

BÖLÜM 9

SESALTI SIKIŞTIRILABİLİR AKIMLAR

9.1- Sesaltı sıkıştırılabilir akımlar için lineerleştirilmiş potansiyel denklemi

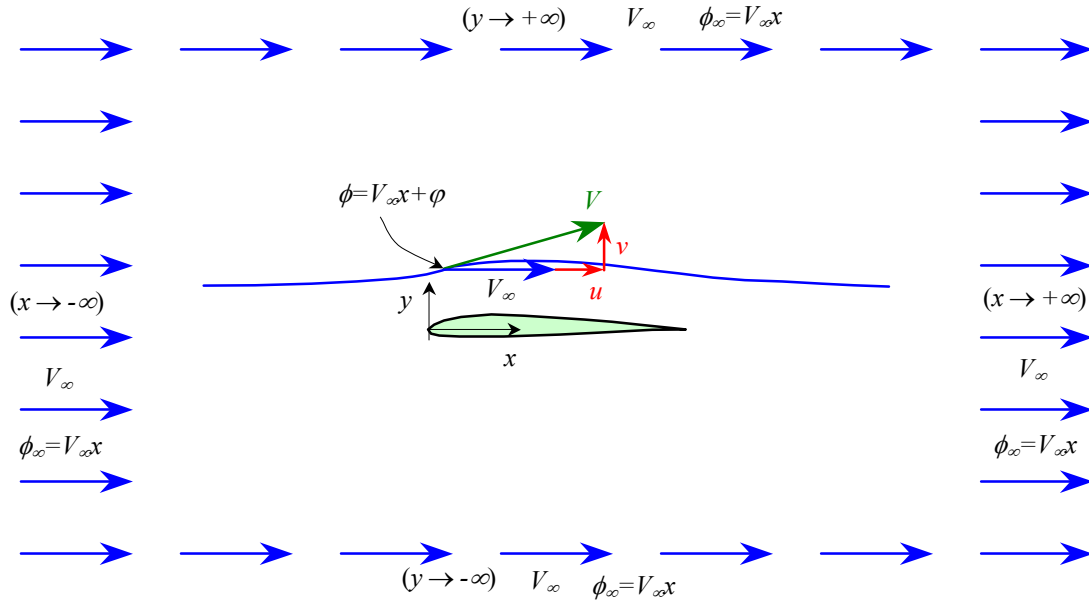
9.2- Analitik çözüm – dalga yüzeyli duvar etrafında akım

9.3- Sıkıştırılabilir sesaltı akımlar için Prandtl-Glauert düzeltme tekniği

9.4- İyileştirilmiş düzeltme formülleri

9.5- Kritik Mach sayısı

9.1- Sesaltı sıkıştırılabilir akımlar için lineerleştirilmiş potansiyel denklemleri



Daimi, iki-boyutlu, sesaltı sıkıştırılabilir akımlar için

Potansiyel denklemleri
$$\left(1 - \frac{\phi_x^2}{a^2}\right) \cdot \phi_{xx} - 2 \frac{\phi_x \phi_y}{a^2} \cdot \phi_{xy} + \left(1 - \frac{\phi_y^2}{a^2}\right) \cdot \phi_{yy} = 0$$

Enerji denklemleri
$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2)$$

Cismin *kalınlık, kamburluk ve hücum açısının*

$$\frac{M_\infty^2}{1 - M_\infty^2} \cdot \frac{u}{V_\infty} \ll 1, \quad M_\infty^2 \cdot \frac{v}{V_\infty} \ll 1$$

koşulları sağlanacak biçimde küçük olması halinde

$$(1 - M_\infty^2) \cdot \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

şeklinde lineerleştirilebilir. Bu denklemler

$$\beta^2 = 1 - M_\infty^2$$

olmak üzere

$$\beta^2 \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

şeklinde yazılabilir. Aynı yaklaşımla basınç katsayıları da

$$C_p \cong -2 \frac{u}{V_\infty} = -\frac{2}{V_\infty} \cdot \phi_x$$

şeklinde lineerleştirilebilir.

9.2- Analitik çözüm - dalga yüzeyli duvar üzerinde akım:

Lineerleştirilmiş potansiyel denklemi

$$\beta^2 \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$$

Potansiyel fonksiyonu için süperpozisyon

$$\phi = V_\infty x + \varphi$$

Potansiyel fonksiyonunun türevleri alınarak

$$\begin{aligned} \phi_x = V_\infty + \varphi_x &\rightarrow \phi_{xx} = \varphi_{xx} \\ \phi_y = \varphi_y &\rightarrow \phi_{yy} = \varphi_{yy} \end{aligned}$$

Lineerleştirilmiş potansiyel denklemde kullanılarak

$$\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

Görüldüğü gibi lineerleştirilmiş denklem bozuntu potansiyeli için de geçerlidir.

Bu denklemin analitik çözümleri genellikle çok özel geometriler dışında kolay değildir. Özel geometrilere ait çözüm için değişkenlere ayırma yöntemi kullanılabilir.

