

BÖLÜM 10

SESÜSTÜ POTANSİYEL AKIMLAR

10.1- Giriş

10.2- Sesüstü akımlar için lineerleştirilmiş potansiyel denklemi

10.3- Lineerleştirilmiş potansiyel denkleminin çözümü

10.4- Basit çözümler

10.5- Uygun dalga ailesinin seçimi

10.6- Analitik çözüm – dalga yüzeyli duvar etrafında akım

10.7- Genel çözümün geometrik yorumu

10.8- Mach dalgaları için dört tipik hal

10.9- Süpersonik kanat profilleri

10.1- Giriş

Çoğu süpersonik akımda şok dalgaları mevcut olmakla birlikte zayıf eğik şok halinde şoku geçen akımın antropisinde artış hayli küçüktür. Bu bakımdan zayıf eğik şoku geçen bir akımın irrotasyonelliğini koruduğunu kabul etmek mümkündür. Yani başlangıçta potansiyel olan akım zayıf şoktan sonra da potansiyel kabul edilir ve akım alanının incelenmesinde potansiyel akım denklemlerinden yararlanır.

Zayıf şoklu, iki-boyutlu süpersonik akımlara hücum ve firar kenarları keskin ince profiller üzerinde küçük hücum açıları, ince palalı ve burulma açıları küçük olan türbin ve kompresörlerde, iki-boyutlu kanallarda ve süpersonik lülelerin çıkışlarında rastlamak mümkündür. Verilen örneklerden de farkedileceği gibi şokun zayıf olması cismin yarattığı bozuntuların küçük olmasıyla doğrudan ilgilidir.

Bu bölümde şokların ihmal edilebildiği küçük bozuntulu, iki-boyutlu süpersonik akımlar için elde edilen "*lineerleştirilmiş potansiyel denklemi*" nin çözümü üzerinde durulacaktır. İncelemeler süpersonik ve subsonik akımlar arasındaki temel farklılıklar hakkında çok önemli bilgiler vermesi yanında ayrıca, karmaşık süpersonik akımların daha yüksek mertebeden yaklaşımlarla zahmetli incelemelerinden önce akımın temel özellikleri hakkında önemli bilgiler verebilmesi bakımından da oldukça ilginçtir.

10.2- Sesüstü akımlar için lineerleştirilmiş potansiyel denklemi

Daimi, iki-boyutlu, sesüstü akımlar için

Potansiyel denklemi
$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \cdot \phi_{xx} - 2 \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} \cdot \phi_{xy} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \cdot \phi_{yy} = 0$$

Enerji denklemi
$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2)$$

Cismin *kalınlık, kamburluk ve hücum açısının*

$$\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 - 1} \cdot \frac{u}{V_\infty} \ll 1, \quad M_\infty^2 \cdot \frac{v}{V_\infty} \ll 1$$

koşulları sağlanacak biçimde küçük olması halinde

$$(M_\infty^2 - 1) \cdot \phi_{xx} - \phi_{yy} = 0$$

şeklinde lineerleştirilebilir. Bu denklem

$$\beta^2 = M_\infty^2 - 1$$

olmak üzere

$$\beta^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Aynı yaklaşımla basınç katsayıları da

$$C_p \cong -2 \frac{u}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \cdot \phi_x$$

şeklinde lineerleştirilebilir.

10.3- Lineerleştirilmiş potansiyel denkleminin çözümü

Lineerleştirilmiş potansiyel denklemi

$$\beta^2 \phi_{xx} - \phi_{yy} = 0$$

Potansiyel fonksiyonu için süperpozisyon

$$\phi = V_\infty x + \varphi$$

Potansiyel fonksiyonunun türevleri alınarak

$$\begin{aligned} \phi_x &= V_\infty + \varphi_x \rightarrow \phi_{xx} = \varphi_{xx} \\ \phi_y &= \varphi_y \rightarrow \phi_{yy} = \varphi_{yy} \end{aligned}$$

Lineerleştirilmiş potansiyel denkleminde kullanılarak

$$\beta^2 \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

Görüldüğü gibi lineerleştirilmiş denklem bozuntu potansiyeli için de geçerlidir. Bu denklem hiperbolik karakterde olup çözümü için önce klasik dalga denklemine dönüştürülür.

Lineerleştirilmiş potansiyel denkleminde

$$\begin{aligned} \xi &= x + \beta y \\ \eta &= x - \beta y \end{aligned}$$

değişken dönüşümleri uygulanırsa, türevler

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\beta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\beta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \beta^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} \right)$$

şeklinde dönüştürülerek denklem

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

şekline gelir. Ardarda iki kere integral alınarak

$$\varphi = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

veya serbest akım hızıyla çarpılmış olarak

$$\varphi = V_\infty [f_1(x + \beta y) + f_2(x - \beta y)]$$

elde edilir. Bu ifadenin türevleri alınarak bozuntu hız bileşenleri için

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \rightarrow \boxed{u = V_\infty (f_1' + f_2')}$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial f_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \rightarrow \boxed{v = V_\infty \beta (f_1' - f_2')}$$

bulunur. Buradaki üs işaretleri f_1 ve f_2 fonksiyonlarının kendi argümanlarına göre türevlerini belirtmektedir.

Akım çizgilerinin denklemi hız vektörünün akım çizgisine teğet olacağı şartından elde edilebilir.

$$\frac{dy_s}{dx} = \frac{v}{V_\infty + u} = \frac{v/V_\infty}{1 + u/V_\infty} = \frac{v/V_\infty}{1 + u/V_\infty - M_\infty^2 u/V_\infty} = \frac{v/V_\infty}{1 - \beta^2 u/V_\infty}$$

Bozuntu hız bileşenleri kullanılarak

$$\frac{dy_s}{dx} = \frac{\beta (f_1' - f_2')}{1 - \beta^2 (f_1' + f_2')}$$

Bu ifade yeniden düzenlenerek

$$dy_s = \beta [(f_1' - f_2') dx + \beta (f_1' + f_2') dy_s]$$

$$dy_s = \beta [(f_1' dx + \beta f_1' dy_s) - (f_2' dx - \beta f_2' dy_s)]$$

$$dy_s = \beta \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y_s} dy_s \right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y_s} dy_s \right) \right] = \beta (df_1 - df_2)$$

