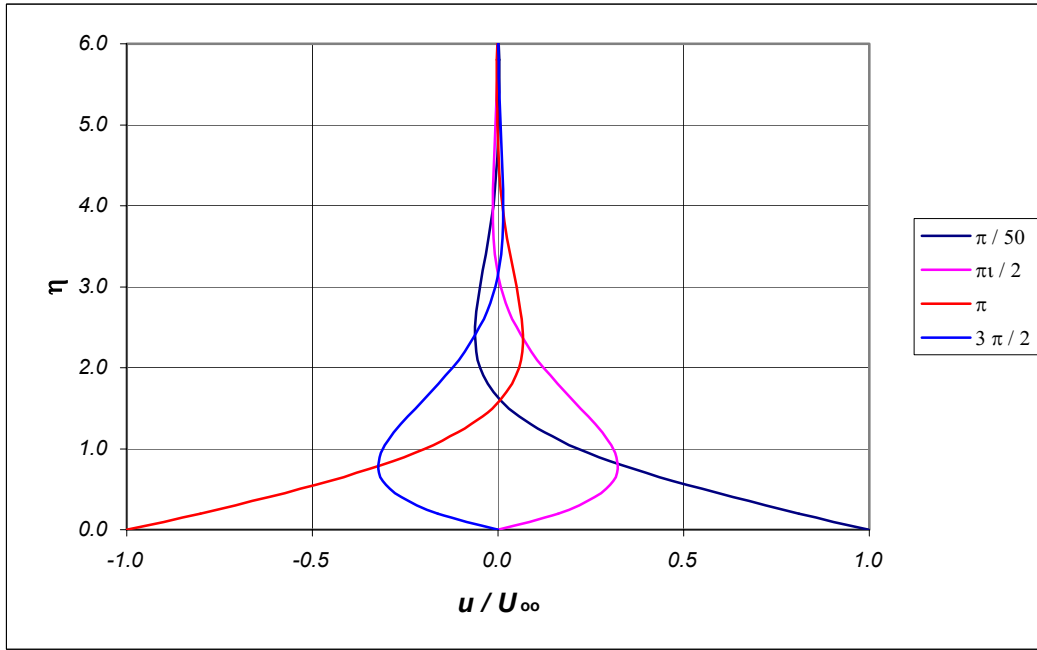
şeklindeki salınım hızları için standart matematiksel yöntemlerle

$$\frac{u}{U_w} = e^{-\sqrt{n/2\nu}y} \cos\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2\nu}}y\right) \quad (4.10)$$

şeklinde bir çözüm elde edilmektedir. Bu çözümün levha yüzeyinden olan uzaklık arttıkça genliği azalacak biçimde sönümlenen salınımları ifade ettiği görülmektedir. Ayrıca levha üzerindeki akışkanla y yüksekliğindeki akışkan arasında

$$y\sqrt{n/2\nu}$$

kadarlık bir faz farkı oluşmaktadır. Bazı örnek hız profilleri Şekil 4.2 de görülmektedir.



Şekil 4.2- Salınım yapan levha üzerinde akım $(\eta = y\sqrt{n/2\nu})$

4.3- Hız alanı için benzerlik çözümleri

Bir grup akım için nispeten basit tam çözümler elde etmek mümkündür. Bu sınıftan problemler paralel akımlardan daha genel olmakla birlikte denklemlerdeki basitleştirmeler o kadar fazla değildir. Bu bakımdan çözümlerin elde edilmesi daha zordur.

Daimi, düzlemsel, sabit-özellikli akımlar dikkate alınırsa hareket denklemleri

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

şeklinindedir. Buradaki zorluk denklemlerin non-lineer olmasından kaynaklanmaktadır. Oysa önceki problemlerde momentum denkleminin sol tarafındaki terimler yok olduğundan denklemler lineer hale gelmişti.

Öyle bir sınıf problem bulmak mümkün müdür ki bu problemler için kısmi diferansiyel denklemler, non-linear olsalar bile, adi diferansiyel denklemlere dönüştürülebilirler? İlk bakışta değişkenlerine ayırma yöntemi vasıtasıyla

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (4.11)$$

şeklinde bir ayrıştırma yapılarak bir kısmi diferansiyel denklemin iki adi diferansiyel denklem ayrılabilirliği aklı gelir. Ancak bu yöntem sınır tabaka problemleri için çalışmamaktadır. Bir başka olasılık x - veya y -bağımlılıklarından birinin ortadan kalkmasıdır ki bu da genel değildir. Son bir olasılık da x ve y değişkenlerinin fonksiyonu olan yeni bir $\eta(x,y)$ değişkeni tanımlamaktır. Böylece

$$u(x,y) = u[\eta(x,y)] \quad (4.12)$$

olur. Ancak sadece denklemlerin değil, aynı zamanda sınır koşullarının da bu tanımlama ile uyumlu olması gerekir. Şüphesiz bu yöntem bütün akımlar için geçerli olmayıp, sadece bir kısım akım tipinde söz konusudur.

Bu tip çözümlerin geliştirilmesi iki kaynağa dayanmaktadır:

Birincisi, deneylerden bilinmektedir ki düz levha üzerindeki sınır tabakada hız profilleri u/U_e ve y/δ şeklinde bir boyutsuzlaştırma yapıldığı takdirde levha boyunca değişmemektedir. Bu husus normalize edilmiş bütün hız profillerinin diğerleriyle aynı olduğu anlamına gelmektedir. Yine deneyler göstermektedir ki sınır tabaka kalınlığı levha hücum kenarından olan x uzaklığının karekökü ile orantılıdır:

$$\delta \approx \sqrt{x}$$

O halde y/\sqrt{x} karşılığında u/U_e için çizilecek hız profilleri de benzer olacaktır.

İkinci dayanak da, yukarıda incelenen aniden harekete geçen levha probleminin çözümüdür. Çözümün y/\sqrt{t} büyüklüğünü içermesi $\eta(x,y)$ şeklindeki bir değişkenin tanımlanması halinde $\delta \sim y/\sqrt{x}$ olabileceğini çağrıştırmaktadır.

4.3.1- Düz levha üzerindeki sınır tabaka için tam çözüm:

Düz levha üzerindeki sınır tabaka için tam (exact) çözüm orijinal olarak Prandtl'in doktora öğrencisi Blasius (1908) tarafından ortaya konmuştur. Çözüm için momentum denkleminin akım fonksiyonu cinsinden formülasyonu hatırlanırsa, basınç gradyantının olmadığı hal için

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (4.14)$$

şeklindedir. Hız profili

$$\frac{u}{U_e} = Af'(\eta); \quad \eta = \frac{By}{\sqrt{x}} \quad (4.15)$$

şeklinde bir $f(\eta)$ fonksiyonunun türevi cinsinden tanımlanabilir. Burada A ve B daha sonra bulunacak sabitlerdir.

Akım fonksiyonu duvar ile herhangi bir akım çizgisi arasından geçen debi ile ilgili olduğundan $\psi = \psi(\eta)$ olacağı söylenebilir. Ayrıca sınır tabakanın x uzaklıklarının karekökü ile ters orantılı olarak geliştiği bilinmekte olup

$$\psi \approx \sqrt{x} f(\eta) = C\sqrt{x} f(\eta) \quad (4.16)$$

yazılabilir. Burada C de bir başka uygunluk sabitidir. Bu bağıntı (4.14) denkleminde kullanılarak A, B ve C sabitlerinin değerleri bulunabilir. Böylece

$$\begin{aligned} \eta &= y \sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}} \\ \frac{u}{U_e} &= Af'(\eta) \\ \psi &= \sqrt{2\nu U_e x} f(\eta) \\ v &= \sqrt{\frac{\nu U_e}{2x}} (\eta f' - f) \end{aligned} \quad (4.17)$$

dönüşüm bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılarla momentum denklemi de

$$\boxed{f'''' + ff'' = 0} \quad (4.18)$$

şekline gelir. Bu denklem basit görünmekle birlikte ff'' teriminde non-lineerlik olduğu belirtilmelidir.

Sınır şartlarına gelince x, y düzleminde

$$\begin{aligned} y=0 \text{ da } x \geq 0 \text{ için} & \quad u(x,0) = v(x,0) = \psi(x,y) = 0 \\ y \rightarrow \infty \text{ da bütün } x \text{ ler için} & \quad u(x,y) \rightarrow U_e \\ x=0 \text{ da } y > 0 \text{ için} & \quad u(0,y) \rightarrow U_e \end{aligned} \quad (4.19)$$

olup, burada sonucu koşul akımın levha hücum kenarına kadar üniform-paralel geldiğini belirtmektedir. Değişken dönüşümleriyle bu koşullar

$$\boxed{\begin{aligned} \eta=0, & \quad f(0) = f'(0) = 0 \\ \eta \rightarrow \infty, & \quad f'(\infty) \rightarrow 1 \end{aligned}} \quad (4.20)$$

şekline gelir.

Blasius (4.18) denklemini sınır tabaka içinde birleştirdiği iç ve dış seri açılımları kullanarak çözümlenmiştir. Günümüzde ise sayısal çözüm tekniklerinden yararlanmak mümkündür. Sınır şartları duvar üzerinde ve sınır tabakanın kenarında, yani farklı iki sınır üzerinde verildiği için problem bir "*sınır değer problemi*" olup sayısal yöntem kullanıldığı takdirde ancak iteratif olarak çözülebilir. Genel çözüm tekniği kısaca özetlenirse

- (4.19) denklemi üçüncü dereceden bir adi diferansiyel denklem olup, önce

$$f = f_0; \quad f' = f_1; \quad f'' = f_2$$

şeklinde bir değişken dönüşümü uygulanarak

$$f_0' = f_1; \quad f_1' = f_2; \quad f_2' = -f_0 f_2$$

veya

$$\frac{df_0}{d\eta} = f_1; \quad \frac{df_1}{d\eta} = f_2; \quad \frac{df_2}{d\eta} = -f_0 f_2$$

şeklinde üç adet birinci dereceden adi diferansiyel denklem şekline dönüştürülür. Bu denklemlerin çözümü için gerekli üç sınır şartı da (4.20) bağıntılarından

$$f_0(0) = 0; \quad f_1(0) = 0; \quad f_1(\infty) = 1$$

olarak yazılabilir.

