BÖLÜM 3

LAMİNER AKIMIN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

3.1- Giriş

3.2. Kütlenin korunumu: Süreklilik denklemi

3.3. Momentumun korunumu: Momentum denklemi

3.3.1 Laminer kayma gerilmesinin modellenmesi

3.3.2 Momentum denkleminin laminer akımda çeşitli biçimleri

3.4. Enerjinin korunumu: Enerji denklemi

3.4.1 Laminer ısı akısının modellenmesi

3.6 Eksenel simetrik denklemlerin iki boyutlu biçime dönüşümü

BÖLÜM 3

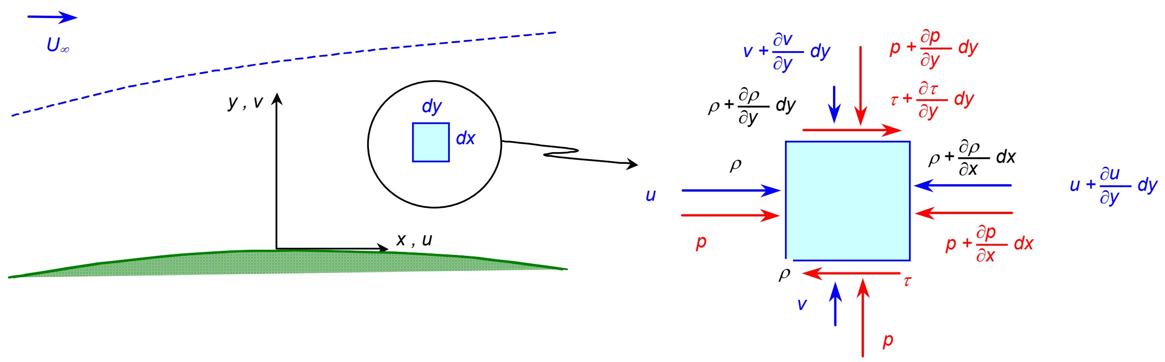
LAMİNER AKIMIN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİ

3.1. Giriş

Bu bölümde hareket denklemlerinin sınır tabaka formları incelenecektir. Bu amaçla diferansiyel büyüklükteki bir akışkan elemanına korunum ilkeleri uygulanacaktır. İncelemelerin kapsamı mükemmel gazlar için iki-boyutlu ve eksenel-simetrik akımlarla sınırlı tutulacaktır. Ortaya çıkan denklem sistemi matematiksel olarak karmaşık olmakla birlikte akımın sınır tabaka içerisindeki ayrıntılarını yansıtabilmektedir.

3.2. Kütlenin korunumu: Süreklilik denklemi

İki-boyutlu sınır tabaka akımı içinde Şekil 3.1 deki gibi diferansiyel büyüklükte bir kontrol hacmini ele alalım.



Şekil 3.1- Viskoz tabakada kütle ve momentumun korunumu için kontrol hacmi

Bu kontrol hacmine sol taraftan giren, sağ taraftan çıkan debiler arasındaki fark

$$\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial x}dx\right)\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dy-\rho\,u\,dy=\left[\rho\frac{\partial u}{\partial x}dx+u\frac{\partial\rho}{\partial x}dx+\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}(dx)^2\right]dy\cong\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right]dx\,dy$$

alt taraftan giren ve üst taraftan çıkan kütlesel debiler arasındaki fark

$$\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial y}dy\right)\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dx-\rho\,v\,dx=\left[\rho\frac{\partial v}{\partial y}dy+v\frac{\partial\rho}{\partial y}dy+\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}(dy)^2\right]dx\cong\left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy$$

olup, kontrol hacminden çıkan net debi kontrol hacmi içerisinde birim zamanda meydana gelecek kütle değişimine (azalmasına)

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]dx\,dy=-\frac{\partial\rho}{\partial t}dx\,dy$$

şeklinde eşit olacaktır. Bu bağıntı düzenlenerek

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0}$$

şeklinde getirilebilir.

Aynı bağıntı eksenel-simetrik halde $$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u r)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v r)}{\partial r}=0}$$

şeklini alır. Burada *r* büyüklüğü simetri eksenine olan radyal uzaklığı belirtmektedir.