İntegral alınarak

$$\boxed{y_s = \beta (f_1 - f_2) + Sb}$$

Basıncı katsayısı

$$C_p \cong -2 \frac{u}{V_\infty} \rightarrow$$

$$\boxed{C_p = -2 (f_1' + f_2')}$$

10.4- Basit çözümler

10.4.1- $f_1 = Sb$ hali

Bu halde φ potansiyel fonksiyonu f_1 'den bağımsız olup $\varphi = V_\infty f_2(x - \beta y) + Sb$

f_2 fonksiyonu sadece $(x - \beta y)$ argümanına bağlı olup $x - \beta y = Sb$ için $f_2 = Sb$

Buna göre $\varphi = Sb$ çizgileri

$$x - \beta y = Sb \rightarrow$$

$$\boxed{y = \frac{1}{\beta} x + Sb}$$

doğrulardır. Bu doğruların α eğimleri

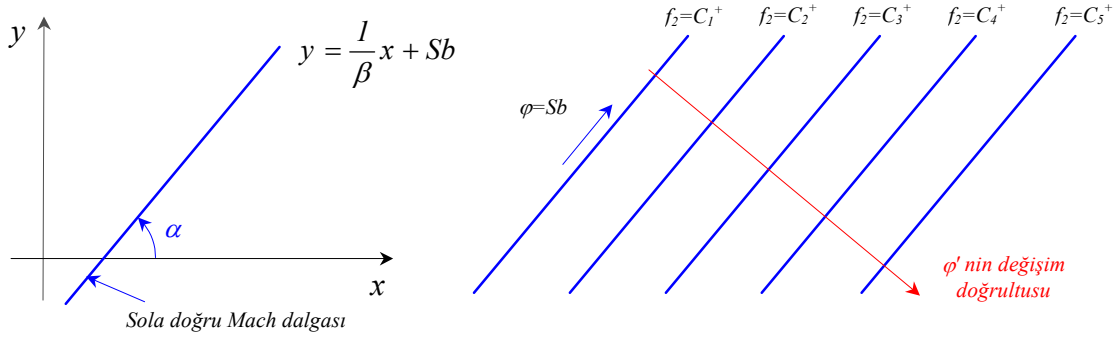
$$\tan \alpha = \frac{1}{\beta}$$

olup, buradan

$$\sin \alpha = \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}} = \frac{1/\beta}{\sqrt{1 + 1/\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{1}{M} = \frac{U}{a}$$

Görüldüğü gibi bu doğruların eğimleri Mach açısına eşittir.

$y = (1/\beta)x + Sb$ doğrularına "*sola doğru Mach dalgaları*" adı verilmektedir.



Bozuntu hızları

$$u = V_\infty f_2', \quad v = -V_\infty \beta f_2'$$

Basınç katsayıları

$$C_p = -2f_2'$$

Akım çizgilerinin eğimi

$$\frac{dy_s}{dx} \cong \frac{v}{u} = -\beta f_2'$$

Bu büyüklüklerin hepsi de f_2' ye bağlı olup $y = (1/\beta)x + Sb$ doğruları boyunca f_2 ve dolayısıyla f_2' sabit olduğundan bütün bu akım büyüklükleri de sabit olacaktır.

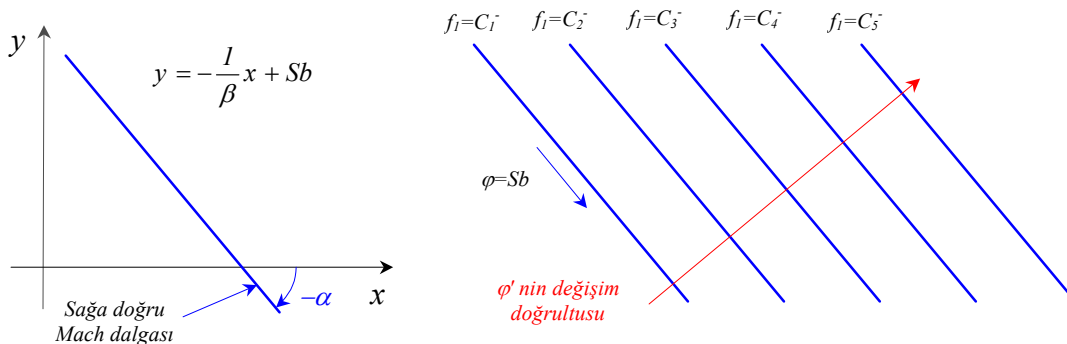
10.4.2- $f_2=Sb$ hali

Bu halde ϕ potansiyel fonksiyonu f_2 'den bağımsız olup $\phi = V_\infty f_1(x + \beta y) + Sb$

f_1 fonksiyonu sadece $(x + \beta y)$ argümanına bağlı olup $x + \beta y = Sb$ için $f_1 = Sb$

Buna göre $\phi = Sb$ çizgileri

$$x + \beta y = Sb \rightarrow y = -\frac{1}{\beta}x + Sb$$



doğrularıdır. Bu doğruların eğim açıları da Mach açısına eşit olup bu doğrulara "*sağa doğru Mach dalgaları*" adı verilmektedir.

Bozuntu hızları

$$u = V_\infty f_1', \quad v = V_\infty \beta f_1'$$

Basınc katsayıları

$$C_p = -2f_1'$$

Akım çizgilerinin eğimi

$$\frac{dy_s}{dx} \cong \frac{v}{u} = \beta f_1'$$

Bu büyüklüklerin hepsi de f_1' ye bağlı olup $y = (-1/\beta)x + Sb$ doğruları boyunca f_2 ve dolayısıyla f_2' sabit olduğundan bütün bu akım büyüklükleri de sabittir.

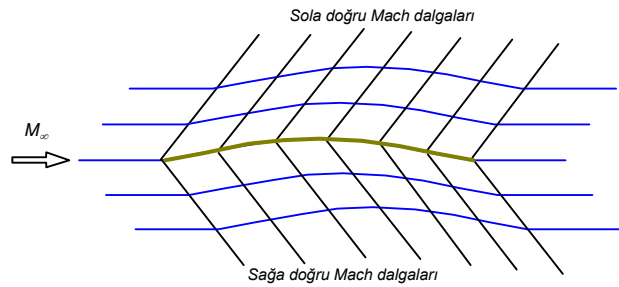
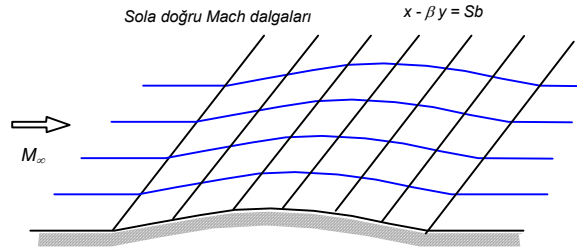
10.5- Uygun dalga ailesinin seçimi:

Bir süpersonik akım alanında sola ve sağa doğru Mach dalgalarından hangisinin bulunacağı katı cidarlar üzerindeki sınır şartlarına bağlıdır.

