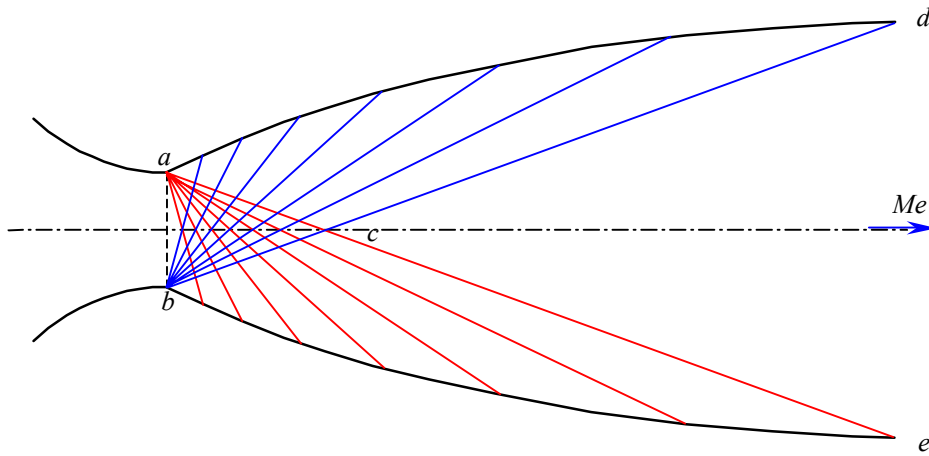


11.EK

KARAKTERİSTİKLER YÖNTEMİ İÇİN ÖRNEK UYGULAMA ANİ GENİŞLEMELİ SÜPERSONİK NOZUL DİZAYNI

Burada karakteristikler yönteminin örnek bir uygulaması olarak ani genişlemeli sesüstü lüle dizaynı ele alınacaktır.

Lülenin boynundaki üst ve alt köşelerden şekilde görüldüğü gibi aynı sayıda ve karşılıklı simetrik olarak genişleme dalgaları çıktığı varsayılacak, ancak lüle eksenine göre simetriden dolayı hesaplar sadece lülenin üst yarısında yapılacaktır.