Değişken dönüşümü

$$\varphi(x, y) = F(x) \cdot G(y)$$

Türevler alınarak

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} &= F_{xx} G \\ \varphi_{yy} &= F G_{yy} \end{aligned}$$

Denklemden kullanılarak

$$\beta^2 F_{xx} G + F G_{yy} = 0$$

Düzenleme ile

$$-\frac{F_{xx}}{F} = \frac{G_{yy}}{\beta^2 G} = k^2$$

Böylece iki adi diferansiyel denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} F_{xx} + k^2 F &= 0 \\ G_{yy} - k^2 \beta^2 G &= 0 \end{aligned}$$

Bu denklemlerin genel çözümleri

$$\begin{aligned} F(x) &= A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx) \\ G(y) &= C \cdot e^{\beta k y} + D \cdot e^{-\beta k y} \end{aligned}$$

Birleştirilerek

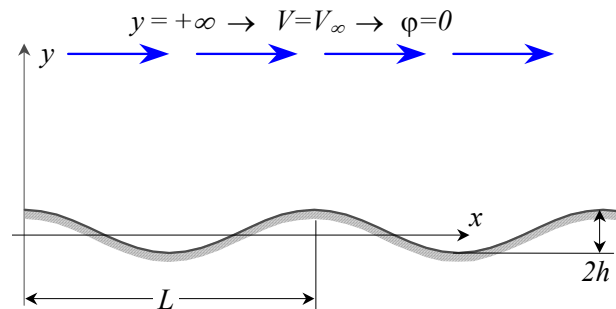
$$\varphi(x, y) = [A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)] \cdot [C \cdot e^{\beta k y} + D \cdot e^{-\beta k y}]$$

Özel çözümlerin bulunması sınır geometrisinin ne kadar basit veya karmaşık olduğuna bağlıdır. Dalga yüzeyli bir duvar için çözüm elde etmek mümkündür.

Örnek olarak şekildeki gibi

$$y_w = h \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

denklemlerle belirtilen dalga yüzeyli duvar üzerindeki akımı ele alalım.



Sonsuzdaki sınır şartı

$$y = +\infty \rightarrow V = V_\infty \rightarrow \varphi = 0$$

$y = +\infty$ için $e^{-\beta ky} = 0$ fakat $e^{\beta ky} \rightarrow \infty$ olup $C = 0$ olmak zorundadır.

Böylece

$$\varphi(x, y) = [A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)] \cdot e^{-\beta ky}$$

Yüzey üzerindeki sınır şartı:

akım yüzeye teğet olmalıdır.

$$\frac{dy_w}{dx} = \left(\frac{v}{V_\infty + u} \right)_w = \left(\frac{v/V_\infty}{1 + u/V_\infty} \right)_w = \left[\frac{v}{V_\infty} \left(1 + \frac{u}{V_\infty} \right)^{-1} \right]_w = \left[\frac{v}{V_\infty} \left(1 - \frac{u}{V_\infty} + \dots \right) \right]_w = \left(\frac{v}{V_\infty} - \frac{uv}{V_\infty^2} + \dots \right)_w$$

Lineerize teori çerçevesinde yaklaşımla

$$\frac{dy_w}{dx} \cong \left(\frac{v}{V_\infty} \right)_{y \approx 0} = \frac{(\varphi_y)_{y \approx 0}}{V_\infty}$$

Duvar eğrisinin ve bozuntu potansiyelinin türevleri bu eşitlikte kullanılarak

$$-h \cdot \frac{2\pi}{L} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = \left\{ \frac{-\beta k [A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)] \cdot e^{-\beta ky}}{V_\infty} \right\}_{y=0}$$

$$-h \cdot \frac{2\pi}{L} V_\infty \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) = -\beta k A \cdot \sin(kx) - \beta k B \cdot \cos(kx)$$

Bu eşitliğin gerçekleşmesi için

$$\begin{cases} B = 0 \\ k = \frac{2\pi}{L} \\ A = h \cdot \frac{V_\infty}{\beta} \end{cases} \quad \text{olmalıdır.}$$

Böylece bozuntu potansiyeli için çözüm

$$\varphi(x, y) = h \cdot \frac{V_\infty}{\beta} \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L}y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Akım alanının özellikleri:

Potansiyel fonksiyonu

$$\phi = \phi_\infty + \varphi = V_\infty x + h \cdot \frac{V_\infty}{\beta} \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L}y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Yatay hız bileşeni

$$V_x = \phi_x = V_\infty + h \cdot \frac{V_\infty}{\beta} \cdot \frac{2\pi}{L} \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L}y} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Dikey hız bileşeni

$$V_y = \phi_y = -\frac{2\pi}{L} h \cdot V_\infty \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L}y} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

Basınç katsayısı

$$C_p = -\frac{4\pi}{L} \frac{h}{\beta} \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L}y} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

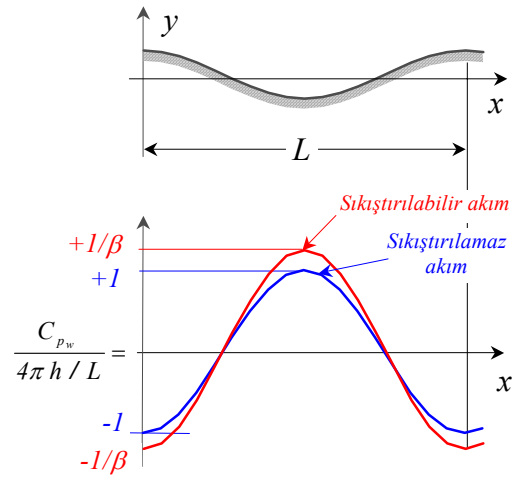
Duvar üzerindeki basınç katsayısı

$$y \approx 0 \rightarrow C_{p_w} = -\frac{4\pi}{L} \frac{h}{\beta} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

M_∞ Mach sayısı arttıkça $\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$ azalacağı için duvar üzerindeki basınç katsayısının mutlak değer olarak artacağı, yani negatif basınç katsayılarının daha negatif, pozitif basınç katsayılarının da daha pozitif değerler alacağı görülmektedir.