Katı cidarlardan çıkan bozuntular daima akımın genel gidişi yönünde yayılacaktır. Buna göre bu bozuntuların üzerinde yayıldığı Mach dalgaları da cidarlardan akımın genel gidiş yönünde yönlenecektir.

Örneğin şekilde görüldüğü gibi bir duvarın üst yanında sola doğru Mach dalgaları, alt tarafında ise sağa doğru Mach dalgaları olacaktır.

Bu duvarlar yerine sesüstü akımdaki bir ince profil ele alınırsa, bu defa profilin üst tarafında sola doğru Mach dalgaları yer alırken, alt tarafında da sağa doğru Mach dalgaları yer alacaktır.

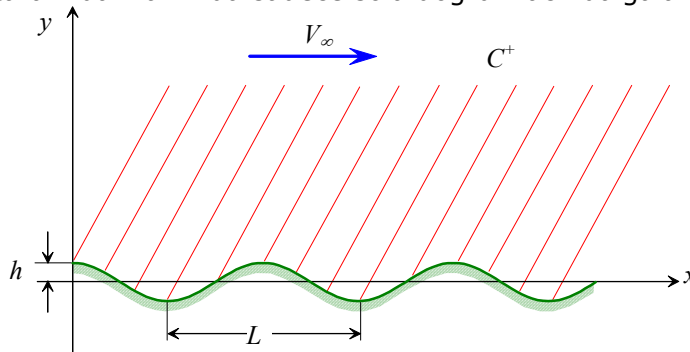


10.6- Dalga yüzeyli duvar üzerindeki akım:

Eğrisi

$$y_w = h \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

olan duvarın üst tarafındaki akımda sadece sola doğru Mach dalgaları bulunacaktır.



Buna göre akım çizgilerinin denklemi

$$y_s = Sb - \beta f_2$$

Duvar yüzeyinin akım çizgisi olduğu gözönüne alınarak

$$h \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = Sb - \beta f_2$$

Sabitin değeri sıfır seçilerek

$$f_2 = -\frac{h}{\beta} \cos\left[\frac{2\pi}{L}(x - \beta y)\right]$$

Basınç katsayıları

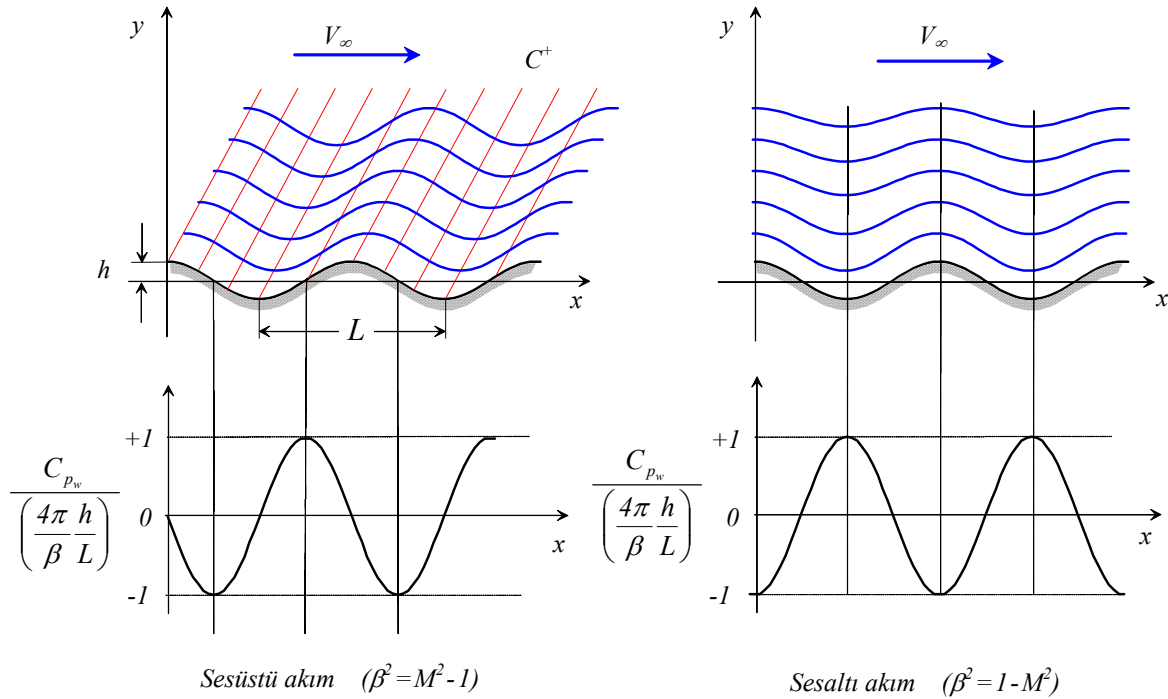
$$C_p = -2f_2' \rightarrow$$

$$C_p = -\frac{4\pi h}{\beta L} \sin\left[\frac{2\pi}{L}(x - \beta y)\right]$$

Duvar üzerinde basınç katsayıları

$$C_{p_w} = -\frac{4\pi h}{\beta L} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Sesaltı sıkıştırılabilir akım ve sesüstü potansiyel akımlar halinde akım alanlarının görünüşleri ve duvarlar üzerindeki basınç dağılımları şekilde karşılaştırılmıştır. Buna göre:



a) Sesaltı akımda akım çizgileri y eksenine göre simetri gösterirken (bütün akım çizgilerinin maksimum noktaları duvarın maksimumu hizasında, minimumları da duvarın minimumu hizasında) süpersonik akımlarda akım çizgilerinde böyle bir simetri bulunmamaktadır. Akım çizgileri şeklen aynı olmakla birlikte x yönünde bir kayma (faz farkı) mevcuttur.

b) Sesaltı akımda duvardan uzaklaştıkça akım çizgilerinin genliği azalırken, süpersonik akımda bozuntular Mach çizgileri boyunca sonsuza kadar gitmektedir.

c) Sesaltı akımda duvarın en üst noktasında basınç en düşük ve en alt noktasında da en büyük değerine sahipken, süpersonik akımda basıncın en düşük ve en büyük olduğu noktalar sırasıyla duvar eğiminin negatif ve pozitif yönde en büyük olduğu noktalardır.

d) Herhangi bir noktadaki basınç katsayısı sesaltı akımda Mach sayısı ile artarken, süpersonik akımda Mach sayısı arttıkça basınç katsayısı azalmaktadır.