Sabit yoğunluklu akım halinde düzlemsel ve eksenel-simetrik süreklilik denklemleri, akım daimi olsun veya olmasın

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0} \quad \text{ve} \quad \boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial(ur)}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial(vr)}{\partial r}=0}$$

şekline indirgenir.

Açıkça görülmektedir ki süreklilik denklemi, sabit yoğunluklu halde lineer bir adi diferansiyel denklemdir. Denklemde viskozite büyüklüğü yer almadığından viskoz ve viskoz olmayan akımların her ikisinde de geçerlidir. Denklemde birden fazla bağımlı değişken olduğundan başka denklemlerle birlikte çözülmelidir.

Süreklilik denkleminin iki-boyutlu (düzlemsel veya eksenel-simetrik) biçimi akım fonksiyonunun tanımına götürmektedir. Nitekim

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=u; \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x}=v$$

şeklinde bir ψ skaler fonksiyonu tanımlanırsa bunun süreklilik denklemini sağladığı görülmektedir. Bu skaler fonksiyon eksenel-simetrik halde de

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}=ur; \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x}=vr$$

şeklinde tanımlanır. Sıkıştırılabilir halde akımın daimi olması kaydıyla bu tanımlamalar

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}=\rho u; \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x}=\rho v$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r}=\rho u r; \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial x}=\rho v r$$

şeklinde yapılır.

Akım fonksiyonu kavramı bilinmeyen sayısını bire indirerek süreklilik denkleminin çözümüne imkan yarattığı için faydalı olmaktadır.

3.3. Momentumun korunumu: Momentum denklemi

Sınır tabaka yaklaşımında yüzeye dik doğrultuda basınç sabit olduğundan momentum denkleminin sadece x doğrultusunda yazılması yeterli olur. Buna göre yine Şekil 3.1 deki kontrol hacmi dikkate alınarak, kontrol hacmine soldan giren ve sağdan çıkan kütlelerin x doğrultusunda taşıdıkları momentumlar arasındaki fark

$$\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\left[\rho u+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]dy-u(\rho u)dy\cong\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}dx\,dy$$

alt taraftan giren ve üst taraftan çıkan kütlesel debilerin yine *x*-doğrultusunda taşıdıkları momentumlar arasındaki fark

$$\left(u+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\left[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]dx-\rho uv\,dx\cong\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}dx\,dy$$

şeklinde yazılabilir. Kontrol hacminde x-doğrultusunadaki momentum ayrıca kütle miktarının zamanla değişmesi sonucunda da

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}dx\,dy$$

kadarlık bir değişim gösterecektir. Buna göre net momentum değişimi

$$\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}\right]dx\,dy$$

olarak elde edilir. Ki bu momentum değişimi *x*-doğrultusunda etkiyen bileşke kuvvetle dengelenecektir.

Kontrol hacmi içindeki akışkan kitlesine etkiyen kuvvetler bünyesel ve yüzeysel kuvvetler olmak üzere iki gruba ayrılır. Burada x doğrultusunda etkiyen bünyesel kuvvetler kısaca, birim hacim başına f_x ile temsil edilecektir.

Çoğu pratik problemde yüzey kuvvetleri basınç kuvvetleri ve teğetsel kuvvetlerdir. Şekil 3.1 e göre *x*-doğrultusundaki basınç kuvvetlerinin bileşkesi

$$p\,dy-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy=-\frac{\partial p}{\partial x}dx\,dy$$

olur. Sınır tabaka içerisinde basınç *y* doğrultusunda değişmediğinden kısmi türev yerine adi türev alınması düşünülebilir. Ancak burada daimi olmayan haller göz önüne alınarak basıncın *x* yanında *t* değişkenine de bağlı olacağı düşüncesiyle kısmi türev sembolü muhafaza edilmiştir.

x-Doğrultusundaki teğetsel kuvvetler kontrol hacminin alt yüzeyindeki yavaşlatıcı ve üst yüzündeki sürükleyici kayma gerilmelerinden kaynaklanmakta olup, bunların bileşkesi

$$\left(\tau+\frac{\partial\tau}{\partial y}dy\right)dx-\tau dx=\frac{\partial\tau}{\partial y}dx\,dy$$

şeklinde yazılabilir.