- Bu denklemlerin çözümü eş zamanlı olarak gerçekleştirilecektir. Çözüm için Runge-Kutta şeması gibi çok kullanılan sayısal yöntemler mevcuttur. Ancak burada, sadece çözüm sürecini göstermek bakımından, çok basit bir yöntem olan Euler yöntemi ele alınacaktır. Yöntemin esasını birinci mertebeden Taylor açılımı oluşturmaktadır.

$$f_0(\eta + \Delta\eta) = f_0(\eta) + \left(\frac{df_0}{d\eta}\right)_\eta \Delta\eta \quad \rightarrow \quad f_0(\eta + \Delta\eta) = f_0(\eta) + f_1(\eta)\Delta\eta$$

$$f_1(\eta + \Delta\eta) = f_1(\eta) + \left(\frac{df_1}{d\eta}\right)_\eta \Delta\eta \quad \rightarrow \quad f_1(\eta + \Delta\eta) = f_1(\eta) + f_2(\eta)\Delta\eta$$

$$f_2(\eta + \Delta\eta) = f_2(\eta) + \left(\frac{df_2}{d\eta}\right)_\eta \Delta\eta \quad \rightarrow \quad f_2(\eta + \Delta\eta) = f_2(\eta) - f_0(\eta)f_2(\eta)\Delta\eta$$

Görüldüğü gibi herhangi bir η noktasında $f_0(\eta)$, $f_1(\eta)$, $f_2(\eta)$ çözümleri ve $f_0'(\eta)$, $f_1'(\eta)$, $f_2'(\eta)$ türevlerinin değerleri bilindiği takdirde, $\eta + \Delta\eta$ noktasında $f_0(\eta + \Delta\eta)$, $f_1(\eta + \Delta\eta)$, $f_2(\eta + \Delta\eta)$ değerlerini hesaplamak mümkündür.

Ancak bu hesapların başlatılabilmesi için yüzey üzerinde fonksiyon değerlerinin ve türevlerinin bilinmesi gerekmektedir. Sınır şartlarından

$$f_0(0) = 0; \quad f_1(0) = 0$$

bilinmekle beraber üçüncü sınır şartı sınır tabakanın diğer sınırında verildiğinden

$$f_2(0)$$

değeri bilinmemektedir. İşte bu nedenle çözüm için bir iterasyon yapılması gerekmektedir.

f_0 ve f_1 için yüzey üzerinde verilen sınır koşulları yanında f_2 için tahminde bulunularak denklemler yukarıda izah edilen yöntemle veya daha yüksek mertebeden denklemlerle adım adım çözülür. η 'nın çok büyük değerleri için sınır tabakanın kenarındaki

$$f_1(\infty) = 1$$

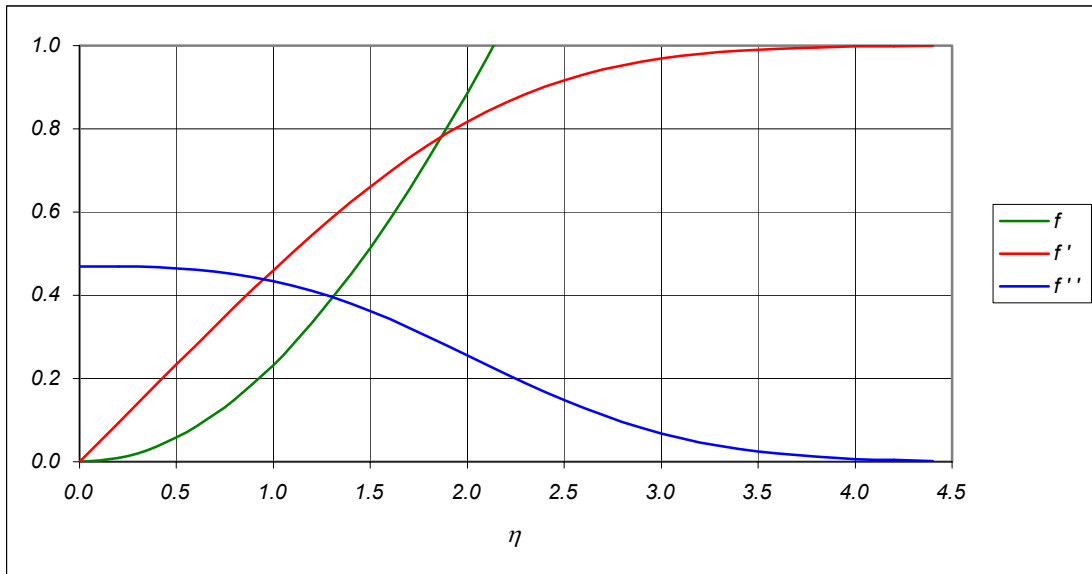
sınır şartının gerçekleşip gerçekleşmediği kontrol edilir.

- Bu koşul gerçekleşmemişse f_2 için yeni bir tahminde bulunularak aynı işlemler koşul gerçekleşinceye kadar tekrarlanır.

Denklemin 4. dereceden Runge-Kutta-Gill yöntemi ile elde edilmiş bir çözümüne ait sonuçlar Tablo 4.1 de ve Şekil 4.3 de yer almaktadır.

Tablo 4.1: Blasius denkleminin çözümü

h	f	f'	f''
0.0000	0.0000	0.0000	0.4696
0.2000	0.0094	0.0939	0.4693
0.4000	0.0375	0.1876	0.4673
0.6000	0.0844	0.2806	0.4617
0.8000	0.1497	0.3720	0.4512
1.0000	0.2330	0.4606	0.4344
1.2000	0.3337	0.5452	0.4106
1.4000	0.4507	0.6244	0.3797
1.6000	0.5830	0.6967	0.3425
1.8000	0.7289	0.7611	0.3004
2.0000	0.8868	0.8167	0.2557
2.2000	1.0549	0.8633	0.2106
2.4000	1.2315	0.9011	0.1676
2.6000	1.4148	0.9306	0.1286
2.8000	1.6033	0.9529	0.0951
3.0000	1.7956	0.9691	0.0677
3.2000	1.9906	0.9804	0.0464
3.4000	2.1875	0.9880	0.0305
3.6000	2.3856	0.9929	0.0193
3.8000	2.5845	0.9959	0.0118
4.0000	2.7839	0.9978	0.0069
4.2000	2.9836	0.9988	0.0039
4.4000	3.1834	0.9994	0.0021



Şekil 4.3: Blasius denkleminin çözümü

Sınır tabakanın dış kenarı alışlageldiği üzere hızın serbest akım hızının %99 una eriştiği $\eta=3.5$ noktası olup Blasius dönüşüm fonksiyonu yardımıyla sınır tabaka kalınlığı için

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}} \rightarrow 3.5 = \delta(x) \sqrt{\frac{U_e x}{\nu} \frac{1}{2x^2}} = \frac{\delta(x)}{x} \sqrt{\frac{Re_x}{2}}$$

$$\boxed{\delta(x) = \frac{5.0 x}{\sqrt{Re_x}}} \quad (4.23)$$

elde edilir. Aynı dönüşümler kullanılarak deplasman kalınlığı için

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) dy = \int_0^{\eta(\delta)} (1 - f') d\left(\eta \sqrt{\frac{2\nu x}{U_e}}\right) = \sqrt{\frac{2\nu x^2}{U_e x}} [\eta - f]_0^{\eta(\delta)}$$

$$\delta^* = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{U_e x / \nu}} \{\eta(\delta) - f[\eta(\delta)]\} = \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{Re_x}} \{3.5 - 2.2863\}$$

$$\boxed{\delta^* = \frac{1.721 x}{\sqrt{Re_x}}} \quad (4.24)$$

bulunur. Momentum kalınlığı için

$$\theta = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_e}\right) \frac{u}{U_e} dy = \sqrt{\frac{2\nu x}{U_e}} \int_0^{\eta(\delta)} (1 - f') f' d\eta = \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{Re_x}} \left[\int_0^{\eta(\delta)} f' d\eta - \int_0^{\eta(\delta)} (f')^2 d\eta \right]$$

yazılabilir. Buradaki ilk terim doğrudan ve ikinci terim de kısmi integrasyonla

$$\theta = \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{Re_x}} \left\{ f[\eta(\delta)] - (f f')_0^{\eta(\delta)} + \int_0^{\eta(\delta)} f f'' d\eta \right\}$$

şekline veya ayrıca $f''' + ff'' = 0 \rightarrow ff'' = -f'''$

olduğundan

$$\theta = \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{Re_x}} \left\{ f[\eta(\delta)] - f[\eta(\delta)] f'[\eta(\delta)] + f(0) f'(0) - \int_0^{\eta(\delta)} f''' d\eta \right\}$$

şekline getirilebilir. Son terimdeki integral alınarak ve ayrıca yüzey üzerindeki ve sınır tabakanın dış kenarındaki değerler kullanılarak sonuçta momentum kalınlığı için

$$\boxed{\theta = \frac{0.664 x}{\sqrt{Re_x}}} \quad (4.25)$$

bulunur. Yüzeyde kayma gerilmesi

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \rho \nu U_e \left[\frac{\partial f'}{\partial \eta} \right]_{\eta=0} \sqrt{\frac{U_e}{2\nu x}} = \rho U_e^2 \sqrt{\frac{\nu}{2U_e x}} (f'')_{\eta=0} = \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{2} \sqrt{\text{Re}_x}} f''(0)$$

olup böylece yüzey sürtünme katsayısı için de

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_e^2} \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{2} \sqrt{\text{Re}_x}} f''(0) = \frac{\sqrt{2} f''(0)}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{\sqrt{2} \times 0.4696}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\boxed{C_f = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}} \quad (4.26)$$

elde edilir.