Dalgalı yüzey etrafındaki akım için yukarıda verilen çözüm potansiyel fonksiyonunun uygun şekli aranarak elde edilmiştir. Aynı çözüme Ackaret tarafından önerilen yöntemle, yani akım çizgilerinin Mach dalgalarını geçerken gösterdikleri değişiklikleri inceleyerek de ulaşmak mümkündür.

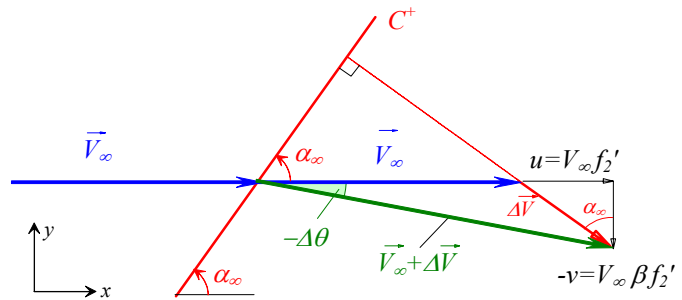
Duvar üzerinde sadece sola doğru Mach dalgalarının bulunacağı aşıkardır. Duvar üzerindeki herbir noktadan sonsuz küçük bozuntular üreyecek ve bu Mach çizgileri boyunca akım alanında yayılacaktır. Akım çizgilerinin Mach çizgileri üzerinden geçerken maruz kalacağı sapmanın miktarı duvar üzerindeki eğimin duvar boyunca değişimince belirlenecektir. Akım özellikleri Mach çizgileri boyunca aynı olacağına göre akım çizgilerinin şekilleri, akım çizgisi eğimlerinin Mach çizgisi boyunca aynı olacağı düşüncesiyle elde edilebilir.

10.7. Genel çözümün geometrik yorumu:

Yukarıda elde edilen bilgiler potansiyel denkleminin çözümünün, katı cidar üzerindeki sınır şartlarına uyan Mach dalgalarını seçerek akım çizgilerini izlemenin ve Mach dalgalarını geçerken akım çizgileri boyunca akım karakteristiklerinde meydana gelecek değişiklikleri hesaplamının uygun olacağını göstermektedir. Bu inceleme tarzı *Ackaret yöntemi* olarak da bilinmektedir.

Böyle bir inceleme için örneğin akım alanının bir bölgesinde sadece sola doğru Mach dalgalarının bulunduğunu, yani $f_1 = Sb$ olduğu ve akımdaki bütün değişimlerin f_2 deki değişimlerden kaynaklandığını varsayalım.

Hız vektöründeki değişimler bozuntu potansiyelinin gradyanına eşit olduğundan ve bozuntu potansiyeli de sadece Mach dalgalarına dik doğrultuda değiştiğinden, akım çizgisi bir Mach dalgası üzerinden geçerken hız vektöründeki değişim de Mach dalgasına dik doğrultuda olacaktır



Mach dalgasını geçerken ceyyan borusunda kesit değişimi olmadığı varsayarak:

Süreklilik denklemi

$$\rho_\infty V_\infty = \rho (V_\infty + \Delta V) = Sb$$

Bir-boyutlu Euler denklemi

$$dp = -\rho V dV$$

Buradan

$$p - p_\infty = -\rho_\infty V_\infty (V - V_\infty) \cong -\rho_\infty V_\infty u$$

Şeklin geometrisinden

$$\tan \alpha_\infty = \frac{u}{-v} \quad \rightarrow \quad u = -v \tan \alpha_\infty$$

Şeklin geometrisinden

$$-v \cong (V_\infty + \Delta V)(-\Delta\theta) = -V_\infty \Delta\theta \left(1 + \frac{\Delta V}{V_\infty}\right) \cong -V_\infty \Delta\theta$$

Bu ikisi birleştirilerek

$$u = -V_{\infty} \Delta\theta \tan \alpha_{\infty}$$

Ayrıca Mach açısı tanımından

$$\tan \alpha_{\infty} = \frac{1}{\beta}$$

olup

$$u = -V_{\infty} \frac{\Delta\theta}{\beta}$$

Bu son bağıntı da Euler denkleminde kullanılarak

$$p - p_{\infty} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \frac{\Delta\theta}{\beta}$$

Basınç katsayısı tanımından

$$C_{p_{c^+}} = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} = 2 \frac{\Delta\theta}{\beta} \rightarrow C_{p_{c^+}} = 2 \frac{\Delta\theta}{\beta}$$

elde edilir.

Benzeri bir inceleme sağa doğru Mach dalgaları için yapılarak

$$C_{p_{c^-}} = -2 \frac{\Delta\theta}{\beta}$$

bulunur. Buradaki $\Delta\theta$ Mach dalgasını geçerken akım çizgisinde serbest akım doğrultusuna kıyasla meydana gelen sapma miktarı olup, bir bakıma, akım çizgisinin eğimini belirtmektedir. Nitekim basit akımların incelenmesi sırasında sola doğru Mach dalgası için bulunan sonuçlar hatırlanırsa

Basınç katsayıları

$$C_p = -2f_2'$$

Akım çizgilerinin eğimi

$$\frac{dy_s}{dx} \cong \frac{v}{u} = -\beta f_2'$$

olup, bu ikisi birleştirilerek

$$C_{p_{c^+}} = \frac{2}{\beta} \frac{dy_s}{dx}$$

bulunabileceği görülür. Buna göre lokal basınç katsayısı sadece akım çizgisinin lokal eğimine bağlıdır.