Momentum değişimi ile kuvvetlerin bileşkesi eşitlenerek

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial y}+f_x$$

veya yeni bir düzenleme ile

$$u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right]+\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}+f_x$$

elde edilir. Burada ilk parantez içindeki terimler toplamı süreklilik denklemi gereği sıfıra eşittir. Geriye kalan terimler yoğunlukla bölünerek

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}+\frac{f_x}{\rho}}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzlemsel, zamana bağlı, sıkıştırılabilir sınır tabakalar için bünyesel kuvvetleri de içeren denklem olup, çıkartılması sırasında akımın laminer olup olmadığı dikkate alınmamıştır. Bu bakımdan gerek laminer, gerekse türbülanslı akımlar için geçerlidir. Laminer ve türbülanslı sınır tabakalar arasındaki tek fark bu denklemdeki τ kayma gerilmesinin modellenmesi sırasında görülecektir.

3.3.1 Laminer kayma gerilmesinin modellenmesi

τ kayma gerilmesinin modellenmesi, önce sınırlı bir hal dikkate alınarak açıklanabilir. Bünyesel kuvvetlerin olmadığı, daimi, sabit yoğunluklu sınır tabaka için süreklilik ve momentum denklemleri sırasıyla

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0}$$

$$\boxed{u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}}$$

şeklindedir. Basıncın p(x) şeklindeki değişimi tamamıyla dış akım tarafından belirlenmekte olup bu denklem sisteminin bilinmeyenleri, *u*, *v* ve τ 'dur. İki denkleme karşılık üç bilinmeyen bulunduğundan denklem sisteminin çözülebilir hale gelmesi için üçüncü bir denkleme (veya bağıntıya) ihtiyaç vardır. *u* ve *v* hız bileşenleri arasında direkt bir ilişki aramanın anlamı olmayıp aranan üçüncü bağıntının τ için olması gerekir. Yani τ büyüklüğü diğer büyüklükler cinsinden bir biçimde ifade edilmelidir. Bunu ifade ediş biçimi "modelleme" olarak adlandırılır.

Newtonien bir akışkanın laminer sınır tabakadaki akışı için

$$\boxed{\tau=\mu\frac{\partial u}{\partial y}}$$

bağıntısı geçerlidir. Bu halde viskozite katsayısı $\mu=\mu(T)$ şeklinde sadece akışkanın fiziksel bir özelliği ve sıcaklığın bir fonksiyonu olup akışkanın hareketinden bağımsızdır. Non-Newtonien akışkanlarda bu bağıntı biraz daha karmaşıktır.

3.3.2 Momentum denkleminin laminer akımda çeşitli biçimleri

Kayma gerilmesi için verilen bağıntı momentum denkleminde kullanılarak ve bünyesel kuvvetle ilgili terim ihmal edilerek

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)}$$

elde edilir. Şayet akımda sıcaklık değişiyorsa $\mu=\mu(T)$ olup en son terimde μ katsayısı türevin içinde tutulmalıdır.

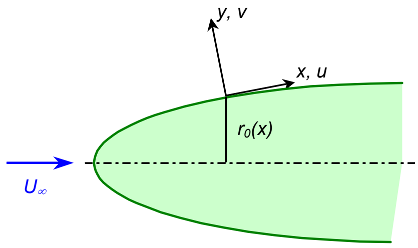
Şayet akım eksenel simetrik ise momentum denklemi

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial r}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

şeklinde olur. Eksenel simetrik cisim üzerinde Şekil 3.2 deki gibi bir koordinat sistemi kullanılırsa momentum ve süreklilik denklemleri

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$r_0^j\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho u r_0^j\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho v r_0^j\right)}{\partial y}=0$$



Şekil 3.2- Eksenel simetrik sınır tabaka için gövdeye bağlı eksen takımı

şeklinde yazılabilir. Burada $r_0(x)$ lokal gövde yarıçapıdır. Bu denklemler keskin köşeler olmamak ve $\delta << r_o$ olmak kaydıyla geçerlidir. Yani d^2r_o/dx^2 türevi uygun biçimde olmalıdır. Momentum denklemi düzlemsel haldeki ile aynıdır. Süreklilik denklemi ise bir miktar farklılık göstermektedir. Süreklilik denklemi bu farklılığı içerecek biçimde düzenlenmiş olup, $j=0$ için düzlemsel hal, $j=1$ için de eksenel simetrik hal elde edilmektedir.