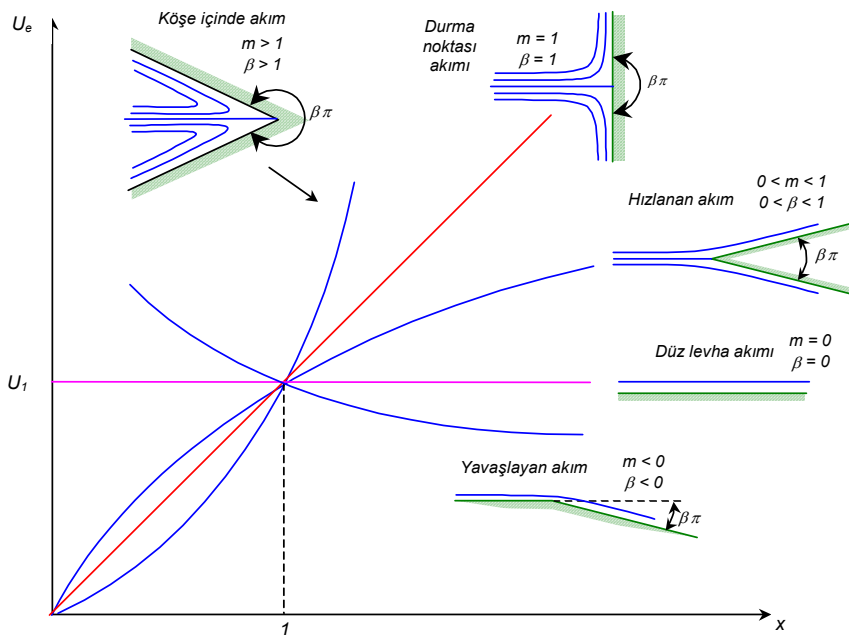
4.3.2- Basınç gradyanı halinde benzerlik çözümleri:

Bir cisim etrafından geçen akımda yüzey boyunca genel olarak basınç gradyanı değişir. Örnek olarak bir kanat profili etrafındaki akım dikkate alınır, durma noktasından maksimum kalınlık noktasına kadar olumlu bir basınç gradyanı ($dp/dx < 0$) görülür. Maksimum kalınlık noktası civarında basınç gradyanı küçülür ($dp/dx \approx 0$). Daha sonra da bir ters basınç gradyanı ($dp/dx > 0$) vardır. Bu bölgelerdeki hız profilleri birbirinin benzeri değildir.

Ancak bazı akımlar vardır ki bunlarda basınç gradyanı özel bir değişim gösterir. Öyle ki, bu akımda oluşan hız profilleri benzerlik gösterir. Bunun bir örneği bir köşe etrafındaki akım olup, dış akım hızı

$$U_e(x) = U_1 x^m$$

şeklinde bir değişim gösterir. Burada m basınç gradyanı parametresi olup, hız ifadesinden türev alınarak



Şekil - Köşe akımları

$$m = \frac{x}{U_e} \frac{dU_e}{dx}$$

ve köşe açısı β ile m basınç gradyanti parametresi arasında

$$\beta = \frac{2m}{m+1}$$

ilişkisi olduğu gösterilebilir. Bu akım için

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

momentum denklemi

$$\eta = y \sqrt{\frac{m+1}{2} \frac{U_e}{\nu x}}; \quad \psi = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \sqrt{\nu U_e x} f(\eta) \quad (4.28)$$

dönüşümleri yardımıyla

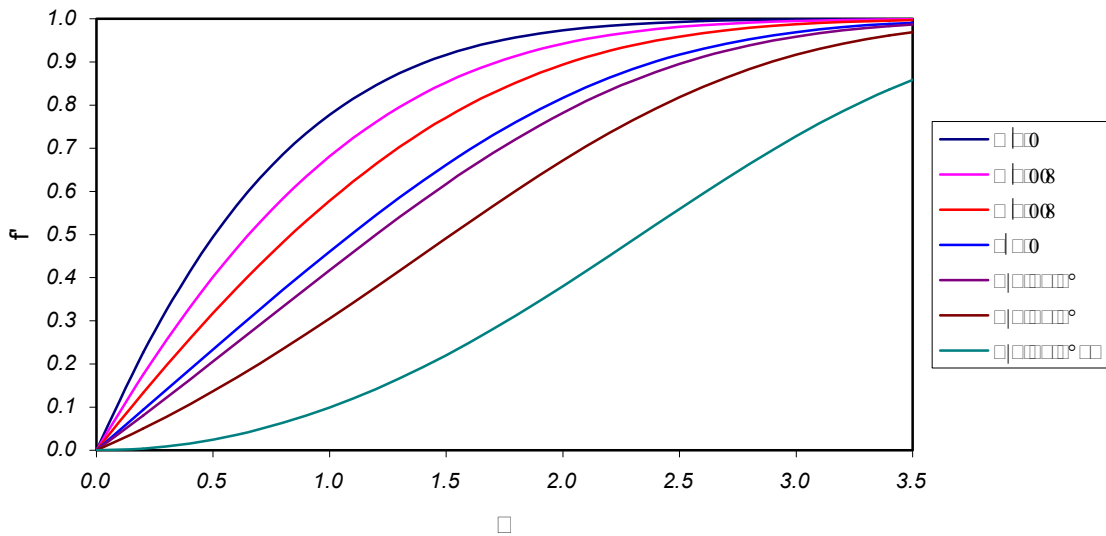
$$\boxed{f'''' + ff'' + \beta [1 - (f')^2]} = 0 \quad \text{Falkner-Skan denklemi} \quad (4.27)$$

şekline ve sınır şartları da düz levha halinde olduğu gibi

$$\boxed{\begin{array}{l} \eta = 0 \quad f(0) = f'(0) = 0 \\ \eta \rightarrow \infty \quad f'(\infty) \rightarrow 1 \end{array}}$$

şekline getirilebilir.

Falkner-Skan denkleminin çözümü ilk kez Hartree tarafından elde edilmiştir. β parametresinin bazı değerleri için elde edilen hız profilleri Şekil 4.4 de sunulmuştur.



Şekil 4.4: Falkner-Skan akımlarında hız profilleri

Burada $\beta = m = 0$ halinde basınç gradyanı sıfır olup bu, düz levha üzerindeki sınır tabaka halidir. $\beta < 0$ değerleri ters basınç gradyanlarını temsil etmekte olup $\beta = -0.1988$ değeri ayrılma haline karşılık gelmektedir. $\beta > 0$ değerleri olumlu (negatif) basınç gradyanlarını temsil etmekte olup, $\beta = m = 1$ değeri durma noktası civarındaki düzlemsel akım haline karşılık gelmektedir.

Falkner-Skan benzerlik akımlarında deplasman kalınlığı, momentum kalınlığı ve yüzey sürtünme katsayısı için sırasıyla

$$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{Re_x} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \int_0^{\eta(\delta)} (1-f') d\eta$$

$$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_x} = \sqrt{\frac{2}{m+1}} \int_0^{\eta(\delta)} (1-f') f' d\eta$$

$$C_f = 2 \sqrt{\frac{m+1}{2}} f''(0)$$

bağıntıları elde edilebilir. Çözümlerinin bazı önemli sonuçları Tablo 4.2 de sunulmuştur.

Tablo 4.2: Falkner-Skan çözümlerinin önemli sonuçları

m	β	$\frac{\delta}{x} \sqrt{Re_x}$	$C_f \sqrt{Re_x}$	$\frac{\delta^*}{x} \sqrt{Re_x}$	$\frac{\theta}{x} \sqrt{Re_x}$	H
1	1	2.4	2.465	0.648	0.292	2.219
1/3	1/2	3.4	1.515	0.985	0.429	2.296
0.111	0.20	4.2	1.025	1.320	0.548	2.409
0	0	5.0	0.664	1.721	0.664	2.592
-0.024	-0.05	5.4	0.559	1.879	0.701	2.680
-0.065	-0.14	5.8	0.328	2.334	0.788	2.962
-0.0904	-0.1988	7.1	0	3.427	0.868	3.948

Tablodaki değerlerden, uygun basınç gradyanlarının düz levhaya kıyasla daha büyük yüzey sürtünmesine yol açarken sınır tabakayı da daha ince kıldığı görülmektedir. Ters basınç gradyanı ise aksine yüzey sürtünmesini azaltırken sınır tabakanın daha kalın olmasına yol açmaktadır.

Falkner-Skan akımlarından durma noktası problemi ($\beta = m = 1$) küt bir cisim etrafında sınır tabaka hesaplanmalarının başlangıç koşullarını üretmesi bakımından ilgi çeker. Bu halde

$$\sqrt{Re_x} = \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} = \sqrt{\frac{U_1 x}{\nu}} = \sqrt{\frac{U_1}{\nu}} x \rightarrow \frac{\sqrt{Re_x}}{x} = \sqrt{\frac{U_1}{\nu}}$$

olup, Tablo 4.2 deki bilgilerle

$$\delta^* \frac{\sqrt{Re_x}}{x} = 0.648 \rightarrow \delta^* = \frac{0.648}{\sqrt{U_1 / \nu}}$$

$$\theta \frac{\sqrt{Re_x}}{x} = 0.292 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{0.292}{\sqrt{U_1/\nu}}$$

$$C_f \sqrt{Re_x} = 2.465 \quad \rightarrow \quad C_f = \frac{2.465}{x\sqrt{U_1/\nu}}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.216$$

elde edilir.

4.4- Düşük hızda enerji denklemi için benzerlik çözümleri

Daimi, düşük-hızlı, sabit-yoğunluklu, sabit-özellikli akım için enerji denklemi

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\nu}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (4.30)$$

şeklinde olup bu düz levha üzerindeki daimi akıma ait

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.31)$$

momentum denklemi ile karşılaştırılırsa, enerji denklemi için de benzerlik çözümleri olacağı beklenebilir.

Bir düz levha için duvar sıcaklığı sabit ve gelen akım sıcaklığı üniform olmak üzere sınır koşulları

$$\begin{aligned} y=0 \text{ da } x \geq 0 \text{ için} & \quad T = T_w = S_b \\ y \rightarrow \infty \text{ da bütün } x \text{ ler için} & \quad T = T_e = S_b \\ x=0 \text{ da } y > 0 \text{ için} & \quad T = T_e = S_b \end{aligned} \quad (4.32)$$

şeklindedir. Sıcaklıklar için

$$\theta(x,y) = \frac{T - T_w}{T_e - T_w} \quad (4.33)$$

şeklinde sıfır ile bir arasında değişen boyutsuz bir büyüklük tanımlanması daha uygun olur. Bu değişken dönüşümü viskoz sınır tabakanın (4.17) dönüşüm fonksiyonları ile birlikte kullanılarak (4.30) enerji denklemi

$$\theta'' + Pr \cdot f \theta' = 0 \quad (4.34)$$

ve sınır koşulları da

$$\theta(0) = 0; \quad \theta(\infty) = 1 \quad (4.34a)$$

şekline gelir.

$f(\eta)$ büyüklüğünün değerleri viskoz benzerlik denkleminde sayısal olarak elde edildiğinden (4.34) denkleminin çözümü ancak sayısal olarak gerçekleştirilebilir.