Örnek bir tasarım için

Lüle çıkışındaki Mach sayısı

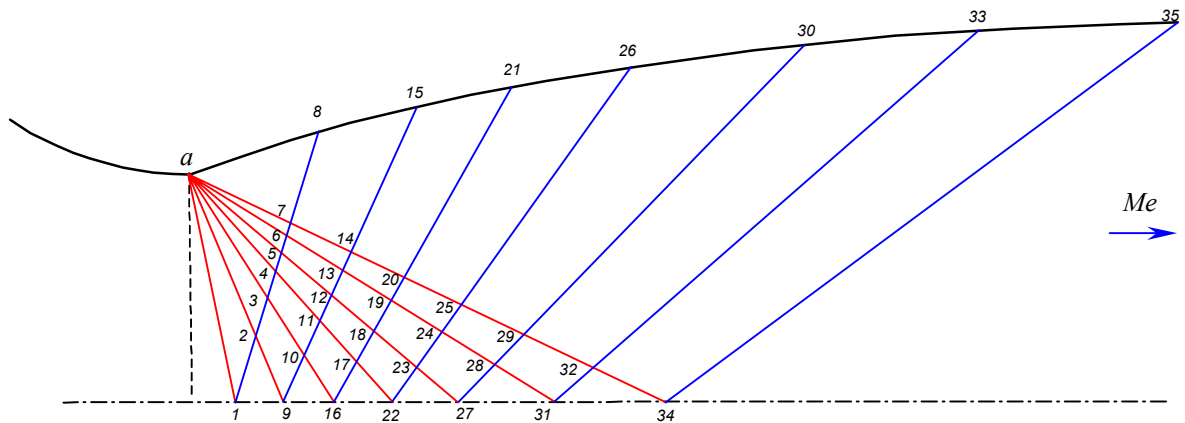
$$M_e = 2.4$$

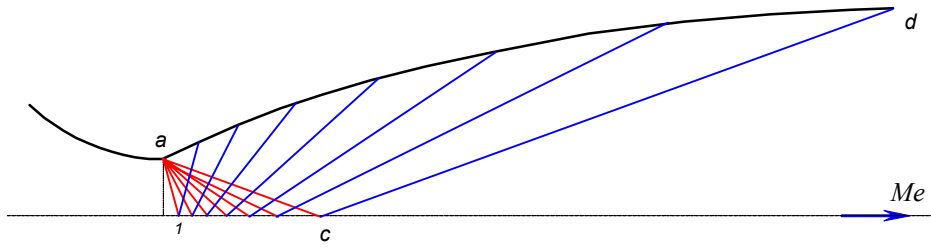
Köşelerden çıkan genişleme dalgaları sayısı

$$N = 7$$

alınmıştır.

Örnek uygulamada lülenin üst yarısındaki karakteristiklerin birbirleriyle ve duvarla kesişme noktaları şekilde görüldüğü gibi numaralandırılmıştır.





Lüle çıkışındaki $M_e = 2.4$ Mach sayısı için PM açısı

$$v_e = 36.746$$

cd karakteristiğinden sonraki akım özellikleri her yerde aynı

$$v_c = v_e = 36.746$$

cd karakteristiğinden sonraki akım eksene paralel

$$\theta_c = \theta_e = 0$$

c noktasında sağa doğru karakteristik üzerinde

$$K_c^- = \theta_c + v_e = 36.746$$

ac karakteristiği üzerinde $K^- = Sb$ olup

$$K_a^- = K_c^- = 36.746$$

Öte yandan:

a köşesinde oluşan Prandtl-Meyer genişleme dalgaları için

$$v_a = v(I) + \Delta\theta$$

Burada:

$v(I)$	genişleme dalgalarının önündeki PM açısı
v_a	genişleme dalgalarının arkasındaki PM açısı
$\Delta\theta$	dalgaları geçen akımdaki sapma

Buna göre için a köşesindeki genişleme dalgaları için

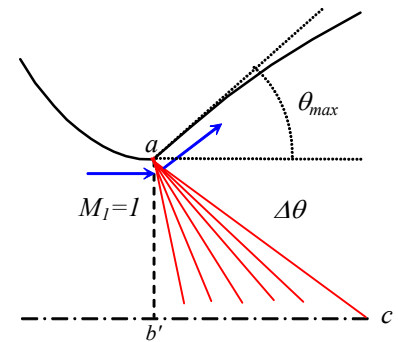
Dalgaların önünde Mach sayısı $M = 1$

Bu Mach sayısı için PM açısı $v(I) = 0$

Dalgaları geçen akımda sapma $\Delta\theta = \theta_{\max}$

Dalgaların arkasında PM açısı $v_a = v(I) + \theta_{\max}$

$$v_a = \theta_{\max}$$



ac sağa doğru karakteristiği üzerinde a noktasında

$$\theta_a + v_a = K_a^-$$

$\theta_a = \theta_{\max}$ ve $v_a = \theta_{\max}$ olduğu için

$$\theta_{\max} + \theta_{\max} = K_a^-$$

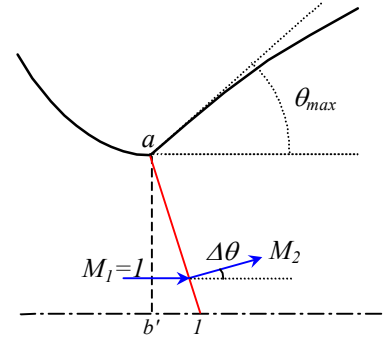
böylece

$$\theta_{\max} = \frac{v_e}{2} = \frac{36.746}{2} = 18.373$$

bulunur.

a köşesinden çıkan sonlu sayıda genişleme dalgası alınacağı için ilk dalga ($a-1$ dalgası) sonik çizgiyle (burada düşey çizgi olarak alınmıştır) küçük bir $\Delta\theta$ açısı yapacak biçimde seçilir.