Örneğin dalga yüzeyli duvar probleminde

$$\Delta\theta_w = \frac{dy_w}{dx} = -\frac{2\pi h}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_w\right)$$

olup böylece

$$C_{p_w} = -\frac{4\pi h}{\beta L} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x_w\right)$$

şeklinde daha önce bulunan ile aynı sonuca ulaşılır.

10.8- Mach dalgaları için Dört tipik hal:

Küçük bozuntulu süpersonik akımları Mach dalgaları yardımıyla çözümlerken Mach dalgasının sola veya sağa doğru oluşuna göre ve akımın hızlandığına veya yavaşladığına göre olmak üzere dört ayrı tipik hali tanımlamak gerekir:

	Sola doğru Mach dalgası	Sağa doğru Mach dalgası
Hızlanma		
Yavaşlama		

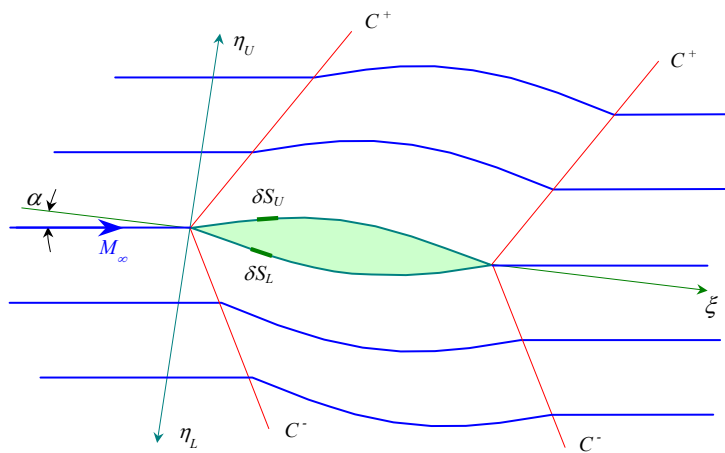
Şekillerden de farkedildiği gibi akım çizgisinin Mach dalgasına doğru dönmesi halinde akım yavaşlamakta, aksi halde ise hızlanmaktadır. Momentum denkleminin gereği olarak, akım yavaşladığında basınç artacak, hızlandığında ise basınç azalacaktır.

Akımın Mach dalgasını geçerken hangi yönde döneceğine gelince, bunu katı cidar şartları belirleyecektir.

10.9- Süpersonik kanat profilleri:

Sesüstü kanat profilleri genel olarak hücum ve firar kenarları keskin veya en azından çok az yuvarlatılmış ince ve çok küçük kamburluklu profillerdir. Ayrıca kullandıkları hücum açıları da küçüktür. Bu nedenle aerodinamik katsayıları lineerize potansiyel teori kullanılarak kolay bir şekilde elde edilebilir.

Şekildeki gibi üniform-paralel süpersonik akımda küçük bir hücum açısıyla yer alan ince profilin üst tarafında sola doğru Mach dalgaları, alt tarafında ise sağa doğru Mach dalgaları oluşacaktır. Profil yüzeyinin herhangi bir noktasındaki lokal basınç katsayısı lineerize teoriye göre yüzeyin lokal eğimine bağlı olacaktır.



Profilin veterine ve hücum kenarına bağlı bir (ξ, η) eksen takımında

Üst ve alt yüzeyler üzerinde alınan sonsuz küçük yüzey elemanları

$\delta S_U, \delta S_L$

Bu elamanlar üzerindeki teğetlerinin ξ eksenine göre eğimleri

$$\sigma_U, \sigma_L$$

olsun. Buna göre

Üst yüzey teğetinin serbest akımla yaptığı açı

$$\Delta\theta_U = \sigma_U - \alpha = \frac{d\eta_U}{d\xi} - \alpha$$

Alt yüzey teğetinin serbest akımla yaptığı açı

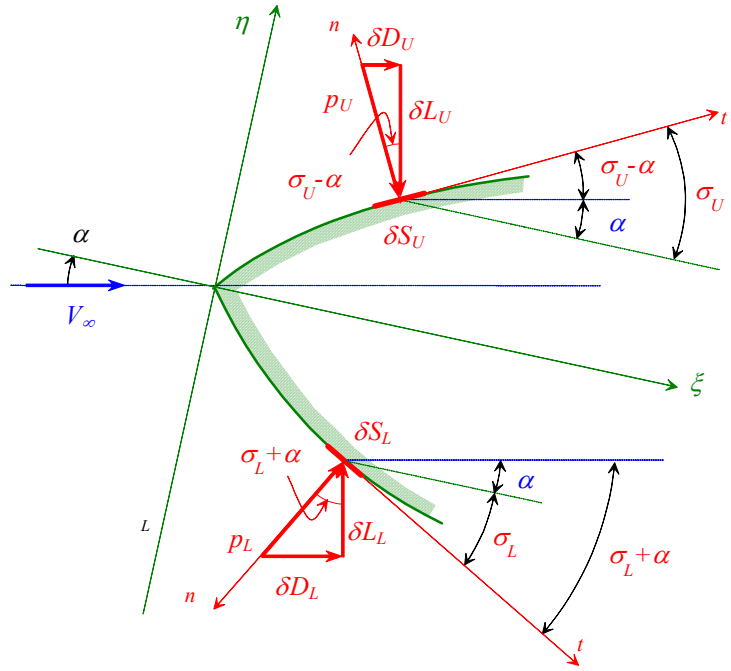
$$\Delta\theta_L = -(\sigma_L + \alpha) = -\left(\frac{d\eta_L}{d\xi} + \alpha\right)$$

olur. Aynı noktadaki basınç katsayıları da bu açılara

$$C_{p_U} = \frac{2\Delta\theta_U}{\beta}, \quad C_{p_L} = -\frac{2\Delta\theta_L}{\beta}$$

şeklinde bağlıdır.

Süpersonik kanat profiline etkiyen aerodinamik kuvvetler, bu basınç kuvvetlerinin serbest akım doğrultusundaki ve buna dik doğrultudaki bileşenleri profil yüzeyi boyunca integre edilerek bulunabilir.