Viskoz sınır tabaka için benzerlik denklemini bir kez iteratif olarak çözüldükten sonra elde edilen $f''(0)$ değeri denklemin üçüncü başlangıç koşulu olarak kullanılmak kaydıyla viskoz benzerlik denklemini bir kez daha çözüldükten sonra sıcaklık benzerlik denkleminin de bununla birlikte eş zamanlı olarak, Runge-Kutta şeması veya benzeri bir teknikle çözülmüştür. Ancak sıcaklık için de sınır koşulları farklı sınırdan verildiğinden çözümün iteratif olarak elde edilmesi gerekir.

$$\boxed{f'''' + ff'' = 0} \quad f(0) = f'(0) = 0; \quad f''(0) = C \quad (4.18)$$

$$\boxed{\theta'' + Pr \cdot f \theta' = 0} \quad \theta(0) = 0; \quad \theta(\infty) = 1 \quad (4.34)$$

Bu iki denklemin eş zamanlı olarak çözülmesi için öncelikle birinci dereceden denklemlere ayrıştırılması gerekir. Bunun için

$$\begin{aligned} f &= f_0; & f' &= f_1; & f'' &= f_2 \\ \theta &= g_0; & \theta' &= g_1 \end{aligned}$$

şeklinde bir değişken dönüşümü uygulanarak denklemler

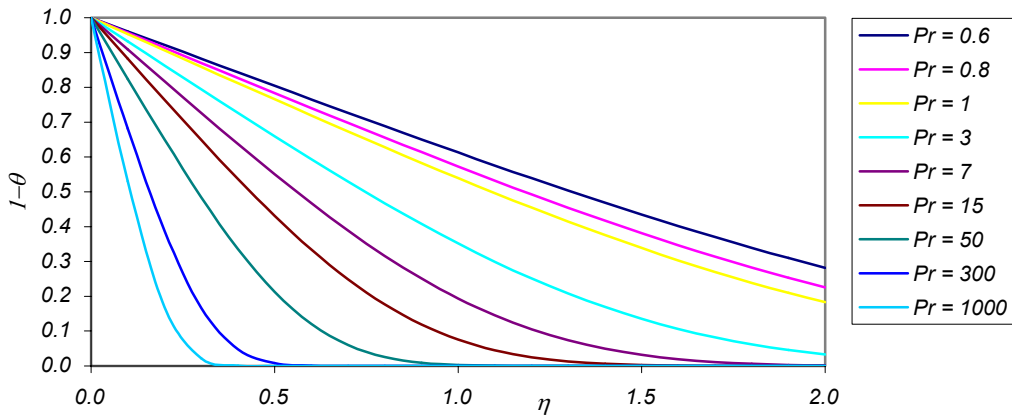
$$\begin{aligned} f_0' &= f_1; & f_1' &= f_2; & f_2' &= -f_0 f_2 \\ g_0' &= g_1; & g_1' &= -Pr \cdot f g_1 \end{aligned}$$

ve sınır şartları da

$$\begin{aligned} f_0(0) &= 0; & f_1(0) &= 0; & f_2(0) &= C \\ g_0(0) &= 0; & g_1(\infty) &= 1 \end{aligned}$$

şekline gelir.

Prandtl sayısının çeşitli değerleri için 4. mertebeden [Runge-Kutta-Gill yöntemi](#) kullanılarak elde edilen boyutsuz sıcaklık profilleri Şekil 4.5 de sunulmuştur.



Şekil 4.5: Düz levha üzerinde sıcaklık profilleri

4.7- Sayısal çözümler

4.7.1- Sonlu fark yaklaşımı

Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılmaz sınır tabaka için süreklilik ve momentum denklemleri

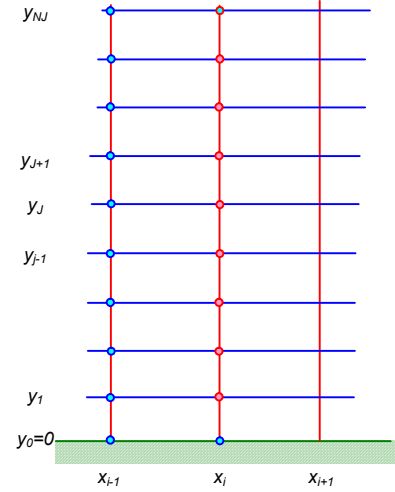
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e \frac{dU_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

olarak yazılabilir.

Sınır tabakanın, şekilde gösterildiği gibi x_{i-1} ile belirtilen herhangi bir konumunda düzenli olarak seçilen y_j noktalarında hız bileşenleri bilindiği takdirde yukarıdaki denklemler sayısal bir şekilde integre edilerek $x+\Delta x$ gibi bir sonraki istasyonda hız bileşenleri elde edilebilir.

Seçilen noktaların oluşturduğu yapıya ağ yapısı adı verilir. Şekildeki ağ yapısında mavi daireler hız bileşenlerinin bilindiği noktaları, kırmızı daireler ise hız bileşenlerinin bilinmediği, arandığı noktaları belirtmektedir.



Şekil - Sınır tabakada ağ yapısı

Sonlu fark yaklaşımında yukarıdaki denklemlerde geçen türevler Taylor açılımı yardımıyla yaklaşık formda ifade edilerek cebirsel denklemler haline getirilip çözülmeye çalışılır. Bir fonksiyonun herhangi bir nokta etrafında Taylor serisine açılış tarzına bağlı olmak üzere ileri, geri veya merkezi sonlu fark kavramları ortaya çıkar.

Birinci türev için formülasyon

Bir $f(x)$ fonksiyonunun $(x+\Delta x)$ ve $(x-\Delta x)$ noktalarındaki değeri Taylor seri açılımı ile

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

şeklinde yazılabilir. Bu bağıntılardan birinci türev çekilerek

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

elde edilir. Bu ifadeler yukarıda gösterildiği gibi bir ağ sistemindeki ayırık noktalar dikkate alınarak indissel formda

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

birinci mertebeden ileri fark formülasyonu

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

birinci mertebeden geri fark formülasyonu,

Şeklinde yazılabilir. Ayrıca ileri ve geri yöndeki Taylor açılımları birbirinden çıkartılarak

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

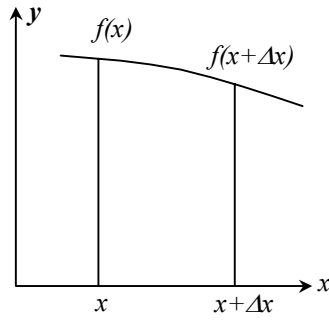
benzeri işlemler sonucu indissel formda

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2$$

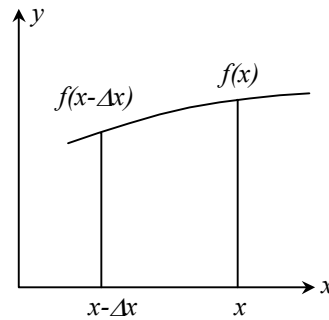
merkezi fark formülasyonu

elde edilir. İleri ve geri formülasyonlar birinci mertebeden bir hassasiyete sahipken merkezifark formülasyonunun *ikinci mertebeden* olduğu dikkati çekmektedir.

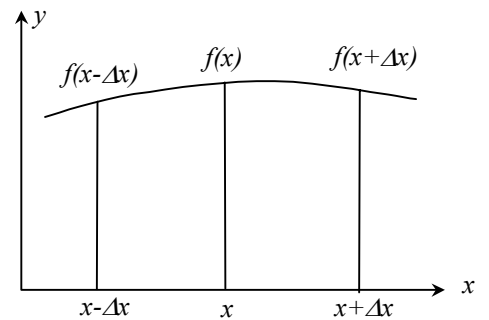
Birinci türev için yazılan formülasyonlarda hangi ağ noktalarının kullanıldığı aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.



a) İleri fark



b) Geri fark



c) Merkezi fark

İkinci türev için formülasyon

Taylor serisinin $(x+2\Delta x)$ noktasındaki açılımı

$$f(x + 2\Delta x) = f(x) + (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

şeklinde yazılabilir. Daha önceki

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

Taylor açılımı 2 ile çarpılıp bu denklemden çıkartılırsa;

$$f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) = -f(x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

ve buradan ikinci türev çekilirse,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)$$

veya indissel formda yazılarak

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad \text{ileri fark formülü}$$

elde edilir. Benzeri şekilde $(x - 2\Delta x)$ noktasındaki

$$f(x - 2\Delta x) = f(x) - (2\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(2\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(2\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

Taylor açılımından

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

açılımının iki katı çıkarılıp buradan ikinci türev çekilerek indissel formda

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_i - 2f_{i-1} + f_{i-2}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x) \quad \text{ikinci türevin geri fark formülü}$$

elde edilir. Şayet

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots$$

açılımları toplanarak buradan ikinci türev çekilirse indissel formda düzenlenerek

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad \text{ikinci türevin merkezi fark formülü}$$

elde edilir.

Sonlu fark denklemi

Bir kısmi diferansiyel denklemde yer alan bütün türevler yukarıda gösterilen yöntemlerle ayrıklaştırılarak denklemin tamamı ayrık formda yazılır ve sayısal çözümü bu şekilde araştırılır.

Örnek olarak bir $f = f(t, x, y)$ bağımlı değişkenine ait
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

denklemleri ele alınırsa, t anında f fonksiyonunun bütün x, y konumlarındaki değerleri bilindiği takdirde zamana göre türevin ileri farkla hesaplanması uygun olur:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Burada n üst-ındisi t anındaki bilinen değerleri, $n+1$ üst-ındisi $t+\Delta t$ anında bilinmeyen (aranan) değerleri, i ve j alt-ındisleri ise x ve y yönündeki konumları belirtmektedir.

Konuma göre türevlerin t_n anında veya t_{n+1} anında ayrıklaştırılmasına göre iki farklı sonlu fark denklemi elde edilebilir. t_n anında ayrıklaştırılma yapılırsa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} + O(\Delta y)^2$$

Böylece örnek denklemin sonlu fark formülasyonu

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^n - 2f_{i,j}^n + f_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right] + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

şekline gelir. t_{n+1} anında ayrıklaştırılma yapıldığı takdirde ise

$$\frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left[\frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \right] + O[\Delta t, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2]$$

elde edilir.

Bu iki formülasyon arasındaki temel farklılık elde edilen ayrıklaştırılmış denklemlerdeki bilinmeyen sayısıdır. Önceki denklemde bir tek bilinmeyen var iken, son denklemde 5 bilinmeyen vardır.

Önceki denklem bütün ağ noktalarında kolaylıkla hesaplanır ve bu formülasyona "*açık (explicit) formülasyon*" adı verilir.