Herhangi bir noktadaki basınç katsayısının duvar üzerindeki basınç katsayısına oranı

$$\frac{C_p}{C_{pw}} = e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y}$$



Duvardan y uzaklığında bir noktadaki basınç katsayısı Mach sayısı arttıkça mutlak değer olarak büyümektedir. O halde sıkıştırılabilir etkileri duvarın etkisini daha uzak noktalara taşımaktadır.

Akım çizgilerinin denklemleri

Akım çizgisi için koşul: Hız vektörü akım çizgisine teğettir.

$$\frac{dy_s}{dx} = \left(\frac{v}{V_\infty + u} \right)_s = \left(\frac{v/V_\infty}{1 + u/V_\infty} \right)_s \cong \left(\frac{v/V_\infty}{1 + u/V_\infty - M_\infty^2 u/V_\infty} \right)_s = \left(\frac{v/V_\infty}{1 + \beta^2 u/V_\infty} \right)_s$$

Hız bileşenlerinin değerleri kullanılarak:

$$\frac{dy_s}{dx} = \frac{-\frac{2\pi}{L} h \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y_s} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right)}{1 + \beta^2 h \cdot \frac{1}{\beta} \frac{2\pi}{L} \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y_s} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)}$$

Düzenlenerek

$$dy_s = h \cdot \left[-\frac{2\pi}{L} \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y_s} \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) dx - \beta \frac{2\pi}{L} e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y_s} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) dy_s \right]$$

Veya

$$dy_s = h \cdot d \left[e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y_s} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) dy_s \right]$$

İntegre edilerek

$$y_s = h \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y_s} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) + Sb$$

$y_s \rightarrow 0$ için duvar eğrisi

$$y_s = h \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right)$$

Duvar dışındaki bir akım çizgisinin genliği

$$h_s = h \cdot e^{-\beta \frac{2\pi}{L} y_s}$$

Mach sayısı arttıkça β azalacağı için duvardan y uzaklıktaki bir akım çizgisinin genliğinin artacağı görülmektedir.

9.3. Sıkıştırılabilir sesaltı akımlar için Prandtl-Glauert düzeltme tekniği:

Bozuntu potansiyel denklemi

$$\beta^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

Dönüşüm uygulanarak

$$\begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= \beta y \\ \bar{\varphi}(\xi, \eta) &= \beta \varphi(x, y) \end{aligned}$$

Türevler

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \varphi} = \beta$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \xi} \rightarrow \varphi_x = \frac{\bar{\varphi}_\xi}{\beta}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \eta} \rightarrow \varphi_y = \bar{\varphi}_\eta$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\bar{\varphi}_\xi}{\beta} \right) \rightarrow \varphi_{xx} = \frac{\bar{\varphi}_{\xi\xi}}{\beta}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \beta \frac{\partial \varphi_y}{\partial \eta} = \beta \frac{\partial \bar{\varphi}_\eta}{\partial \eta} \rightarrow \varphi_{yy} = \beta \bar{\varphi}_{\eta\eta}$$

Bozuntu potansiyel denkleminde kullanılarak

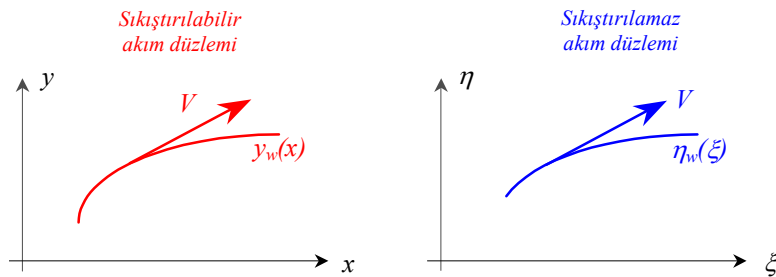
$$\bar{\varphi}_{\xi\xi} + \bar{\varphi}_{\eta\eta} = 0$$

Görüldüğü gibi *sıkıştırılabilir akımlara ait bozuntu potansiyel denklemi* önerilen değişken dönüşümleri yardımıyla *eşdeğer bir sıkıştırılmaz potansiyel akıma ait Laplace denkleminde* dönüştürülmüştür.

Laplace denkleminin çözümünü bilinen tekniklerle elde etmek mümkündür.

Acaba önerilen değişken dönüşümleri yüzey eğrisini nasıl etkilemiştir?

Bunu *yüzey sınır şartı*ni inceleyerek görmek mümkündür.