$a-1$ dalgası doğrusal bir Mach dalgası olup, bu dalganın her noktasından geçen akım aynı miktarda sapma gösterecektir. Yani lüle ekseninde yer alan 1 noktasında da akımda bir sapma olacaktır. Bu durum yöntemin bir hatası olup, hatanın küçük yapılabilmesi için sapma açısı mümkün olduğunca küçük tutulur.



Örnek bir uygulama olarak a köşesinden çıkan ilk dalganın saptırma açısı $\Delta\theta = 0.373$ derece alınmıştır. Böylece a köşesindeki toplam sapma açısının $18.373 - 0.373 = 18$ derecelik kalan kısmının ise 6 adet başka dalga ile ve $18/6 = 3$ derecelik eşit açısız aralıklarla oluşturulduğu farzedilebilir.

1 noktası için hesaplar

a noktasında $M = 1$ Mach sayısındaki akımda $\Delta\theta = 0.373$ sapma açısıyla PM dalgası için

$$v_a = v(1) + \Delta\theta = 0.373 \rightarrow M_a = 1.0417 \rightarrow \mu_a = 73.736$$

a noktasından geçen sağa doğru karakteristik üzerinde

$$K_a^- = \theta_a + v_a = \Delta\theta + v_a = 0.373 + 0.373 = 0.746$$

b noktasından geçen sola doğru karakteristik üzerinde

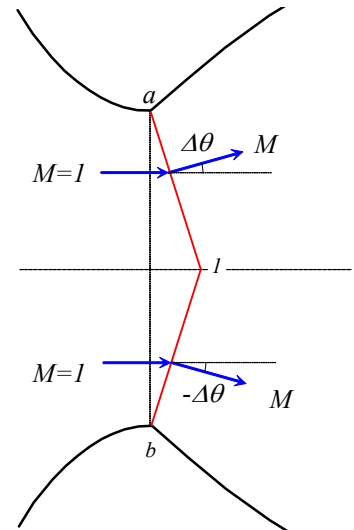
$$K_b^+ = \theta_b - v_b = -\Delta\theta - v_b = -0.373 - 0.373 = -0.746$$

$a-1$ sağa doğru karakteristiği üzerinde

$$K_1^- = K_a^- = 0.746$$

$b-1$ sola doğru karakteristiği üzerinde

$$K_1^+ = K_b^+ = -0.746$$



Böylece 1 noktasında

$$\theta_1 = \frac{K_1^- + K_1^+}{2} = \frac{0.746 - 0.746}{2} = 0.$$

$$v_1 = \frac{K_1^- - K_1^+}{2} = \frac{0.746 + 0.746}{2} = 0.746$$

$$v_1 = 0.746 \rightarrow M_1 = 1.0669 \rightarrow \mu_1 = 69.605$$

$a-1$ karakteristiğinin eğimi

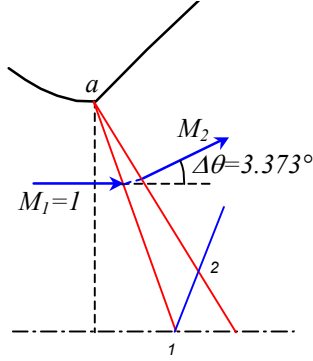
$$\alpha_{a-1}^- = \frac{\theta_a + \theta_1}{2} - \frac{\mu_a + \mu_1}{2} = \frac{0.373 + 0}{2} - \frac{73.736 + 69.605}{2}$$

$$\alpha_{a-1}^- = -71.484 \quad m_{a-1} = \tan(-71.484) = -2.986$$

Boğaz kesitinin yarı yüksekliği 1 birim olmak üzere 1 noktasının yeri

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-1}{-2.986} = 0.3349 \\ y_1 &= 0 \end{aligned}$$

