

**BÖLÜM 11**  
**SESÜSTÜ AKIMLAR İÇİN**  
**KARAKTERİSTİKLER YÖNTEMİ**

- 11.1- Giriş
- 11.2- Karakteristikler yönteminin felsefesi
- 11.3- İki- Boyutlu irrotasyonel akımda karakteristik çizgilerin tayini
- 11.4- Uygunluk denklemlerinin tayini
- 11.5- Uygunluk denklemlerinin özel çözümleri
- 11.6- Etki bölgesi ve bağımlılık bölgesi
- 11.7- Süpersonik lüle dizaynı

### 11.1- Giriş:

Daimi, süpersonik akımların hesaplanmasında geçmişte çok sık kullanılmış olan klasikleşmiş bir sayısal yöntem "Karakteristikler Yöntemi" dir. Bu yöntemi anlamak için sayısal yöntemlerin genel felsefesi hakkında bir miktar bilgi vermekte yarar vardır.

Sayısal yöntemlerde akım büyüklüklerinin akım alanında seçilmiş bulunan ayrık noktalarda hesaplanması amaçlanır ve esas itibarıyla Taylor açılımına dayanmaktadırlar.

Şekildeki  $u = u(x)$  fonksiyonu göz önüne alınırsa, bu fonksiyonun bir  $x$  noktasındaki değeri bilindiğinde bundan  $\Delta x$  kadar uzaklıktaki bir başka noktadaki değeri Taylor açılımı yardımıyla

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \left( \frac{du}{dx} \right)_x \Delta x + \frac{1}{2!} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_x (\Delta x)^2 + \dots$$

şeklinde hesaplanabilir.

Sayısal yöntemlerde, tercih edilen mertebeye bağlı olarak Taylor açılımının baştan itibaren belli sayıda terimi alınır. Örneğin birinci mertebeden bir yaklaşım halinde bu açılımın

$$u(x + \Delta x) \cong u(x) + \left( \frac{du}{dx} \right)_x \Delta x$$

şeklindeki yaklaşık değeri kullanılır. İki-boyutlu bir problem halinde açılım her iki doğrultuda yapılır. Bu defa bağıntılarda geçen türevler adi değil ama "kısmi türevler" olacaktır.

Sayısal yöntemlerde Taylor açılımı yukarıdaki gösterildiği şekilde değil ama ayrık noktalar indislerle belirtilerek, örneğin şekildeki iki-boyutlu problemde olduğu gibi

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} \Delta x$$

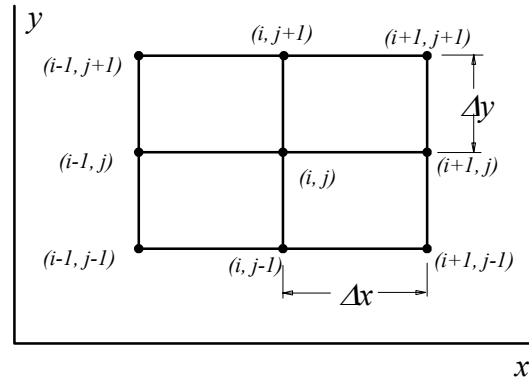
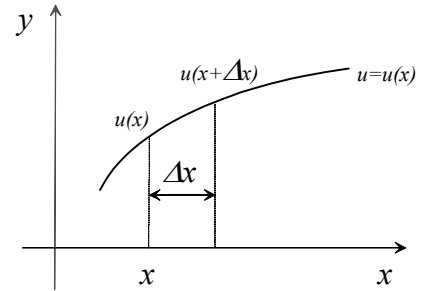
veya benzeri şekillerde indislerle ifade edilir.

Bu bağıntı yardımıyla  $(i+1, j)$  noktasındaki  $u$  değerinin hesaplanabilmesi için  $(i, j)$  noktasında sadece  $u$  'nun değerinin bilinmesi yeterli değildir. Bu noktada ayrıca  $\partial u / \partial x$  türevinin değerinin de bilinmesi gerekir.

### 11.2. Karakteristikler Yönteminin Felsefesi:

Daimi iki-boyutlu irrotasyonel akımlar göz önüne alınırsa

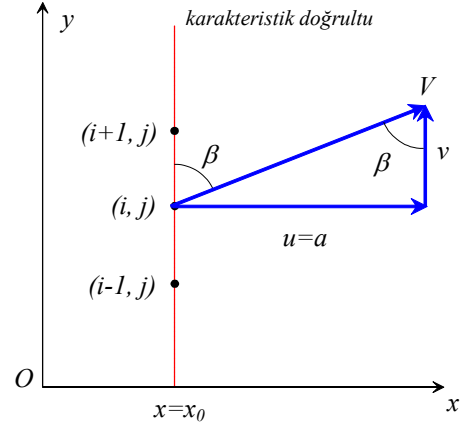
$$\text{Sürekli ve hareket denklemlerinden} \quad \left( 1 - \frac{u^2}{a^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( 1 - \frac{v^2}{a^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$



Buradan  $\partial u/\partial x$  türevi çözümlürse

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(2uv/a^2) \frac{\partial u}{\partial y} - (1 - v^2/a^2) \frac{\partial v}{\partial y}}{1 - u^2/a^2}$$

Şekildeki  $x=x_0$  düşey çizgisi boyunca her bir noktada  $\mathbf{V}$  hız vektörü bilinsin. Böylece  $\partial u/\partial y$  ve  $\partial v/\partial y$  türevlerinin  $(i, j)$  noktasındaki değerleri, örneğin bir sonlu fark yaklaşımı kullanılarak, belirlenebilir. Bu türevler yukarıdaki denklemde kullanılarak  $\partial u/\partial x$  türevi ve daha sonra da bu türev birinci mertebeden Taylor açılımında kullanılarak  $u_{i+1, j}$  değeri bulunabilir.