Taşıma kuvveti

Alt yüze etkiyen lokal kuvvet

$$\delta L_L = p_L \cdot \delta S_L \cdot \cos(\sigma_L + \alpha) \cong p_L \cdot \delta \xi$$

Üst yüze etkiyen lokal kuvvet

$$\delta L_U = -p_U \cdot \delta S_U \cdot \cos(\sigma_U - \alpha) \cong -p_U \cdot \delta \xi$$

Toplam lokal kuvvet

$$\delta L = \delta L_L + \delta L_U \cong (p_L - p_U) \delta \xi$$

Veter boyunca integre edilerek

$$L = \int_0^c (p_L - p_U) \delta \xi = \int_0^c [(p_L - p_\infty) - (p_U - p_\infty)] \delta \xi$$

Boyutsuzlaştırılarak

$$\frac{2L}{\rho_\infty V_\infty^2 c} = C_L = \int_0^1 \left(\frac{p_L - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2} - \frac{p_U - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2} \right) d\left(\frac{\xi}{c}\right)$$

Katsayıların tanımından

$$C_L = \int_0^1 (C_{p_L} - C_{p_U}) d(\xi/c)$$

Basınç katsayıları yerine konarak

$$C_L = \int_0^1 \left\{ -\frac{2}{\beta} [-(\sigma_L + \alpha)] - \frac{2}{\beta} [(\sigma_U - \alpha)] \right\} d\bar{\xi}$$

Sonuçta
$$C_L = \frac{2}{\beta} \int_0^1 (\sigma_L - \sigma_U + 2\alpha) d\bar{\xi}$$

elde edilir. Burada

$$\bar{\xi} = \xi / c$$

Ayrıca

$$\int_0^1 \sigma_L d\bar{\xi} = \int_0^1 \frac{d\eta_L}{d\bar{\xi}} d\bar{\xi} = 0, \quad \int_0^1 \sigma_U d\bar{\xi} = \int_0^1 \frac{d\eta_U}{d\bar{\xi}} d\bar{\xi} = 0$$

olup sonuçta taşıma katsayısı için

$$C_L = \frac{2}{\beta} 2\alpha$$

veya

$$C_L = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

elde edilir.

Sürüklenme kuvveti:

Alt yüze etkiyen lokal kuvvet
$$\delta D_L = p_L \cdot \delta S_L \cdot \sin(\sigma_L + \alpha) \cong p_L \cdot (\sigma_L + \alpha) \cdot \delta \xi$$

Üst yüze etkiyen lokal kuvvet
$$\delta D_U = p_U \cdot \delta S_U \cdot \sin(\sigma_U - \alpha) \cong p_U \cdot (\sigma_U - \alpha) \cdot \delta \xi$$

Toplam lokal kuvvet
$$\delta D = \delta D_L + \delta D_U \cong [p_L (\sigma_L + \alpha) + p_U (\sigma_U - \alpha)] \cdot \delta \xi$$

Veter boyunca integre edilerek
$$D = \int_0^c [p_L (\sigma_L + \alpha) + p_U (\sigma_U - \alpha)] d\xi$$

Düzenlenerek
$$D = \int_0^c [(p_L - p_\infty)(\sigma_L + \alpha) + (p_U - p_\infty)(\sigma_U - \alpha) + p_\infty(\sigma_L + \sigma_U)] d\xi$$

Boyutsuzlaştırılarak

$$C_D = \int_0^1 [C_{p_L} (\sigma_L + \alpha) + C_{p_U} (\sigma_U - \alpha)] d\bar{\xi} + \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2 / 2} \left[\int_0^1 \sigma_L d\bar{\xi} - \int_0^1 \sigma_U d\bar{\xi} \right]$$

Burada
$$\int_0^1 \sigma_L d\bar{\xi} = 0, \quad \int_0^1 \sigma_U d\bar{\xi} = 0$$

olup, basınç katsayıları kullanılarak
$$C_D = \int_0^1 \left[\frac{2}{\beta} (\sigma_L + \alpha)^2 + \frac{2}{\beta} (\sigma_U - \alpha)^2 \right] d\bar{\xi}$$

veya
$$C_D = \frac{2}{\beta} \left[2\alpha^2 \int_0^1 d\bar{\xi} + \int_0^1 \sigma_L^2 d\bar{\xi} + \int_0^1 \sigma_U^2 d\bar{\xi} + 2\alpha \left(\int_0^1 \sigma_L d\bar{\xi} + \int_0^1 \sigma_U d\bar{\xi} \right) \right]$$

Yine
$$\int_0^1 \sigma_L d\bar{\xi} = 0, \quad \int_0^1 \sigma_U d\bar{\xi} = 0$$

olup, ayrıca
$$\int_0^1 \sigma_L^2 d\bar{\xi} = \bar{\sigma}_L^2, \quad \int_0^1 \sigma_U^2 d\bar{\xi} = \bar{\sigma}_U^2$$

denilerek

$$C_D = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 + \frac{\bar{\sigma}_L^2 + \bar{\sigma}_U^2}{2} \right]$$

elde edilir.

Görüldüğü gibi, sesaltı potansiyel akımlarda hiç sürüklenme yokken süpersonik profillerde bir sürüklenme mevcuttur. Bu sürüklemeye "*dalga sürüklemesi*" adı verilir. Bu sürüklemenin bir kısmı taşımayla ilgili, bir kısmı ise profilin kalınlığı ile ilgilidir.

Not: Gerçek akımda bu sürüklemeye ilave olarak viskozite kaynaklı profil sürüklemesi ve üç boyutlu kanatlarda da indüklenmiş sürüklenme bulunduğu unutulmamalıdır.