2 noktası için hesaplar



$$\begin{aligned} M = 1 &\quad \rightarrow \quad v(M_2) = 3.373 \quad \rightarrow \quad M_2 = 1.1924 \\ \Delta\theta = 3.373 &\quad \rightarrow \quad \mu(M_2) = 56.995 \end{aligned}$$

$$\text{a-2 karakteristiği üzerinde} \quad K_2^- = \theta + v = 3.373 + 3.373 = 6.746$$

$$\text{2 den geçen } C^+ \text{ karakteristiği üzerinde} \quad K_2^+ = K_1^+ = -0.746$$

$$\theta_2 = \frac{K_2^- + K_2^+}{2} = \frac{6.746 - 0.746}{2} = 3$$

Buna göre 2 noktasında

$$v_2 = \frac{K_2^- - K_2^+}{2} = \frac{6.746 + 0.746}{2} = 3.746$$

$$v_2 = 3.746 \quad \rightarrow \quad M_2 = 1.208 \quad \rightarrow \quad \mu_2 = 55.903$$

$$\text{a-2 karakteristiğinin eğimi} \quad \alpha_{a-2}^- = \frac{\theta_a + \theta_2}{2} - \frac{\mu_a + \mu_2}{2} = \frac{3.373 + 3}{2} - \frac{56.995 + 55.903}{2}$$

$$\alpha_{a-2}^- = -53.263 \quad \rightarrow \quad m_{a-2} = \tan(-53.263) = -1.3398$$

$$\text{1-2 karakteristiğinin eğimi} \quad \alpha_{1-2}^+ = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} = \frac{0 + 3}{2} + \frac{69.605 + 55.903}{2}$$

$$\alpha_{1-2}^+ = 64.254 \quad \rightarrow \quad m_{1-2} = \tan(64.254) = 2.0736$$

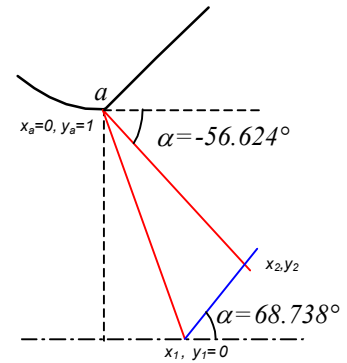
$$\text{a-2 doğrusunun denklemi} \quad y = y_a + m_{a-2}(x - x_a)$$

$$\text{1-2 doğrusunun denklemi} \quad y = y_1 + m_{1-2}(x - x_1)$$

Bu doğrular 2 noktasında kesiştiği için

$$y_2 = y_a + m_{a-2}(x_2 - x_a) = y_1 + m_{1-2}(x_2 - x_1)$$

$$\rightarrow \quad x_2 = \frac{y_a - y_1 + m_{1-2}x_1 - m_{a-2}x_a}{m_{1-2} - m_{a-2}}$$

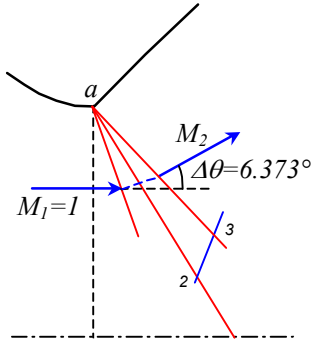


Buna göre verilen değerler kullanılarak

$$x_2 = \frac{1 - 0 + 2.0736 \times 0.3349 - 0}{2.0736 - (-1.3398)} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_2 = 0.4964}$$

$$y_2 = 0 + 2.0736 \times (0.4964 - 0.3349) \quad \rightarrow \quad \boxed{y_2 = 0.3349}$$

3 noktası için hesaplar



$$M = 1 \quad \theta = 6.373 \quad \rightarrow \quad M_2 = 1.3074 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \nu(M_2) &= 6.373 \\ \mu(M_2) &= 49.896 \end{aligned}$$

$$a-3 \text{ karakteristiği üzerinde} \quad K_3^- = \theta + \nu = 6.373 + 6.373 = 12.746$$

$$3 \text{ den geçen } C^+ \text{ karakteristiği üzerinde} \quad K_3^+ = K_2^+ = -0.746$$

$$\theta_3 = \frac{K_3^- + K_3^+}{2} = \frac{12.746 - 0.746}{2} = 6$$

Buna göre 3 noktasında

$$\nu_3 = \frac{K_3^- - K_3^+}{2} = \frac{12.746 + 0.746}{2} = 6.746$$

$$\nu_3 = 6.746 \quad \rightarrow \quad M_3 = 1.321 \quad \rightarrow \quad \mu_3 = 49.206$$