Ancak, yukarıdaki denklem için istisnai bir durum söz konusudur. Denklemin sağ tarafının paydasının sıfır olması halinde  $\partial u/\partial x$  türevi en azından belirsizdir, ve hatta süresiz olabilir.

Bu belirsiz veya tekil durum  $u=a$ , yani  $x=x_0$  doğrusuna dik hız bileşeninin ses hızına eşit olması halinde ortaya çıkmaktadır.

Şekildeki hız üçgeninin geometrisinden

$$\sin \beta = \frac{u}{V} = \frac{a}{V} = \frac{1}{M}$$

$\beta$  açısı aslında Mach açısına eşittir:

$$\beta = \mu$$

Görüldüğü gibi akım alanının bir noktasında hız vektörüyle Mach açısı yapan öyle bir doğrultu bulmak mümkündür ki,  $u$  hız bileşeninin bu doğrultu üzerindeki türevi belirsizdir ve bu doğrultuyu geçerken süresizlik gösterebilir.

Buraya kadarki incelemelerde sadece  $u$  hız bileşeni üzerinde durulmuş olmakla birlikte  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  gibi diğer akım büyüklükleri için de bu doğrultular boyunca belirsizlik söz konusudur. Akım içinde bu şekilde tanımlanan doğrultulara "*karakteristik çizgisi*" adı verilmektedir.

İki-boyutlu süpersonik akımlar için karakteristikler yöntemi şu aşamalarla gerçekleştirilir:

- 1)  $xy$  düzleminde üzerinde akım büyüklüklerinin sürekli ama türevlerin belirsiz olduğu, ve süresiz olabildiği özel doğrultular olan karakteristik çizgileri bulunur.
- 2) Diferansiyel korunum denklemlerinden, karakteristik çizgiler boyunca uygunluk (compatibility) denklemleri adı verilen adi diferansiyel denklemler elde edilir.
- 3) Uygunluk denklemleri başlangıç şartlarından hareketle karakteristik çizgiler boyunca adım adım çözülür.

Bu aşamalardan geçen işlemler sonucu karakteristik çizgiler boyunca gidilerek bütün akım alanındaki akım büyüklükleri elde edilebilir.

Genel olarak karakteristik çizgileri akım alanına bağlıdır. Uygunluk denklemleri de karakteristik çizgileri üzerindeki konuma bağlıdır. Bu nedenle karakteristiklerin ve uygunluk denklemlerinin eşzamanlı olarak adım adım çözülmesi gerekir. Bunun bir

istisnası olarak uygunluk denklemlerinin cebrik denklemler olduğu iki-boyutlu irrotasyonel akımlar geometrik konumdan bağımsızdır.

### 11.3- İki- Boyutlu Irrotasyonel akımda Karakteristik Çizgilerin Tayini:

Üniform paralel bir akım için karakteristik çizgileriyle Mach çizgileri çakışmaktadır. Ancak daha genel bir akım halinde karakteristik çizgilerini daha sistematik bir şekilde araştırmak gerekir.

Daimi, adyabatik, iki-boyutlu, irrotasyonel süpersonik akım için

Potansiyel denklemi 
$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right)\phi_{xx} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right)\phi_{yy} - \frac{2\phi_x\phi_y}{a^2}\phi_{xy} = 0$$

Hız bileşenleri 
$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y$$

olup tam diferansiyelleri 
$$du = d\phi_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} dy = \phi_{xx} dx + \phi_{xy} dy$$

$$dv = d\phi_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} dy = \phi_{xy} dx + \phi_{yy} dy$$

şeklinde yazılabilir.

Denklemler yeniden düzenlenerek

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\phi_{xx} - \frac{2uv}{a^2}\phi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)\phi_{yy} &= 0 \\ (dx)\phi_{xx} + (dy)\phi_{xy} &= du \\ (dx)\phi_{xy} + (dy)\phi_{yy} &= dv \end{aligned}$$

$\phi_{xx}$ ,  $\phi_{xy}$ ,  $\phi_{yy}$  değişkenleri için yazılmış lineer bir denklem takımı elde edilir. Bu denklem sistemi, örneğin Cramer kuralı yardımıyla çözülerek  $\phi_{xy}$  için

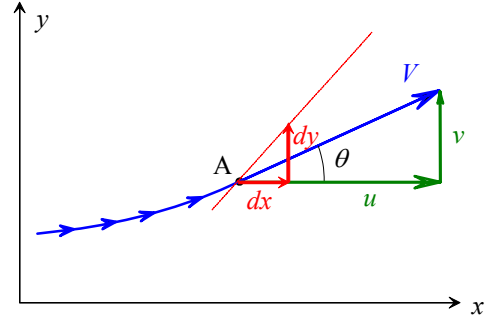
$$\phi_{xy} = \frac{\begin{vmatrix} 1 - u^2/a^2 & 0 & 1 - v^2/a^2 \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - u^2/a^2 & -2uv/a^2 & 1 - v^2/a^2 \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}} = \frac{N}{D}$$

bulunur.