Sıkıştırılabilir akım düzleminde yaklaşık duvar sınır şartı

$$\frac{dy_w}{dx} = \frac{(\varphi_y)_w}{V_\infty}$$

Sıkıştırılmaz akım düzleminde yaklaşık duvar sınır şartı

$$\frac{d\eta_w}{d\xi} = \frac{(\bar{\varphi}_\eta)_w}{V_\infty}$$

$\varphi_y = \bar{\varphi}_\eta$ olduğu hatırlanırsa

→

$$\frac{dy_w}{dx} = \frac{d\eta_w}{d\xi}$$

Görüldüğü gibi dönüşüm yüzey geometrisini etkilememektedir. Yani katı cidar dönüşüm sonucunda şekil değiştirmemektedir.

Basınç katsayısı

Sıkıştırılabilir halde lineerleştirilmiş basınç katsayısı

$$C_p = -\frac{2}{V_\infty} \cdot \varphi_x$$

Sıkıştırılmaz halde lineerleştirilmiş basınç katsayısı

$$\bar{C}_p = -\frac{2}{V_\infty} \cdot \bar{\varphi}_\xi$$

Oranlanarak

$$\frac{C_p}{\bar{C}_p} = \frac{\varphi_x}{\bar{\varphi}_\xi} = \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\beta} \cdot I \rightarrow$$

$$\frac{C_p}{\bar{C}_p} = \frac{I}{\beta}$$

Taşıma ve Yunuslama katsayıları

Sıkıştırılabilir halde taşıma katsayısı

$$C_L \approx \oint C_p dx$$

Sıkıştırılmaz halde taşıma katsayısı

$$\bar{C}_L \approx \oint \bar{C}_p d\xi$$

Oranlanarak

$$\frac{C_L}{\bar{C}_L} \approx \frac{C_p}{\bar{C}_p} \rightarrow$$

$$\frac{C_L}{\bar{C}_L} = \frac{I}{\beta}$$

Sıkıştırılabilir halde yunuslama katsayısı

$$C_M \approx \oint C_p x dx$$

Sıkıştırılmaz halde yunusla katsayısı

$$\bar{C}_M \approx \oint \bar{C}_p \xi d\xi$$

Oranlanarak

$$\frac{C_M}{\bar{C}_M} \approx \frac{C_p}{\bar{C}_p} \rightarrow$$

$$\frac{C_M}{\bar{C}_M} = \frac{I}{\beta}$$

Elde edilen sonuç özetlenirse

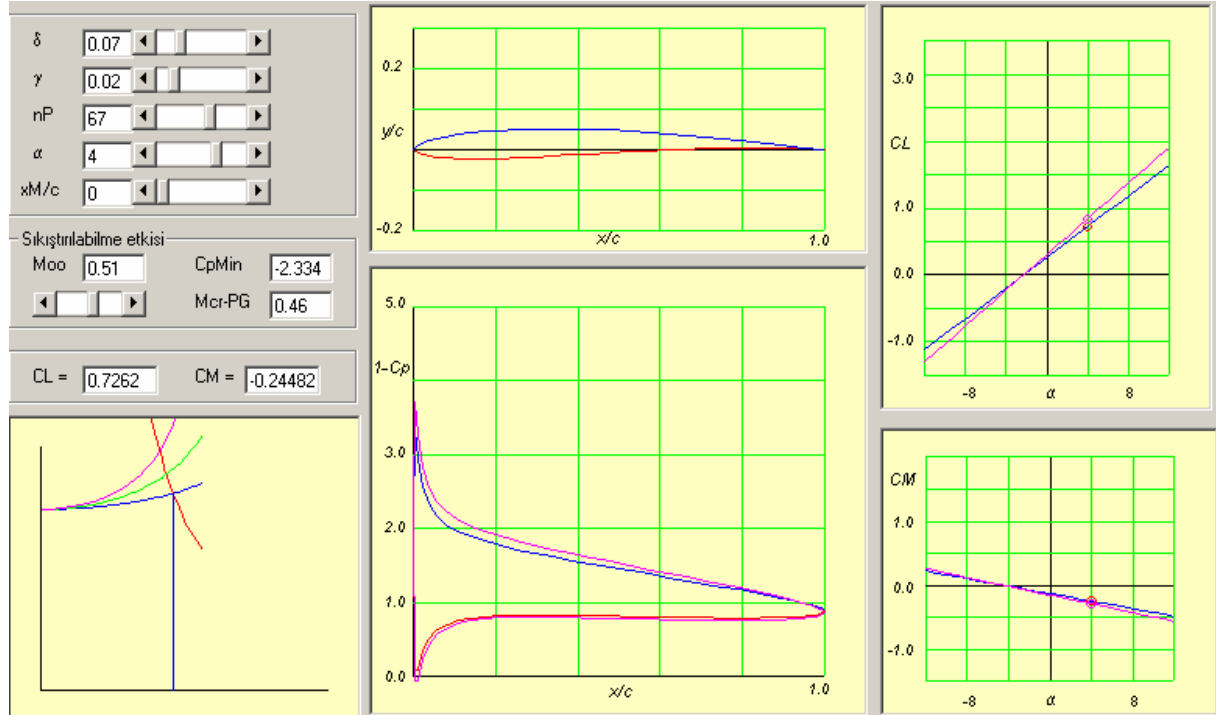
Herhangi bir Mach sayısındaki iki-boyutlu cisme etkiyen taşıma ve yunuslama, aynı cisme sıkıştırılmaz halde etkiyen taşıma ve yunuslama ile

$$C_L = \frac{\bar{C}_L}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

$$C_M = \frac{\bar{C}_M}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}$$

şeklinde hesaplanabilir. Bu formüllerler literatürde sıkıştırılabilir için Prandtl-Glauert düzeltme formülleri olarak bilinir.