$$a-3 \text{ karakteristiğinin eğimi} \quad \alpha_{a-3}^- = \frac{\theta_a + \theta_3}{2} - \frac{\mu_a + \mu_3}{2} = \frac{6.373 + 6}{2} - \frac{49.896 + 49.206}{2}$$

$$\alpha_{a-3}^- = -43.364 \quad \rightarrow \quad m_{a-3} = \tan(-43.364) = -0.9445$$

$$2-3 \text{ karakteristiğinin eğimi} \quad \alpha_{2-3}^+ = \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} + \frac{\mu_2 + \mu_3}{2} = \frac{3 + 6}{2} + \frac{55.903 + 49.206}{2}$$

$$\alpha_{2-3}^+ = 57.055 \quad \rightarrow \quad m_{2-3} = \tan(57.055) = 1.5431$$

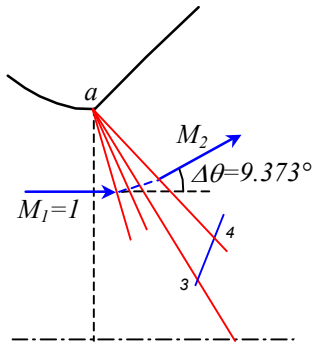
3 noktasının koordinatları, yukarıdakine benzer bir işlemle

$$x_2 = \frac{y_a - y_2 + m_{2-3}x_2 - m_{a-3}x_a}{m_{2-3} - m_{a-3}} = \frac{1 - 0.3349 + 1.5431 \times 0.4964 - 0}{1.5431 - (-0.9445)} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_3 = 0.5753}$$

$$y_3 = y_2 + m_{2-3}(x_3 - x_2) = 0.3349 + 1.5431 \times (0.5753 - 0.4964) \quad \rightarrow \quad \boxed{y_3 = 0.4566}$$

4 noktası için hesaplar

$$M = 1 \quad \theta = 9.373 \quad \rightarrow \quad M_2 = 1.4134 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \nu(M_2) &= 9.373 \\ \mu(M_2) &= 45.034 \end{aligned}$$



$$a-4 \text{ karakteristiği üzerinde} \quad K_4^- = \theta + \nu = 9.373 + 9.373 = 18.746$$

$$4 \text{ den geçen } C^+ \text{ karakteristiği üzerinde} \quad K_4^+ = K_3^+ = -0.746$$

$$\theta_4 = \frac{K_4^- + K_4^+}{2} = \frac{18.746 - 0.746}{2} = 9$$

Buna göre 4 noktasında

$$\nu_4 = \frac{K_4^- - K_4^+}{2} = \frac{18.746 + 0.746}{2} = 9.746$$

$$\nu_4 = 9.746 \quad \rightarrow \quad M_4 = 1.426 \quad \rightarrow \quad \mu_4 = 44.519$$

$$a-4 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{a-4}^- = \frac{\theta_a + \theta_4}{2} - \frac{\mu_a + \mu_4}{2} = \frac{9.373 + 9.}{2} - \frac{45.034 + 44.519}{2}$$

$$\alpha_{a-4}^- = -35.590 \quad \rightarrow \quad m_{a-4} = \tan(-35.590) = -0.7157$$

$$3-4 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{3-4}^+ = \frac{\theta_3 + \theta_4}{2} + \frac{\mu_3 + \mu_4}{2} = \frac{6. + 9.}{2} + \frac{49.206 + 44.519}{2}$$

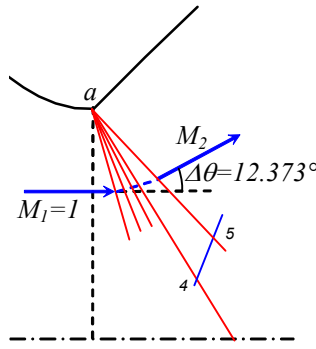
$$\alpha_{3-4}^+ = 54.362 \quad \rightarrow \quad m_{3-4} = \tan(54.362) = 1.3948$$