Şekildeki akım alanının herhangi A noktasında  $\phi_{xy}$  nin hesaplanabilmesi için yukarıdaki eşitliğin sağındaki bölün terimin sıfırdan farklı olması ( $D \neq 0$ ) gerektiği açıktır.

Şayet,  $dx$  ve  $dy$  nin büyüklükleri  $D = 0$  olacak şekilde seçilirse  $\phi_{xy}$  nin değeri önerilen doğrultuda belirli olamaz.

Ancak,  $\phi_{xy}$  , belirli-tek değerli olmasa bile en azından sonlu olmalıdır.



A noktası civarında doğrultu ( $dx$  ve  $dy$ )  $D = 0$  olacak şekilde seçilirse  $\phi_{xy}$  nin sonlu kalabilmesi için yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki bölünen terimin de sıfır ( $N = 0$ ) yapılması gerekir.

$$\phi_{,xy} = \frac{N}{D} = \frac{0}{0}$$

Akım büyüklüklerine ait türevlerin üzerinde belirsiz olduğu, üzerinden geçerken süreksiz olabildiği doğrultular daha önce karakteristik doğrultular olarak tanımlanmıştır. Buna göre  $D = 0$  şartı ile tanımlanan çizgiler karakteristik çizgiler olacaktır

$$D = \begin{vmatrix} 1 - u^2/a^2 & -2uv/a^2 & 1 - v^2/a^2 \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)(dy)_c^2 + \frac{2uv}{a^2}(dxdy)_c + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right)(dx)_c^2 = 0$$

Bu eşitlik düzenlenerek

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)_c^2 + \frac{2uv}{a^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)_c + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0$$

karakteristik çizgilerin eğimi için çözülerek

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right)}$$

elde edilir.

Bu ifadedeki karekök terimi

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1 = \frac{V^2}{a^2} - 1 = M^2 - 1$$

olup:

- $M > 1$  için akım alanının her bir noktasında *iki karakteristik* mevcut olup, potansiyel denklemi denklemi *hiperbolik denklem* olarak nitelendirilir.
- $M = 1$  için *tek karakteristik* çizgisi mevcut olup, denklem *parabolik* olarak nitelendirilir.
- $M < 1$  için *karakteristikler sanal* olup, denklem *eliptik* olarak nitelendirilir.

Görüldüğü gibi daimi viskoz olmayan

- *sesüstü* akımlara ait denklemler *hiperbolik*,
- *sonik* akıma ait denklemler *parabolik*,
- *sesaltı* akımlara ait denklemler *eliptik*

nitelikli olmaktadır.

Ayrıca, sesüstü akımlarda herbir noktada iki karakteristik bulunması nedeniyle karakteristikler yöntemi bu akımların hesaplanmasında hayli kullanışlı bir araç olmaktadır.

Sesaltı akımlarda ise karakteristikler sanal olduğundan bu yöntemin kullanılması mümkün değildir.

Kısmen sesaltı, kısmen sesüstü akım bölgeleri içeren transonik akımlar bunun bir istisnası olup, bu akımlarda çözüm sanal karakteristikler kullanılarak kompleks düzlemde yapılabilmektedir.

Karakteristik çizgilerinin eğimi için bulunan eşitlik,

bir noktadaki hız bileşenleri sırasıyla  $u = V \cos \theta$ ,  $v = V \sin \theta$

olmak üzere

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \frac{-\frac{V^2 \cos \theta \sin \theta}{a^2} \pm \sqrt{\frac{V^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{a^2} - 1}}{1 - \frac{V^2 \cos^2 \theta}{a^2}}$$

veya  $\mu$  Mach açısı için

$$\sin \mu = \frac{1}{M} \quad \rightarrow \quad \frac{V^2}{a^2} = M^2 = \frac{1}{\sin^2 \mu}$$

olup

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \frac{-\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \mu} - 1}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}} = \frac{-\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sin^2 \mu} \pm \frac{1}{\tan \mu}}{1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \mu}}$$

şekline gelir.

Ayrıca

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta},$$

$$\sin^2 \mu = \frac{\tan^2 \mu}{1 + \tan^2 \mu},$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$$

olup, gerekli düzenlemelerden sonra

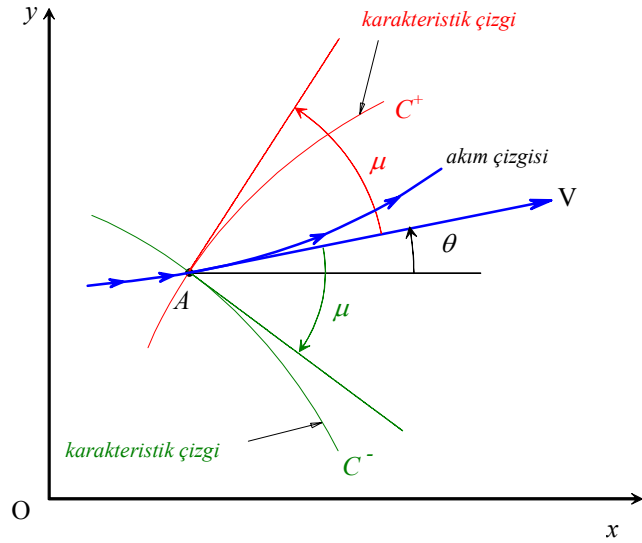
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \tan(\theta \mp \mu)$$

elde edilir. Bu son bağıntının grafiksel bir yorumu şekilde görülmektedir.