Sabit yoğunluk halinde süreklilik denklemi, akım daimi olsun veya olmasın

$$\frac{\partial\left(u r_0^j\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(v r_0^j\right)}{\partial y}=0$$

şekline gelir. Sabit özellikli akım halinde (ki gaz akımları için sabit yoğunluk haline karşılık gelir) momentum denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

şekline gelir. Daimi akım için ilk terim ortadan kalkar ve basıncın türevi de adi türev şekline gelir.

Momentum denkleminin faydalı bir biçimi de akım fonksiyonu sokularak elde edilir. İki-boyutlu halde hız bileşenlerinin akım fonksiyonu cinsinden ifadeleri momentum denkleminde yerleştirilerek

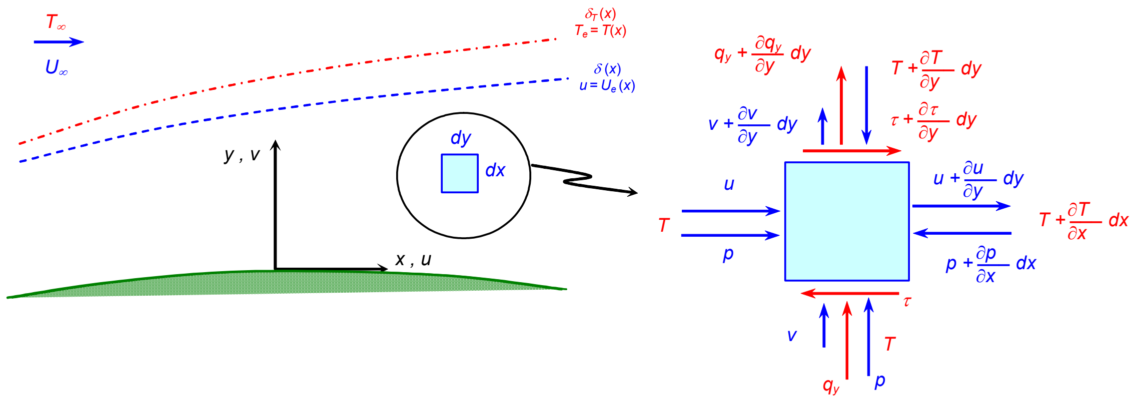
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^2}$$

elde edilir. Denklemin tek bilinmeyeni ψ(x,y,t) büyüklüğüdür.

3.4. Enerjinin korunumu: Enerji denklemi

Akımdaki ısıl enerji iç enerji, antalpi veya sıcaklık cinsinden ifade edilebilir. Bu üç büyüklüğün toplam değerleri (durma noktası değerleri) de kullanılabilir. Bu nedenle literatürde enerji denkleminin bir çok biçimini görmek mümkündür.

Enerjinin korunumu termodinamiğin birinci yasası ile ifade edilir. Bu yasa bir sistemin enerjisindeki değişimin ısı transferi ile iş arasındaki farktan kaynaklandığını belirtir. Yasayı Şekil 3.3 deki diferansiyel kontrol hacmine uygulayalım.



Şekil 3.3- Sınır tabakada enerjinin korunumu için kontrol hacmi

Sınır tabaka yaklaşımı gereği $\dfrac{\partial p}{\partial y} \approx 0, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} >> \dfrac{\partial u}{\partial x}, \quad u >> v$

Sıcaklık alanı için benzeri şekilde $\dfrac{\partial T}{\partial y} >> \dfrac{\partial T}{\partial x}$

Mükemmel bir gaz akımındaki enerji değişimi ısıl enerji ile kinetik enerji değişimlerinin toplamı olarak

$$de + d\left(\frac{u^2}{2}\right) = c_v dT + d\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

şeklinde ifade edilebilir. Kontrol hacmine soldan giren kütlelerin soktuğu enerji

$$\rho u\left(e + \frac{u^2}{2}\right)dy$$

ve sağdan çıkan kütlelerin çıkardığı enerji

$$\left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right]\left[\left(e + \frac{u^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(e + \frac{u^2}{2}\right)dx\right]dy$$

Alt yüzeyden giren ve üst yüzeyden çıkan enerjiler

$$\rho v\left(e+\frac{u^2}{2}\right)dx$$

$$\left[\rho v+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right]\left[\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)dy\right]dx$$

Ayrıca kontrol hacmi içindeki kütle miktarının zamanla değişiminden kaynaklanan enerji değişimi de

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\right]dx\,dy$$

şeklinde yazılabilir. Bu büyüklükler birleştirilerek net enerji değişimi, $dx, dy \to 0$ için

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\right]$$

olarak elde edilir.