4 noktasının koordinatları, yukarıdakine benzer bir işlemle

$$x_4 = \frac{y_a - y_3 + m_{3-4}x_3 - m_{a-4}x_a}{m_{3-4} - m_{a-4}} = \frac{1 - 0.4566 + 1.3948 \times 0.5753 - 0}{1.3948 - (-0.7157)} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_4 = 0.6377}$$

$$y_4 = y_3 + m_{3-4}(x_4 - x_3) = 0.4566 + 1.3948 \times (0.6377 - 0.5753) \quad \rightarrow \quad \boxed{y_4 = 0.5436}$$

5 noktası için hesaplar



$$M = 1 \quad \rightarrow \quad M_2 = 1.5159 \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} v(M_2) &= 12.373 \\ \mu(M_2) &= 41.276 \end{aligned}$$

$$a-5 \text{ karakteristiği üzerinde } K_5^- = \theta + v = 12.373 + 12.373 = 24.746$$

$$5 \text{ den geçen } C^+ \text{ karakteristiği üzerinde } K_5^+ = K_4^+ = -0.746$$

$$\theta_5 = \frac{K_5^- + K_5^+}{2} = \frac{24.746 - 0.746}{2} = 12$$

Buna göre 5 noktasında

$$v_5 = \frac{K_5^- - K_5^+}{2} = \frac{24.746 + 0.746}{2} = 12.746$$

$$v_5 = 12.746 \quad \rightarrow \quad M_5 = 1.529 \quad \rightarrow \quad \mu_5 = 40.861$$

$$a-5 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{a-5}^- = \frac{\theta_a + \theta_5}{2} - \frac{\mu_a + \mu_5}{2} = \frac{12.373 + 12.}{2} - \frac{41.276 + 40.861}{2}$$

$$\alpha_{a-5}^- = -28.882 \quad \rightarrow \quad m_{a-5} = \tan(-28.882) = -0.5516$$

$$4-5 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{4-5}^+ = \frac{\theta_4 + \theta_5}{2} + \frac{\mu_4 + \mu_5}{2} = \frac{9. + 12.}{2} + \frac{44.519 + 40.861}{2}$$

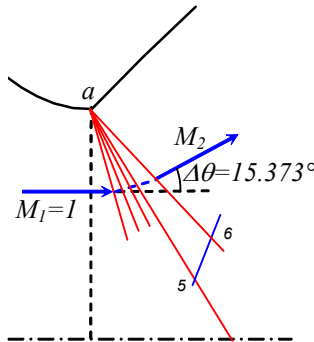
$$\alpha_{4-5}^+ = 53.190 \quad \rightarrow \quad m_{4-5} = \tan(53.190) = 1.3363$$

5 noktasının koordinatları, yukarıdakine benzer bir işlemle

$$x_5 = \frac{y_a - y_4 + m_{4-5}x_4 - m_{a-5}x_a}{m_{4-5} - m_{a-5}} = \frac{1 - 0.5436 + 1.3363 \times 0.6377 - 0}{1.3363 - (-0.5516)} \quad \rightarrow \quad \boxed{x_5 = 0.6931}$$

$$y_5 = y_4 + m_{4-5}(x_5 - x_4) = 0.5436 + 1.3363 \times (0.6931 - 0.6377) \rightarrow \boxed{y_5 = 0.6177}$$

6 noktası için hesaplar



$$M = 1 \rightarrow M_2 = 1.6173 \rightarrow \begin{aligned} v(M_2) &= 15.373 \\ \mu(M_2) &= 38.192 \end{aligned}$$

$$a-6 \text{ karakteristiği üzerinde } K_6^- = \theta + v = 15.373 + 15.373 = 30.746$$

$$6 \text{ dan geçen } C^+ \text{ karakteristiği üzerinde } K_6^+ = K_5^+ = -0.746$$