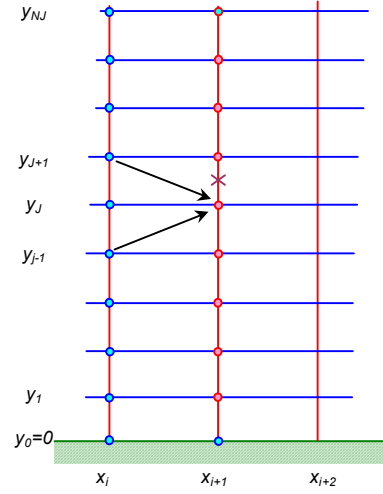
Buna karşılık son denklemin her bir ağ noktasında bağımsız olarak çözümü mümkün değildir. Bütün ağ noktalarında yazıldıktan sonra elde edilen denklem sisteminin eş zamanlı olarak çözülmesi gerekir. Bu nedenle bu formülasyona "*kapalı (implicit) formülasyon*" adı verilir.

4.7.2- Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için bir açık şema

Burada ele alınan yöntemde momentum denklemi akım doğrultusunda ilerleyen bir açık şema ile çözümlenerek $u(x,y)$ hız bileşeni elde edilirken, süreklilik denklemi de $v(x,y)$ hız bileşeninin elde edilmesinde kullanılacaktır (Wu yöntemi).

Bu amaçla sınır tabaka içerisinde şekilde gösterildiği gibi bir ayrıklaştırma yapıldığı, x_i istasyonunda hız bileşenlerinin bilindiğini ve x_{i+1} istasyonundaki hız bileşenlerinin arandığını varsayalım.

Duvar üzerinde hız bileşenlerinin her ikisinin de sıfır olduğu, sınır tabaka dışında ise u hız bileşeninin U_e kenar hızına eşit olduğu bilinmektedir.



Şekil – Sınır tabakada ayrıklaştırma

Momentum denklemindeki türevler

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y}$$

$$\frac{dU_e}{dx} = \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

şeklinde ayrıklaştırılabilir. Türevler denklemlerde kullanılarak

$$u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} = U_{ei} \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x} + v \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki tek bilinmeyen $u_{i+1,j}$ olup, bu büyüklük için düzenleme yapılarak

$$u_{i+1,j} = Q_{i,j} (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - [2Q_{i,j} - 1] u_{i,j} - \frac{v_{i,j}}{u_{i,j}} \frac{\Delta x}{\Delta y} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2} + \frac{U_{ei}}{u_{i,j}} \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x}$$

bulunur. Burada

$$Q_{i,j} = \frac{v\Delta x}{u_{i,j}(\Delta y)^2}$$

Süreklilik denklemindeki türevlerin x_i istasyonunda v hız bileşenini verecek biçimde ayrıklaştırılması gerekmektedir. v hızının duvar üzerindeki değeri sıfır olarak bilinmektedir. Bunu izleyen bir üst noktadaki v hızını bulabilmek için v nin y doğrultusundaki türevinin

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y}$$

şeklinde yazılması uygun olur. Bu ifadenin y_i ve y_{i+1} arasındaki orta noktada (şekilde çarpı işaretiyle belirtilen nokta) yazılmış bir merkezi fark ifadesi olduğu varsayılabilir. Bu

durumda süreklilik denkleminde yer alan x e göre türevin de buna uygun biçimde ayrıklaştırılması gerekir. Buna göre

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x}}{2}$$

yazılarak süreklilik denklemi

$$\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta y} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right) = 0$$

şekline gelir. Bu ifade bilinmeyen $v_{i,j}$ için

$$v_{i,j} = v_{i,j-1} + \frac{\Delta y}{2\Delta x} (u_{i,j} + u_{i,j-1} - u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1})$$

şeklinde düzenlenebilir.

Çözümün kararlılığı

Diferansiyel denklemlerin açık şema ile çözümünde en önemli konulardan birisi çözümün kararlılığı sorunudur. Burada söz konusu olan diferansiyel denklem non-lineer olduğundan kararlılık analizi için Karplus(1958) tarafından geliştirilen "devre analogisi" yöntemi uygulanacaktır.

Bu analogi bir elektrik direnç ağındaki voltaj veya akım şiddeti dağılımını modelleyen

$$a(\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) + b(\phi_{i,j-1} - \phi_{i,j}) + c(\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) + d(\phi_{i-1,j} - \phi_{i,j}) = 0$$

şeklindeki denkleme dayanmaktadır. Bu denklemde a pozitif bir büyüklük olup, ϕ herhangi bir bağımlı değişkendir. Gösterilebilir ki şayet (1) bütün katsayılar pozitif ise veya (2) bazıları negatif ve toplam negatif ise sistem kararlıdır.

Tartışılan bütün sonlu fark yaklaşımları yukarıdaki biçime sokulabileceğinden sonlu fark formülasyonunun kararlılığını incelemek için bu analogiden yararlanılabilir.

Şimdi momentum denkleminin

$$u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + v_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} = U_{ei} \frac{U_{ei+1} - U_{ei}}{\Delta x} + v \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}$$

şeklinde elde edilen sonlu fark açılımı

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} - \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + \left[\frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} + \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] (u_{i,j-1} - u_{i,j}) - u_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \\ = -U_{ei} (U_{ei+1} - U_{ei}) \end{aligned}$$

veya

$$a = -\left[\frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} - \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right]; \quad b = \left[\frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} + \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right]; \quad c = -u_{i,j}; \quad d = 0$$

olmak üzere

$$a(u_{i,j+1} - u_{i,j}) + b(u_{i,j-1} - u_{i,j}) + c(u_{i+1,j} - u_{i,j}) = -U_{ei}(U_{ei+1} - U_{ei})$$

şeklinde düzenlenirse yukarıdaki model denkleme benzemesi için öncelikle $a > 0$ olması gerekmektedir.

- $v_{i,j} < 0$ ise $a > 0$ dır.

- $v_{i,j} > 0$ ise $a = -\frac{\Delta x}{\Delta y} \left[\frac{1}{2} v_{i,j} - \frac{v}{\Delta y} \right] > 0$ için $v_{i,j} < \frac{2v}{\Delta y}$ olmalıdır.

- Sınır tabakada ayrılma olmadığı için $u_{i,j} > 0$ olup, böylece $c < 0$ dır.

Bu durumda kararlılık için katsayıların toplamının negatif olması gerekmektedir.

$$a + b + c = -\left[\frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} - \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] + \left[\frac{\Delta x}{2\Delta y} v_{i,j} + \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} \right] - u_{i,j} = 2 \frac{v\Delta x}{(\Delta y)^2} - u_{i,j} < 0$$

Buradan sonuç olarak kararlılık için

$$\Delta x < \frac{u_{i,j}(\Delta y)^2}{2v}$$

olması gerektiği ortaya çıkar. Sınır tabakada duvar haricinde en düşük hız duvarın üzerindeki ilk ağ noktasında olacaktır. Bu ağ noktasının duvara uzaklığı Δy olmak üzere yukarıdaki koşul yerine getirilerek x doğrultusundaki adım uzunluğu tespit edilir.

Örnek 4.1:

Kinematik viskozitesi $\nu = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir akışkanın 10 m/s hızdaki akımı içerisinde akıma paralel bir düz levhanın yer aldığı, levha hücum kenarının 1 m gerisinden itibaren bir rampa olduğunu ve bu rampa boyunca akım hızının $U_e(x) = 10.5 - 0.5x \text{ m/s}$ şeklinde değiştiğini varsayınız (Howard akımı).

Bu levha üzerindeki sınır tabakayı $x = 2.0$ noktasına kadar hesaplayınız. Sınır tabaka ters basınç gradyanı etkisiyle ayrılır mı, tespit ediniz.

Çözüm:

Bu örnek daha önce Thwaites-Walz yöntemi kullanılarak incelenmişti. Şimdi daha kuvvetli ve hız dağılımını ayrıntılı olarak verecek bir yöntemle incelenecektir.

Ancak bu incelemelerde kolaylık bakımından denklemlerin boyusuzlaştırılmasında yarar vardır. Bu amaçla akım büyüklükleri serbest akım hızı U_∞ ve katı yüzeyin karakteristik uzunluğu L olmak üzere

$$\bar{u} = \frac{u}{U_\infty}; \quad \bar{v} = \frac{v}{U_\infty}; \quad \bar{U}_e = \frac{U_e}{U_\infty}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{y} = \frac{y}{L}$$

şeklinde boyusuzlaştırılarak

$$\text{Süreklilik denklemi} \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\text{Momentum denklemi} \quad \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

şekline gelir. Buradaki Reynolds sayısı serbest akım hızı ve karakteristik uzunluk cinsinden

$$\text{Re} = U_\infty L / \nu$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Momentum denklemi daha önce gösterildiği biçimde ayrıştırılarak

$$\bar{u}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta \bar{x}} + \bar{v}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{i,j-1}}{2\Delta \bar{y}} = \bar{U}_e \frac{\Delta \bar{U}_e}{\Delta \bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - 2\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1}}{(\Delta \bar{y})^2}$$

Veya yeni bir düzenleme ile

$$A = \frac{1}{\text{Re}} - \frac{\bar{v}_{i,j}\Delta \bar{y}}{2}; \quad B = \frac{1}{\text{Re}} + \frac{\bar{v}_{i,j}\Delta \bar{y}}{2}; \quad C = \bar{U}_e \frac{\Delta \bar{U}_e}{\Delta \bar{x}} (\Delta \bar{y})^2 - 2 \frac{\bar{u}_{i,j}}{\text{Re}}; \quad h = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{u}_{i,j} (\Delta \bar{y})^2}$$

olmak üzere

$$\bar{u}_{i+1,j} = \bar{u}_{i,j} + h [A\bar{u}_{i,j+1} + B\bar{u}_{i,j-1} + C]$$

şeklinde düzenlenebilir. Boyutsuzlaştırılmış süreklilik denklemi de daha öncekine benzer biçimde ayrıştırılarak aşağıdaki şekle gelir:

$$\bar{v}_{i,j} = \bar{v}_{i,j-1} + \frac{\Delta \bar{y}}{2\Delta \bar{x}} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1} - \bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i+1,j-1})$$

Bu formüller yardımıyla bir kez hız bileşenleri elde edildikten sonra sınır tabakanın global büyüklükleri hesaplanır.

Örneğin yüzeydeki kayma gerilmesi yüzey üzerindeki hız $u_{i,1} = 0$ olmak üzere üç noktadan bir parabol geçirilerek

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\mu}{2\Delta y} (4u_{i,2} - u_{i,3})$$

ve böylece yüzey sürtünme katsayısı da

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_e^2} = \frac{\mu}{\rho U_e^2 \Delta y} (4u_{i,2} - u_{i,3}) = \frac{1}{\text{Re} \bar{U}_e^2 \Delta \bar{y}} (4\bar{u}_{i,2} - \bar{u}_{i,3})$$

şeklinde hesaplanabilir.