A noktasından geçen akım çizgisi  $x$  eksenine  $\theta$  açısı yapmaktadır.

Son bulunan bağıntının tanımladığı iki karakteristik çizgisinden birisi akım çizgisiyle üst taraftan  $\mu$  açısı yaparken diğeri akım çizgisiyle alt tarafından  $\mu$  açısı yapmaktadır. Bu karakteristikler sırasıyla  $C^+$  (veya sola doğru) karakteristik ve  $C^-$  (veya sağa doğru) karakteristik olarak adlandırılır.

Bir akım alanında genel olarak akım büyüklükleri (ve dolayısıyla  $\theta$  ve  $\mu$ ) genellikle noktadan noktaya değiştiğinden karakteristik çizgileri de eğrisel çizgilerdir.



#### 11.4- Uygunluk denklemlerinin tayini:

Akım büyüklüklerinin sonlu olması için önerilen şart uygulanarak

$$N = \begin{vmatrix} 1 - u^2/a^2 & 0 & 1 - v^2/a^2 \\ dx & du & 0 \\ 0 & dv & dy \end{vmatrix} = \left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) du dy + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) dx dv = 0$$

ve bu eşitlik düzenlenerek

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1 - \frac{u^2}{a^2}}{1 - \frac{v^2}{a^2}} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Sağdaki türev karakteristiklerin eğimine eşit olup

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_c = \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{u^2}{a^2}}$$

kullanılarak

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1 - \frac{u^2}{a^2}}{1 - \frac{v^2}{a^2}} \cdot \frac{-\frac{uv}{a^2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{u^2}{a^2}}$$

ve düzenlenerek

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{uv}{a^2} \mp \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{a^2} - 1}}{1 - \frac{v^2}{a^2}}$$

bulunur. Buradan

$$u = V \cos \theta, \quad v = V \sin \theta$$

olmak üzere

$$\frac{d(V \sin \theta)}{d(V \cos \theta)} = \frac{M^2 \cos \theta \sin \theta \mp \sqrt{M^2 - 1}}{1 - M^2 \sin^2 \theta}$$

ve gerekli düzenlemelerden sonra

$$d\theta = \mp \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

elde edilir. Bu denklem akım büyüklüklerinin karakteristik çizgiler boyunca değişimini belirleyen uygunluk denklemidir.

Sola doğru ( $C^+$ ) karakteristikler için

$$d\theta = +\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

Sağa doğru ( $C^-$ ) karakteristikler için

$$d\theta = -\sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V}$$

alınacaktır.

Bu denklemlerin Prandtl-Meyer genişleme dalgaları için bulunmuş olan denklemle özdeş oldukları görülmektedir. Dolayısıyla bu son denklemlerin de daha öncekinde olduğu gibi Prandtl-Meyer fonksiyonunu verecek biçimde integre edilmesi sonucu

Sola doğru ( $C^+$ ) karakteristikler üzerinde

$$\theta - \nu(M) = K^+ = Sb$$

Sağa doğru ( $C^-$ ) karakteristikler üzerinde

$$\theta + \nu(M) = K^- = Sb$$

elde edilir.

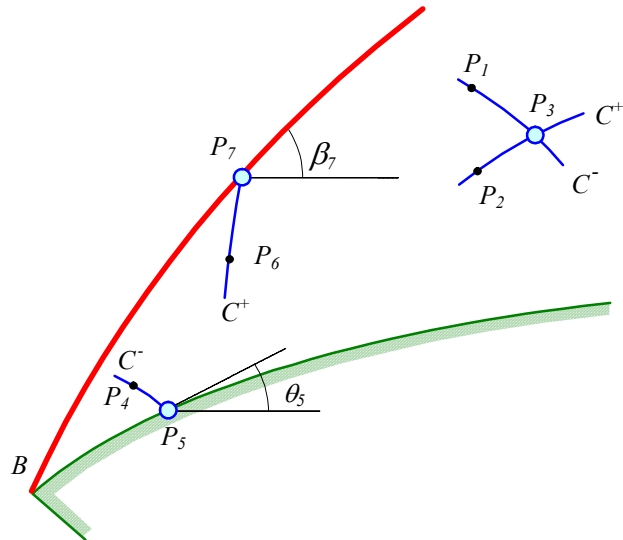
Bu denklemlerin ( $x, y$ ) koordinatlarından bağımsız olduğunu belirtmekte yarar bulunmaktadır. Böylece herhangi bir karakteristiğin geometrik konumuna bakılmaksızın bu denklemler çözülebilir. Ancak bu durum sadece iki-boyutlu hal için geçerli olup, bunun dışındaki durumlarda uygunluk denklemleri konuma bağlı olmaktadır.