Şekilde %7 kalınlık ve %2 kamburluk oranına sahip bir Joukowski profilinin 4 derece hücum açısında, sıkıştırılamaz haldeki ve 0.51 Mach sayısında Prandtl-Glauert formülüyle elde edilmiş $1-C_p$ dağılımları, taşıma ve yunuslama üzerindeki sıkıştırılabilirlik etkileri görülmektedir.



Örnek Problem:

Bir profilin yüzeyi üzerinde verilen bir noktadaki basınç katsayısı çok düşük hızlarda -0.3 dür. Serbest akımın Mach sayısı 0.6 olduğunda aynı noktadaki basınç katsayısını hesaplayınız.

Çözüm:

$$C_p = \frac{\bar{C}_p}{\sqrt{1-M_\infty^2}} = \frac{-0.3}{\sqrt{1-(0.6)^2}} = -0.375$$

Örnek Problem:

İnce simetrik bir kanat profilinin sıkıştırılamaz akımdaki teorik taşıma katsayısı $\bar{C}_L = 2\pi\alpha$ dir. $M_\infty=0.7$ Mach sayısındaki taşıma katsayısını bulunuz.

Çözüm:

$$C_L = \frac{\bar{C}_L}{\sqrt{1-M_\infty^2}} = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1-(0.7)^2}} = 8.8\alpha \rightarrow \frac{C_L}{\bar{C}_L} = 1.4$$

Örnek Problem:

Yüksek hızlı rüzgar tüneline NACA 4412 profili üzerinde yapılan bir seri deneysel çalışmanın sonucu NACA'nın 646 numaralı raporunda yer almaktadır. Bu profilin taşıma eğrisi eğimlerinin Mach sayısı ile değişimi için bu raporda verilen bir grafikten sayısallaştırma yoluyla alınan değerler aşağıdaki gibidir:

M_∞	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.65	0.7	0.75
$dC_L/d\alpha$	0.1087	0.1115	0.1160	0.1224	0.1300	0.1320	0.1275	0.1002

Burada M_∞ Mach sayısı, α ise derece ile gösterilen hücum açılarıdır.

a) $dC_L/d\alpha$ 'nın yüksek Mach sayılarındaki değerlerini $M_\infty=0.2$ 'deki değerlerinden başlayarak Prandtl-Glauert kuralı yardımıyla hesaplayınız.

b) Bir düz levhanın teorik taşıma eğrisi eğilimlerini hesaplayınız. Levhanın sıfır Mach sayısında, yani sıkıştırılmaz halde taşıma katsayısı $C_L = 2\pi\alpha_r$ 'dir. Burada α_r radyan cinsindedir.

c) Rapor 646'da verilen ve burada elde edilen sonuçları bir grafik üzerinde göstererek karşılaştırınız.

Çözüm:

a) Burada Prandtl-Glauert kuralının vereceği sonuçların deneysel sonuçlarla bir karşılaştırılmasının yapılması istenmektedir.

Prandtl-Glauert kuralı

$$C_L = \frac{\bar{C}_L}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

α 'ya göre türev alınarak

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{d\bar{C}_L/d\alpha}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

Prandtl-Glauert kuralı uygulanırken referans değer (sıkıştırılmaz akım hali) olarak $M=0.2$ deki taşıma eğrisi eğiminin kullanılması önerilmektedir.

Buna göre $M=0.2$ Mach sayısında verilen değer Prandtl-Glauert formülünde kullanılarak $M=0$ da (sıkıştırılmaz akım) taşıma eğrisi eğimi

$$\frac{d\bar{C}_L}{d\alpha} = \frac{dC_L}{d\alpha} \sqrt{1-M_\infty^2} = 0.108 \times \sqrt{1-0.2^2} = 0.106$$

olarak elde edilir.

Sıkıştırılmaz haldeki bu değerden başlayarak istenilen bütün sıkıştırılabilir akım Mach sayılarındaki taşıma eğrisi eğimleri yine Prandtl-Glauert formülüyle

$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{d\bar{C}_L/d\alpha}{\sqrt{1-M_\infty^2}}$$

şeklinde hesaplanabilir. Çeşitli Mach sayıları için elde edilen sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