Sınır tabaka kalınlığı her zaman olduğu gibi hızın kenar hızının %99 una eriştiği nokta araştırılarak bulunur. Deplasman ve momentum kalınlıkları ise hız profilinin trapez kuralı kullanılarak integrasyonu yoluyla elde edilebilir.

Burada söz konusu olan problem için $U_\infty = 10 \text{ m/s}$ olup levhanın karakteristik uzunluğu $L = 1 \text{ m}$ olarak alınacaktır.

Levhanın ilk 1 m lik kısmında basınç gradyanı olmayıp bu bölgede Blasius denklemi geçerlidir. Bu denklemin çözümü yardımıyla basınç gradyanının olduğu bölge için $x = 1 \text{ m}$ de başlangıç şartları elde edilir. Buna göre $x = 1 \text{ m}$ de

$$\text{Lokal Reynolds sayısı} \quad Re_x = \frac{U_e x}{\nu} = \frac{10 \cdot 1}{2 \times 10^{-4}} = 5 \times 10^4$$

$$\text{Sınır tabaka kalınlığı} \quad \delta = \frac{5.0 x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5.0 \times 1}{\sqrt{5 \cdot 10^4}} = 0.0224 \text{ m}$$

$$\text{deplasman kalınlığı} \quad \delta^* = \frac{1.721 x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{1.721 \times 1}{\sqrt{5 \cdot 10^4}} = 0.0077 \text{ m}$$

$$\text{Momentum kalınlığı} \quad \theta = \frac{0.664 x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{0.664 \times 1}{\sqrt{5 \cdot 10^4}} = 0.00297 \text{ m}$$

$$\text{Şekil parametresi} \quad H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{0.0077}{0.00297} = 2.5926$$

$$\text{Sürtünme katsayısı} \quad C_f = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} = \frac{0.664}{\sqrt{5 \cdot 10^4}} = 0.00297$$

Levhanın karakteristik uzunluğu 1 m alındığından buradaki kalınlıkların ayrıca boyutsuzlaştırılmasına gerek kalmamıştır.

Levhanın döndüğü $\bar{x} = 1$ noktasında y doğrultusunda $\Delta \bar{y} = 0.00112$ aralıkla 100 nokta alalım. Böylece bu noktalardan

$$\frac{\delta}{\Delta y} = \frac{0.0224}{0.00112} = 20$$

adedi sınır tabakanın içinde kalacaktır. Diğer noktalar ise levha boyunca giderek sınır tabaka kalınlaşacağı için ilave edilmiştir.

Kullanılan çözüm yöntemi açık (explicit) şema olduğu için akım doğrultusundaki Δx adımını serbest seçme olanağı yoktur. Bunu kararlılık kriteri belirleyecektir.

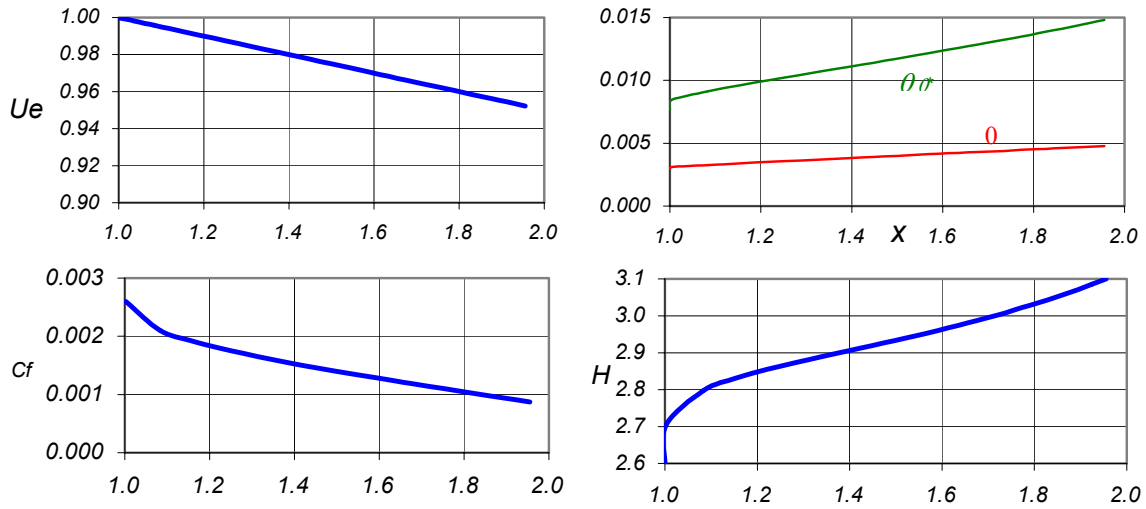
$\bar{x} = 1$ noktasından itibaren çözümün başlatılabilmesi için ayrıca bu istasyondaki hız profiline ihtiyaç vardır. Bunun için kolaylık bakımından örneğin

$$\frac{u}{U_e} = \frac{3}{2} \zeta - \frac{1}{2} \zeta^3 ; \quad \zeta = \frac{y}{\delta}$$

kübik hız profili kullanılabilir.

Tablo: Howard tipi akımda açık formülasyonla sınır tabaka çözümü sonuçları

n	x	U_e	θ	θ^*	δ	H	C_f
0	1.00000	1.00000	0.02240	0.008	0.00297	2.59200	0.00297
1	1.00188	0.99991	0.02128	0.008	0.00311	2.70365	0.00260
51	1.08290	0.99585	0.02240	0.009	0.00327	2.79783	0.00210
101	1.15457	0.99227	0.02352	0.010	0.00340	2.83169	0.00193
151	1.22068	0.98897	0.02464	0.010	0.00351	2.85486	0.00180
201	1.28248	0.98588	0.02576	0.010	0.00362	2.87348	0.00170
251	1.34070	0.98297	0.02688	0.011	0.00372	2.88978	0.00161
301	1.39581	0.98021	0.02800	0.011	0.00382	2.90480	0.00153
351	1.44816	0.97759	0.02912	0.011	0.00391	2.91909	0.00146
401	1.49801	0.97510	0.02912	0.012	0.00399	2.93299	0.00140
451	1.54558	0.97272	0.03024	0.012	0.00408	2.94667	0.00134
501	1.59105	0.97045	0.03024	0.012	0.00415	2.96026	0.00129
551	1.63457	0.96827	0.03136	0.013	0.00423	2.97384	0.00124
601	1.67626	0.96619	0.03136	0.013	0.00430	2.98745	0.00119
651	1.71624	0.96419	0.03248	0.013	0.00437	3.00114	0.00114
701	1.75460	0.96227	0.03248	0.013	0.00443	3.01491	0.00110
751	1.79144	0.96043	0.03360	0.014	0.00450	3.02879	0.00106
801	1.82683	0.95866	0.03360	0.014	0.00456	3.04278	0.00102
851	1.86084	0.95696	0.03472	0.014	0.00461	3.05690	0.00098
901	1.89354	0.95532	0.03472	0.014	0.00467	3.07115	0.00094
951	1.92499	0.95375	0.03584	0.015	0.00472	3.08553	0.00091
1001	1.95523	0.95224	0.03584	0.015	0.00478	3.10004	0.00087
1051	1.98433	0.95078	0.03584	0.015	0.00483	3.11469	0.00084



Şekil: Howard tipi akımda sınır tabakanın karakteristik büyüklükleri

4.7.3- Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için kapalı şemalar

Sınır tabaka denklemlerinin çözümü için değişik kapalı formülasyonlar uygulamak mümkündür.

İlk kapalı şemalardan birisi Parr (1963) tarafından geliştirilmiştir. Parr momentum denkleminde y doğrultusundaki türevleri Crank-Nicolson yöntemiyle

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1}}{2\Delta y} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \right]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{1}{2} \left[\frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{(\Delta y)^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} \right]$$

ve x doğrultusundaki türevleri de ileri farklarla

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

şeklinde ayrıştırılarak şartsız olarak kararlı bir çözüm yöntemini ortaya koymuştur.

Daha basit bir ayrıştırma Grossman ve Schetz (1985) tarafından geliştirilmiş olup bu yöntem aşağıdaki örnekte incelenecektir.

Örnek 4.2:

Kinematik viskozitesi $\nu = 2.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ olan bir akışkanın 10 m/s hızdaki akımı içerisinde akıma paralel bir düz levhanın yer aldığı, levha hücum kenarının 1 m gerisinden itibaren bir rampa olduğunu ve bu rampa boyunca akım hızının $U_e(x) = 10.5 - 0.5x \text{ m/s}$ şeklinde değiştiğini varsayınız (Howard akımı). Bu hız dağılımı bir ters basınç gradyanı yaratmaktadır.

Bu levha üzerindeki sınır tabakayı $x = 2.0$ noktasına kadar hesaplayınız. Sınır tabaka ters basınç gradyanı etkisiyle ayrılır mı, tespit ediniz.