### 11.5 Uygunluk Denklemlerinin Özel Çözümleri:

Herhangi bir süpersonik akım alanında karakteristikler yönteminin uygulanması açısından tipik sayılabilecek bazı durumlar vardır. Bunlar, hesap noktasının:

- akım alanı içerisinde (cidarlardan uzakta) bir nokta,
- katı cidar üzerinde bir nokta,
- eğik şok dalgası üzerinde bir nokta veya
- başlangıç çizgisi üzerinde bir nokta

olması gibi sınıflandırılabilir.





**Akım alanı içinde bir nokta için çözüm:**

Akım alanı içerisinde iki noktadaki akım büyüklükleri bilindiğinde üçüncü bir noktadaki büyüklükler hesaplanabilir.

Şekildeki  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarında  $v_1, \theta_1$  ve  $v_2, \theta_2$  büyüklükleri bilinmekteyse

$$P_1 \text{ noktasından geçen } C^- \text{ karakteristiği boyunca} \quad \theta_1 + v_1 = K_1^-$$

$$P_2 \text{ noktasından geçen } C^+ \text{ karakteristiği boyunca} \quad \theta_2 - v_2 = K_2^+$$

yazılabilir. Bu karakteristiklerin kesişme noktası olan üçüncü bir  $P_3$  noktasında ise

$$\theta_3 + v_3 = K_3^- = K_1^-, \quad \theta_3 - v_3 = K_3^+ = K_2^+$$

yazılabilir ki, bu iki bağıntı çözülerek

$$\theta_3 = \frac{1}{2} [K_1^- + K_2^+], \quad v_3 = \frac{1}{2} [K_1^- - K_2^+]$$

elde edilir. Bulunan  $v_3$  büyüklüğü Prandtl-Meyer fonksiyonunda kullanılarak  $P_3$  noktasındaki  $M_3$  Mach sayısı ve izantropik akım bağıntıları kullanılarak da  $\rho_3, T_3, p_3$  vb. diğer akım büyüklükleri elde edilir.

$P_3$  noktası  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen karakteristiklerin kesişme noktası olarak belirtilmişti. Ancak karakteristik çizgileri genellikle eğrisel çizgiler olup, bunların kesişme noktalarının bulunması ayrı bir işlem gerektirir.

Yaklaşık ama yeterince doğru bir yöntem olarak, akım alanındaki hesap noktaları birbirine yeterince yakın seçilerek bunlar arasında karakteristik çizgilerinin doğrusal olduğu kabul edilebilir.

Bu durumda karakteristik eğrilerin eğimleri için ortalama değerler alınması daha uygun olur. Örneğin  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarından geçen  $C^-$  ve  $C^+$  karakteristikleri için ortalama eğimler sırasıyla

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{ort}^+ = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dy}{dx}\right)_2^+ + \left(\frac{dy}{dx}\right)_3^+ \right], \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{ort}^- = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^- + \left(\frac{dy}{dx}\right)_3^- \right]$$

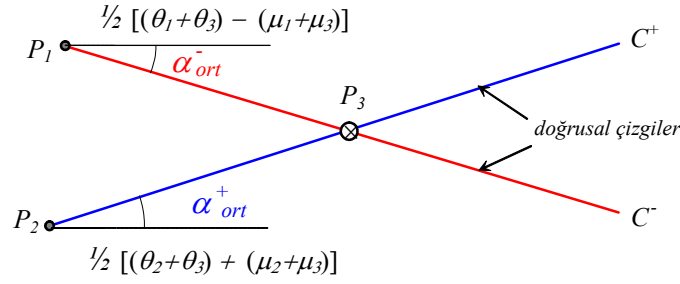
veya

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^+ = \tan(\theta + \mu), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^- = \tan(\theta - \mu)$$

olduğu hatırlanarak açılar cinsinden

$$\alpha_{ort}^+ = \frac{\theta_2 + \theta_3}{2} + \frac{\mu_2 + \mu_3}{2}, \quad \alpha_{ort}^- = \frac{\theta_1 + \theta_3}{2} - \frac{\mu_1 + \mu_3}{2}$$

şeklinde hesaplanabilir.



### **Katı duvar üzerindeki bir nokta için çözüm:**

Katı duvar yakınlarındaki bir noktada akım büyüklükleri bilindiği takdirde duvar üzerindeki büyüklükler hesaplanabilir. Örneğin  $P_4$  gibi bir nokta ele alırsa

bu noktadan geçen  $C^-$  karakteristiği boyunca

$$\theta_4 + v_4 = K_4^-$$

olup, bu karakteristiğin duvarla kesiştiği  $P_5$  noktasında

$$\theta_5 + v_5 = K_5^- = K_4^-$$

yazılabilir. Ayrıca duvarın şekli genellikle bilindiğinden  $\theta_5$  eğim açısı kullanılarak

$$v_5 = v_4 + \theta_4 - \theta_5$$

elde edilir.

### **Eğik şok dalgası üzerindeki bir nokta için çözüm:**

Eğik şok dalgası yakınlarındaki bir noktada akım büyüklükleri bilindiği takdirde şok dalgası üzerindeki büyüklükler hesaplanabilir. Örneğin  $P_6$  gibi bir nokta ele alırsa:

bu noktadan geçen  $C^+$  karakteristiği boyunca

$$\theta_6 - v_6 = K_6^+$$

yazılabilir. Bu karakteristiğin şokla kesiştiği  $P_7$  noktasında ise

$$\theta_7 - v_7 = K_7^+ = K_6^+$$

yazılabilir.  $\theta_7$  ve  $v_7$  nin her ikisi de bilinmediğinden bu denklem iki bilinmeyenli çözüme için yeterli değildir. Ancak, çözüm için eğik şok denklemlerinden yararlanılır.