b) Düz levhanın sıkıştırılmaz halde taşıma eğrisi eğimi

$$C_L = 2\pi\alpha_r$$

Raydan-derece ilişkisi

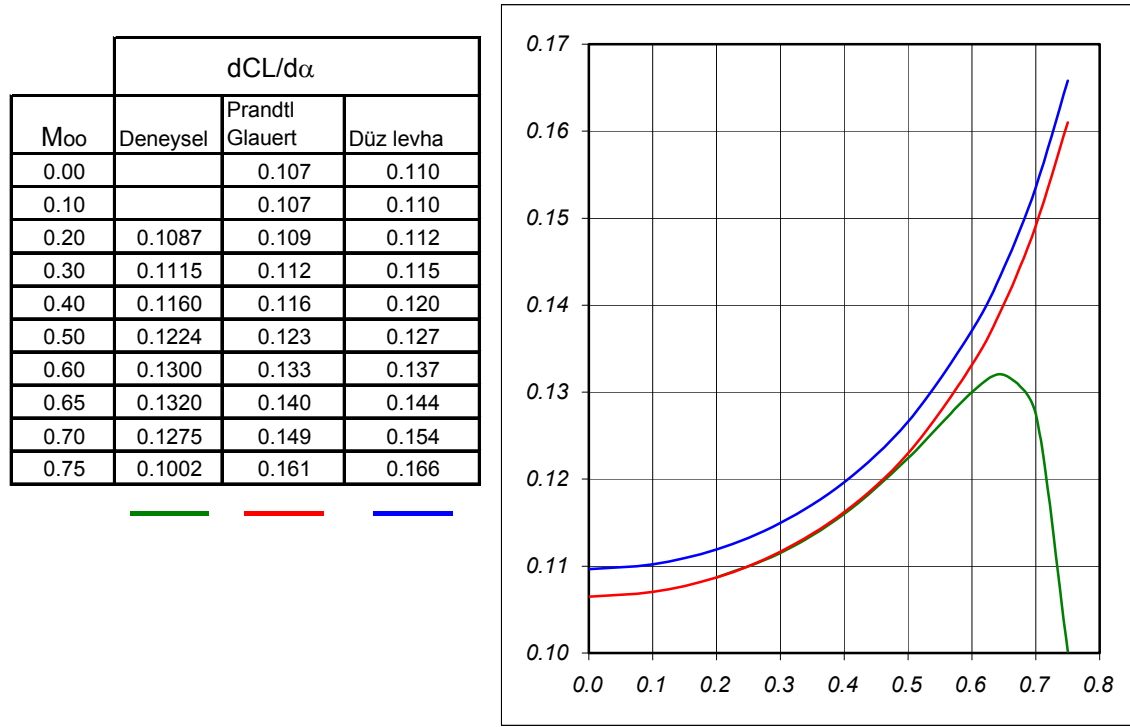
$$\alpha_r = \frac{\pi}{180} \alpha_d$$

Böylece

$$C_L = \frac{\pi^2}{90} \alpha_r^2$$

Bu değerden hareketle Prandtl-Glauert kuralı uygulanarak çeşitli Mach sayısında elde edilen değerler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

c) Elde edilen sonuçların NACA 4412 profili için verilen deneysel sonuçlarla karşılaştırması aşağıdaki grafikte yapılmıştır.



Görüldüğü gibi Mach sayısının 0.6 değerine kadar Prandtl-Glauert formülünün verdiği sonuçlar deney sonuçlarıyla oldukça uyumludur. Bu değerden sonra uyum önce azalmakta, 0.65 değerinden sonra deneysel sonuçlardaki ani değişimle uyum iyice bozulmaktadır. Bunun nedeni profilin kritik Mach sayısını aşmasıdır.

Düz levhaya ait değerlerin de Prandtl-Glauert formülüyle bulunan değerlere paralel olduğu görülmektedir. Sıkıştırılmaz halde düz levha değerleri ile deneysel değerler arasında görülen farklılık düz levhaya ait teorik formülde viskozite etkilerinin hesaba katılmamış olmasından kaynaklanmaktadır.

9.4. İyileştirilmiş düzeltme formülleri:

Karman-Tsien düzeltme formülü

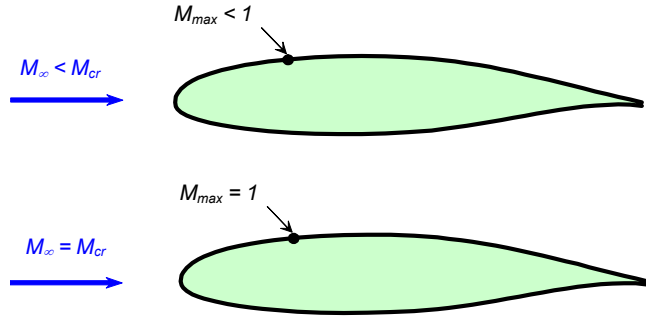
$$C_p = \frac{\bar{C}_p}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2}{1 + \sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot \frac{\bar{C}_p}{2}}$$

Laitone düzeltme formülü

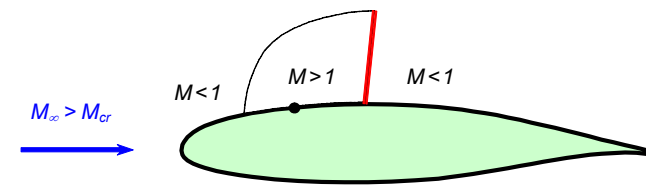
$$C_p = \frac{\bar{C}_p}{\sqrt{1 - M_\infty^2} + \frac{M_\infty^2 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right)}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot \frac{\bar{C}_p}{2}}$$

9.5. Kritik Mach sayısı:

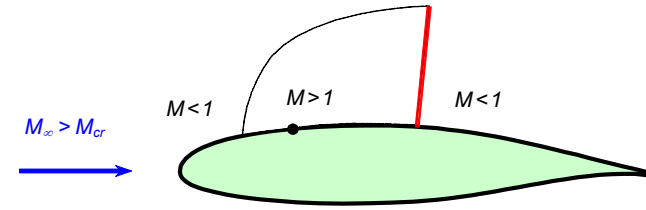
Bir cismin üzerinde herhangi bir noktadaki Mach sayısı serbest akım Mach sayısı arttırıldıkça artar. Cismin üzerinde Mach sayısının ilk olarak 1 değerine eriştiği andaki serbest akım Mach sayısı "*Kritik Mach Sayısı*" olarak adlandırılır.