$$\theta_6 = \frac{K_6^- + K_6^+}{2} = \frac{30.746 - 0.746}{2} = 15$$

Buna göre 6 noktasında

$$v_6 = \frac{K_6^- - K_6^+}{2} = \frac{30.746 + 0.746}{2} = 15.746$$

$$v_6 = 15.746 \rightarrow M_6 = 1.630 \rightarrow \mu_6 = 37.844$$

$$a-6 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{a-6}^- = \frac{\theta_a + \theta_6}{2} - \frac{\mu_a + \mu_6}{2} = \frac{15.373 + 15}{2} - \frac{38.192 + 37.844}{2}$$

$$\alpha_{a-6}^- = -22.831 \rightarrow m_{a-6} = \tan(-22.831) = -0.4210$$

$$5-6 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{5-6}^+ = \frac{\theta_5 + \theta_6}{2} + \frac{\mu_5 + \mu_6}{2} = \frac{12. + 15.}{2} + \frac{40.861 + 37.844}{2}$$

$$\alpha_{5-6}^+ = 52.853 \rightarrow m_{5-6} = \tan(52.853) = 1.320$$

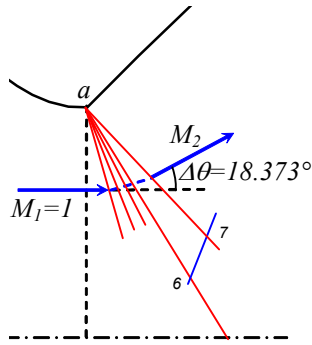
6 noktasının koordinatları, yukarıdakine benzer bir işlemle

$$x_6 = \frac{y_a - y_5 + m_{5-6}x_5 - m_{a-6}x_a}{m_{5-6} - m_{a-6}} = \frac{1 - 0.6177 + 1.320 \times 0.6931 - 0}{1.320 - (-0.421)} \rightarrow \boxed{x_6 = 0.7451}$$

$$y_6 = y_5 + m_{5-6}(x_6 - x_5) = 0.6177 + 1.320 \times (0.7451 - 0.6931) \rightarrow \boxed{y_6 = 0.6863}$$

7 noktası için hesaplar

$$M = 1 \rightarrow M_2 = 1.7192 \rightarrow \begin{aligned} v(M_2) &= 18.373 \\ \mu(M_2) &= 35.568 \end{aligned}$$



$a-7$ karakteristiği üzerinde $K_7^- = \theta + v = 18.373 + 18.373 = 36.746$

7 den geçen C^+ karakteristiği üzerinde $K_7^+ = K_6^+ = -0.746$

$$\theta_7 = \frac{K_7^- + K_7^+}{2} = \frac{36.746 - 0.746}{2} = 18$$

$$v_7 = \frac{K_7^- - K_7^+}{2} = \frac{36.746 + 0.746}{2} = 18.746$$

Buna göre 7 noktasında

$$v_7 = 18.746 \rightarrow M_7 = 1.732 \rightarrow \mu_4 = 35.267$$

$$a-7 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{a-7}^- = \frac{\theta_a + \theta_7}{2} - \frac{\mu_a + \mu_7}{2} = \frac{18.373 + 18.}{2} - \frac{35.568 + 35.267}{2}$$

$$\alpha_{a-7}^- = -17.230 \rightarrow m_{a-7} = \tan(-17.230) = -0.3101$$

$$6-7 \text{ karakteristiğinin eğimi } \alpha_{6-7}^+ = \frac{\theta_6 + \theta_7}{2} + \frac{\mu_6 + \mu_7}{2} = \frac{15. + 18.}{2} + \frac{37.844 + 35.267}{2}$$

$$\alpha_{6-7}^+ = 53.055 \rightarrow m_{6-7} = \tan(53.055) = 1.330$$

7 noktasının koordinatları, yukarıdakine benzer bir işlemle

$$x_7 = \frac{y_a - y_6 + m_{6-7}x_6 - m_{a-7}x_a}{m_{6-7} - m_{a-7}} = \frac{1 - 0.6863 + 1.330 \times 0.7451 - 0}{1.330 - (-0.3101)} \rightarrow \boxed{x_7 = 0.7955}$$

$$y_7 = y_6 + m_{6-7}(x_7 - x_6) = 0.6863 - 1.3297 \times (0.7955 - 0.7451) \rightarrow \boxed{y_7 = 0.7533}$$