Şöyle ki; serbest akım Mach sayısının verilen  $M_\infty$  değerinde lokal eğik şok açısı  $\beta_7$  için bir tahmin yapılır. Bu değere karşılık şok gerisindeki akımın doğrultu açısı  $\theta_7$  ve Mach sayısı  $M_7$  hesaplanır. Prandtl-Meyer fonksiyonu kullanılarak  $v_7$  bulunur.

Böylece bulunan  $\theta_7 - v_7$  değerinin  $K_6^+$  ye eşit olması gerekir. Eşit değilse yeni bir deneme yapılır ve işlemler eşitlik sağlanıncaya kadar sürdürülür.

### **Başlangıç çizgisi üzerindeki bir nokta için çözüm:**

Yukarıda izah edilen hesaplar akım alanında mutlaka bir başlangıç bölgesinden itibaren başlatılarak adım adım ilerletilecektir. Bu bakımdan karakteristikler yönteminin başlatılabilmesi için elimizde üzerindeki akımın yerel olarak süpersonik olduğu ve akım büyüklüklerinin bilindiği bir çizgi bulunması gerekmektedir. İşte bu çizgiye başlangıç çizgisi adı verilmektedir.

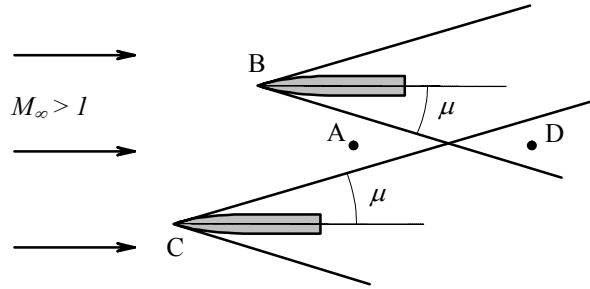
Lüle içerisindeki akım gibi dahili akımlarda başlangıç çizgisi, sonik çizginin hemen gerisinde yer alan sınır karakteristiklerinin üzerinde veya hafifçe gerisinde alınır. Bu başlangıç çizgisi üzerindeki akım büyüklükleri daha önceden gerçekleştirilen bağımsız bir çözümden elde edilir. Başka bir yaklaşım da lülenin tam boyun noktasında lüle eksenine dik bir doğrunun başlangıç çizgisi olarak alınmasıdır. Bu taktirde akım büyüklükleri de boyun bölgesinde duvardan yayılan bir genişleme dalgası bulunduğu varsayımıyla elde edilebilir.

Harici bir akımda, örneğin keskin hücum kenarlı bir kanat profili etrafındaki akımda, hücum kenarının hemen gerisinde eğik şokla cidar arasındaki bir çizgi boyunca akım özellikleri hesaplanarak, hesaplar bu çizgiden itibaren ilerletilebilir.

### 11.6- Etki Bölgesi ve Bağımlılık Bölgesi:

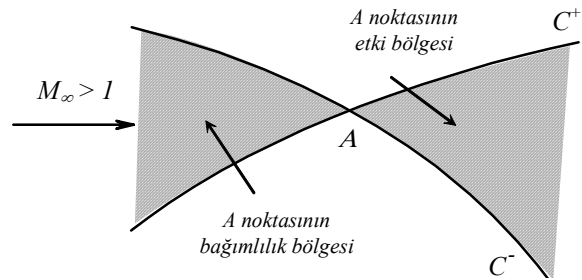
Sesüstü akımda bozuntular sınırlı bir bölgede hissedilmektedir. Bu husus, bozuntuların akım alanında her doğrultuda yayıldığı sesaltı akımlarla bir farklılık oluşturmaktadır.

Daimi süpersonik akımda bozuntuların yayılması konusunu daha iyi anlamak için Şekilde görüldüğü gibi sesüstü akımda yer alan iğne şeklinde iki cismin arasındaki A noktasını ele alalım. İğneler çok narin olduklarından etraflarında Mach dalgaları oluştururlar. A noktası iğne uçlarından çıkan Mach dalgalarından daha önde yer almakta olup cisimlerin varlığı A noktasında hissedilmeyecektir. Aynı akımda görülen D noktasında ise cisimlerin varlığı hissedilecektir.



İşte bir akım alanında bozuntularının herhangi bir A noktasından hissedilebildiği noktaların oluşturduğu bölgeye A noktasının *bağımlılık bölgesi* adı verilir.

Bu bağımlılık bölgesinin şekilde görüldüğü gibi A noktasından geçen sağa ve sola doğru iki karakteristik çizgi arasında kalan ön bölge olduğunu göstermek mümkündür. Aynı karakteristik çizgileri arasında ve A noktasının gerisinde kalan bölge ise A noktasının *etki bölgesi* olarak adlandırılır ki bu bölgede yer alan bütün noktalarda, A noktasında oluşmuş bulunan bozuntular hissedilir. Daimi sesüstü akımda A noktasında oluşan bozuntuların hiçbir şekilde akım içerisinde ileriye doğru yayılmayacağını hatırlatmakta yarar vardır. (Not: Daimi olmayan sesüstü akımlarda bunun aksi olabilmektedir.)