Kritik Mach sayısının aşılmasıyla birlikte kanat etrafında süperonik bir bölge oluşur ve bu bölge bir normal şok dalgasıyla sonuçlanır. Bu durumda kanat profili etrafındaki akım alanı *transonik akım* olarak adlandırılır.



Serbest akımın Mach sayısı arttırıldıkça süperonik akım bölgesi genişler, normal şok daha geriye kayarak daha kuvvetli bir şok şekline dönüşür.



Oluşan normal şok, gerisindeki akımın basıncının artmasına ve bu da taşımada kayba neden olur.

Ayrıca şok dalgasını geçerken oluşan basınç artımı, kanat yüzeyi üzerindeki sınır tabaka gelişimini olumsuz yönde etkiler. Sınır tabakanın kalınlaşmasına ve ayrılmasına neden olabilir. Ayrılma, kanat üzerinde kuvvetli titreşimlere yol açabildiği gibi, şayet şokun gerisinde bir kontrol yüzeyi varsa bunun etkinliğini de azaltır.

Kritik Mach sayısında cismin üzerinde Mach sayısının 1 olduğu noktadaki basınç katsayısı "*Kritik Basınç Katsayısı*" olarak adlandırılır.

Kritik basınç katsayısı, herhangi bir uçuş Mach sayısında bir cismin etrafındaki basınç katsayılarının alabileceği bir sınır değer olarak da düşünülebilir. Bu değer aşıldığı takdirde kritik Mach sayısı aşılmış olur.

Basınç katsayısının genel tanımı

$$C_{p_{cr}} = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2}$$

Şeklinde olup yüksek hızlar için

$$C_{p_{cr}} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2} \left(\frac{p}{p_\infty} - 1 \right)$$

veya Mach sayıları cinsinden

$$C_p = \frac{2}{\gamma \cdot M_\infty^2} \cdot \left[\left(\frac{I + \frac{\gamma-1}{2} M_\infty^2}{I + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - I \right]$$

şeklinde yazılması daha uygun olur. Bu bağtımda $M=1$ ve $M_\infty=M_{cr}$ yazılarak

Kritik basınç katsayısı

$$C_{p_{cr}} = \frac{2}{\gamma \cdot M_{cr}^2} \cdot \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(I + \frac{\gamma-1}{2} M_{cr}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - I \right]$$

şeklinde hesaplanır.

Bu bağtımdaki $C_{p_{cr}}$ değeri, cismin aynı noktasında sıkıştırılmaz akım halindeki basınç katsayısına, düzeltme formülleri yardımıyla bağlanabilir. Örneğin Prandtl-Glauert tekniği kullanıldığı taktirde

$$\frac{\bar{C}_{p_{cr}}}{\sqrt{I - M_{cr}^2}} = \frac{2}{\gamma \cdot M_{cr}^2} \cdot \left[\left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(I + \frac{\gamma-1}{2} M_{cr}^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - I \right]$$

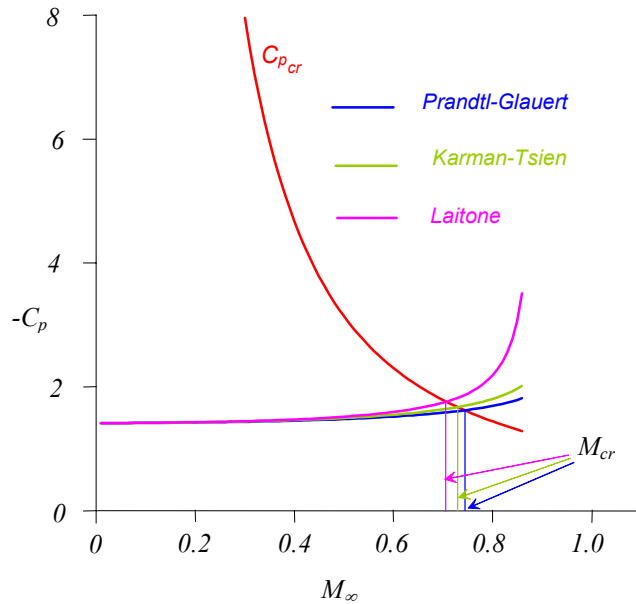
yazılabilir.

$\bar{C}_{p_{cr}}$ nin verilmiş bir değerine karşılık için bu eşitliği M_{cr} için iteratif olarak çözmek mümkündür.

Benzeri çözümler diğer düzeltme formülleriyle de gerçekleştirilebilir.

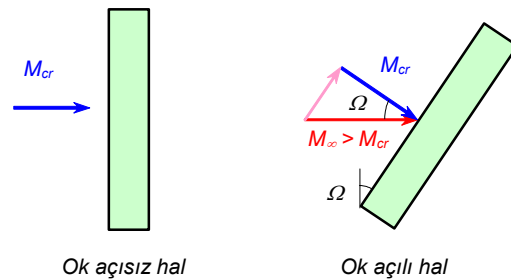
Şekilde bu türden yapılmış örnek çözümler yer almaktadır.