Duvar üzerindeki 8 noktasının bulunması

$a-8$ aralığında lüle duvarı lineer kabul edilir ve duvar eğimi a ve 8 noktalarındaki eğimlerin ortalamasına eşit alınır. a noktasında eğim θ_{max} değerine eşittir. $7-8$ aralığında akım özellikleri aynı kalmakta olup, buna göre 8 noktasındaki duvar eğimi 7 noktasındaki akım eğimiyle aynıdır.

$$\text{Buna göre } \alpha_{a-8} = \frac{\theta_{max} + \theta_7}{2} = \frac{18.373 + 18.}{2} = 18.187$$

$$m_{a-8} = \tan(18.187) = 0.3285$$

$$7-8 \text{ aralığında eğim } \alpha_{7-8}^- = \frac{\theta_7 + \theta_8}{2} + \frac{\mu_7 + \mu_8}{2} = \theta_7 + \mu_7 = 18. + 35.267 = 53.267$$

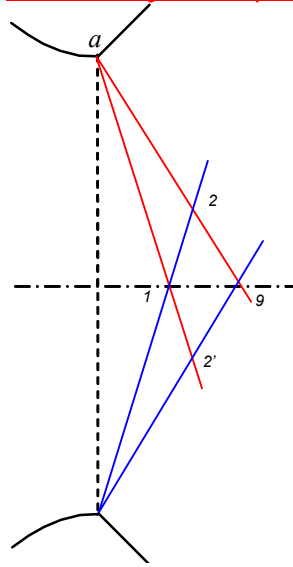
$$m_{7-8} = \tan(53.267) = 1.340$$

7 noktasının koordinatları, yukarıdakilere benzer bir işlemle

$$x_8 = \frac{y_a - y_7 + m_{7-8}x_7 - m_{a-8}x_a}{m_{7-8} - m_{a-8}} = \frac{1 - 0.7533 + 1.340 \times 0.7955 - 0.329 \times 0}{1.340 - 0.329} \rightarrow \boxed{x_8 = 1.2977}$$

$$y_8 = y_7 + m_{7-8}(x_8 - x_7) = 0.7533 - 1.340 \times (1.2977 - 0.7955) \rightarrow \boxed{y_8 = 1.4263}$$

9 noktası için hesaplar



9 noktasındaki akım karakteristikleri 2 noktası ve bunun simetriği olan 2' noktasındaki akım karakteristikleri yardımıyla elde edilebilir.

$$2-9 \text{ sağa doğru karakteristiği üzerinde} \quad K_9^+ = K_7^+ = 6.746$$

$$2'-9 \text{ sola doğru karakteristiği üzerinde} \quad K_9^- = K_2^- = -6.746$$

Buna göre 9 noktasında

$$\theta_9 = \frac{K_9^- + K_9^+}{2} = \frac{6.746 - 6.746}{2} = 0$$

$$v_9 = \frac{K_9^- - K_9^+}{2} = \frac{6.746 + 6.746}{2} = 6.746$$

$$v_9 = 6.746 \rightarrow M_9 = 1.3209 \rightarrow \mu_9 = 49.206$$

2-9 karakteristiğinin eğimi

$$\alpha_{2-9}^- = \frac{\theta_2 + \theta_9}{2} - \frac{\mu_2 + \mu_9}{2} = \frac{3 + 0}{2} - \frac{55.903 + 49.206}{2}$$

$$\alpha_{2-9}^- = -51.054 \rightarrow m_{2-9} = \tan(-51.054) = -1.2373$$

9 noktasının yeri

$$x_9 = x_2 - \frac{y_2}{m_{2-9}} = 0.4964 - \frac{0.3349}{-1.2373} \rightarrow \boxed{x_9 = 0.7671}, \quad \boxed{y_9 = 0}$$

Bundan sonraki diğer bütün noktalar için işlemler benzeri tarzda olup, burada tekrarlanmamıştır.

Yukarıda izah edilen yöntemle roket lülesi dizaynı için vBasic dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmış olup, bu programı WWW3.itu.edu.tr/~yükselen adresinden almak mümkündür.