Yunuslama momenti:

Lokal moment

$$\delta M_{HK} \cong (p_U - p_L) \cdot \xi \cdot \delta \xi$$

Veter boyunca integre edilerek

$$M_{HK} = \int_0^c [(p_U - p_\infty) - (p_L - p_\infty)] \cdot \xi \cdot d\xi$$

Boyutsuzlaştırılarak

$$C_{M_{HK}} = \int_0^1 (C_{p_U} - C_{p_L}) \cdot \bar{\xi} \cdot d\bar{\xi}$$

Basınç katsayıları yazılarak

$$C_{M_{HK}} = \int_0^1 \left[\frac{2}{\beta} (\sigma_U - \alpha) - \frac{2}{\beta} (\sigma_L + \alpha) \right] \cdot \bar{\xi} \cdot d\bar{\xi}$$

veya

$$C_{M_{HK}} = \frac{2}{\beta} \int_0^1 (\sigma_U - \sigma_L - 2\alpha) \cdot \bar{\xi} \cdot d\bar{\xi}$$

Düzenlenerek

$$C_{M_{HK}} = \frac{2}{\beta} \left[\int_0^1 (\sigma_U - \sigma_L) \bar{\xi} d\bar{\xi} - 2\alpha \int_0^1 \bar{\xi} d\bar{\xi} \right]$$

Burada

$$\int_0^1 \sigma_U \bar{\xi} d\bar{\xi} = \int_0^c \sigma_U \frac{\xi}{c} d\xi = \frac{1}{c^2} \int_0^c \xi d\eta_U = \frac{-S_U}{c^2}$$

$$\int_0^1 \sigma_L \bar{\xi} d\bar{\xi} = \int_0^c \sigma_L \frac{\xi}{c} d\xi = \frac{1}{c^2} \int_0^c \xi d\eta_L = \frac{-S_L}{c^2}$$

profilin veterinin sırasıyla üstünde ve altında kalan alanlar

ve ayrıca

$$\int_0^1 \bar{\xi} d\bar{\xi} = \left[\frac{\bar{\xi}^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

olup sonuçta

$$C_{M_{HK}} = -\frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha + \frac{S_U - S_L}{c^2} \right]$$

elde edilir. Profilin simetrik olması halinde ikinci terim sıfır olacaktır.

Basınç merkezi, Aerodinamik merkez:

Veter boyunca bir ξ noktası etrafındaki moment

$$M_\xi = M_{HK} + \xi \cdot L$$

Boyutsuz halde

$$C_{M_\xi} = C_{M_{HK}} + \bar{\xi} \cdot C_L$$

Basınç merkezinin yeri $C_{M_\xi} = 0 \rightarrow \bar{\xi}_{cp} = -\frac{C_{M_{HK}}}{C_L} = -\frac{-\frac{2}{\beta} \left[\alpha + \frac{S_U - S_L}{c^2} \right]}{\frac{4\alpha}{\beta}}$

Düzenlenerek

$$\frac{\xi_{cp}}{c} = \frac{1}{2} + \frac{S_U - S_L}{2\alpha c^2}$$

Simetrik bir profil için basınç merkezinin yeri veterin orta noktasındadır.

Moment ifadesi düzenlenerek

$$C_{M_{HK}} = -\frac{C_L}{2} - \frac{2}{\beta} \frac{S_U - S_L}{c^2}$$

ξ noktasındaki moment

$$C_{M_\xi} = -\frac{C_L}{2} - \frac{2}{\beta} \frac{S_U - S_L}{c^2} + \frac{\xi}{c} C_L$$

Aerodinamik merkez için

$$\frac{dC_{M_\xi}}{dC_L} = 0 \rightarrow -\frac{1}{2} + \frac{\xi_{ac}}{c} = 0$$

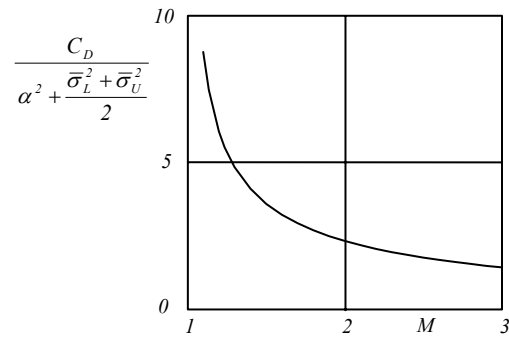
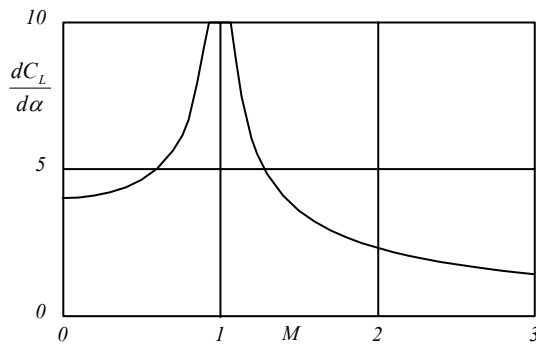
Düzenlenerek

$$\frac{\xi_{ac}}{c} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Sesüstü profil için aerodinamik merkez basınç merkeziyle çakışık ve veterin orta noktasındadır.

Aşağıdaki şekillerde ince bir profilin taşıma ve dalga sürüklemesi karakteristiklerinin süpersonik akımdaki Mach sayısı ile değişimleri görülmektedir. Aynı grafik üzerinde, bir fikir vermesi amacıyla, sesaltı akım halinde taşıma karakteristiğinin Mach sayısı ile değişimi için Prandtl-Glauert benzerlik kuralıyla elde edilen sonuçlar da gösterilmiştir.



SORULAR

Soru1:

- Daimi, iki-boyutlu, sesüstü akımlar için lineerleştirilmiş potansiyel denklemini yazınız.
- Bu denklemin bozuntu potansiyeli için de geçerli olduğunu gösteriniz.
- Bozuntu potansiyel denkleminin genel çözümünün değişken dönüşümü yardımıyla $\varphi(x, y) = V_\infty [f_1(\xi) + f_2(\eta)]$ şeklinde elde edilebileceğini gösteriniz.
- Akım çizgilerinin denkleminin $y_s = \beta [f_1 - f_2] + Sb$ şeklinde olacağını gösteriniz.
- $y_w = h \sin(2\pi x / L)$, ($h / L \ll 1$) şeklinde ondüle yüzlü bir duvar üzerindeki daimi, iki-boyutlu, sesüstü potansiyel akımı göz önüne alınız. Bu akım için sınır şartlarını kullanarak bozuntu potansiyel fonksiyonunu elde ediniz.
- Ondüle yüzlü duvardan uzaklaştıkça akım özelliklerinin nasıl değiştiğini irdeleyiniz.

Soru2:

Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılabilir, sesüstü, potansiyel akımlarda bozuntu potansiyeli için

$$\beta^2 \varphi_{xx} - \varphi_{yy} = 0$$

şeklinde yazılan lineerleştirilmiş potansiyel denkleminin genel çözümünü

$$\varphi(x, y) = V_\infty [f_1(x + \beta y) + f_2(x - \beta y)]$$

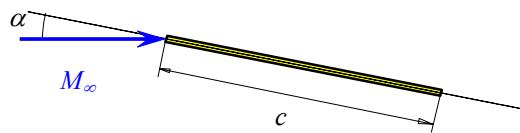
şeklinde elde etmek mümkündür.