Çözüm:

Bu örnek daha önce Thwaites-Walz yöntemi kullanılarak ve ayrıca açık formülasyonlu bir sonlu fark yöntemiyle incelenmişti. Burada kapalı formülasyonlu bir sonlu fark yöntemi uygulanacaktır. Problemin çoğu girdileri açık yöntemdekiyle aynıdır. Denklemler yine boyutsuz olarak

Süreklilik denklemi
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

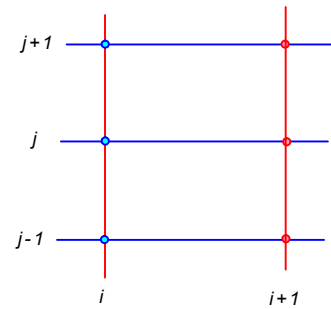
Momentum denklemi
$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

şeklinde kullanılacaktır. Şekildeki gibi bir ağ yapısında türevler ayrıştırılarak

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta \bar{x}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - \bar{u}_{i+1,j-1}}{2\Delta \bar{y}}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} = \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - 2\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j-1}}{(\Delta \bar{y})^2}$$



Şekil - Sınır tabakada ağ yapısı

ve momentum denkleminde yerleştirilerek

$$\bar{u}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i,j}}{\Delta \bar{x}} + \bar{v}_{i,j} \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - \bar{u}_{i+1,j-1}}{2\Delta \bar{y}} = \left(\bar{U}_e \frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \right)_i + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\bar{u}_{i+1,j+1} - 2\bar{u}_{i+1,j} + \bar{u}_{i+1,j-1}}{(\Delta \bar{y})^2}$$

$(i+1)$ istasyonundaki bilinmeyenler cinsinden düzenlenirse

$$\boxed{A_j \bar{u}_{i+1,j-1} + B_j \bar{u}_{i+1,j} + C_j \bar{u}_{i+1,j+1} = D_j}$$

elde edilir. Burada

$$A_j = -\left[\frac{\bar{v}_{i,j}}{2\Delta\bar{y}} + \frac{1}{\text{Re}(\Delta\bar{y})^2} \right]; \quad B_j = \left[\frac{\bar{u}_{i,j}}{\Delta\bar{x}} + \frac{2}{\text{Re}(\Delta\bar{y})^2} \right]; \quad C_j = \left[\frac{\bar{v}_{i,j}}{2\Delta\bar{y}} - \frac{1}{\text{Re}(\Delta\bar{y})^2} \right]$$

$$D_j = \bar{U}_{ei} \left(\frac{d\bar{U}_e}{d\bar{x}} \right)_i + \frac{\bar{u}_{i,j}^2}{\Delta\bar{x}}$$

Boyutsuzlaştırılmış süreklilik denkleminin ayrılaştırılmış biçimi daha önce olduğu gibidir:

$$\boxed{\bar{v}_{i,j} = \bar{v}_{i,j-1} + \frac{\Delta\bar{y}}{2\Delta\bar{x}} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{i,j-1} - \bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{i+1,j-1})}$$

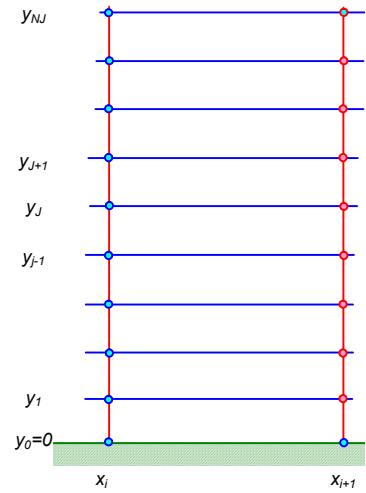
Momentum denkleminin çözümü bu defa açık formülasyon halindeki gibi basit bir formül şeklinde değildir. Denklemden üç bilinmeyen olup yalnız başına çözümü mümkün değildir.

Ancak sınır tabaka noktalarının herbirinde (sınır noktaları hariç) bu denklemin birer kez yazılabileceği düşünülürse sonuçta bir lineer denklem takımı elde edilir. Nitekim yandaki gibi bir indisleme sisteminde bu denklem takımı

$$B_1 \bar{u}_{i+1,1} + C_1 \bar{u}_{i+1,2} = D_1$$

$$A_j \bar{u}_{i+1,j-1} + B_j \bar{u}_{i+1,j} + C_j \bar{u}_{i+1,j+1} = D_j, \quad (j = 2, 3, \dots, NJ - 2)$$

$$A_{NJ-1} \bar{u}_{i+1,NJ-2} + B_{NJ-1} \bar{u}_{i+1,NJ-1} = D_{NJ-1} - C_{NJ-1} \bar{U}_{ei+1}$$



şeklinde düzenlenebilir. Burada ilk denklem duvara komşu noktada, son denklem ise sınır tabakanın kenarına komşu noktada yazılmış olup, sınır şartları gereği duvar üzerindeki hız sıfır iken kenar nokradaki hız bilinen dış akım hızına eşit alınmıştır.

Bu denklem sistemi matris formda yazılırsa katsayılar matrisinin diyagonal ve buna komşu elemanları dışında bütün elemanlarının sıfır olduğu görülür. Bu tipteki matrislere **üç-diyagonal matris** adı verilir.

$$\begin{bmatrix} B_2 & C_2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_3 & B_3 & C_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A_4 & B_4 & C_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & A_{NJ-3} & B_{NJ-3} & C_{NJ-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{NJ-2} & B_{NJ-2} & C_{NJ-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{NJ-1} & B_{NJ-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_{i+1,0} \\ \bar{u}_{i+1,1} \\ \bar{u}_{i+1,2} \\ \dots \\ \bar{u}_{i+1,NJ-3} \\ \bar{u}_{i+1,NJ-2} \\ \bar{u}_{i+1,NJ-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ \dots \\ D_{NJ-3} \\ D_{NJ-2} \\ D_{NJ-1} - C_{NJ-1} \bar{U}_{ei+1} \end{Bmatrix}$$

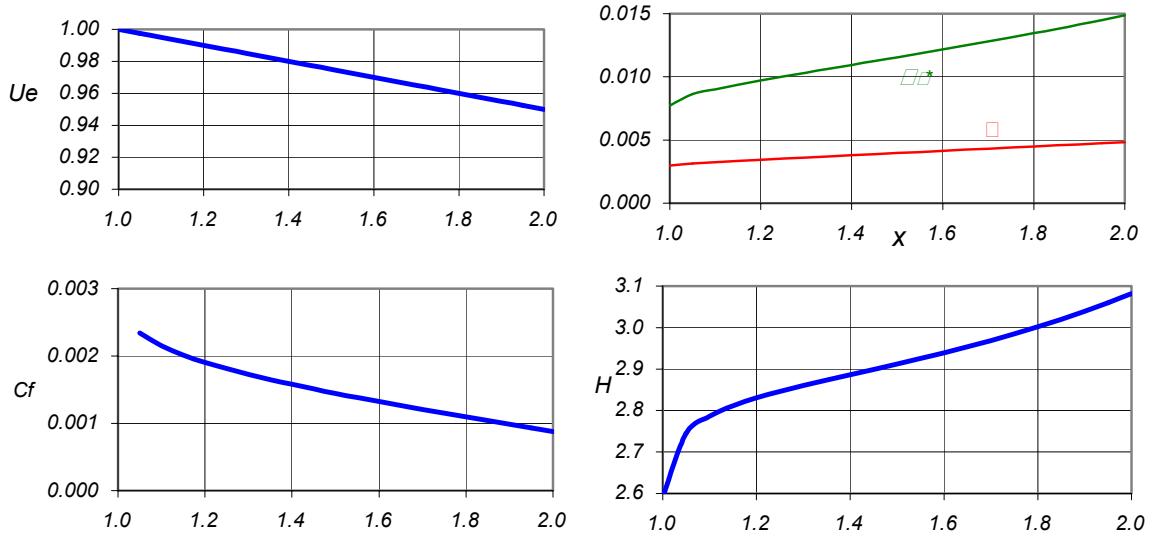
Bu tip denklem sistemlerinin çözümü için tercih edilen bir çözüm tekniği olan Thomas yöntemine ilişkin bilgiler Ek-4 te yer almaktadır.

Hız bileşenleri elde edildikten sonra sınır tabakanın global büyüklükleri daha önce açık formülasyonlu yöntemde olduğu gibi hesaplanır.

Kullanılan kapalı şema şartsız kararlı olduğundan x doğrultusundaki adım uzunluğu serbest olarak seçilebilecektir. Bu bakımdan sınır tabakanın başlangıçtaki kalınlığı mertebesindeki bir değer yani $\Delta x=0.025$ değeri seçilmiştir.

Tablo: Howard tipi akımda kapalı formülasyonla sınır tabaka çözümü sonuçları

n	x	U_e	δ	δ^*	θ	H	C_f
1	1.00000	1.00000	0.02240	0.008	0.00297	2.59000	0.00297
3	1.05000	0.99750	0.02128	0.009	0.00315	2.74492	0.00234
5	1.10000	0.99500	0.02240	0.009	0.00323	2.78601	0.00215
7	1.15000	0.99250	0.02352	0.009	0.00333	2.81155	0.00202
9	1.20000	0.99000	0.02464	0.010	0.00343	2.83039	0.00190
11	1.25000	0.98750	0.02576	0.010	0.00352	2.84617	0.00181
13	1.30000	0.98500	0.02576	0.010	0.00361	2.86031	0.00173
15	1.35000	0.98250	0.02688	0.011	0.00370	2.87357	0.00165
17	1.40000	0.98000	0.02800	0.011	0.00379	2.88643	0.00158
19	1.45000	0.97750	0.02800	0.011	0.00388	2.89922	0.00151
21	1.50000	0.97500	0.02912	0.012	0.00397	2.91218	0.00145
23	1.55000	0.97250	0.03024	0.012	0.00405	2.92551	0.00138
25	1.60000	0.97000	0.03024	0.012	0.00414	2.93933	0.00132
27	1.65000	0.96750	0.03136	0.012	0.00423	2.95379	0.00126
29	1.70000	0.96500	0.03248	0.013	0.00431	2.96899	0.00121
31	1.75000	0.96250	0.03248	0.013	0.00440	2.98505	0.00115
33	1.80000	0.96000	0.03360	0.013	0.00448	3.00207	0.00109
35	1.85000	0.95750	0.03472	0.014	0.00457	3.02018	0.00104
37	1.90000	0.95500	0.03472	0.014	0.00465	3.03949	0.00098
39	1.95000	0.95250	0.03584	0.014	0.00474	3.06014	0.00093
41	2.00000	0.95000	0.03696	0.015	0.00482	3.08230	0.00088



Şekil: Howard tipi akımda sınır tabakanın karakteristik büyüklükleri

4.7.4- Sınır tabaka denklemleri için faydalı bir değişken dönüşümü

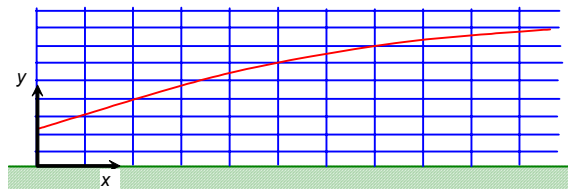
Önceki bölümlerde sınır tabaka denklemlerinin çözümü için açık ve kapalı formülasyon kullanan sonlu fark yöntemleri üzerinde durulmuş, bazı örnek teknikler tanıtılmıştır. Daha gelişmiş başka yöntemleri, sıkıştırılabilir ve türbülanslı hallerdeki uygulamaları literatürde bulmak mümkündür.

Örneklerde de görüldüğü gibi sınır tabakanın giderek kalınlaşması nedeniyle, hesaplar için oluşturulan ağ yapısının sınır tabaka bölgesini içine alacak biçimde geniş tutulması gerekmektedir. Bunun için ya sınır tabaka başlangıcında duvara dik doğrultuda gereğinden çok fazla nokta alınması, ya da sınır tabaka kalınlaştıkça nokta sayısının buna uygun biçimde artırılması gerekmektedir.