Isı akısı $\boldsymbol{q}$ vektörü ile belirtilirse ve sınır tabaka yaklaşımı gereği ısı akısının sadece kontrol hacminin alt ve üst yüzeylerinde önemli olduğu dikkate alınırsa net ısı akısı için

$$q_y dx-\left(q_y+\frac{\partial q_y}{\partial y}dy\right)dx=-\frac{\partial q_y}{\partial y}dx\,dy$$

yazılabilir.

Bünyesel kuvvetler ihmal edildiği takdirde sistem üzerinde iş yapan kuvvetler sadece basınç kuvvetleri ve viskoz kuvvetler olacaktır. Kontrol hacminin dikey yüzleriyle yatay yüzeylerine etkiyen kuvvetlerin yaptıkları net işler sırasıyla

$$-\frac{\partial(pu)}{\partial x}dx\,dy \quad \text{ve} \quad -\frac{\partial(pv)}{\partial y}dx\,dy$$

Kontrol hacminin alt ve üst yüzeylerindeki teğetsel kuvvetlerin yaptığı net iş de

$$-\tau u\,dx+\left(\tau u+\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}dy\right)dx=\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}dx\,dy$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sistem üzerinde basınç kuvvetlerinin ve teğetsel kuvvetlerin yaptığı net işler birleştirilerek

$$\left[\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}-\frac{\partial(pu)}{\partial x}-\frac{\partial(pv)}{\partial y}\right]dx\,dy$$

elde edilir.

Şimdi, termodinamiğin birinci yasası gereği, kontrol hacmine sokulan ısı ile sistem üzerinde yapılan iş toplamı kontrol hacminin enerjisindeki değişime eşitlenirse, birim hacim başına

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)\right]=-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}-\frac{\partial(pu)}{\partial x}-\frac{\partial(pv)}{\partial y}}$$

elde edilir. Bu eşitlik enerji denkleminin pek kullanışlı olmayan bir biçimini oluşturmaktadır.

Bu eşitliğin solundaki terimler, materyal türev tanımı gereği

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)=\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)$$

ile belirtilerek enerji denklemi

$$\boxed{\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}-\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}\right]}$$

şeklinde yazılabilir.

Öte yandan *antalpi* tanımından

$$h\equiv e+\frac{p}{\rho}\quad\rightarrow\quad e=h-\frac{p}{\rho}$$

Materyal türev alınarak

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho\frac{D}{Dt}\left(h-\frac{p}{\rho}\right)=\rho\frac{Dh}{Dt}-\frac{Dp}{Dt}+\frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

Süreklilik denkleminden

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

$$\frac{D\rho}{Dt}=-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Yukarıdaki materyal türevde kullanılarak

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho\frac{Dh}{Dt}-\frac{Dp}{Dt}-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho\frac{Dh}{Dt}-\left[\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+p\frac{\partial u}{\partial x}+p\frac{\partial v}{\partial y}\right]$$

$$\rho\frac{De}{Dt}=\rho\frac{Dh}{Dt}-\frac{\partial p}{\partial t}-\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}\right]$$

Buradan basınçla ilgili türevler çekilerek

$$\boxed{-\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}\right]=-\rho\frac{Dh}{Dt}+\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\frac{De}{Dt}}$$

*Enerji denklemi*nde kullanılarak

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}-\rho\frac{Dh}{Dt}+\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\frac{De}{Dt}$$

ve düzenlenerek

$$\rho\frac{D}{Dt}\left(e+\frac{u^2}{2}\right)+\rho\frac{Dh}{Dt}-\rho\frac{De}{Dt}=-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\boxed{\rho\frac{D}{Dt}\left(h+\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial t}}$$

elde edilir.