$f_1 = Sb$ özel halinde potansiyel fonksiyonunun sabit değerlerinin geometrik yerinin sola doğru Mach dalgaları olacağını gösteriniz.

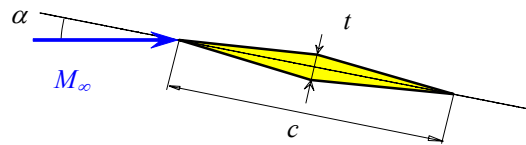
Bu durumda bozuntu hız bileşenlerinin ve basınç katsayısının f_2 fonksiyonu cinsinden nasıl ifade edileceğini gösteriniz.

PROBLEMLER

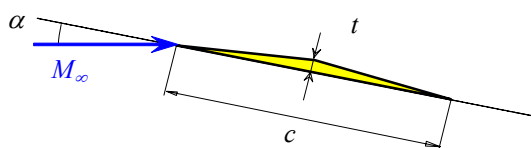
P1- Geometrileri ve hücum açıları aşağıdaki şekilde tanımlanan ince profillerin süpersonik akımdaki karakteristiklerini küçük bozuntular teorisi yardımıyla inceleyiniz.



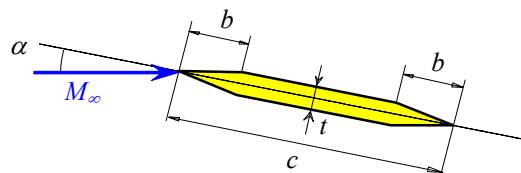
a) Düz levha profil



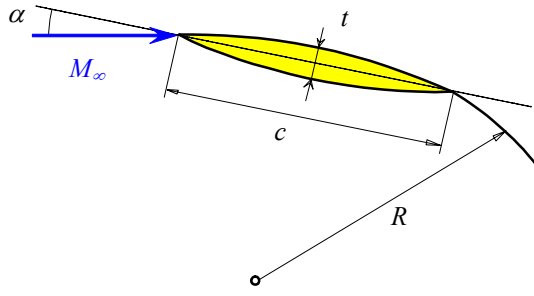
b) Baklava dilimi profil



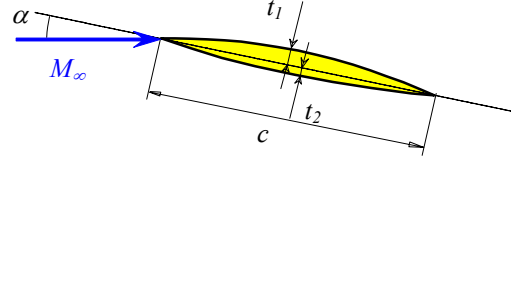
c) Yarım baklava dilimi profil



d) Kama profil



e) Simetrik çift-dışbükey profil



f) Kamburluklu çift-dışbükey profil

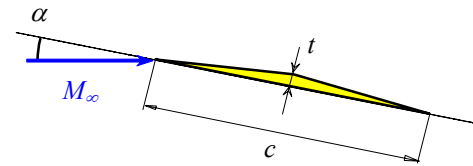
P2- Şekildeki gibi süpersonik akıma maruz bir düz levhanın taşıma, sürüklenme ve yunuslama katsayılarının (HK etrafında ve veter orta noktası etrafında)

- verilmiş bir Mach sayısı için hücum açısı ile
- verilmiş bir hücum açısı için Mach sayısı ile

değişimini küçük bozuntular teorisini kullanarak hesaplayınız.

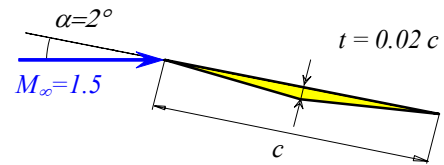
Aynı hesabı şok-genişleme dalgaları teorisile yapınız ve sonuçları karşılaştırınız.

P3- Verilmiş bir Mach sayısı ve verilmiş bir kalınlık oranı için şekildeki kanat profilinin taşıma ve sürüklenme katsayılarının hücum açısı ile değişimlerini, bir defa "şok-genişleme dalgaları teorisini"ni ve bir defa da "küçük bozuntular teorisini"ni kullanarak hesaplayınız. Sonuçları karşılaştırarak yorumlayınız.



P4- Küçük bozuntular yaklaşımı çerçevesinde sola ve sağa doğru Mach dalgalarını geçen akımlar için basınç katsayıları sırasıyla

$$C_{p_{c^+}} = 2 \frac{\Delta\theta}{\beta} \quad C_{p_{c^-}} = -\frac{2\Delta\theta}{\beta}$$



şeklinde tanımlandığına göre şekildeki profilin üst ve alt bölgelerindeki basınç katsayılarını ve profile etkiyen taşıma ve sürüklenme katsayılarını hesaplayınız.

P5- Küçük bozuntulu süpersonik akımda Mach dalgalarını geçen akım basınç katsayıları için

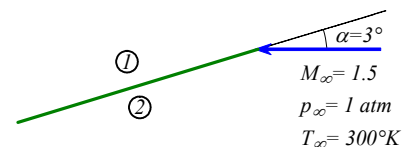
$$C_{p_{c^+}} = 2 \frac{\Delta\theta}{\beta} \quad C_{p_{c^-}} = -\frac{2\Delta\theta}{\beta}$$

bağıntıları verilmektedir. Şekildeki düz levhayı geçen süpersonik akımı küçük bozuntulu kabul ederek

a) 1 ve 2 bölgelerindeki basınç katsayılarını hesaplayınız.

b) Levhaya dikey yönde etkiyen aerodinamik kuvvet katsayısını hesaplayınız.

c) Hücum kenarı etrafında etkiyen yunuslama katsayısını hesaplayınız.



d) 1 ve 2 bölgelerindeki Mach sayılarını hesaplayınız.

e) 1 ve 2 bölgelerindeki akım hızlarını hesaplayınız.

P6- Şekildeki simetrik kanat profilinin yüzeyleri üzerindeki basınç katsayılarını ve çeyrek veter noktası etrafındaki yunuslama katsayısını lineerize potansiyel teori çerçevesinde hesaplayınız