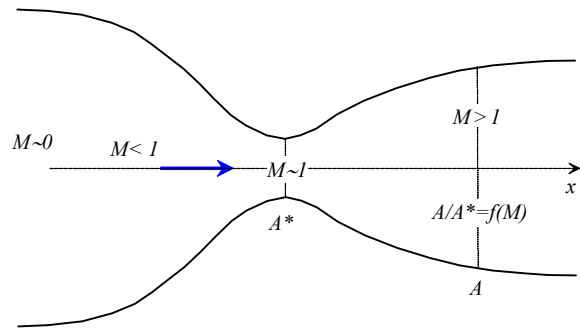


### 11.7- Süpersonik Lüle Dizaynı:

Bir-boyutlu akım yaklaşımı ile

$$\frac{dA}{A} = (M^2 - 1) \frac{du}{u}$$

şeklinde elde edilen Hugoniot bağıntısına göre düşük sesaltı hızlardaki akımın sesüstü hızlara eriştirilebilmesi için önce daralan bir kanalda ses hızına eriştirilmesi, daha sonra da genişleyen bir kanalda istenilen sesüstü hıza çıkartılması gerekir.



Kanalın genişleme miktarı ile erişilen Mach sayısı arasında bir ilişki vardır. Akımın basınç, yoğunluk ve sıcaklık gibi büyüklükleri Mach sayısı ile hesaplanabilir. Ancak, bir-boyutlu akım yaklaşımıyla yapılan bu tür hesaplamalar kanalın;

sadece kesit oranları ile Mach sayıları arasında

$$A / A^* = f(M)$$

şeklinde belirtilen ilişkiyi kurmayı sağlar, kanalın geometrisini

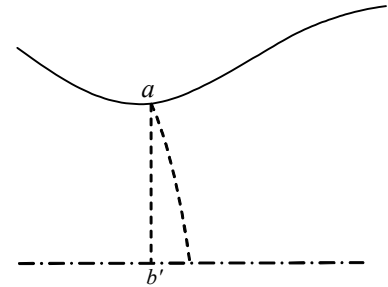
$$A / A^* = f(x)$$

şeklinde  $x$  koordinatına bağlı olarak vermez. Öte yandan rastgele seçilmiş bir geometri lülenin ıraksak kısmında istenmedik şok dalgalarına neden olabilir.

Yakınsak-ıraksak bir lülenin yakınsak kısmı sıkıştırılabilir potansiyel akım teorileri yardımıyla dizayn edilir.

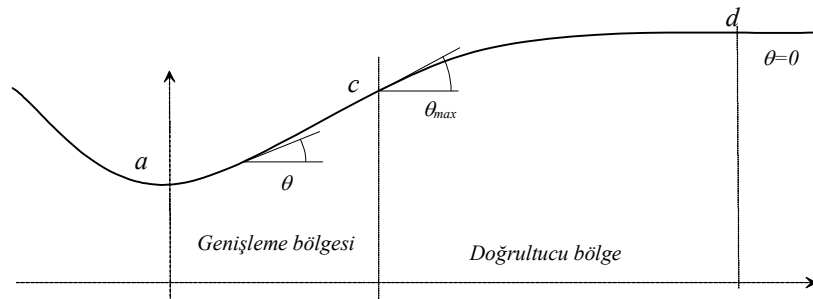
Yakınsak kısım ile ıraksak kısım boyun adı verilen bir kısımda birleşir.

Boyun bölgesinde Mach sayısının 1 olduğu noktaları birleştiren sonik çizgi aslında eğrisel olmakla birlikte bu eğrinin biçimi bir başka yöntemle elde edilmemişse çoğu zaman bir doğru şeklinde alınır ( $a-b'$  doğrusu).



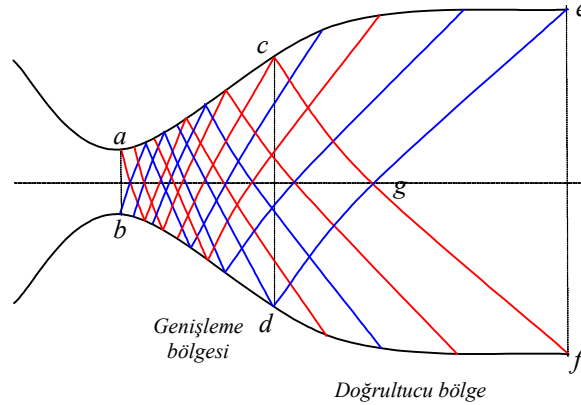
Karakteristikler yöntemi, lülenin ıraksak kısmını gerektiği gibi şoksuz izantropik akımın elde edilebileceği bir süpersonik lüle dizaynı için kullanılacak uygun bir yöntemdir.

Süpersonik rüzgar tünellerinde çoğu halde lülenin boyun kesimi sürekli bir eğridir. ıraksak kısımda önce bir genişleme bölgesi bulunur. Ardından bir doğrultucu bölge gelir.