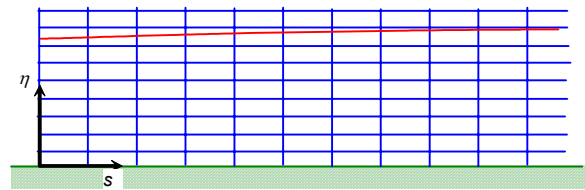
Ancak, bunlar yerine sınır tabaka kalınlığının sabite yakın kalmasını sağlayacak bir değişken dönüşümü yapılması faydalı olacaktır.

Sınır tabaka kalınlığının düz levha üzerinde laminer halde $x^{1/2}$ ile orantılı olarak arttığı bilinmektedir. Nitekim düz levha üzerindeki ve köşe etrafındaki benzer akımlar halinde $y/x^{1/2}$ büyüklüğü ile orantılı bir değişken tanımlanarak sınır tabakanın dönüşüm düzleminde aynı kalınlıkta kalması sağlanmıştır.

Genel bir akım halinde şüphesiz benzerlik olması pek beklenmez. Bu bakımdan yapılacak değişken dönüşümü de sınır tabaka kalınlığının dönüşüm düzleminde tam olarak sabit kalmasını sağlamayacaktır. Ancak en azından sabite yakın kalmasını sağlayarak çözüm ağının daha uygun genişlikte seçilmesi anlamında faydalı olacaktır.



Sınır tabaka düzlemi



Dönüşüm düzlemi

Böyle bir değişken dönüşümü genel olarak

$$s = \int_0^x U_e dx'; \quad \eta = \frac{yU_e}{\sqrt{2\nu s}}$$

şeklinde önerilebilir. Bu değişkenlerle momentum denklemi,

$$f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 2s \left[f' \frac{\partial f'}{\partial s} - f'' \frac{\partial f}{\partial s} \right]; \quad \beta = \frac{2s}{U_e} \frac{dU_e}{ds}$$

şekline dönüşür. Bu denklem Falkner-Skan benzerlik dönüşümünü andırmakla birlikte denklemin sağ tarafı Falkner-Skan akımlarındaki gibi sıfır değildir. Bu farklılık dış akım hızlarının köşe etrafındaki akım hızlarından farklı olmasından, yani bir benzerlik çözümü olmamasından kaynaklanmaktadır.

Burada ayrıca

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{u}{U_e}; \quad \psi = \sqrt{2\nu s} f(s, \eta)$$

$$v = -U_e \sqrt{2\nu s} \left(\frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial s} + \frac{f}{2s} \right)$$

olup sınır şartları da

$$f(s, 0) = 0; \quad f'(s, 0) = 0; \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} f'(s, \eta) = 1$$

şeklindedir. Katı cidar üzerindeki sınır şartı, emme veya üfleme halinde

$$f(s, 0) = f_w = -\frac{I}{\sqrt{2\nu s}} \int_0^s v_w ds$$

şeklinde değişecektir.

Önceki bölümlerde izah edilen sayısal yöntemlerde bu dönüştürülmüş denklemleri bir akım fonksiyonu kullanmak yerine

$$F(s, \eta) = \frac{u}{U_e}$$

olmak üzere

$$F'' + \beta(1 - F^2) - VF' - 2sFF_s = 0$$

şekline dönüştürmek daha uygun olur. Buradaki V büyüklüğü dönüştürülmüş normal hız olup, dönüştürülmüş süreklilik denkleminde

$$2sF_s + V' + F = 0$$

elde edilerek

$$V = V_w - \int_0^\eta (2sF_s + F) d\eta$$

şeklinde bulunur. Buradaki integral trapez kuralı ile hesaplanabilir.

Dönüştürülmüş momentum denkleminin çözümü için kapalı bir formülasyon oluşturulabilir. Bu amaçla akım doğrultusundaki F_s türevi ileri farklarla, dikey doğrultudaki F' ve F'' türevleri de önceki istasyonda merkezi farklarla ayrıklaştırılarak

$$A_i F_{i+1, j-1} + B_i F_{i+1, j} + C_i F_{i+1, j+1} = D_i$$

şeklinde bir denklem elde edilebilir. Burada

$$A_i = -\frac{I}{(\Delta\eta)^2} - \frac{V_{i,j}}{2\Delta\eta}; \quad B_i = \frac{2}{(\Delta\eta)^2} + \beta F_{i,j} + 2s \frac{F_{i,j}}{\Delta s}; \quad C_i = -\frac{I}{(\Delta\eta)^2} + \frac{V_{i,j}}{2\Delta\eta}$$

$$D_i = \beta - 2s \frac{F_{i,j}^2}{\Delta s}$$

dır. Bu denklem takımı üç-diagonal olup, Thomas yöntemiyle çözülür.

EK**Üç-diagonal denklemler için****Thomas yöntemi**

Hesaplamalı akışkanlar dinamiğinde ve Hesaplamalı mühendisliğin bazı problemlerinde zaman zaman üç-diagonal katsayılar matrisine sahip lineer denklemlerle karşılaşılır. Üç-diagonal katsayılar matrisine sahip böyle bir lineer denklemler matris biçiminde normal olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{i,i-1} & a_{i,i} & a_{i,i+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{N,N-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_N \end{Bmatrix}$$

Ancak katsayılar matrisinin çoğu sıfır olan elemanları için bilgisayar hafızasında gereksiz yer işgal etmemek ve gereksiz işlemlerden kaçınmak amacıyla $(N \times N)$ boyutlarında bir katsayılar matrisi yerine $(N \times 3)$ boyutlarında bir katsayılar matrisi kullanacak biçimde bir düzenleme ve buna uygun bir çözüm algoritması kullanılması tercih edilir.

Çözüm için çok tercih edilen bir yöntem Thomas algoritmasıdır. Thomas algoritması aslında Gauss eliminasyon yönteminin üç kolonlu bir dikdörtgen matris kullanılarak yapılan özel bir uygulamasıdır.

Yukarıdaki denklemler sistemi

$$a_{i-1,i} \rightarrow l_i; \quad a_{ii} \rightarrow d_i; \quad a_{i,i+1} \rightarrow u_i; \quad b_i \rightarrow r_i$$

olmak üzere düzenlenirse:

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ l_2 & d_2 & u_2 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & d_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \dots \\ r_i \\ \dots \\ r_N \end{Bmatrix}$$

Gauss eliminasyon yönteminin esasının diagonal altında kalan bütün elemanların sıfır olmasını sağlayacak işlemler olduğu hatırlanırsa bu denklemler sistemindeki ilk denklemler l_2 ile ve ikinci denklemler de d_1 ile çarpılıp birinci denklemler ikincisinden çıkarıldıktan sonra her iki taraf d_1 ile bölünerek

$$\begin{aligned} l_2 d_1 x_1 + l_2 u_1 x_2 &= l_2 r_1 \\ d_1 l_2 x_1 + d_1 d_2 x_2 + d_1 u_2 x_3 &= d_1 r_2 \end{aligned} \Rightarrow \left(d_2 - \frac{l_2 u_1}{d_1} \right) x_2 + u_2 x_3 = r_2 - \frac{r_1 l_2}{d_1}$$

elde edilir. Böylece ikinci denklemdeki x_1 bilinmeyeni yok edilmiş veya diğer bir deyişle katsayılar matrisinde diyagonal elemanın altındaki katsayı sıfırlanmış olmaktadır. Bu eşitlik

$$\boxed{d'_2 = d_2 - \frac{l_2 u_1}{d_1} \quad ; \quad r'_2 = r_2 - \frac{r_1 l_2}{d_1}} \quad \text{olmak üzere} \quad \boxed{d'_2 x_2 + u_2 x_3 = r'_2}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece denklem sistemi

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d'_2 & u_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & l_3 & d_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & l_i & d_i & u_i & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l_N & d_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r'_2 \\ r_3 \\ \cdots \\ r_i \\ \cdots \\ r_N \end{Bmatrix}$$

şekline gelir. Yukarıda yapılan eliminasyon işlemi denklem sistemindeki ikinci ve üçüncü denklem arasında tekrarlanırsa, yani ikinci denklem l_3 ile ve üçüncü denklem de d'_2 ile çarpılıp yine birinci denklem ikincisinden çıkarılıp, karşılıklı d'_2 ile bölünerek

$$\begin{aligned} l_3 d'_2 x_2 + l_3 u_2 x_3 &= l_3 r'_2 \\ d'_2 l_3 x_2 + d'_2 d_3 x_3 + d'_2 u_3 x_4 &= d'_2 r_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(d_3 - \frac{l_3 u_2}{d'_2} \right) x_3 + u_3 x_4 = r_3 - \frac{l_3 r'_2}{d'_2}$$

veya yine

$$\boxed{d'_3 = d_3 - \frac{l_3 u_2}{d'_2} \quad ; \quad r'_3 = r_3 - \frac{l_3 r'_2}{d'_2}} \quad \text{olmak üzere} \quad \boxed{d'_3 x_3 + u_3 x_4 = r'_3}$$

elde edilir. Bu denklemde de x_2 bilinmeyenin ortadan kalktığı ve katsayılar matrisinde üçüncü satırda diyagonal altındaki elemanın sıfır yapıldığı görülmektedir.

Benzeri işlemler daha sonraki denklemler için de tekrarlanabilir. Bunun için yukarıda çıkartılan bağıntılar karşılaştırılarak bir genelleştirme yapılırsa

$$\boxed{d'_i = d_i - \frac{l_i u_{i-1}}{d'_{i-1}} \quad ; \quad r'_i = r_i - \frac{l_i r'_{i-1}}{d'_{i-1}} \quad (i = 2, 3, \dots, N)}$$

elde edilir. Bu durumda denklem sistemi de

$$\begin{bmatrix} d_1 & u_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d'_2 & u_2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d'_3 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d'_i & u_i & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d'_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \\ \cdots \\ r'_i \\ \cdots \\ r'_N \end{Bmatrix}$$

şekline gelir. Bu denklem sisteminde en sonuncu denklemden x_N bilinmeyeninin kolaylıkla çözülebileceği görülmektedir:

$$x_N = \frac{r'_N}{d'_N}$$

Bulunan bu büyüklük bir üstteki denklemde kullanılarak

$$x_{N-1} = \frac{r'_{N-1} - u_{N-1}x_N}{d'_{N-1}}$$

bulunur. Benzeri işlem herhangi bir x_i bilinmeyeni için

$$x_i = \frac{r'_i - u_i x_{i+1}}{d'_i}$$

şeklinde gerçekleştirilir.