Kritik Mach sayısı sesaltı uçakların hızlarının arttırılmasında önemli bir kısıtlayıcı faktör olmuştur.



Kritik Mach sayısını arttırmanın bir yolu daha ince kanatlar kullanmaktır. Çünkü ince bir profil kalın profile kıyasla akımı daha az hızlandırır.

Kritik Mach sayısını arttırmanın ikinci bir yolu da kanatlarda ok açısı uygulanmasıdır.



SORULAR

S1- a) Daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılabilir, sesaltı akımlar için lineerleştirilmiş potansiyel denklemini yazınız.

b) Bu denklemin bozuntu potansiyeli için de geçerli olduğunu gösteriniz.

c) Bozuntu potansiyel denkleminin genel çözümünü değişkenlere ayırma yöntemiyle elde ediniz.

d) $y_w = h \sin(2\pi x/L)$, ($h/L \ll 1$) şeklinde ondüle yüzlü bir duvar üzerindeki daimi, iki-boyutlu, sıkıştırılabilir, sesaltı potansiyel akımı göz önüne alınız. Duvarın çok uzaklarında ($y \rightarrow \infty$) akım duvara paralel V_∞ hızında ve üniform olsun. Bu akım için sınır şartlarını kullanarak bozuntu potansiyel fonksiyonunu elde ediniz.

e) Akım alanının herhangi bir noktasında ve duvar üzerinde basınç katsayılarını yazarak sıkıştırılabilirlik etkisini yorumlayınız.

S1- Daimi, sesaltı, sıkıştırılabilir, iki-boyutlu potansiyel akımlar için lineerleştirilmiş potansiyel denklemini bozuntu potansiyeli cinsinden yazınız.

Bu denklemin $\xi = x$, $\eta = \beta y$, $\bar{\varphi}(\xi, \eta) = \beta \varphi(x, y)$ değişken dönüşümleri uygulanarak Laplace denklemine dönüştürülebileceğini gösteriniz.

Katı yüzey üzerindeki sınır şartlarını inceleyiniz. Dönüşüm bağıntılarının sınır yüzeylerini değiştirmedeğini gösteriniz.

Taşıma katsayıları için Prandtl-Glauert düzeltme formülünü elde ediniz.

S2- a) Basınç katsayısının genel tanımını yazınız.

b) Sıkıştırılabilir akımlar için Mach sayıları cinsinden ifade ediniz.

c) Kritik basınç katsayısı için kritik Mach sayısı cinsinden bir ifade elde ediniz.

d) Kritik basınç katsayısının pratikte ne önemi olduğunu açıklayınız.

PROBLEMLER

P1- a) Aşağıda verilen potansiyel fonksiyonun, genliği ε ve dalga boyu l olan bir dalga yüzlü duvarla, buna h uzaklıktaki bir düz duvar arasındaki akıma ait lineerleştirilmiş denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

$$\varphi = \frac{U_\infty}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - e^{-4\pi\beta h/l}} h \cdot \text{Sin} \frac{2\pi x}{l} \cdot e^{-2\pi\beta y/l} (1 + e^{4\pi\beta(y-h)/l})$$

b) Akım alanını araştırınız.

c) Cereyan çizgilerini ve duvar basıncı dağılımını h 'nin sonsuz olması halindeki değerlerle mukayese ediniz.

d) Düz duvarın etkisini sıkıştırılabilir ve sıkıştırılamaz akım halleri için mukayese ediniz.

P2- İki-boyutlu bir sesaltı akımda bozuntuların küçük olduğunu ve Prandtl-Glauert kuralının geçerli olduğunu farzedelim. Bu akımda yer alan bir kanat profili üzerindeki lokal Mach sayısı bir noktada 1 e eriştiği anda serbest akımın Mach sayısı 0.8 olmaktadır. Profilin bu noktasındaki maksimum negatif basınç katsayısının çok küçük Mach

sayılarındaki değeri ne olur? Aynı basınç katsayısını akım çizgisi boyunca bir-boyutlu sıkıştırılabilir, izantropik akım kabulü ile hesaplayarak diğer sonuçla karşılaştırınız.

P3- NACA Report 563 'de yer alan NACA 4412 profiline ait deney sonuçlarına göre, 2 derece hücum açısında düşük hızlarda profil üzerindeki en yüksek hız $V = 1.330 V_\infty$ olarak elde edilmiştir.

Bu profil için kritik Mach sayısını hesaplayınız.

P4- Bir kanat profinin belli bir hücum açısındaki kritik Mach sayısı 0.65 olarak verilmiştir. Bu kanat profili üzerinde aynı hücum açısında sıkıştırılamaz akım halinde görülebilecek en küçük ve en büyük basınç katsayılarını bulunuz.

P5- Sesaltı sıkıştırılabilir akımlardaki basınçlar için Karman-Tsien sıkıştırılabilirlik düzeltme formülü

$$C_p = \frac{C_{p0}}{\beta + \frac{M_\infty^2 C_{p0}}{(1+\beta) 2}}, \quad \beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

şeklinde verilmektedir. Buna göre, düşük Mach sayılarında (sıkıştırılamaz hal) üzerindeki en küçük basınç katsayısı $C_{p0} = -0.5$ olan bir kanat profili için kritik Mach sayısını Karman-Tsien düzeltme formülünü uygulayarak hesaplayınız.