Genişleme bölgesinde duvarın eğimi giderek artar. Duvar dış-bükeydir. Bu nedenle genişleme dalgaları üretir. Genişleme dalgaları karşı duvardan oluşan genişleme dalgalarıyla kesişerek bir miktar yön değiştirirler ve karşı duvardan yansıma yaparlar. Eğimin maksimum değerinden sonra doğrultucu bölge gelir. Duvar eğiminin azaldığı bu

iç-bükey kısımda duvar eğrisi öyle ayarlanmalıdır ki duvara gelen dalgalar yansımaları ve sönümlensin.



Şekildeki örnekte ( $acgdb$ ) bölgesinde karakteristiksel birbirleriyle kesişmekte olup eğriseldir. ( $cge$ ) ve ( $dgf$ ) bölgelerinde ise tek tür karakteristik olup bunlar da doğrusaldır.

Akım eksene göre simetrik olduğundan lüle ekseni bir akım çizgisidir. Bu çizgiyi bir duvar Kabul ederek lülenin sadece üst yarısında hesap yapmak mümkündür.

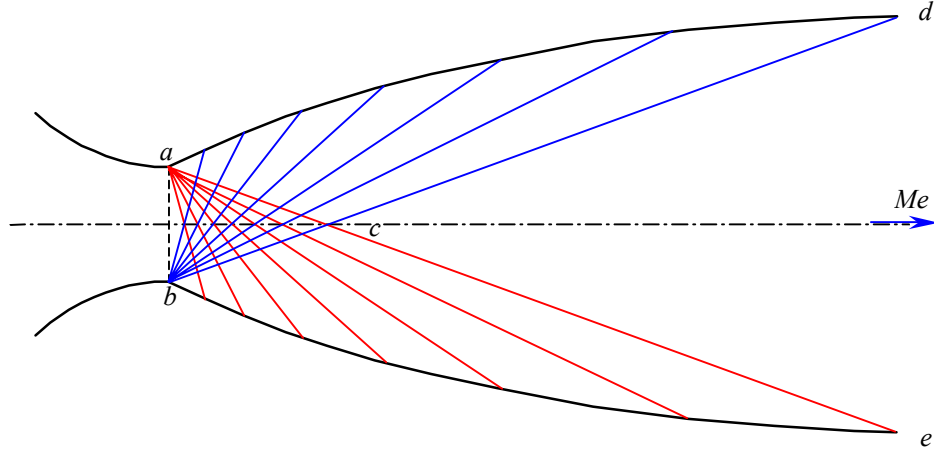
Yukarıda izah edilen türde bir süpersonik lülenin genişleme bölgesinde her noktadan genişleme dalgaları çıkması, bunların birbirleriyle kesişmesi ve karşı duvardan yansımaları nedeniyle böyle bir lülenin tasarımı hayli karmaşık bir hesaplama algoritması gerektirir. Bu tip lüleler aynı zamanda duvar eğiminin genellikle küçük tutulması nedeniyle hayli kaliteli (üniform-paralel) bir sesüstü akım üretmekle birlikte hayli uzundurlar.

Buna karşılık roket motorlarındaki süpersonik lülelerin çıkışında akım kalitesinin çok iyi olması beklenmez. Ama lülenin hafif olması tercih edilir. Bunun için de lüle boyunun kısa olması gerekir.

Roket motorlarında çoğu zaman boyun noktasından sonraki genişleme bölgesi bir tek noktadan ibarettir. Yani ani genişleme yapılır. Boyun noktasındaki genişleme köşelerinden genişleme dalgaları çıkar. Lüle geometrisi, bu dalgalar lülenin karşı duvarı üzerinde yok olacak biçimde tasarlanır.

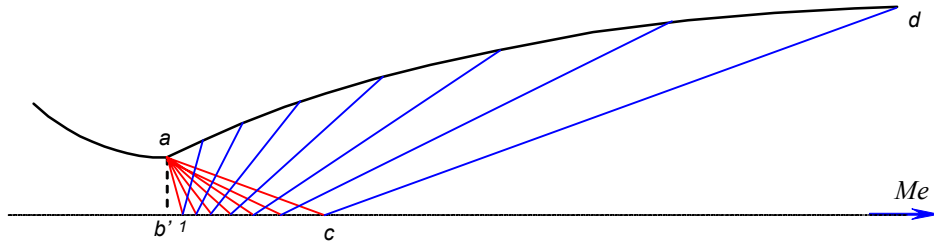
Normal olarak bir genişleme köşesinden sonsuz sayıda genişleme dalgası çıkacak iken, karakteristikler yönteminin uygulanmasında köşeden sonlu sayıda genişleme dalgası çıktığı düşünülür ve bu şekilde işlem yapılır.

Örneğin şekildeki lülenin her bir genişleme köşesinden 7 şer adet karakteristik eğrisi çıktığı varsayılmıştır. Şekildeki  $abc$  bölgesinde karakteristikler birbiriyle kesiştikleri için eğriseldir.  $acd$  ve  $dce$  bölgelerinde ise kesişme olmadığından karakteristik çizgileri doğrusaldır.



$cd$  karakteristik çizgisi başka karakteristik çizgileriyle kesişmediğinden doğrusal bir karakteristik çizgisi olup üzerindeki bütün noktalarda akım özellikleri aynıdır.

Lüle eksenine göre simetriden dolayı dalgaların eksen üzerinden yansıdığı varsayılarak lülenin sadece bir yarısında işlem yapılır.



Ani, genişlemeli roket lüleleri için örnek bir uygulama bu bölüme Ek olarak verilmiştir.