x-Momentum denklemi

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

iki tarafı *u* ile çarpılarak

$$\rho\left[u\frac{\partial u}{\partial t}+uu\frac{\partial u}{\partial x}+uv\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-u\frac{\partial p}{\partial x}+u\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

düzenlenerek

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]=-u\frac{\partial p}{\partial x}+u\frac{\partial \tau}{\partial y}}$$

veya

$$\boxed{\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)=-u\frac{\partial p}{\partial x}+u\frac{\partial \tau}{\partial y}}$$

mekanik enerji denklemi

şekline gelir. Bu denklem

enerji denkleminin son halinde

$$\rho\frac{Dh}{Dt}+\frac{D}{Dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial(\tau u)}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

kullanılarak

$$\rho\frac{Dh}{Dt}-u\frac{\partial p}{\partial x}+u\frac{\partial \tau}{\partial y}=-\frac{\partial q_y}{\partial y}+u\frac{\partial \tau}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}\right]=u\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial t}+\tau\frac{\partial u}{\partial y}}$$

Ayrıca $\boxed{dh=c_p dT}$

olup

$$\boxed{\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+\tau\frac{\partial u}{\partial y}}$$

elde edilir. Bu bağıntı sınır tabakalar için enerji denkleminin çok tercih edilen kullanışlı bir biçimini oluşturmaktadır. Buradaki kayma gerilmesi ve ısı transfer hız henüz modellenmediği için bu denklem laminer ve türbülanslı sınır tabakaların her ikisi için de geçerlidir.

3.4.1 Laminer ısı akısının modellenmesi

Bilinen çoğu akışkanın laminer sınır tabakası için ısı iletimi

$$\boxed{q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}} \qquad \textit{Fourier yasası}$$

ile modellenir. Burada *k* büyüklüğü akışkanın fiziksel bir özelliği olup sıcaklığın bir fonksiyonudur: $k=k(T)$.

Bu ifade ve ayrıca Newtonien akışkanlar için kayma gerilmesi modeli enerji denkleminde kullanılarak

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

Bu denklem sabit özellikli akışkanlar için

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

şekline gelir.

Eksenel simetrik sınır tabakalar için benzeri denklemler

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(kr\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

ve

$$\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\frac{k}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial t}$$

şeklindedir.

3.6. Eksenel simetrik denklemlerin iki boyutlu biçime dönüşümü

Bazı hallerde eksenel simetrik bir cisim etrafındaki sınır tabakanın hesaplanması problemi eşdeğer iki-boyutlu bir cisim üzerindeki sınır tabakanın hesaplanması problemine indirgenebilir. Akıma dik eğriliğin etkisinin küçük olduğu ($\delta << r_o$) hallerde bu indirgemeyi sağlayan bir dönüşüm Mangler (1945) tarafından ortaya konmuştur. Sıkıştırılabilir şekli de mevcut olan dönüşüm burada sabit-yoğunluklu, sabit özellikli akış için gösterilecektir.

Eksenel simetrik haldeki daimi akım için

Süreklilik $$\frac{\partial(ur_0)}{\partial x}+\frac{\partial(vr_0)}{\partial y}=0$$

Momentum
$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

denklemlerinde

$$\boxed{\begin{array}{l}\bar{x}=\dfrac{1}{L^2}\displaystyle\int_0^x r_0^2\,dx'\,; \qquad \bar{y}=\dfrac{r_0 y}{L}\\ \bar{u}=u\,; \qquad \bar{v}=\dfrac{L}{r_0}\left(v+\dfrac{uy}{r_0}\dfrac{dr_0}{dx}\right); \qquad \bar{U}_e\left(x\right)=U_e\left(x\right)\end{array}}$$

dönüşümleri uygulanırsa

$$\boxed{\begin{array}{l}\dfrac{\partial\left(\bar{u}\right)}{\partial\bar{x}}+\dfrac{\partial\left(\bar{v}\right)}{\partial\bar{y}}=0\\ \bar{u}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\bar{v}\dfrac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx}+\nu\dfrac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2}\end{array}}$$

elde edilir. Bu dönüşüm yöntemi ileride görüleceği gibi bazı basit sonuçların doğrudan geliştirilmesini sağlar. Ayrıca sınır tabaka problemlerinin sayısal çözümünde hesaplama bölgesinin şeklinin dönüştürülmesinde de yaralı olmaktadır.